

ISSN 2078-9181

DOI 10.15622/sp.2020.19.1

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Отделение нанотехнологий и информационных технологий

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН

# ТРУДЫ СПИИРАН

[proceedings.spiiras.nw.ru](http://proceedings.spiiras.nw.ru)



ТОМ 19 № 1



Санкт-Петербург  
2020

# SPIIRAS PROCEEDINGS

Volume 19 № 1, 2020

Scientific, educational, and interdisciplinary journal primarily specialized  
in computer science, automation, and applied mathematics

Trudy SPIIRAN ♦ Founded in 2002 ♦ Труды СПИИРАН

---

## Founder and Publisher

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences

---

## Editor-in-Chief

R. M. Yusupov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, St. Petersburg, Russia

---

## Editorial Council

<b>A. A. Ashimov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
<b>N. P. Veselkin</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>I. A. Kalyaev</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Taganrog, Russia
<b>Yu. A. Merkur'yev</b> ,	Prof., Dr. Habil., Academician of the Latvian Academy of Sciences, Riga, Latvia
<b>A. I. Rudskoi</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>V. Sgurev</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of the Bulgarian academy of sciences, Sofia, Bulgaria
<b>B. Ya. Sovetov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAE, St. Petersburg, Russia
<b>V. A. Soyfer</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Samara, Russia

## Editorial Board

<b>O. Yu. Gusikhin</b> ,	Ph. D., Dearborn, USA
<b>V. Delic</b> ,	Prof., Dr. Sci., Novi Sad, Serbia
<b>A. Dolgui</b> ,	Prof., Dr. Habil., St. Etienne, France
<b>M. Zelezny</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., Plzen, Czech Republic
<b>H. Kaya</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., Tekirdag, Turkey
<b>A. A. Karpov</b> ,	Assoc. Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>S. V. Kuleshov</b> ,	Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>D. A. Ivanov</b> ,	Prof., Dr. Habil., Berlin, Germany
<b>K. P. Markov</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., Aizu, Japan
<b>R. V. Meshcheryakov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Tomsk, Russia
<b>N. A. Moldovian</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. K. Pshikhopov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Taganrog, Russia
<b>A. L. Ronzhin</b>	(Deputy Editor-in-Chief), Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>H. Samani</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., New Taipei City, Taiwan, Province of China
<b>V. Skormin</b> ,	Prof., Ph.D., Binghamton, USA
<b>A. V. Smirnov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>B. V. Sokolov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>L. V. Utkin</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>L. B. Sheremetov</b> ,	Assoc. Prof., Dr. Sci., Mexico, Mexico

---

**Editor:** A. I. Motienko

**Editor:** E. P. Miroshnikova

**Technical editor:** M. S. Avstriyskaya

**Translator:** N. V. Kashina

---

## Editorial Board's address

14-th line VO, 39, SPIIRAS, St. Petersburg, 199178, Russia,  
e-mail: [publ@iias.spb.su](mailto:publ@iias.spb.su), web: <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru/>

**The journal is indexed in Scopus**

© St. Petersburg Institute for Informatics and Automation  
of the Russian Academy of Sciences, 2020

# ТРУДЫ СПИИРАН

Том 19 № 1, 2020

Научный, научно-образовательный, междисциплинарный журнал с базовой специализацией в области информатики, автоматизации и прикладной математики  
Журнал основан в 2002 году

---

## Учредитель и издатель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук  
(СПИИРАН)

---

## Главный редактор

Р. М. Юсупов, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., С-Петербург, РФ

---

## Редакционный совет

- А. А. Ашимов**, академик национальной академии наук Республики Казахстан д-р техн. наук, проф., Алматы, Казахстан  
**Н. П. Веселкин**, академик РАН, д-р мед. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**И. А. Каляев**, академик РАН, д-р техн. наук, профессор, Таганрог, РФ  
**Ю. А. Меркурьев**, академик Латвийской академии наук, Dr. Habil., проф., Рига, Латвия  
**А. И. Рудской**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. Сгурев**, академик Болгарской академии наук, д-р техн. наук, проф., София, Болгария  
**Б. Я. Советов**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. А. Сойфер**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., Самара, РФ

---

## Редакционная коллегия

- О. Ю. Гусихин**, Ph.D., Диаборн, США  
**В. Делич**, д-р техн. наук, проф., Нови-Сад, Сербия  
**М. Железны**, Ph.D., доцент, Пльзень, Чешская республика  
**Д. А. Иванов**, д-р экон. наук, проф., Берлин, Германия  
**Х. Кайя**, Ph.D., доцент, Текирдаг, Турция  
**А. А. Карпов**, д-р техн. наук, доцент, С.-Петербург, РФ  
**С. В. Кулешов**, д-р техн. наук, С.-Петербург, РФ  
**К. П. Марков**, Ph.D., доцент, Аизу, Япония  
**Р. В. Мещеряков**, д-р техн. наук, профессор, Томск, РФ  
**Н. А. Молдоян**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. Ш. Пихолован**, д-р техн. наук, профессор, Таганрог, РФ  
**А. Л. Ронжин**, (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Х. Самани**, Ph.D., доцент, Синьбэй, Тайвань, КНР  
**В. А. Скормин**, Ph.D., проф., Бингемптон, США  
**А. В. Смирнов**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Б. В. Соколов**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Л. В. Уткин**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Л. Б. Шереметов**, д-р техн. наук, Мехико, Мексика

---

**Редактор:** А. И. Мотиенко

**Литературный редактор:** Е. П. Мирошникова

**Технический редактор:** М. С. Австрийская

**Переводчик:** Н. В. Кашина

---

## Адрес редакции

199178, Санкт-Петербург, 14-я линия, д. 39,  
e-mail: publ@iias.spb.su, сайт: <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru/>

**Журнал индексируется в международной базе данных Scopus**

Журнал входит в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 2020  
Разрешается воспроизведение в прессе, а также сообщение в эфир или по кабелю опубликованных в составе печатного периодического издания–журнала «Труды СПИИРАН» статей по текущим экономическим, политическим, социальным и религиозным вопросам с обязательным указанием имени автора статьи и печатного периодического издания–журнала «Труды СПИИРАН»

## CONTENTS

### ***Robotics, Automation and Control Systems***

S. Soldatenko, R. Yusupov, R. Colman CYBERNETIC APPROACH TO PROBLEM OF INTERACTION BETWEEN NATURE AND HUMAN SOCIETY IN CONTEXT OF UNPRECEDENTED CLIMATE CHANGE	5
V. Kostjukov, M. Medvedev, V. Pshikhopov OPTIMIZATION OF MOBILE ROBOT MOVEMENT ON A PLANE WITH FINITE NUMBER OF REPELLER SOURCES	43
A. Malyshev, E. Burgov REVISITING PARAMETERS OF BIOINSPIRED BEHAVIOR MODELS IN GROUP FORAGING MODELING	79
N. Dudarenko, N. Vunder A PRIORI CONTROL OF POTENTIAL DEGENERATION OF CONTINUOUS MULTICHANNEL DYNAMIC SYSTEMS	104

### ***Information Security***

M. Peregudov, A. Steshkovoy DIGITAL RADIO NETWORKS CENTRALIZED ELEMENTS SYNCHRONIZATION MODEL WITH RANDOM MULTIPLE ACCESS TO THE CSMA/CA TYPE MEDIUM	128
--	-----

### ***Mathematical Modeling, Numerical Methods***

O. Karsaev., I. Shuklin, S. Yushchenko SELF-ORGANIZING B2B ENTERPRISE OF DISTRIBUTED PHOTOGRAMMETRIC PROCESSING OF TERRAIN IMAGES IN ETRIS	155
V. Sobol, R. Torishnyi ON SMOOTH APPROXIMATION OF PROBABILISTIC CRITERIA IN STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS	18
D. Efanov, V. Khoroshev METHOD FOR ORDERING PROCEDURES OF DIVIDING STATES BY PROCEDURES WITH TWO AND THREE RESULTS TAKING INTO ACCOUNT THEIR COST AND WEIGHT OF STATES	21

## СОДЕРЖАНИЕ

### ***Робототехника, автоматизация и системы управления***

С.А. Солдатенко, Р.М. Юсупов, Р.А. Колман КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЩЕСТВА И ПРИРОДЫ В УСЛОВИЯХ БЕСПРЕЦЕДЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ КЛИМАТА	5
В.А. Костюков, М.Ю. Медведев, В.Х. Пшихопов ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА НА ПЛОСКОСТИ В ПОЛЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ-РЕПЕЛЛЕРОВ	43
А.А. Малышев, Е.В. Бургов К ВОПРОСУ О ПАРАМЕТРАХ БИОИНСПИРИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ГРУППОВОЙ ФУРАЖИРОВКИ	79
Н.А. Дударенко, Н.А. Вундер АПРИОРНЫЙ КОНТРОЛЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ВЫРОЖДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	104

### ***Информационная безопасность***

М.А. Перегудов, А.С. Стешковой МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ ЭЛЕМЕНТОВ СЕТЕЙ ЦИФРОВОЙ РАДИОСВЯЗИ СО СЛУЧАЙНЫМ МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ К СРЕДЕ ТИПА CSMA/CA	128
--	-----

### ***Математическое моделирование и прикладная математика***

О.В. Карсаев, И.И. Шуклин, С.П. Ющенко САМООРГАНИЗУЮЩЕЕСЯ В2В-ПРЕДПРИЯТИЕ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕСТНОСТИ В ЕТРИС	155
В.Р. Соболев, Р.О. Торишный ПРИМЕНЕНИЕ ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ ВЕРОЯТНОСТИ И КВАРТИЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	18
Д.В. Ефанов, В.В. Хорошев МЕТОД УПОРЯДОЧЕНИЯ ПРОЦЕДУР РАЗБИЕНИЯ СОСТОЯНИЙ ПРОЦЕДУРАМИ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ ИСХОДАМИ С УЧЕТОМ ИХ СТОИМОСТИ И ВЕСОВ СОСТОЯНИЙ	21

С.А. Солдатенко, Р.М. ЮСУПОВ, Р.А. КОЛМАН  
**КИБЕРНЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОБЩЕСТВА И ПРИРОДЫ В УСЛОВИЯХ  
БЕСПРЕЦЕДЕННО МЕНЯЮЩЕГОСЯ КЛИМАТА**

*Солдатенко С.А., Юсупов Р.М., Колман Р.А. Кибернетический подход к проблеме взаимодействия общества и природы в условиях беспрецедентно меняющегося климата.* В статье с кибернетических позиций рассмотрена проблема взаимодействия природы и общества в условиях современного изменения климата, беспрецедентного по своим масштабам и темпам, вызванного антропогенной деятельностью. Представлена разработанная нами структура кибернетической системы «климат-экономика», проанализированы слабые стороны субъекта глобального управления и обсуждены основные причины неопределенностей оценок изменения климата и наносимого этими изменениями экономического ущерба. Отмечается, что адаптационные меры и стратегии, разрабатываемые и реализуемые правительствами разных стран и межправительственными организациями, не устраняют причины глобального потепления и, следовательно, имеют ограниченные возможности, поскольку человек и природа могут существовать только при определенных условиях окружающей среды, выход за пределы которых вследствие изменения климата может привести к глобальной биологической катастрофе. Решения в области климатической политики принимаются в условиях неопределенности, обусловленной неоднозначностью оценок будущего климата, что, в свою очередь, является следствием не совсем адекватного учета обратных связей в моделях климатической системы. С помощью малопараметрических моделей земной климатической системы проиллюстрировано влияние обратных связей в системе на значительные межмодельные расхождения оценок изменения климата, полученных посредством современных климатических моделей высокой степени сложности. Поскольку предлагаемые экспертами меры адаптации к изменению климата являются борьбой не с причиной, а со следствием, в качестве радикальной адаптационной стратегии нами видится геоинжиниринг. В отличие от ранее выполненных исследований, задача целенаправленной модификации климатических условий, реализуемая методами геоинжиниринга, рассматривается нами в рамках теории оптимального управления с математической формализацией целей геоинженерных воздействий и методов их достижения. В статье приведен пример постановки и решения оптимизационной задачи стабилизации климата Земли за счет инъекции в стратосферу мелкодисперсного сульфатного аэрозоля.

**Ключевые слова:** геофизическая кибернетика, глобальное потепление, экономика изменения климата, геоинжиниринг, климатический инжиниринг, обратные связи, оптимальное управление.

**1. Введение.** К числу глобальных проблем современности, затрагивающих жизненные интересы и судьбу всего человечества и требующих для своего решения консолидированных усилий всех государств мира, относится проблема изменения климата [1]. Результаты палеоклиматических исследований свидетельствуют о том, что климат нашей планеты менялся и в прошлом, когда периоды потепления многократно сменялись периодами похолодания [2]. Эти изменения были обусловлены многочисленными внутренними и внешними по отношению к земной климатической системе (ЗКС) факторами, такими

как, например, изменение параметров орбиты и оси Земли, вариации светимости солнца, миграция континентов и изменение их размеров и рельефа, изменение планетарного альбеда, изменение прозрачности и газового и аэрозольного состава атмосферы и других. Однако современное изменение климата имеет две характерные особенности. Во-первых, скорость происходящих в ЗКС изменений является беспрецедентной. Согласно сводному отчету Национального управления исследований океана и атмосферы США [3], начиная с 1880 года среднеглобальная приповерхностная температура воздуха (СПТВ) увеличивалась каждые 10 лет примерно на  $0,07^{\circ}\text{C}$ , но уже к концу 20 столетия скорость роста СПТВ достигла значений  $0,17^{\circ}\text{C}$  за декаду, то есть увеличилась более чем в два раза. Во-вторых, современное глобальное потепление является «рукотворным», поскольку его основная причина кроется в человеческой деятельности. Согласно Пятому оценочному докладу Межправительственной группы экспертов по изменению климата (МГЭИК) [4], «весьма вероятно, что большая часть наблюдаемого повышения глобальной приземной температуры в период с 1951 года обусловлена влиянием человека». Известно, что одним из главных геологически значимых признаков антропогенной деятельности служит увеличение в атмосфере концентрации двуокиси углерода ( $\text{CO}_2$ ) – парникового газа (ПГ), вклад которого в глобальное потепление составляет примерно 65%. В течение последнего миллиона лет концентрация атмосферного  $\text{CO}_2$  варьировалась в пределах от 0,018% до 0,028%. С начала промышленной революции (~1850 год) вследствие сжигания ископаемого топлива уровень содержания  $\text{CO}_2$  в атмосфере постоянно увеличивался и к 2019 достиг 0,041% [5].

В целом имеет место научный и политический консенсус в оценке трендов изменения климата и причин, порождающих это изменение, что закреплено в докладе МГЭИК [4] и недавно опубликованном отчете, подписанном более чем 11 тысячами ученых из 153 стран, включая Россию [6]. На сегодняшний день степень достоверности имеющихся оценок относительно определяющей роли антропогенного фактора в современном изменении климата (в сторону потепления) составляет 99,99995% или 5 «сигм», что соответствует так называемому «золотому стандарту» [7]. Однако имеются сторонники «климатического скептицизма», отвергающие антропогенные причины происходящих климатических изменений. По их мнению, наблюдаемое изменение климата – естественный процесс. В сентябре 2019 года было опубликовано письмо под названием «There is no climate emergency» [8], которое подписали 500 «климатических скептиков» и адресовали его Организации Объединенных Наций (ООН). И хотя некоторые издания назвали подписантов

этого письма экспертами в области климатологии, большинство из них таковыми не являются, поскольку значительная их часть – инженеры и специалисты в областях, очень далеких от науки о климате, лишь 10 подписантов назвали себя климатологами.

Поскольку факты, свидетельствующие о потеплении нашей планеты, являются неоспоримыми, возникает проблема оценки влияния современных изменений климата на общество, что подразумевает, прежде всего, научно-обоснованную осведомленность ученых и политиков о возможных сценариях изменения климата в обозримой перспективе. Научные представления о том, как ЗКС продолжит свою эволюцию под влиянием естественных и антропогенных факторов, основываются на результатах численного моделирования с применением чрезвычайно сложных математических моделей климата [9, 10]. Тем не менее разработчики подобного рода моделей признают их ограниченность ввиду невозможности построения «идеальной» модели ЗКС [11, 12]. Однако наряду с «неидеальностью» климатических моделей на достоверность получаемых с их помощью перспективных оценок будущего климата существенное, если не сказать определяющее, влияние оказывают сценарии антропогенных возмущающих воздействий на ЗКС, которые задаются, как правило, априори исходя из неких эвристических соображений. Прежде всего, это касается сценариев будущего изменения содержания в атмосфере радиационно-активных газов и аэрозолей. Дискретный характер моделей климата, несовершенство параметризационных схем, описывающих физические процессы, а также неоднозначность сценариев антропогенного воздействия на ЗКС порождают значительную неопределенность возможного будущего состояния климата, получаемого с помощью компьютерного моделирования [4].

Альтернативные варианты возможного изменения климата, рассчитываемые для различных сценариев антропогенного воздействия на ЗКС, используются экспертами при получении оценок экономических и социальных последствий предполагаемых климатических изменений. Для этой цели применяются экономико-математические модели. Однако, в отличие от моделей климата, оценка адекватности которых проблем не вызывает, поскольку необходимые для этого ретроспективные климатические данные имеются в достаточном количестве, адекватность экономических моделей, являющихся, по сути, эмпирическими, оценить практически невозможно ввиду отсутствия необходимых исторических сведений о взаимосвязи изменения климата и экономических процессов. Необходимость изучения и прогнозирования социально-экономического развития общества и разработка концептуальных стратегий взаимодействия общества и природы в условиях изменяющегося с

беспрецедентной скоростью климата, обусловили создание так называемых моделей комплексной оценки (integrated assessment models) [13, 14], учитывающих в той или иной степени взаимозависимость климатических и экономических процессов. Примечательно, что в 2018 году Нобелевская премия по экономике была присуждена П. Ромеру и У. Нордхаусу «за интеграцию проблем изменения климата и технологических инноваций в долгосрочный макроэкономический анализ». В частности, Нордхаусом была разработана модель DICE [15], связывающая воедино климатические изменения и экономику, и введено понятие «социальная цена углерода», или «социальная цена выброса», что позволило ему определить экономический ущерб, обусловленный одной тонной CO<sub>2</sub>, эмитированной в атмосферу, и на этой основе рассчитать размер углеродного налога. Результаты, полученные с помощью моделей комплексной оценки, используются политиками для разработки мер адаптации к изменению климата, сводящихся, по сути, к уменьшению уязвимости природных и антропогенных систем к неблагоприятным последствиям климатических изменений. Таким образом, рассматривая проблему взаимодействия природы и человеческого общества и, в частности, климата и экономики, мы имеем дело с кибернетической системой, которая включает в себя в качестве управляющей подсистемы международные и национальные компетентные органы, наделенные соответствующими полномочиями и обладающие необходимыми материальными, техническими, технологическими и иными ресурсами, а в качестве управляемой подсистемы – взаимодействующие климатическую и глобальную, региональную и страновую экономические системы.

Важно подчеркнуть, что разработка и реализация адаптационных мер и стратегий, осуществляемых подсистемой управления кибернетической системы «климат-экономика», есть ни что иное, как *борьба со следствием, но не с причиной*. К тому же адаптация как приспособляемость антропогенных и природных систем к изменению климата имеет ограниченные возможности, поскольку очевидно, что существуют некоторые критические значения климатических параметров, выход за пределы которых вследствие глобального потепления сведет все адаптационные усилия к нулю, так как человек и природа могут существовать только в определенных (допустимых) условиях окружающей среды. Интересно, что если сегодня человечество полностью остановит выбросы ПГ в атмосферу, разогрев нашей планеты в течение нескольких десятилетий, вероятно, продолжится в силу огромной тепловой инерсии ЗКС. На наш взгляд, в качестве наиболее эффективной и в то же время радикальной адаптационной меры целесообразно рассматривать геоинжиниринг (климатический инжиниринг) [16, 17]. Ввиду объективных обстоятельств [18], оценка эф-

фективности и климатических последствий геоинженерных проектов может быть выполнена только на основе численного моделирования при заданных сценариях антропогенного увеличения концентраций атмосферных ПГ и сценариях геоинженерных воздействий на ЗКС. В настоящее время общепризнанными сценариями роста содержания ПГ в атмосфере являются RCP (Representative Concentration Pathways) [19], одобренные МГЭИК. В противоположность этому, общепризнанных сценариев геоинженерных воздействий существовать не может и, следовательно, те сценарии, которые используются в численном моделировании, несут в себе значительный элемент субъективизма. Поскольку цель геоинжиниринга состоит в управлении состоянием ЗКС с тем, чтобы обеспечить комфортные для существования человеческого общества и природы условия, задача целенаправленной модификации климатических условий рассматривается нами (в отличие от многочисленных ранее выполненных исследований) в рамках теории оптимального управления с математической формализацией целей геоинженерных воздействий и методов их достижения [18, 20-24]. В этой связи необходимо подчеркнуть, что еще в конце 1970-х годов одним из авторов настоящей работы была предложена единая методология планирования и реализации воздействий на окружающую природную среду на основе теории управления и сформулированы теоретические основы геофизической кибернетики как науки об управлении процессами в геофизической среде. Но по ряду причин фундаментальные положения геофизической кибернетики были опубликованы лишь в 1998 году [25].

Цель настоящей статьи – рассмотреть с кибернетических позиций проблему взаимодействия природы и общества в условиях современного изменения климата, беспрецедентного по своим масштабам и темпам, вызванного антропогенной деятельностью, обратив особое внимание на слабые стороны субъекта глобального управления; проанализировать основные причины неопределенностей оценок изменения климата и наносимого этими изменениями экономического ущерба; с помощью малопараметрических моделей ЗКС оценить влияние обратных связей в ней на изменчивость климата и проиллюстрировать приложение методов геофизической кибернетики к решению задач климатического инжиниринга.

**2. Агрегированная структура кибернетической системы «климат-экономика».** Основы универсальной методологии управления принципиально различными объектами природы и общества были, как известно, сформулированы Н. Винером [26, 27] – основоположником кибернетики, науки, объектом исследования которой являются все управляемые системы. Абстрактная кибернетическая

система обладает свойством целеустремленности и в очень агрегированном виде может быть представлена как совокупность двух взаимозависимых подсистем – управляющей подсистемы и объекта управления. Взаимодействие между ними обеспечивается посредством существующих в кибернетической системе обратных связей, по которым информация о состоянии объекта управления передается в управляющую подсистему. Агрегированная структура кибернетической системы «климат-экономика» показана на рисунке 1. В этой системе управляющая подсистема является сложной, имеющей иерархическую структуру, так как целенаправленно воздействовать на экономику и климат человеческого общества может не как целое, а через посредство одной или нескольких входящих в него подструктур. Поскольку изменение климата – глобальный феномен, влияющий на природу и человеческое общество в планетарном масштабе, на самом верхнем уровне иерархии управляющей системы находятся межправительственные организации (например, ООН и ее структурные подразделения – Всемирная метеорологическая организация и Программа ООН по окружающей среде), на втором сверху уровне – правительства отдельных стран, далее на соответствующих уровнях иерархии располагаются специализированные административные органы и технические службы, формируемые внутри общества для осуществления конкретных функций управления.

Объект управления структурно состоит из двух взаимодействующих подсистем – экономической и климатической, являющихся сложными системами с многочисленными обратными связями между собой и внутри себя. Математические модели, входящие в контур экономической системы, играют двоякую роль: с одной стороны, с их помощью оценивается суммарная антропогенная эмиссия ПГ в тоннах  $\text{CO}_2$ -эквивалента и на этой основе формируются сценарии изменения концентраций атмосферных ПГ, используемые в моделях динамики климата для расчета антропогенного радиационного форсинга; с другой стороны, посредством этих моделей выполняется анализ уязвимости мировой экономики и/или ее различных секторов, региональных экономик, экономик разных стран и отдельных субъектов экономической деятельности к изменению климата.

Расчет глобальных эмиссий ПГ – проблема чрезвычайно сложная, требующая совместных межправительственных усилий и кооперации исследовательских центров различных стран. Возможные сценарии изменения концентраций атмосферы ПГ, соответствующие различным «поведенческим» стратегиям человеческого общества, рассматриваются и утверждаются МГЭИК. В частности, при подготовке

последнего Пятого оценочного доклада, как уже отмечалось выше, МГЭИК утвердила сценарии RCP [19], которые являются результатом синтеза оценок концентраций ПГ, полученных для различных стран и регионов группами экспертов по поручению правительств соответствующих стран. Существуют также независимые группы экспертов (например, «The Climate Action Tracker»), которые осуществляют мониторинг эмиссий ПГ и отслеживают выполнение разными странами взятых на себя обязательств по контролю за выбросами ПГ.

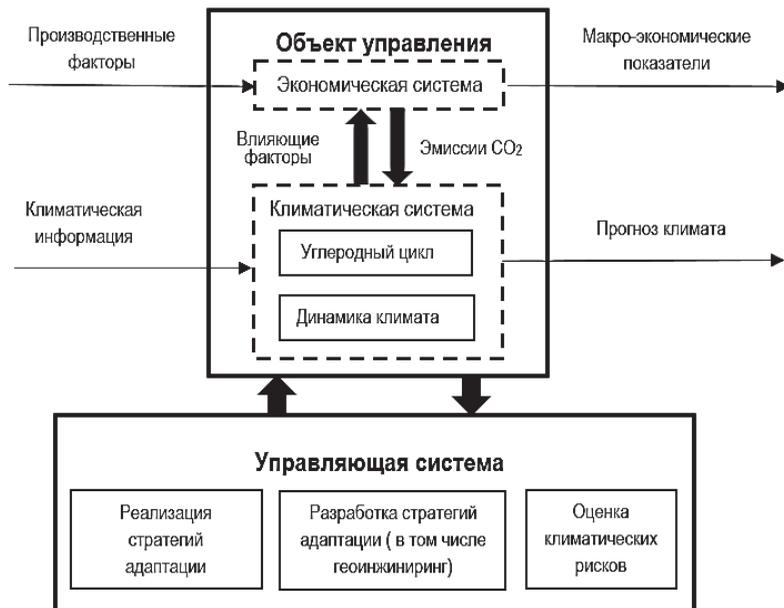


Рис. 1. Структура системы «климат-экономика»

Следующая группа моделей экономического блока предназначена для оценки уязвимости экономических систем к изменению климата. Оценка уязвимости предполагает обоснование для каждой системы ключевых показателей эффективности (КПЭ) (в англоязычной литературе – Key Performance Indicators) и построение математических моделей, уравнения которых описывают связи между КПЭ и климатическими переменными. Для мировой экономики в качестве КПЭ берется, как правило, валовый мировой продукт, для экономики отдельной страны – валовый внутренний продукт, для территориальной единицы – валовый региональный продукт, а для отдельного предприятия – валовая прибыль. Однако существующие экономические модели связывают КПЭ

только с макроэкономическими переменными, чего явно недостаточно для оценки влияния изменения климата на экономику. Таким образом, возникает необходимость в исследованиях, связанных с оценкой воздействия различных климатических переменных на эффективность функционирования экономических систем различного уровня. Формально данная процедура выглядит следующим образом. Предположим, нами исследуется влияние изменения климата на региональную экономику. Обозначим через  $Q$  валовый региональный продукт (ВРП), а через  $x = (x_1, \dots, x_n)$  – вектор переменных, влияющих на эффективность функционирования территориальной экономики, тогда  $Q = F(x_1, \dots, x_n)$ . Задача построения модели состоит в определении функции  $F$ . При исследовании экономических систем в качестве  $F$  обычно используются производственные функции, связывающие ВРП и факторы производства (капитал, затраты на труд, сырье, технологии, энергетические ресурсы и др.). В нашем случае к числу зависимых переменных добавляются климатические переменные или их производные, которые, по мнению экспертов, оказывают влияние на  $Q$ . Заметим, что в экономических моделях климатические переменные играют роль параметров. Существует некоторый набор стандартных производственных функций, используемых в экономическом анализе (функции Кобба – Дугласа, Леонтьева, CES, линейные, транслогарифмические и др.) [28]. Производственные функции являются чисто эмпирическими, поэтому к получаемым на их основе результатам следует подходить с большой осторожностью [29]. Влияние вариаций климатических параметров на ВРП оценивается с помощью абсолютных и относительных функций чувствительности [30]. Пусть  $x_n$  – некоторый климатический параметр, оказывающий влияние на ВРП  $Q$ . Абсолютная функция чувствительности (АФЧ)  $S_n$  определяется как частная производная от  $Q$  по параметру  $x_n$ :  $S_n = \partial Q / \partial x_n$ . Имея АФЧ и задаваясь вариацией параметра  $x_n$ , можно в первом приближении определить изменение ВРП, обусловленное отклонением климатического параметра  $x_n$  от его многолетней нормы  $x_n^{(0)}$ :  $\delta Q(x_n) \approx \delta x_n S_n$ . Здесь  $\delta x_n = x_n - x_n^{(0)}$  – малая вариация параметра  $x_n$ , обусловленная изменением климата. Вычисленная таким образом вариация  $\delta Q$  используется для оценки уязвимости экономической системы к изменению климата и, при необходимости, для оценки климатического риска. Поскольку модели экономических систем могут содержать несколько климатических параметров, для анализа параметрической чувствительности целесообразно применять однофакто-

рый подход, в рамках которого климатические параметры считаются независимыми друг от друга. Отметим, что в общем случае нахождение АФЧ выполняется с помощью уравнений чувствительности [30].

Климатические параметры, оказывающие влияние на эффективность функционирования экономических систем, как правило, неравнозначны по смыслу (т.е. они имеют различную размерность и отличаются друг от друга классом эквивалентности). Тот факт, что АФЧ  $S_{x_i}$  по величине превосходит АФЧ  $S_{x_j}$ , совсем не означает, что параметр  $x_i$  более значим, чем параметр  $x_j$ . Поэтому с помощью АФЧ не представляется возможным выполнить ранжирование параметров по степени их значимости и убрать из рассмотрения те параметры, влияние которых на  $Q$  мало. Для этой цели подходят относительные функции чувствительности (ОФЧ), характеризующие связь между относительными вариациями параметров и соответствующим относительным изменением ВРП. Для рассматриваемого выше случая ОФЧ  $S_n^R$  определяется следующим образом:  $S_n^R = \partial \ln Q / \partial \ln x_n$ .

Качество исследования чувствительности экономических систем и их уязвимости к изменению климата в значительной степени определяется точностью, достоверностью, репрезентативностью и полнотой как климатической, так и соответствующей экономической информации. Для стран с неразвитой и неустойчивой экономикой, где также имеет место относительно частое снижение национальной денежной единицы по отношению к твердым валютам, задача исследования чувствительности экономических систем к изменению климата является трудновыполнимой.

Сценарии эмиссий ПГ, сформированные на основе экономических моделей при различных «поведенческих» стратегиях общества относительно степени его вмешательства (или невмешательства) в изменение климата посредством реализации мер по сокращению выбросов ПГ, используются для расчета антропогенного радиационного форсинга и получения прогностических оценок изменения климата на десятилетия вперед. Основным инструментом, с помощью которого получают эти оценки, – чрезвычайно сложные глобальные модели климата, описывающие динамику общей циркуляции атмосферы и океана и их взаимодействие с другими компонентами ЗКС. Изменения климата в отдельных частях земного шара уточняются с помощью региональных климатических моделей.

Современные климатические модели, разработанные в научных центрах экономически развитых стран (включая Россию), вполне реалистично воспроизводят глобальный климат и его региональные

особенности. При этом, однако, имеют место довольно значительные межмодельные расхождения проекций будущего климата, полученных для различных эмиссионных сценариев (табл. 1 [4]), что обусловлено неодинаковой реакцией различных моделей на один и тот же антропогенный форсинг. Иными словами, каждая климатическая модель обладает уникальной чувствительностью к вариациям радиационного форсинга.

Таблица 1. Увеличение СПТВ к 2100 году относительно ~1850 года [4]

Сценарий	Концентрация CO <sub>2</sub> , ppm	Диапазон СПТВ, °C	Среднее значение СПТВ, °C
RCP2.6	475	0,3 – 1,7	1,0
RCP4.5	630	1,1 – 2,6	1,8
RCP6.0	800	1,4 – 3,1	2,2
RCP8.5	1313	2,6 – 4,8	3,7

В исследованиях климата для оценки реакции ЗКС на внешнее радиационное воздействие в качестве одной из основных характеристик чувствительности используется так называемая равновесная чувствительность, определяемая как ожидаемое изменение СПТВ  $\Delta T_{2x}^{eq}$  климатической системы, находящейся в стационарном состоянии, которое обусловлено удвоением концентрации атмосферного CO<sub>2</sub> [4]:  $\Delta T_{2x}^{eq} = \alpha \Delta F_{2x}$ , где  $\alpha$  – коэффициент климатической чувствительности,  $\Delta F_{2x} \approx 3,7$  Вт/м<sup>2</sup> – радиационный форсинг, вызванный удвоенной концентрацией атмосферного CO<sub>2</sub> [4]. Данное выражение получено в рамках теории линейных стационарных систем, исходя из энергетического баланса ЗКС. Значения коэффициента  $\alpha$ , полученные для различных моделей климата, «с высокой степенью достоверности» находятся в интервале 0,41 – 1,22 °C/(Вт/м<sup>2</sup>) [4]. Достаточно широкий диапазон изменения параметра  $\alpha$ , а значит, и межмодельные расхождения в реакции ЗКС на внешнее радиационное воздействие обусловлены главным образом спецификой каждой модели в отношении воспроизведения ею обратных связей в ЗКС [4, 31, 32], поскольку параметр, обратный коэффициенту чувствительности  $\lambda = 1/\alpha = \Delta F_{2x}/\Delta T_{2x}^{eq}$  и имеющий размерность (Вт/м<sup>2</sup>)/°C, характеризует обратные связи в ЗКС [33]. Неизученность многочисленных обратных связей в ЗКС, нелинейность и инерционность протекающих в ней процессов, наличие точек бифуркации обуславливают межмодельные отличия в воспроизводимой моделями эволюции ЗКС, а значит, и неопределенность полученных оценок изменения климата.

Связующим звеном между субъектом и объектом управления кибернетической системы «климат-экономика», являются решения,

формируемые субъектом управления, посредством которых он воздействует на объект управления. От качества решений, принимаемых субъектом управления, в значительной степени зависит функционирование всей системы. В нашем случае предотвратить фатальные для общества последствия изменения климата возможно лишь при условии, что управляющая система адекватно реагирует на изменяющиеся условия внешней среды (например, вариации солнечной активности, усиление вулканической деятельности) и сигналы (социального, экономического, политического характера), исходящие изнутри. В настоящее время в мировом масштабе роль субъекта управления самого верхнего уровня играет МГЭИК. В последнее время многие ведущие зарубежные ученые – эксперты в области наук о Земле (J. Hansen, K. Anderson, M. Mann, M. Oppenheimer, N. Oreskes, S. Rahmstorf, E. Rignot, H. Schellnhuber, K. Trenberth и др.), подвергают деятельность МГЭИК сильной критике за неадекватный стиль работы и излишнюю политизацию принимаемых решений. По их мнению, МГЭИК делает все возможное для того, чтобы значительно приуменьшить возможные негативные для человечества последствия глобального потепления с тем, чтобы «не нервировать» общественность. Некоторые ученые-климатологи (например, R. Knutti) вообще склоняются к мысли, что в вопросе изменения глобального климата точка невозврата уже пройдена, объясняя это тем, что в силу нелинейности ЗКС и многообразия обратных связей в ней наблюдаемые в настоящее время климатические тренды могут быть одномоментно нарушены. В результате возможны природные события, катастрофические по своим масштабам и последствиям. В вероятностном смысле такие события характеризуются распределениями с «тяжелыми хвостами», для которых вероятность отклонения от средних значений значительно больше, чем при нормальном распределении, а оценки средних выборочных значений являются неустойчивыми и малорепрезентативными. Поскольку МГЭИК отдает предпочтение консервативным прогнозам и «научной сдержанности», принимаемые ею решения могут быть не совсем адекватными. Поэтому слепое следование методикам и рекомендациям МГЭИК – сомнительная стратегия, отвергающая творческий подход к проблеме.

В целом в настоящее время проблема взаимодействия общества и природы, и в частности проблема глобального управления кибернетической системой «климат-экономика» в условиях современного изменения климата является неэффективной по ряду причин и, прежде всего, потому, что международная институциональная система не способна обеспечить необходимого качества глобального управления и сформировать управляющие органы, наделенные реальными власт-

ными полномочиями. Национальные правительства, имеющие такие полномочия, даже в пределах своих возможностей не реализуют их в полной мере и очень часто действуют рассогласовано. Следовательно, вопрос о построении подсистемы управления кибернетической системы «климат-экономика» остается открытым.

**3. Исследование влияния изменения климата на экономические системы.** Для оценки влияния изменения климата на мировую экономику и экономику отдельных крупных регионов широкое применение получили упомянутые выше модели комплексной оценки. Эти модели являются по своей сути концептуальными, связывающими воедино социально-экономическое развитие общества и природу с тем, чтобы иметь возможность оценивать различные сценарии экологической политики в контексте изменения климата. Модели комплексной оценки делятся на две большие группы. К первой группе относятся процессо-ориентированные модели, задача которых сводится к получению количественных оценок относительно будущего развития общества при различных сценариях экологической политики. Модели второй группы служат для оценки затрат и выгод, связанных с реализацией проектов по смягчению последствий изменения климата. В целом модели комплексной оценки не дают прогнозов на будущее, а скорее оценивают возможные сценарии развития общества. В последние годы модели данного класса подвергаются серьезной критике в различных аспектах и, в частности, в плане необоснованности и недостаточной прозрачности исходных положений и базовых принципов, неадекватности описания реальной политики и (инновационных и не только) процессов и так далее [34]. Один из наиболее признанных экспертов в исследовании системы «общество-климат» Р. Пиндайк вообще заявляет, что модели комплексной оценки не имеют никакой ценности, поскольку с их помощью невозможно оценить политические альтернативы в области изменения климата и определить социальную стоимость углеродных единиц [35]. Им также отмечается, что фактические данные (в основном экономические), необходимые для оценки ущерба вследствие изменения климата, практически отсутствуют.

На наш взгляд, помимо получения оценок влияния различных политических стратегий контроля эмиссий ПГ на мировую экономику, получаемых с помощью моделей комплексной оценки, более разумно переключить внимание на анализ климатических рисков и исследование воздействий изменения климата на конкретные социально-экономические системы вплоть до отдельных субъектов экономической деятельности. К сожалению, исследования подобного рода чрезвычайно малочисленны. Примером более-менее детального рассмотрения проблемы влияния климатических факторов на экономику регионов служит работа [36], в кото-

рой выполнена оценка чувствительности 11 секторов экономик всех территориальных единиц (штатов) США к вариациям четырех параметров, описывающих температурно-влажностный режим ЗКС. Температура воздуха характеризуется градусо-днями отопительного сезона (heating degree days) и градусо-днями охлаждающего сезона (cooling degree days), а для характеристики осадков используются их общее количество и стандартное отклонение. Анализ влияния изменчивости этих параметров на каждый сектор региональной экономики осуществляется с помощью транслогарифмической производственной функции вида:

$$\ln Q_{it} = \beta_0 + rt + \sum_{n=1}^N \beta_n \ln x_{tin} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \beta_{nm} \ln x_{mi} \ln x_{mi} + \varepsilon_{it}, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $i$  – порядковый номер территориальной единицы;  $r$  – ставка дисконтирования;  $\beta_0$ ,  $\beta_n$ ,  $\beta_{nm}$  ( $n, m = 1, \dots, N$ ) – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению;  $N$  – размерность вектора входных переменных, в число которых входят капитал (в денежном выражении), трудовые затраты (в часах), энергетические затраты (в Британских тепловых единицах), а также четыре упомянутых выше климатических параметра (т.е.  $N=7$ );  $\varepsilon_{it}$  – ошибка аппроксимации. Неизвестные коэффициенты выражения (1) определялись на основе ретроспективной (за 24 года) климатической и экономической информации.

Результаты анализа показали, что все 11 секторов экономики обладают статистически значимой чувствительностью к изменчивости (вариациям) рассматриваемых климатических параметров, а суммарный валовый внутренний продукт всех 11 секторов экономики США изменялся на ~3,4% (485 млрд долларов США в ценах 2008 года) под влиянием флуктуаций (с периодом 24 часа) климатических параметров.

Следует также обратить внимание на междисциплинарное комплексное исследование, предпринятое в рамках проекта Европейского Союза «Изменение климата, экономика и общество в Арктике» (ACCESS) [37], в котором была выполнена оценка физического воздействия изменения глобального климата на Арктику и обусловленных этими изменениями социально-экономических последствий (до 2050 года) с акцентом на ключевые виды экономической деятельности Арктического региона: судоходство, туризм, производство морепродуктов и добыча природных ресурсов.

В нашей стране проблеме комплексных междисциплинарных исследований по оценке влияния изменения климата на экономические системы различного уровня уделяется крайне мало внимания, хотя в этом направлении имеются некоторые разработки (см., например, [38-

40]). В частности, нами разработана математическая модель, предназначенная для оценки влияния повышения уровня моря и сопутствующих изменений в ЗКС, обусловленных ростом концентрации атмосферных ПГ, на прибрежные зоны морей и океанов (табл. 2). Изменение уровня моря под влиянием глобального потепления рассматривается нами как случайный процесс, описываемый диффузионным стохастическим уравнением:

$$h_t = \gamma h_t dt + \sigma h_t dW_t, \quad (2)$$

где  $h_t$  – уровень моря в момент времени  $t$  относительно некоторого начального (базового) уровня  $h_0$  в интересующей нас географической точке;  $\gamma$  и  $\sigma$  – параметры, описывающие тренд и волатильность (изменчивость)  $h$ ;  $dW_t$  – инкремент Винеровского процесса.

Таким образом, временное изменение  $h$  обусловлено детерминистическим фактором (параметр  $\gamma$ ), описывающим тенденцию среднего по ансамблю реализаций значения уровня моря  $\langle h_t \rangle$ , и случайными факторами, агрегировано описываемыми вторым слагаемым уравнения (2). Выражения для математического ожидания  $M[h_t]$ , дисперсии  $D[h_t]$  и медианы  $\mu[h_t]$  имеют вид:

$$D_M(t) \equiv \varphi_1 h_t + \dots + \varphi_n h_t^n, \quad D[h_t] \equiv \langle h_t^2 \rangle - \langle h_t \rangle^2, \quad \mu[h_t] = h_0 e^{(\gamma - \sigma^2)t}. \quad (3)$$

Калибровка модели, выполненная с помощью данных МГЭИК, строилась таким образом, чтобы параметры модели представляли собой 95% перцентили. Для Санкт-Петербурга при сценарии RCP8.5 были получены следующие значения параметров модели (2):  $\gamma = 0,7517 \times 10^{-2}$  год<sup>-1</sup>,  $\sigma = 2,7952 \times 10^{-2}$  год<sup>-2</sup>. Расчитанное методом Монте-Карло среднее значение  $h$  в 2100 году относительно 2007 года составило  $\sim 0,501$  м. Это значение использовалось для расчета меры риска и экономических потерь. В качестве стоимостной меры риска взят так называемый «Value at Risk» (*VaR*), характеризующий величину убытков, которая с заданной доверительной вероятностью  $p$  (например, 95%) не будет превышена. Для оценки среднего ущерба от 5% наиболее сильных наводнений применяется «прогнозируемый дефицит пятипроцентного уровня» *ES*(5%). Экономический ущерб вследствие увеличения уровня моря оценивается с помощью функции потерь, представляющей собой регрессионную зависимость между  $h$  и экономическими потерями, выраженными в денежных единицах:

$$D_M(t) \equiv \varphi_1 h_t + \dots + \varphi_n h_t^n, \quad (4)$$

где  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  – коэффициенты, подлежащие определению. В задачах оценки экономических последствий наводнений в прибрежных зонах обычно используется следующая формула для функции потерь:

$$D_M(t) \equiv F_1(h_t) + F_2(t). \quad (5)$$

Первое слагаемое в этом выражении характеризует влияние повышения уровня моря на региональную экономику, а второе слагаемое описывает социально-экономические последствия изменения климата, какими бы они были при отсутствии повышения уровня моря. В таблице 2 перечислены основные негативные последствия повышения уровня моря для прибрежных зон [40].

Таблица 2. Влияние повышения уровня моря на прибрежные зоны

Фактор	Прямой эффект	Вторичный эффект
Рост уровня моря	Усиление эрозии береговой черты. Увеличение затопления низин и заболоченных земель. Увеличение риска наводнений и ущерба, обусловленного штормами. Увеличение засоленности поверхностных и грунтовых вод. Миграция видов по направлению к полюсу	Влияние на инфраструктуру и экономическую деятельность. Переезд уязвимых групп населения
Изменение волновой активности	Усиление волнового дренажа, эрозии и земельных наносов. Увеличение повторяемости больших волн	Дальнейшая эрозия. Увеличение ущерба от штормов
Изменение интенсивности и частоты штормов и циклонов	Изменение повторяемости и интенсивности затопления прибрежных низин. Изменение качества питьевой воды Изменение количества выносимых реками осадочных пород. Быстрый подъем побережья.	Последствия прибрежной эрозии и наводнений

Используя данные об инфраструктуре Санкт-Петербурга и результаты прогноза социально-экономического развития города до 2100 года [41, 42], следующие значения  $VaR(95\%)$ ,  $ES(5\%)$  и средних годовых потерь (в ценах 2007 г.) были нами получены для 2050/2100 годов: 2,3/8,1, 3,0/10,0 и 0,6/3,3 млрд долларов США (потери оце-

нены в долларах США, поскольку входная информация заимствована из зарубежных источников). Адаптационные меры борьбы с последствиями роста уровня моря включают строительство дамб, передислокацию производственных мощностей вглубь континентальной части, разработку планов восстановления береговой черты, построение системы мониторинга за гидрологической обстановкой, прекращение строительства вблизи береговой линии и другое. Стоимость возможных адаптационных мер сравнивается с предполагаемыми потерями, что, по сути, представляет собой оценку экономических последствий глобального потепления в терминах затрат и выгод.

В целом результаты различных исследований, связанных с оценкой влияния изменения климата на экономику, характеризуются существенным разнообразием и зачастую диаметрально противоположны, что обусловлено недостаточной адекватностью используемых экономико-математических моделей, малым объемом (или полным отсутствием) необходимых для анализа ретроспективных экономических данных, субъективизмом в выборе функций потерь и многими другими факторами.

**4. Обратные связи в климатической системе и их влияние на изменчивость климата.** Оценка экономических последствий изменения климата невозможна без наличия проекционных оценок будущего климата. Основным инструментом для получения этих оценок – математические модели ЗКС (в последнее время модели земной системы), реализуемые численно на высокопроизводительных компьютерах. В процессе выполнения численных экспериментов исследователи используют более-менее правдоподобные сценарии антропогенного воздействия на ЗКС (обычно RCP), а получаемые оценки изменения климата называют проекциями, а не прогнозом. Несмотря на то что в целом имеет место высокая степень согласия между проекциями климата, полученными в рамках Проекта по взаимному сравнению совместных моделей (CMIP5) [43], ряд конкретных характеристик (например, равновесная чувствительность, климатические тренды и изменчивость) у рассматриваемого ансамбля моделей существенно варьируются [4]. В качестве примера в таблице 1 показаны интервалы вероятных значений СПТВ в 2100 году, рассчитанные по ансамблю моделей CMIP5. Однако современный климат характеризуется не только положительным трендом, обусловленным ростом содержания в атмосфере ПГ, но и колебаниями, охватывающими широкий диапазон частот и масштабов [4]. Климатические аномалии (колебания относительно основного тренда), характеризующие изменчивость климата, также имеют очень существенные межмодельные расхождения. К примеру, для декадных аномалий глобальных и полусферных темпера-

тур межмодельные отличия стандартного отклонения достигают четырехкратной величины [44]. Причины столь значительного разброса оценок климатической изменчивости не совсем ясны, но при этом признается, что обратные связи в ЗКС играют существенную роль как в процессах, формирующих климатические тренды, так и в процессах, являющихся причиной изменчивости глобального климата [31, 32, 44].

По отношению к внешним радиационным воздействиям обратные связи в ЗКС играют роль своеобразных регуляторных механизмов, способствующих либо усилению (если обратные связи положительны), либо уменьшению (если обратные связи отрицательны) эффекта этих воздействий. Таким образом, с позиций кибернетики, ЗКС, на которую оказывают влияние разнообразные внешние факторы, в первую очередь солнечная радиация, является в сущности замкнутой системой управления, что создает мощные мотивационные предпосылки для разработки физически обоснованных методов целенаправленного воздействия на нее, то есть для оптимального управления ЗКС. Данные наблюдений за глобальным климатом и результаты моделирования говорят о том, что интегрально обратные связи в ЗКС усиливают ее реакцию на радиационные воздействия [4]. Величина радиационного форсинга и обратные связи являются определяющими факторами, обуславливающими темпы изменения климата и основные особенности этого изменения.

Наличие в атмосфере водяного пара ( $H_2O$ ), обладающего наиболее сильными парниковыми свойствами по сравнению с другими ПГ, является причиной основной положительной обратной связи в ЗКС: вследствие глобального потепления количество  $H_2O$  в атмосфере увеличивается, что, в свою очередь, способствует дальнейшему потеплению. Используя уравнение Клаузиуса – Клапейрона, можно показать, что рост температуры воздуха на  $1^\circ C$  приводит к увеличению содержания  $H_2O$  в атмосфере примерно на 7% [45]. Следовательно, атмосферный  $H_2O$  усиливает незначительный эффект потепления вследствие роста содержания  $CO_2$ .

Основная отрицательная обратная связь (Планковский механизм обратной связи) вытекает из закона Стефана – Больцмана, согласно которому величина длинноволнового (инфракрасного) уходящего в космос излучения Земли пропорциональна четвертой степени температуры земной поверхности. Отсюда следует, что антропогенное повышение температуры подстилающей поверхности, приводящее к росту величины планетарного уходящего длинноволнового излучения, способствует уменьшению температуры.

Обратная связь углеродного цикла с климатом и облачно-радиационные обратные связи, как наименее изученные, остаются

крупнейшими источниками неопределенности проекций будущего климата, получаемых с помощью различных моделей. Исследование обратных связей в ЗКС и оценка их влияния на происходящие климатические процессы представляет большой научный и прикладной интерес [46]. Научный интерес к проблеме связан с углублением наших знаний о ЗКС и прогнозированием изменения климата вследствие естественных и антропогенных причин, а прикладной интерес обусловлен необходимостью разработки мер адаптации к изменению климата и, в частности, целесообразностью создания оптимальных систем управления ЗКС для противодействия глобальному потеплению.

Проблема влияния неопределенностей обратных связей в ЗКС на изменчивость климата вследствие случайных флуктуаций радиационного форсинга может быть рассмотрена в рамках теории чувствительности систем управления [30]. В предположении, что ЗКС является разомкнутой кибернетической системой, в которой присутствует только Планковский механизм обратной связи, обеспечивающий рост величины длинноволнового уходящего излучения при повышении температуры подстилающей поверхности, параметр климатической обратной связи, называемый в дальнейшем базовым, определяется следующим образом [33]:

$$\lambda_0 = -4\varepsilon\sigma T_0^3 \approx -3,4 \text{ (Вт/м}^2\text{)/К,}$$

где  $\varepsilon$  – коэффициент излучательной способности подстилающей поверхности, учитывающий отличие Земли от абсолютно черного тела и поглощение длинноволновой радиации водяным паром, облачностью, парниковыми газами и аэрозолям,  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2\text{ К}^4\text{)}$  – постоянная Стефана – Больцмана,  $T_0 \approx 288 \text{ К}$  – СПТВ.

В ответ на удвоение содержания  $\text{CO}_2$  в атмосфере соответствующий базовый коэффициент равновесной климатической чувствительности  $\alpha_0$  составляет  $\sim 0,3 \text{ К/(Вт/м}^2\text{)}$ , а изменение равновесной СПТВ –  $\Delta T_0 \approx 1,1 \text{ }^\circ\text{C}$ . Как уже отмечалось, Планковский механизм обеспечивает отрицательную обратную связь в ЗКС: изменение уходящего длинноволнового излучения приводит к такому изменению  $T_0$ , которое противодействует первоначальному ее изменению, благодаря которому произошла «разбалансировка» ЗКС.

Наряду с параметром обратной связи  $\lambda$  целесообразно, по аналогии с автоматикой и теорией систем управления, рассматривать безразмерный коэффициент обратной связи  $f$ , который в замкнутой системе пропорционален части «выходного сигнала» ЗКС, поступающей

обратно на ее «вход», связанный с параметром  $\lambda$  соотношением  $f = (\lambda_0 - \lambda) / \lambda_0$  [33]. Нетрудно заметить, что для разомкнутой климатической системы  $f = 0$ . С помощью введенного коэффициента  $f$  выражение для равновесной чувствительности климата в замкнутой системе записывается следующим образом:  $\Delta T_{2x}^{eq} = G \Delta T_0$ , где  $G = 1 / (1 - f)$  – коэффициент усиления. Для реальной климатической системы коэффициент обратной связи находится в интервале  $0 < f < 1$  [33] и, следовательно, коэффициент усиления  $G > 1$ . Поэтому реакция замкнутой системы на внешнее воздействие превосходит реакцию разомкнутой системы. Иными словами, суммарный эффект обратных связей в ЗКС является положительным.

Анализ уравнения в вариациях  $\delta(\Delta T_{2x}^{eq}) = G^2 \Delta T_0 \delta f$ , полученного из выражения для равновесной чувствительности климата, показывает, что между неопределенностью реакции ЗКС на радиационное воздействие и обратными связями имеет место нелинейная (квадратичная) зависимость [33]. Данное обстоятельство является одной из основных причин того, что получаемые с помощью климатических моделей проекции климата описываются не конкретными значениями переменных состояния, а диапазоном их возможных значений, то есть имеют вероятностную трактовку. Исходя из этого влияние различных факторов на изменчивость климата целесообразно рассматривать в рамках динамико-стохастического подхода к моделированию ЗКС. Важным моментом при использовании данного подхода является параметризация радиационного форсинга как случайного процесса. В климатических исследованиях случайный радиационный форсинг параметризуется, как правило, «по Хассельману» [47], то есть представляется в виде аддитивного гауссова дельта-коррелированного случайного процесса. Как показали исследования [48], такой подход к описанию случайных возмущений, действующих на ЗКС, является вполне обоснованным даже при использовании сложных климатических моделей. Для исследования обратных связей и их влияния на изменчивость климата нами применяется достаточно простая малопараметрическая модель ЗКС – двухблочная (двухслойная) энергобалансовая модель (ЭБМ) [49], описывающая эволюцию атмосферы и верхнего перемешанного слоя океана (верхний слой) и глубинных слоев океана (нижний слой):

$$C(dT/dt) = -\lambda T - \gamma(T - T_D) + F_s(t), \quad C_D(dT_D/dt) = \gamma(T - T_D). \quad (6)$$

Здесь  $T$  и  $T_D$  – глобально-осредненные аномалии температуры, описывающие состояние верхнего и нижнего слоев соответственно, а  $C$  и  $C_D$  – эффективные теплоемкости этих слоев;  $\gamma$  – параметр, характеризующий поглощение тепла глубинным океаном;  $F_s(t)$  – случайный радиационный форсинг, представляющий собой аддитивный белый гауссовский шум с нулевым средним  $\langle F_s(t) \rangle = 0$  и корреляционной функцией  $\langle F_s(t)F_s(t+\tau) \rangle = 2D_s\delta(\tau)$ , где  $\delta$  – дельта-функция. Параметр  $D_s$  определяется дисперсией случайного процесса  $\sigma_s^2$  и временем его корреляции  $\tau_s$ :  $D_s = \sigma_s^2\tau_s$ . Для удобства введем новую переменную  $q_s^2 = 2D_s$ . Значения параметров, используемые в расчетах, полученные на основе калибровки модели по данным CMIP5 [49]:  $C=7,3$  (Вт год)/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>);  $C_D=105,5$  (Вт год)/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>);  $\lambda=1,13$  Вт/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>);  $\gamma=0,73$  Вт/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>). Параметр  $q_s$  рассчитывался на основе асимптотического выражения  $\tilde{\sigma}_s^2 \approx 2\sigma_s^2\tau_s/\tilde{\tau}_s$  [50-52], из которого следует, что  $q_s^2 = \tilde{\sigma}_s^2\tilde{\tau}_s$ , где  $\tilde{\sigma}_s^2$  – величина дисперсии радиационного форсинга, сглаженная по периоду  $\tilde{\tau}_s$ . Для периода сглаживания  $\tilde{\tau}_s=1$  год стандартное отклонение  $\tilde{\sigma}_s$  составляет  $\sim 0,26$  Вт/м<sup>2</sup> [31, 32]. Это значение используется в вычислениях, поскольку в модели в качестве единицы меры времени принят год. Детерминированный радиационный форсинг в рассмотрение не принимается, так как в стохастической модели он не влияет на климатическую изменчивость. В асимптотическом приближении  $\gamma \rightarrow 0$  двухслойная модель (8) вырождается в обычную однобоксовую ЭБМ нулевой размерности [33], которая также используется нами в анализе обратных связей в ЗКС:

$$C(dT/dt) = -\lambda T + F_s(t). \quad (7)$$

За меру изменчивости климата принимается дисперсия СПТВ:  $\langle \delta T^2 \rangle \equiv \sigma_T^2 = \langle T^2 \rangle - \langle T \rangle^2$ , где  $\delta T = T - \langle T \rangle$ . Аналитические выражения для дисперсий  $\sigma_{1,T}^2$  и  $\sigma_{2,T}^2$ , полученные для одно- и двухслойной ЭБМ посредством преобразования соответствующих уравнений Фоккера – Планка, имеют вид [31, 32]:

$$\sigma_{1,T}^2 = \frac{q_s^2}{2\lambda C}, \quad \sigma_{2,T}^2 = \sigma_{1,T}^2 \frac{\gamma C + \lambda C_D}{\gamma C + (\lambda + \gamma) C_D}. \quad (8)$$

Дифференцирование уравнений (8) по коэффициенту  $f$  позволяет получить АФЧ, характеризующие влияние обратных связей в ЗКС на изменчивость СПТВ в рамках одно- и двухслойной ЭБМ:

$$S_{1,f} = \frac{q_s^2 \lambda_0}{2\lambda^2 C}, \quad S_{2,f} = S_{1,f} \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma^2 C C_D}{[(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C]^2}. \quad (9)$$

Соответствующие ОФЧ определяются выражениями

$$S_{1,f}^R = \frac{f}{1-f}, \quad S_{2,f}^R = S_{1,f}^R \frac{(\gamma C + \lambda C_D)^2 + \gamma^2 C C_D}{(\gamma + \lambda)C_D + \gamma C}. \quad (10)$$

Полезные сведения о влиянии обратных связей на изменчивость климата могут быть получены из анализа спектральной плотности мощности (СПМ), характеризующей распределение дисперсий СПТВ по частотам спектра. Для того чтобы получить выражения для СПМ, воспользуемся теоремой о свертке, из которой следует, что если случайный сигнал, имеющий СПМ  $S_s(\omega)$ , где  $\omega$  – циклическая частота, преобразуется линейной стационарной системой, которая имеет в частотной области Фурье-образ импульсной переходной функции  $H(\omega)$ , то тогда СПМ выходного сигнала определяется формулой  $S_{TT}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_s(\omega)$ . Поскольку корреляционная функция радиационного форсинга, рассматриваемого в данной работе как дельта-коррелированный случайный процесс, задана, то из теоремы Винера – Хинчина следует, что СПМ входного сигнала, каковым является радиационный форсинг, имеет вид:  $S_s(\omega) = \sigma_s^2 \tau_s / \pi$ . Для одно- и двухслойной ЭБМ Фурье-образы переходной характеристики могут быть легко получены с помощью Фурье-преобразования уравнений соответствующей модели:

$$H_1(\omega) = (i\omega C + \lambda)^{-1}, \quad H_2(\omega) = \frac{\gamma + i\omega C_D}{C C_D [( \omega_0^2 - \omega^2 ) + i\omega 2\beta]}, \quad (11)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\lambda\gamma/CC_D}$  и  $\beta = [\gamma(C + C_D) + \lambda C_D]/2CC_D$  – собственная частота и коэффициент затухания колебаний, описываемых системой (8). Тогда СПМ выходного сигнала (флуктуаций СПТВ) для одно- и двухслойной ЭБМ запишутся следующим образом:

$$S_{1,TT}(\omega) = \frac{q_s^2/C^2}{\pi[(\lambda/C)^2 + \omega^2]},$$

$$S_{2,TT}(\omega) = \frac{q_s^2(\gamma^2 + \omega^2 C_D^2)}{\pi C^2 C_D^2 \left[ (\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2 \beta^2 \right]}.$$
(12)

Функции чувствительности (АФЧ и ОФЧ), характеризующие влияние малых вариаций коэффициента  $f$  на СПМ однослойной ЭБМ определяются следующими соотношениями:

$$S_{1,TT,\lambda}(\omega) = \frac{\partial S_{1,T}}{\partial \lambda} = -\frac{2\lambda q_s^2}{\pi(\lambda^2 + \omega^2 C^2)^2}, \quad S_{1,TT,\lambda}^R(\omega) = -\frac{2\lambda^2}{\lambda^2 + \omega^2 C^2}.$$
(13)

Соответствующие функции чувствительности для двухслойной модели не выписываем ввиду их чрезмерной громоздкости.

Рассматриваемые в данной работе малопараметрические модели ЗКС позволяют исследовать изменчивость климата на различных масштабах времени и оценивать влияние обратных связей на климатические колебания. Временной масштаб флуктуаций СПТВ, возникающих под воздействием внешнего случайного радиационного форсинга, определяется эффективной теплоемкостью атмосферы и верхнего слоя океана, то есть параметром  $C$  [32]. По данным СМIP5, для моделирования годовой изменчивости климата значение параметра  $C$  находится в интервале от 4,7 до 8,6 (Вт год)/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>) при среднем межмодельном значении 7,3 (Вт год)/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>) [49]. Для декадной и междекадной изменчивости в качестве характерных значений можно принять 20 и 30 (Вт год)/(м<sup>2</sup> К<sup>1</sup>), соответственно.

На рисунке 2 в левом окне представлена зависимость дисперсии СПТВ  $\sigma_{2,T}^2$  (К<sup>2</sup>) от коэффициента обратной связи  $f$ , рассчитанная для годового (1), декадного (2) и междекадного (3) временных масштабов, а в правом окне – спектральная плотность мощности  $S_{1,TT}$  (К<sup>2</sup>год) флуктуаций СПТВ, вычисленная при различных значениях коэффициента  $f$ . Как показывает рисунок 2, изменчивость СПТВ тем больше, чем сильнее обратные связи в ЗКС и чем меньше временной масштаб флуктуаций. Из анализа выражений для СПМ (12) следует, что в климатической системе при фиксированном значении параметра  $C$  (при заданном временном масштабе изменчивости климата) имеют место два колебатель-

ных режима. В высокочастотной области ( $\omega \gg \lambda/C$ ) спектр пропорционален  $\omega^{-2}$  и, следовательно, мало зависит от параметра обратной связи  $\lambda$  (или  $f$ ). В то же время в области низких частот ( $\omega \ll \lambda/C$ ) спектр определяется обратными связями и не зависит от частоты колебаний. Переход от одного режима к другому происходит при частоте  $\nu^* = \lambda/C$  (год<sup>-1</sup>). Рассмотренный качественный анализ СПМ согласуется с результатами вычислений, представленными на рисунке 2.

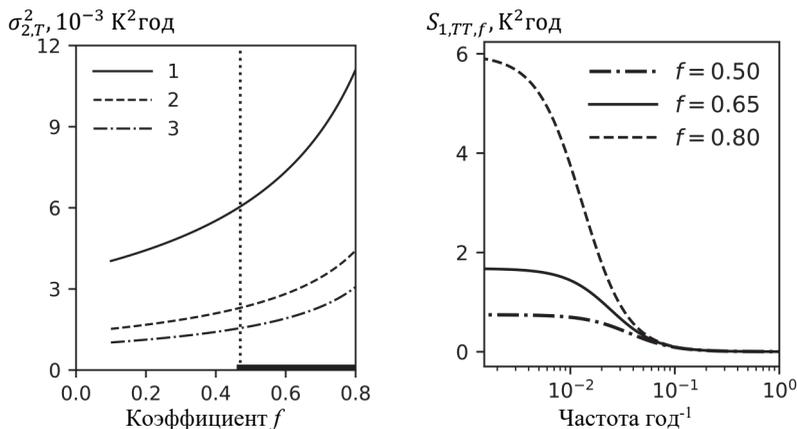


Рис. 2. Дисперсия и спектральная плотность мощности флуктуаций СПТВ при различных значениях коэффициента обратной связи  $f$  для годового (1), декадного (2) и междекадного (3) временных масштабов. В левом окне область значений коэффициента  $f$  по данным СМIP5 выделена жирной линией

Абсолютные и относительные функции чувствительности дисперсии СПТВ к коэффициенту обратной связи  $f$ , рассчитанные для годового (1), декадного (2) и междекадного (3) временных масштабов, показаны на рисунке 3. По мере увеличения коэффициента  $f$  чувствительность дисперсии СПТВ к вариациям этого параметра усиливается, при этом чем меньше временной масштаб климатической изменчивости, тем сильнее чувствительность дисперсии  $\sigma_{2,T}^2$  к коэффициенту  $f$ . Графики соответствующих АФЧ, построенные для различных временных масштабов климатической изменчивости как функции коэффициента  $f$  показаны в левом окне рисунка 3. В противоположность этому, влияние относительных вариаций коэффициента  $f$  растет с увеличением временного масштаба флуктуаций СПТВ.

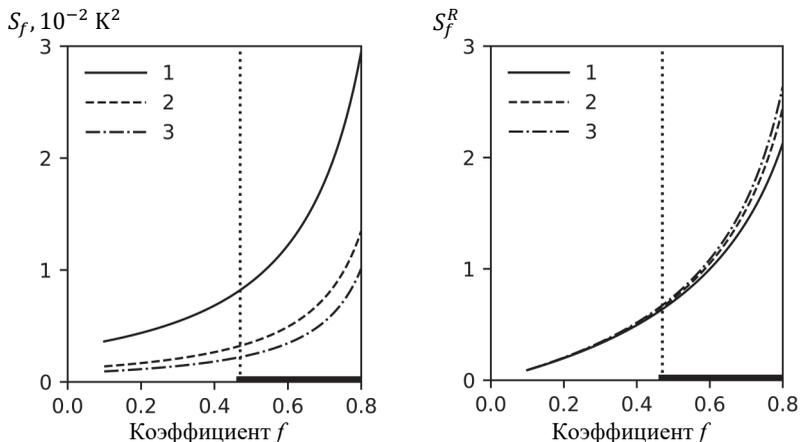


Рис. 3. Абсолютные и относительные функции чувствительности для годового (1), декадного (2) и междекадного (3) временных масштабов

Чувствительность спектров колебаний СПТВ к обратным связям в ЗКС иллюстрирует рисунок 4. На этом рисунке представлены функции чувствительности СПМ (в левом окне – абсолютные, а в правом – относительные) к коэффициенту обратной связи  $f$ , рассчитанные с помощью однослойной модели. Представленные на этих рисунках графики функций чувствительности в очередной раз указывают на увеличение чувствительности спектра по мере его сдвига в сторону низкочастотного диапазона.

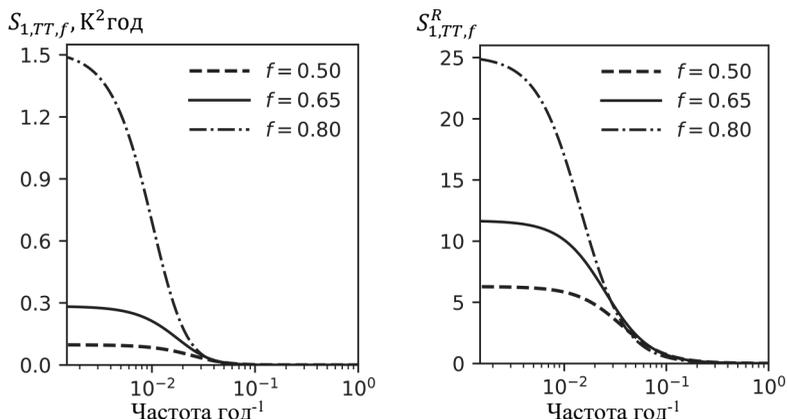


Рис. 4. Абсолютные и относительные функции чувствительности спектральной плотности в коэффициенту  $f$  для годового (1), декадного (2) и междекадного (3) временных масштабов

Неопределенность обратных связей в ЗКС, присущая современным моделям климата, является серьезным источником получаемых на их основе неопределенностей проекций будущего климата нашей планеты. Рассмотренные вкратце результаты, полученные с использованием малопараметрических стохастических моделей климата, иллюстрируют существенное влияние обратных связей в ЗКС на дисперсию флуктуаций СПТВ различных временных масштабов (т.е. на годовую, декадную и междекадную климатическую изменчивость) и спектр колебаний СПТВ.

Сопоставление результатов, полученных на основе однослойной и двухслойной ЭБМ, позволяет сделать вывод о том, что учет поглощения тепла глубинными слоями океана уменьшает амплитуду аномалий СПТВ, приближая их к реально наблюдаемым. Таким образом, двухслойная модель, в отличие от однослойной модели, может служить не только инструментом качественного анализ ЗКС, но и применяться для получения вполне реалистичных оценок изменения климата и его колебаний.

#### **5. Геоинжиниринг как проблема оптимального управления.**

Удержание прироста СПТВ в пределах 1,5 – 2,0 °С относительно доиндустриального уровня было обозначено в Парижском соглашении по климату 2015 года как приоритетное направление по борьбе с глобальным потеплением. Достигнуть данную амбициозную цель предполагается путем перехода к низкоуглеродному развитию, в чем у нас имеются большие сомнения ввиду неэффективности глобальной системы управления, ответственной за климатическую политику, о чем говорилось ранее. Тем не менее в качестве одной из мер стабилизации климата теоретически рассматривается геоинжиниринг – активное вмешательство человека в перераспределение потока солнечного излучения за счет, например, введения в стратосферу мелкодисперсного аэрозоля, обладающего свойствами рассеивать солнечную радиацию в видимом спектральном интервале и слабо ее поглощать в инфракрасном диапазоне. Такими свойствами обладает, к примеру, сульфатный аэрозоль. Введение в стратосферу контролируемых эмиссий двуокиси серы или сероводорода (газов-предшественников) приводит в конечном итоге к образованию частиц аэрозоля. Наличие в верхней атмосфере аэрозоля способствует увеличению планетарного альбеда Земли  $\alpha_0$ , изменению радиационного баланса и, как следствие, понижению температуры у земной поверхности. Увеличение  $\alpha_0$  на 1% приводит к уменьшению потока солнечного излучения на верхней границе атмосферы примерно на 3,4 Вт/м<sup>2</sup>, что вполне сопоставимо с радиационным эффектом удвоения концентрации атмосферного CO<sub>2</sub>. Для оценки эффективности геоинже-

нерных проектов и их последствий используется численное моделирование при заданных сценариях антропогенного увеличения ПГ и эвристически заданных сценариях геоинженерных воздействий. Перебор вариантов этих воздействий – не лучший и не эффективный со многих точек зрения подход. Нами геонинжиниринг рассматривается как экстремальная задача, сводящаяся к отысканию экстремума некоторого функционала, формально описывающего цель управления ЗКС при наличии различных ограничений, накладываемых на фазовые координаты и функции управления. В этом случае оптимальный закон управления и фазовая траектория управляемой системы находятся в результате решения экстремальной задачи методами оптимального управления. Для иллюстрации предлагаемого подхода рассмотрим модель (6), уравнения которой запишем в детерминированном виде с учетом радиационных эффектов стратосферного аэрозоля:

$$\begin{aligned} C(dT/dt) &= -\lambda T - \gamma(T - T_D) + \Delta R_{GHG} + \Delta R_A; \\ C_D(dT_D/dt) &= \gamma(T - T_D), \end{aligned} \quad (14)$$

где  $\alpha_0$  – планетарное альbedo Земли;  $\Delta R_{GHG}$  и  $\Delta R_A$  – радиационные воздействия ПГ и аэрозоля на ЗКС. Радиационный форсинг  $\Delta R_{GHG}$  аппроксимируется линейной функцией  $\Delta R_{GHG} = \eta t$ , где параметр  $\eta$  определяется по данным RCP [19] (табл. 3).

Таблица 3. Параметр  $\eta$  для различных сценариев RCP

Сценарий	RCP8.5	1%CO <sub>2</sub>	RCP6.0	RCP4.5
$\eta$ , Вт/м <sup>2</sup>	$7,14 \cdot 10^{-2}$	$5,29 \cdot 10^{-2}$	$3,81 \cdot 10^{-2}$	$2,17 \cdot 10^{-2}$

Примечание. Сценарий 1%CO<sub>2</sub> соответствует росту концентрации CO<sub>2</sub> на 1% в год.

Расчет радиационного форсинга, производимого аэрозолем, выполняется по формуле  $\Delta R_A = -(1 - \alpha_0)\alpha_A Q_0$ , где  $\alpha_A$  – альbedo аэрозольного слоя ( $\alpha_A < 1$ );  $Q_0 = 342$  Вт/м<sup>2</sup> – средняя по Земному шару инсоляция [21]. Это позволяет рассматривать  $\alpha_A$  в качестве управляющей переменной. Реально мы имеем возможность управлять скоростью эмиссии аэрозольных частиц  $E_A$ , которая входит в уравнение баланса массы аэрозоля:

$$dM_A/dt = E_A - M_A/\tau_A, \quad (15)$$

где  $M_A$  – масса аэрозольных частиц, а  $\tau_A$  – время их жизни в стратосфере.

Величины  $M_A$  и  $\alpha_A$  линейно зависимы:  $M_A = \alpha_A(Q_0 S_e / \beta_A k_A)$ , где  $\beta_A = 24 \text{ Вт/м}^2$  – эмпирический коэффициент;  $k_A$  – массовый коэффициент экстинкции аэрозоля;  $S_e$  – площадь поверхности земного шара. Следовательно, при заданных  $k_A$  и  $\alpha_A$  масса аэрозоля  $M_A$  может быть легко рассчитана. В дальнейшем будем полагать, что  $k_A = 7,6 \text{ м}^2/\text{г}$ , а  $\tau_A \approx 2$  года [21]. Практически в стратосфере вводятся газы-предшественники, поэтому масса сульфатных аэрозолей и скорость их эмиссии выражаются в единицах серы и обозначаются  $E_S$  (ТгS/год) и  $M_S$  (ТгS) соответственно, учитывая, что 1 Тг серы эквивалентен 4 Тг аэрозольных частиц. Тогда уравнение (15) можно переписать в виде:

$$d\alpha_A/dt = \chi^{-1} E_A - \alpha_A/\tau_A, \quad (16)$$

где  $\chi = Q_0 S_e / 4\beta_A k_A \approx 2,39 \cdot 10^2 \text{ ТгS}$ .

Таким образом, если оптимальное управление  $\alpha_A^*(t)$  каким-то образом определено, то оптимальная скорость эмиссии сульфатных аэрозолей  $E_S^*(t)$ , обеспечивающая формирование аэрозольного слоя массы  $M_S^*(t)$ , вычисляется с помощью уравнения (16). Задача оптимального управления ЗКС рассматривается на конечном интервале времени  $t \in [t_0, t_f]$ , на котором поведение объекта управления описывается уравнениями (14) при заданных краевых условиях:

$$T(t_0) = 0, \quad T_D(t_0) = 0, \quad T(t_f) = T^f. \quad (17)$$

Из (17) следует, что в задаче левый конец фазовой траектории закреплен, а правый конец закреплен только для переменной  $T$ , тогда как для переменной  $T_D$  – свободен. Выбор граничных условий обусловлен тем, что основной интерес представляет изменение аномалии СПТВ.

Задача формулируется следующим образом: *найти управляющую функцию  $\alpha_A^*(t)$  из класса допустимых, чтобы при выполнении наложенных на систему динамических ограничений (14) и краевых условий (17) заданный функционал, характеризующий массовый расход аэрозоля*

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \alpha_A^2(t) dt \quad (18)$$

*достиг минимального значения.*

Масса аэрозоля, которая может быть доставлена в стратосферу реально ограничена имеющимися техническими возможностями, поэтому формально будем считать, что область допустимых управлений представляет собой интервал  $[0, U]$ , где  $U$  – максимально возможное альbedo аэрозольного слоя. В рассматриваемой задаче краевое условие  $T^f$  интерпретируется как допустимый прирост СПТВ на момент времени  $t_f$  (в соответствии с Парижским соглашением по климату можно принять  $T^f = 1,5 - 2,0$  °C).

Решение поставленной задачи оптимального управления выполняется на основе принципа максимума Понтрягина. Согласно этому принципу составим гамильтониан задачи при отсутствии ограничений на фазовые переменные и управление:

$$H = -\frac{1}{2}\alpha_A^2 + \psi_1(-aT + bT_D + ct - q\alpha_A) + \psi_2(pT - pT_D), \quad (19)$$

где  $a = (\lambda + \gamma)/C$ ;  $b = \gamma/C$ ;  $c = \eta/C$ ;  $q = (1 - \alpha_0)Q_0/C$ ;  $p = \gamma/C_D$ ;  $\psi_1$  и  $\psi_2$  – множители Лагранжа, удовлетворяющие сопряженной системе уравнений:

$$d\psi_1/dt = -\partial H/\partial T = aT - p\psi_2, \quad d\psi_2/dt = -\partial H/\partial T_D = -bT + p\psi_2. \quad (20)$$

Оптимальное управление доставляет максимум функции Гамильтона (19) в любой фиксированный момент времени  $t \in [t_0, t_f]$ :  $\alpha_A^* = \arg \max_{\alpha_A \in [0, U]} H(\alpha_A)$ . Соответствующее условие стационарности гамильтониана записывается следующим образом:

$$\partial H/\partial \alpha_A = -\alpha_A - q\psi_1. \quad (21)$$

Для нахождения оптимального управления и порождаемой им оптимальной фазовой траектории ЗКС требуется решить систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений (14), (20) с четырьмя неизвестными  $T$ ,  $T_D$ ,  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ . Три крайевых условия (17) дополняются условием трансверсальности  $\psi_2(t_f) = 0$ , так как на правом конце граничное условие для функции  $T_D$  не определено.

Выражения для оптимального альbedo аэрозольного слоя и соответствующей ему оптимальной аномалии СПТВ, полученные нами аналитически, имеют вид:

$$\alpha_A^*(t) = -C_1 q \left[ v_{11} e^{\lambda_1 t} + v_{21} e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t f} e^{\lambda_2 t} \right], \quad (22)$$

$$T^*(t) = C_1 \left( \alpha_1 e^{\lambda_1 t} - \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \right) + C_3 e^{-\lambda_1 t} + C_4 e^{-\lambda_2 t} + w_1 t + w_2. \quad (23)$$

Здесь  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  – собственные числа, а  $v_{11}$  и  $v_{21}$  – компоненты собственных векторов матрицы коэффициентов системы сопряженных уравнений;  $C_1, C_2, C_3$  и  $C_4$  – произвольные постоянные, при этом  $C_2 = -C_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2) t f}$ ;  $\alpha_1, \alpha_2, w_1$  и  $w_2$  – известные функции собственных чисел, собственных векторов и коэффициентов  $a, b, c, p$  и  $q$  (ввиду громоздкости мы эти функции не выписываем).

Если на аномалию СПТВ накладывается ограничение  $T \leq C_T$ , где константа  $C_T$  характеризует допустимый рост СПТВ на временном интервале  $t \in [t_0, t_f]$ , то задача существенно усложняется. В этом случае для получения оптимального решения требуется учесть условие дополняющей нежесткости:  $\mu(t)S(T, t) = 0, \mu(t) \geq 0$ , где  $S(T, t) = C_T - T(t)$ , а  $\mu(t)$  – множитель Лагранжа.

Рассмотрим в качестве примера результаты расчетов, полученные для RCP8.5 – сценария («business-as-usual» сценарий, являющийся наиболее консервативным в отношении роста концентраций ПГ). Задача рассматривается на 80-летнем интервале ( $t_0 = 2020$  год, а  $t_f = 2100$  год) при отсутствии и наличии фазового ограничения (ограничения на рост СПТВ в течение рассматриваемого периода времени). В соответствии с Парижским соглашением по климату, максимально допустимое увеличение СПТВ в 2100 году –  $2^\circ\text{C}$ . Поскольку в 2020 году ожидаемый рост СПТВ относительно доиндустриального уровня составит  $1,1^\circ\text{C}$ , то тогда фазовый ограничитель  $C_T = 2 - 1,1 = 0,9^\circ\text{C}$ . Согласно расчетам, без реализации геоинжиниринговых проектов за 80 лет СПТВ увеличится примерно на  $3,8^\circ\text{C}$  и, таким образом, значительно превысит допустимый уровень, определяемый Парижским соглашением. Применение стратосферного аэрозоля позволяет стабилизировать климат в 21 веке, обеспечив тем самым выполнение требования Парижского соглашения по климату (см. рис. 5).

Как показывают вычисления, потребная масса аэрозоля за 80-летний период составит  $36,5 \text{ TgS}$  (если фазовое ограничение отсутствует), и  $73,6 \text{ TgS}$  (если фазовое ограничение учитывается). Таким образом, если характер глобальной экономической деятельности не изменит-

ся (сценарий RCP8.5), то цели Парижского соглашения могут быть достигнуты лишь при условии реализации геоинженерных проектов. Аналогичная ситуация складывается при остальных сценариях увеличения концентрации ПГ (за исключением нереалистичного сценария RCP2.6), поскольку рассчитанные для этих сценариев увеличения СПТВ превысят доиндустриальный уровень более чем на  $2^{\circ}\text{C}$ . Из этого следует, что геоинженерные проекты могут рассматриваться в качестве одной из реальных мер стабилизации среднеглобальной приповерхностной температуры.

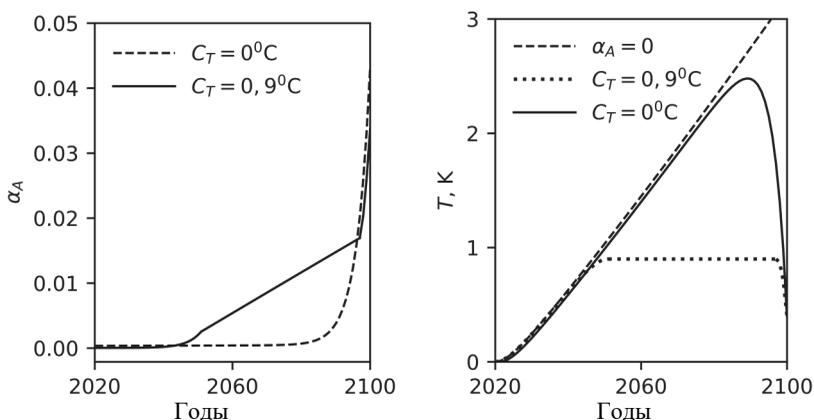


Рис. 5. Оптимальное альbedo аэрозольного слоя при наличии и отсутствии ограничений на управление и соответствующие аномалии среднеглобальной приповерхностной температуры воздуха

**6. Заключение.** Проблема современного изменения климата, обусловленного главным образом антропогенной деятельностью, занимает в спектре вызовов 21 века одно из главенствующих мест, поскольку представляет собой реальную угрозу существованию человеческой цивилизации. Решение данной проблемы невозможно без совместных усилий правительств развитых стран. Результаты наблюдений за климатической системой свидетельствуют об ускорении процессов глобального потепления на планете, что вызывает необходимость неотлагательного рассмотрения возможных мер по стабилизации глобального климата. Изменение климата воздействует на природные системы, человека и его целенаправленную, в том числе экономическую, деятельность. В данной работе проблема взаимодействия природы и общества в условиях современного изменения климата рассмотрена с позиций общей теории управления, в рамках которой система «кли-

мат-экономика» представляет собой кибернетическую систему, состоящую из субъекта управления (иерархическая система органов межгосударственного и странового управления различного уровня) и объекта управления – взаимодействующих экономической и климатической систем. Нами проанализированы слабые стороны субъекта глобального управления, каковым на сегодня является ООН в лице МГЭИК, обсуждены основные источники неопределенностей оценок изменения климата и наносимого этими изменениями экономического ущерба. Поскольку одним из основных источников неопределенностей проекций климата являются обратные связи в ЗКС, с помощью стохастических моделей климата малой размерности оценена чувствительность климатической изменчивости к вариациям коэффициента обратной связи. Полученные результаты позволяют объяснить значительные межмодельные расхождения оценок изменения климата, рассчитанных с помощью современных климатических моделей высокой степени сложности. В связи с тем, что предлагаемые МГЭИК меры по стабилизации климата Земли по существу являются борьбой не с причиной, а со следствием, в качестве радикальной адаптационной меры нами видится геоинжиниринг. В статье проблема стабилизации климата в 21 веке рассмотрена как оптимизационная задача, решение которой получено методами теории оптимального управления.

Настоящая работа носит концептуальный характер, проблемы, затрагиваемые в ней, являются по своей сути междисциплинарными и настолько сложными, что их постановка и решение под силу только большому коллективу экспертов, представляющих различные области научного знания. Статья открывает цикл публикаций, посвященных исследованию взаимодействия общества и природы в условиях изменяющегося с нарастающей скоростью климата и возможностей человека управлять этими изменениями. Мы надеемся, что статья послужит неким триггером для научной дискуссии и аргументации по поводу комплекса вопросов, рассмотренных в ней в постановочном плане.

### **Литература**

1. The Millennium Project. Global futures studies and research. URL: [www.millennium-project.org/15-global-challenges](http://www.millennium-project.org/15-global-challenges) (дата обращения: 24.12.2019).
2. *Bradley R.* Paleoclimatology: reconstructing climates of the quaternary // Elsevier. 2015. 696 p.
3. NOAA National Centers for Environmental Information, State of the Climate: Global Climate Report – December 2018. URL: [www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/201812](http://www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/201812) (дата обращения: 21.12.2019).
4. *Stocker T.F. et al.* Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change // University Press. 2013. 1535 p

5. NOAA Earth System Research Laboratory, Global Monthly Mean CO<sub>2</sub>. URL: [www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/global.html](http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/global.html) (дата обращения: 21.12.2019).
  6. *Ripple W.J. et al.* World scientists' warning of a climate emergency // *BioScience*. 2019. Issue 1. vol. 70. pp. 8–12.
  7. *Santer B.D. et al.* Celebrating the anniversary of three key events in climate change science // *Nature Climate Change*. 2019. vol. 9. no. 3. pp. 180–182.
  8. *Diem C.* There is no climate emergency, say 500 experts in letter to the United Nations. URL: [www.aei.org/carpe-diem/there-is-no-climate-emergency-say-500-experts-in-letter-to-the-united-nations](http://www.aei.org/carpe-diem/there-is-no-climate-emergency-say-500-experts-in-letter-to-the-united-nations) (дата обращения: 21.12.2019).
  9. *Foster P.* Half a century of robust climate models // *Nature*. 2017. vol. 545. pp. 296–297.
  10. *Taylor K.E., Stouffer R.J., Meehl G.A.* An overview of the CMIP5 and the experimental design // *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2012. vol. 93. pp. 485–498.
  11. *Дымников В.П., Лысков В.Н., Володин Е.М.* Моделирование климата и его изменений: современные проблемы // *Вестник Российской академии наук*. 2012. Т. 82. № 3. С. 227–236.
  12. *Lupo A., Kininmonth W., Armstrong J.S., Green K.* Global climate models and their limitations // *Climate change reconsidered II: Physical Science*. 2013. vol. 9. 139 p.
  13. *Wang Z., Wu J., Liu C., Gu G.* Integrated assessment models of climate change economics // *Springer Singapore*. 2017. 181 p.
  14. *Pindyck R.S.* The use and misuse of models for climate policy // *Review of Environmental Economics and Policy*. 2017. vol. 11. pp. 100–114.
  15. *Nordhaus W.* Scientific and economic background on DICE models. URL: <https://sites.google.com/site/williamdnordhaus/dice-rice> (дата обращения: 04.12.2019).
  16. *Board O.S., National Research Council.* Climate intervention: Carbon dioxide removal and reliable sequestration // *National Academies Press*. 2015. 154 p.
  17. *Board O.S., National Research Council.* Climate intervention: Reflecting sunlights to cool Earth // *National Academies Press*. 2015. 260 p.
  18. *Soldatenko S.A.* Weather and climate manipulation as an optimal control for adaptive dynamical systems // *Complexity*. 2017. vol. 2017. 12 p.
  19. *Meinshausen M. et al.* The RCP greenhouse gas concentrations and their extensions from 1765 to 2300 // *Climatic Change*. 2011. vol. 109. no. 1-2. pp. 213–241.
  20. *Soldatenko S.A., Yusupov R.M.* Optimal control of aerosol emissions into the stratosphere to stabilize the Earth's climate // *Atmospheric and Oceanic Physics*. 2018. vol. 54. pp. 480–486.
  21. *Soldatenko S.A., Yusupov R.M.* Optimal control for the process of using artificial sulfate aerosols for mitigating global warming // *Atmospheric and Oceanic Optics*. 2019. vol. 32. pp. 55–63.
  22. *Солдатенко С.А., Юсупов Р.М.* О выборе управляющих параметров при моделировании целенаправленной модификации погодно-климатических процессов // *Труды СПИИРАН*. 2016. Вып. 1(44). С. 153–180.
  23. *Soldatenko S.A., Yusupov R.M.* On the possible use of geophysical cybernetics in climate manipulation (geoengineering) and weather modification // *WSEAS Transactions on Environment and Development*. 2015. vol. 11. pp. 116–125.
  24. *Soldatenko S.A.* Estimating the impact of artificially injected stratospheric aerosols on the global mean surface temperature in the 21st century // *Climate*. 2018. vol. 6. no. 4. pp. 85.
  25. *Гаскаров Д.В. и др.* Введение в геофизическую кибернетику // *СПб: СПбГУВК*. 1998. 165 с.
  26. *Wiener N.* Cybernetics or control and communication in the animal and the machine // *Technology Press*. 1948. 194 p.
  27. *Wiener R.* Cybernetics and society: *The human use of human beings* // *Houghton Mifflin*. 1950. 241 p.
- 36 Труды СПИИРАН. 2020. Том 19 № 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)  
[www.proceedings.spiiras.nw.ru](http://www.proceedings.spiiras.nw.ru)

28. *Sickles R.C., Zelenyuk V.* Measurement of productivity and efficiency // University Press. 2019. 626 p.
29. *Fonu U.P.* World Economic Outlook: Seeking Sustainable Growth-Short-Term Recovery // Long-term challenges (International Monetary Fund Publications: Washington DC). 2017. 284 p.
30. *Rozenwasser E., Yusupov R.* Sensitivity of automatic control systems // CRC Press. 2019. 456 p.
31. *Soldatenko S.A., Yusupov R.M.* Estimating the influence of thermal inertia and feedbacks in the atmosphere–ocean system on the variability of the global surface air temperature // Atmospheric and Oceanic Physics. 2019. vol. 56. pp. 591–601.
32. *Soldatenko S., Colman R.* Climate variability from annual to multi-decadal timescales in a two-layer stochastic energy balance model: analytic solutions and implications for general circulation models // Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography. 2019. vol. 71. no. 1. pp. 1–15.
33. *Солдатенко С.А., Юсупов Р.М.* Чувствительности нульмерной климатической модели и ее обратные связи в контексте проблемы управления погодой и климатом Земли // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 3(52). С. 5–31.
34. *Gambhir A. et al.* A review of criticisms of Integrated Assessment Models and proposed approaches to address these, through the lens of BECCS // Energies. 2019. vol. 12. no. 9. pp. 1747.
35. *Pindyck R.S.* Climate change policy: What do the models tell us? // Journal of Economic Literature. 2013. vol. 51. pp. 860–872.
36. *Lazo J.K., Lawson M., Larsen P.H., Waldman D.M.* United States economic sensitivity to weather variability // Bulletin of the American Meteorological Society. 2011. vol. 92. no. 6. pp. 709–720.
37. *Crepin A.S., Karcher M., Gascard J.C.* Arctic climate change, economy and society (ACCESS): Integrated perspectives // Ambio. 2017. vol. 46. no. 3. pp. 341–354.
38. *Катцов В.М., Порфирьев Б.Н.* Оценка макроэкономических последствий изменений климата на территории Российской Федерации на период до 2030 г. и дальнейшую перспективу (резюме доклада) // Труды Главной геофизической обсерватории им. А.И. Воейкова. 2011. № 563. С. 7–59.
39. *Акентьева Е.М. и др.* Доклад о климатических рисках на территории Российской Федерации // ГГО им. А.И. Воейкова. 2017. 106 с.
40. *Солдатенко С.А. и др.* Об оценке климатических рисков и уязвимости природных и хозяйственных систем в морской арктической зоне РФ // Проблемы Арктики и Антарктики. 2018. № 1(64). С. 55–70.
41. *Hallegatte S., Green C., Nicholls R.J., Corfee-Vorlot J.* Future flood losses in major coastal cities // Nature Climate Change. 2013. vol. 3. no. 9. pp. 802–806.
42. *Kopp R.E. et al.* Probabilistic 21st and 22nd century sea-level projections at a global network of tide-gauge sites // Earth Future. 2014. vol. 2. no. 8. pp. 383–406.
43. *Taylor K.E., Stouffer R.J., Meehl G.A.* An overview of CMIP5 and the experiment design // Bulletin of the American Meteorological Society. 2011. vol. 93. pp. 485–498.
44. *Colman R.A., Power S.B.* What can decadal variability tell us about climate feedbacks and sensitivity? // Climate Dynamics. 2018. vol. 51. pp. 3815–3828.
45. *Soldatenko S.A.* Estimated impacts of climate change on eddy meridional moisture transport in the atmosphere // Applied Sciences. 2019. vol. 9. no. 23. pp. 4992.
46. *Ginzburg A.S., Demchenko P.F.* Anthropogenic meso-meteorological feedbacks: A review of recent research // Atmospheric and Oceanic Physics. 2019. vol. 55. pp. 573–590.
47. *Hasselmann K.* Stochastic climate models. Part I. Theory // Tellus. 1976. vol. 28. pp. 473–485.

48. *Middlemas E., Clement A.* Spatial patterns and frequency of unforced decadal scale changes in global mean surface temperature in climate models // *Journal of Climate*. 2016. vol. 29. no. 17. pp. 6245–6257.
49. *Geoffroy O. et al.* Transient climate response in a two-layer energy-balance model. Part I: Analytical solution and parameter calibration using CMIP5 AOGCM experiments // *Journal of Climate*. 2013. vol. 26. no. 6. pp. 1841–1857.
50. *Demchenko P.F., Semenov V.A.* Estimation of uncertainty in surface air temperature climatic trends related to the internal dynamics of the atmosphere // *Doklady Earth Sciences*. 2017. vol. 476. pp. 1105–1108.
51. *Охмилев М.Ю. и др.* Концепция и технологии проактивного управления жизненным циклом изделий // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2020. Т. 63. № 1. С. 158–161.
52. *Ронжин А.Л. и др.* Применение технологии радиочастотной идентификации для построения системы контроля оборота бортового кухонного оборудования // *Вопросы радиоэлектроники. Серия: Техника телевидения*. 2020. Вып. 1. С. 3–10.

**Солдатенко Сергей Анатольевич** — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаборатория прикладной информатики и проблем информатизации общества, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: математическое моделирование геофизических процессов, геофизическая кибернетика, изменение климата, климатический риск-менеджмент, динамические системы.. Число научных публикаций — 200. prof.soldatenko@yandex.ru; 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-3311.

**Юсупов Рафаэль Мидхатович** — д-р техн. наук, профессор, Член-корреспондент РАН, научный руководитель, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН),; президент, НП Национальное общество имитационного моделирования («НОИМ»). Область научных интересов: теория управления, информатика, теоретические основы информатизации и информационного общества, информационная безопасность. Число научных публикаций — 400. yusupov@iias.spb.su; 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-3311.

**Колман Роберт** — Ph.D., руководитель направления, направления климатических исследований, Австралийское бюро метеорологии; эксперт, Межправительственная группа экспертов по изменению климата (МГЭИК), сопредседатель, Австралийская научная программа по изменению климата, член Национального совета по климату. Область научных интересов: моделирование глобального климата и его изменений, обратные связи в климатической системе, чувствительность климата, прогнозирование регионального климата, анализ и оценка качества климатических моделей. Число научных публикаций — 200. robert.colman@bom.gov.au; ул. Коллинс, 700, 3008, Мельбурн, Австралия; р.т.: +61451795720.

S. SOLDATENKO, R. YUSUPOV, R. COLMAN  
**CYBERNETIC APPROACH TO PROBLEM OF INTERACTION  
BETWEEN NATURE AND HUMAN SOCIETY IN CONTEXT OF  
UNPRECEDENTED CLIMATE CHANGE**

*Soldatenko S., Yusupov R., Colman R Cybernetic Approach to Problem of Interaction Between Nature and Human Society in Context of Unprecedented Climate Change.*

**Abstract.** In this paper, from a cybernetic perspective, the human-nature interactions are considered in the context of modern climate change, unprecedented in its scale and rate caused by anthropogenic activity. The developed structure of the “climate-economy” cybernetic system is presented, the weaknesses of the global governance bodies are analysed, and the main causes of the uncertainties in assessing climate change and the economic damage caused by this change are discussed. It is noted that adaptation measures and strategies developed and implemented by governments of different countries and intergovernmental organizations do not eliminate the causes of global warming and, therefore, have limited capacities, since humans and nature can exist only under specified environmental conditions. Going beyond these conditions, due to climate change, can lead to a global biological catastrophe. Climate policy decisions are made under uncertainty due to the ambiguity of estimates of the future climate, which, in turn, is the result of an insufficiently adequate description of feedbacks in the climate system models. Using low-parametric models of the Earth's climate system, the influence of system's feedbacks on tangible inter-model differences of climate change estimates obtained using modern climate models of a high degree of complexity is illustrated. Since the climate change adaptation measures proposed by experts are not the struggle with causes, but the fight with consequences, we see geoengineering as a radical adaptation strategy. In contrast to previous studies, we consider the problem of purposefully modifying climatic conditions, implemented by geoengineering methods, within the framework of optimal control theory with mathematical formalization of geoengineering objectives and methods for achieving them. In this paper, an example of the formulation and solution of the optimization problem for stabilizing the Earth's climate through the injection of finely dispersed sulfate aerosol into the stratosphere is presented.

**Keywords:** Geophysical Cybernetics, Global Warming, Climate Change Economics, Geoengineering, Climate Engineering, Feedbacks, Optimal Control.

**Soldatenko Sergei** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading Researcher, Laboratory of Applied Informatics and Society Informatization Problems, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: mathematical modeling of geophysical processes, geophysical cybernetics, climate change, climate risk-management, dynamical systems.. The number of publications — 200. prof.soldatenko@yandex.ru; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-3311.

**Yusupov Rafael** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Corresponding Member of RAS, Scientific Advisor, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS); President, NP National Simulation Society (“NSS”). Research interests: mathematical modeling of geophysical processes, geophysical cybernetics, climate change, climate risk-management, dynamical systems. The number of publications — 400. yusupov@iias.spb.su; 39, 199178, , Russia; office phone: +7(812)328-3311.

**Colman Robert** — Ph.D., Head of Division, Climate Research Division, Australian Bureau of Meteorology; Expert, Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC), Co-Chair, Australian Climate Change Science Program, Member of the National Climate Council. Research interests: global climate modeling, climate change and variability, climate feedbacks, climate sensitivity, regional climate projection, analysis and validation of climate models. The number of publications — 200. robert.colman@bom.gov.au; 700, Collins str., 3008, Melbourne, Australia; office phone: +61451795720.

## References

1. The Millennium Project. Global futures studies and research. Available at: [www.millennium-project.org/15-global-challenges](http://www.millennium-project.org/15-global-challenges) (accessed: 24.12.2019).
2. Bradley R. Paleoclimatology: reconstructing climates of the quaternary. Elsevier. 2015. 696 p.
3. NOAA National Centers for Environmental Information, State of the Climate: Global Climate Report – December 2018. Available at: [www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/201812](http://www.ncdc.noaa.gov/sotc/global/201812) (accessed: 21.12.2019).
4. Stocker T.F. et al. Climate Change 2013: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change. University Press. 2013. 1535 p
5. NOAA Earth System Research Laboratory, Global Monthly Mean CO<sub>2</sub>. Available at: [www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/global.html](http://www.esrl.noaa.gov/gmd/ccgg/trends/global.html) (accessed: 21.12.2019).
6. Ripple W.J. et al. World scientists' warning of a climate emergency. *BioScience*. 2019. Issue 1. vol. 70. pp. 8–12.
7. Santer B.D. et al. Celebrating the anniversary of three key events in climate change science. *Nature Climate Change*. 2019. vol. 9. no. 3. pp. 180–182.
8. Diem C. There is no climate emergency, say 500 experts in letter to the United Nations. Available at: [www.aei.org/carpe-diem/there-is-no-climate-emergency-say-500-experts-in-letter-to-the-united-nations](http://www.aei.org/carpe-diem/there-is-no-climate-emergency-say-500-experts-in-letter-to-the-united-nations) (accessed: 21.12.2019).
9. Foster P. Half a century of robust climate models. *Nature*. 2017. vol. 545. pp. 296–297.
10. Taylor K.E., Stouffer R.J., Meehl G.A. An overview of the CMIP5 and the experimental design. *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2012. vol. 93. pp. 485–498.
11. Dymnikov V.P., Lykosov V.N., Volodin E.M. [Modelling of climate and its changes: contemporary problems]. *Vestnik Rossijskoj akademii nauk – Herald of the Russian Academy of Sciences*. 2012. Issue 82. no. 3. pp. 227–236. (In Russ.).
12. Lupo A., Kininmonth W., Armstrong J.S., Green K. Global climate models and their limitations. *Climate change reconsidered II: Physical Science*. 2013. vol. 9. 139 p.
13. Wang Z., Wu J., Liu C., Gu G. Integrated assessment models of climate change economics. Springer Singapore. 2017. 181 p.
14. Pindyck R.S. The use and misuse of models for climate policy. *Review of Environmental Economics and Policy*. 2017. vol. 11. pp. 100–114.
15. Nordhaus W. Scientific and economic background on DICE models. Available at: <https://sites.google.com/site/williamdnordhaus/dice-rice> (accessed: 04.12.2019).
16. Board O.S., National Research Council. Climate intervention: Carbon dioxide removal and reliable sequestration. National Academies Press. 2015. 154 p.
17. Board O.S., National Research Council. Climate intervention: Reflecting sunlights to cool Earth. National Academies Press. 2015. 260 p.
18. Soldatenko S.A. Weather and climate manipulation as an optimal control for adaptive dynamical systems. *Complexity*. 2017. vol. 2017. 12 p.
19. Meinshausen M. et al. The RCP greenhouse gas concentrations and their extensions from 1765 to 2300. *Climatic Change*. 2011. vol. 109. no. 1-2. pp. 213–241.

20. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. Optimal control of aerosol emissions into the stratosphere to stabilize the Earth's climate. *Atmospheric and Oceanic Physics*. 2018. vol. 54. pp. 480–486.
21. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. Optimal control for the process of using artificial sulfate aerosols for mitigating global warming. *Atmospheric and Oceanic Optics*. 2019. vol. 32. pp. 55–63.
22. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. [On the selection of control parameters in modelling of purposeful modification of weather and climate processes]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 1(44). pp. 153–180. (In Russ.).
23. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. On the possible use of geophysical cybernetics in climate manipulation (geoengineering) and weather modification. *WSEAS Transactions on Environment and Development*. 2015. vol. 11. pp. 116–125.
24. Soldatenko S.A. Estimating the impact of artificially injected stratospheric aerosols on the global mean surface temperature in the 21st century. *Climate*. 2018. vol. 6. no. 4. pp. 85.
25. Gaskarov D.V. et al. *Vvedenie v geofizicheskuyu kibernetiku* [An introduction to geophysical cybernetics and environmental monitoring]. SPb: SPbGUVK. 1998. 165 p. (In Russ.).
26. Wiener N. *Cybernetics or control and communication in the animal and the machine*. Technology Press. 1948. 194 p.
27. Wiener R. *Cybernetics and society: The human use of human beings*. Houghton Mifflin. 1950. 241 p.
28. Sickles R.C., Zelenyuk V. *Measurement of productivity and efficiency*. University Press. 2019. 626 p.
29. Fonu U.P. *World Economic Outlook: Seeking Sustainable Growth-Short-Term Recovery. Long-term challenges* (International Monetary Fund Publications: Washington DC). 2017. 284 p.
30. Rozenwasser E., Yusupov R. *Sensitivity of automatic control systems*. CRC Press. 2019. 456 p.
31. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. Estimating the influence of thermal inertia and feedbacks in the atmosphere–ocean system on the variability of the global surface air temperature. *Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019. vol. 56. pp. 591–601.
32. Soldatenko S., Colman R. Climate variability from annual to multi-decadal timescales in a two-layer stochastic energy balance model: analytic solutions and implications for general circulation models. *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography*. 2019. vol. 71. no. 1. pp. 1–15.
33. Soldatenko S.A., Yusupov R.M. [Sensitivity and feedback loops in a zero-dimensional climate model in the context of weather and Earth's climate control]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 52. pp. 5–31. (In Russ.).
34. Gambhir A. et al. A review of criticisms of Integrated Assessment Models and proposed approaches to address these, through the lens of BECCS. *Energies*. 2019. vol. 12. no. 9. pp. 1747.
35. Pindyck R.S. Climate change policy: What do the models tell us? *Journal of Economic Literature*. 2013. vol. 51. pp. 860–872.
36. Lazo J.K., Lawson M., Larsen P.H., Waldman D.M. United States economic sensitivity to weather variability. *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2011. vol. 92. no. 6. pp. 709–720.
37. Crepin A.S., Karcher M., Gascard J.C. Arctic climate change, economy and society (ACCESS): Integrated perspectives. *Ambio*. 2017. vol. 46. no. 3. pp. 341–354.
38. Katssov V.M., Porfir'ev B.N. [Assessment of the macroeconomic effects of climate change in the Russian Federation for the period up to 2030 and further perspectives].

- tives (report summary)]. *Trudy Glavnoj geofizicheskoj observatorii im. A.I. Voejkova* [Proceedings of the Main Geophysical Observatory named after A.I. Voeikov]. 2011. vol. 563. pp. 7–59. (In Russ.).
39. Akent'eva E.M. et al. *Doklad o klimaticeskikh riskah na territorii Rossijskoj Federacii* [Report on climate risks in the Russian Federation]. GGO im. A.I. Voejkova. 2017. 106 p. (In Russ.).
  40. Soldatenko S.A. et al. [On the assessment of climate risks and vulnerability of natural and economic systems in the marine Arctic zone of the Russian Federation]. *Problemy Arktiki i Antarktiki – Arctic and Antarctic Research*. 2018. vol. 1(64). pp. 55–70. (In Russ.).
  41. Hallegatte S., Green C., Nicholls R.J., Corfee-Vorlot J. Future flood losses in major coastal cities. *Nature Climate Change*. 2013. vol. 3. no. 9. pp. 802–806.
  42. Kopp R.E. et al. Probabilistic 21st and 22nd century sea-level projections at a global network of tide-gauge sites. *Earth Future*. 2014. vol. 2. no. 8. pp. 383–406.
  43. Taylor K.E., Stouffer R.J., Meehl G.A. An overview of CMIP5 and the experiment design. *Bulletin of the American Meteorological Society*. 2011. vol. 93. pp. 485–498.
  44. Colman R.A., Power S.B. What can decadal variability tell us about climate feedbacks and sensitivity? *Climate Dynamics*. 2018. vol. 51. pp. 3815–3828.
  45. Soldatenko S.A. Estimated impacts of climate change on eddy meridional moisture transport in the atmosphere. *Applied Sciences*. 2019. vol. 9. no. 23. pp. 4992.
  46. Ginzburg A.S., Demchenko P.F. Anthropogenic meso-meteorological feedbacks: A review of recent research. *Atmospheric and Oceanic Physics*. 2019. vol. 55. pp. 573–590.
  47. Hasselmann K. Stochastic climate models. Part I. Theory. *Tellus A*. 1976. vol. 28. pp. 473–485.
  48. Middlemas E., Clement A. Spatial patterns and frequency of unforced decadal scale changes in global mean surface temperature in climate models. *Journal of Climate*. 2016. vol. 29. no. 17. pp. 6245–6257.
  49. Geoffroy O. et al. Transient climate response in a two-layer energy-balance model. Part I: Analytical solution and parameter calibration using CMIP5 AOGCM experiments. *Journal of Climate*. 2013. vol. 26. no. 6. pp. 1841–1857.
  50. Demchenko P.F., Semenov V.A. Estimation of uncertainty in surface air temperature climatic trends related to the internal dynamics of the atmosphere. *Doklady Earth Sciences*. 2017. vol. 476. pp. 1105–1108.
  51. Ohtilev M.Yu. [The concept and technology of proactive business lifecycle management]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2020. Issue 63. no. 1. pp. 158–161. (In Russ.).
  52. Ronzhin A.L. [Application of radio frequency identification technology to build a system for controlling the turnover of on-board kitchen equipment]. *Voprosy radioelektroniki. Seriya: Tekhnika televideniya – Questions of radio electronic. Series: Television Technique*. 2020. vol. 1. pp. 3–10. (In Russ.).

V. KOSTJUKOV, M. MEDVEDEV, V. PSHIKHOPOV  
**OPTIMIZATION OF MOBILE ROBOT MOVEMENT ON A PLANE  
WITH FINITE NUMBER OF REPELLER SOURCES**

*Kostjukov V., Medvedev M., Pshikhopov V.* **Optimization of mobile robot movement on a plane with finite number of repeller sources.**

**Abstract.** The paper considers the problem of planning a mobile robot movement in a conflict environment, which is characterized by the presence of areas that impede the robot to complete the tasks. The main results of path planning in the conflict environment are considered. Special attention is paid to the approaches based on the risk functions and probabilistic methods. The conflict areas, which are formed by point sources that create in the general case asymmetric fields of a continuous type, are observed. A probabilistic description of such fields is proposed, examples of which are the probability of detection or defeat of a mobile robot. As a field description, the concept of characteristic probability function of the source is introduced; which allows us to optimize the movement of the robot in the conflict environment. The connection between the characteristic probability function of the source and the risk function, which can be used to formulate and solve simplified optimization problems, is demonstrated. The algorithm for mobile robot path planning that ensures the given probability of passing the conflict environment is being developed. An upper bound for the probability of the given environment passing under fixed boundary conditions is obtained. A procedure for optimizing the robot path in the conflict environment is proposed, which is characterized by higher computational efficiency achieved by avoiding the search for an exact optimal solution to a suboptimal one. A procedure is proposed for optimizing the robot path in the conflict environment, which is characterized by higher computational efficiency achieved by avoiding the search for an exact optimal solution to a suboptimal one. The proposed algorithms are implemented in the form of a software simulator for a group of ground-based robots and are studied by numerical simulation methods.

**Keywords:** Path Planning, Conflict Environment, Movement Optimization, Characteristic Probability Function.

**1. Introduction.** The task of a mobile robot path planning is one of the most relevant problems of modern robotic science [1-5]. When planning paths in the conflict environment it is necessary not only to take into account the local obstacles, but also the presence of areas that impede the mobile robot from completing its tasks. The sources of such areas can be detecting equipment, sources of radioactive or chemical pollution, etc. This raises the problem of avoiding the effect of such sources by the mobile robot [6]. The popular approach to solving this problem in uncertain conditions is the use of AI technologies [7-9] and methods that utilize the probability theory or risk functions [10–18].

Thus, in the papers [7-9] the different aspects of the neural network use related to the planning of movement tasks in the conflict environments are considered. P. Agrawal and H. Agrawal [7] solve the problem of the evasive objects group persecution. Hunters have to recognize the friendly robot groups and perform the path planning to persecute the evasive objects.

Developed neural network solves the persecution problem taking into account the delays and limitations of communication channels. The network predicts the evasive objects' motion. The proposed approach advantages in an obstructed environment are demonstrated by simulations. The paper [8] proposes a biologically inspired neural algorithm based on the dynamic threat assessment. The algorithm is a combination of a fuzzy set, neural network, artificial potential field, and Bellman optimization procedure. The effectiveness of the presented algorithm is demonstrated by experimental results. In the article [9] the problem of autonomous collision-avoidance of mobile robots in dynamic environments is considered. The system includes a threat-avoidance unit based on the neural estimation of threat degree.

The articles [10-18] present the results based on using the risk function.

The possibilities of using generalized risk functions to solve optimization tasks in case of uncertainties are thoroughly observed in the general review [10].

The work [11] sets the optimizations problems of minimizing the integral of that function along the target trajectory, basing on the definition of the risk function, which is set in each point within the space where the sources are located. This trajectory can be imposed with various restrictions, among which the minimum trajectory length  $l$  and the presence of an upper limit of this length are particularly important.

The authors use the risk function for finding an object at the point  $M$  from the sources action  $K$  in the form of

$$r(M) = \sum_{k=1}^K \sigma_k / d_k^2(M),$$

where  $\sigma_k$  is the risk weighting of the  $k^{\text{th}}$  source with the center at the point  $O^{(k)}$ ;  $d_k(M)$  is the distance between  $O^{(k)}$  and  $M$ . Next, the indicated optimization problem is set with the constraint  $l \leq l_{\min}$ , where  $l$  and  $l_{\min}$  are the length of the optimized trajectory and its maximum permissible length. In the case of a single source, this problem can be solved analytically by the methods of variations calculus. For the case of many sources, the authors proposed the nonlinear programming algorithm based on the optimization of finite transitions between the nodes of a special graph that takes into consideration the weight coefficients of edges in the form of distances between the adjacent vertices and the respective transmission costs in the form of the risk function integrals on these edges.

The papers [12, 13] show that in case of an object, moving with changing speed in the neighborhood with one source, the optimal trajectory

and speed-changing mode are such that the current value of the summarized “signal” from the source must be constant in time. In the papers [14 – 16] this property is generalized in the cases of several sources, moving and heterogeneous observers.

In [17], the authors introduce a functional that estimates the risk of detecting the  $j^{\text{th}}$  moving object of a group that operates jointly (for example, to break through the enemy defenses) by one of the  $N$  sensors that can summarize the signals incoming at the same time:

$$R_j = \int_0^{T_j} \sum_{i=1}^N \frac{(v_j(t))^m}{(\rho_{ij}(t))^k} dt,$$

where  $\rho_{ij}(t)$  and  $v_j(t)$  are the distance to the  $i^{\text{th}}$  sensor and the velocity of the  $j^{\text{th}}$  moving object of a group;  $T_j$  is the approximate time of this object to reach its target point. Here the “signal” on each sensor at a given moment of time reflects the respective summand, which depends from  $\rho_{ij}(t)$  and  $v_j(t)$ . The exponent  $k$  characterizes the physical field in which the detection is carried out, and the exponent  $m$  is the dependence of the emitted signal’s intensity level from the object’s velocity. Thus, for example, for a primary hydroacoustic field in a shallow sea  $k = 1$ ;  $k = 2$  corresponds to a thermal field, a primary electromagnetic field or a primary hydroacoustic field in the deep sea; for the magnetic field detectors  $k = 3$ , and in case of the active detection mode for electromagnetic or hydroacoustic static fields  $k = 4$ .

Next, the various modifications of the introduced functionality are introduced to build the behavior models for the moving object groups, which differ by the information organization of their elements, i.e. by their degree of awareness about each other's actions and sensors. The resulting functionals already take into account the mentioned organization. There are the given results of a simulation of an enemy defense breakthrough by the groups with the different informational organization. The common aspect of all models constructed this way is the operation with the concept of detection risk instead of the concept of detection probability.

For example, introduced by the authors for the “non-cooperative” model risk function:

$$r(x, y) = \min \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{(\rho_i(x, y))^k}; 1 \right\},$$

where  $\rho_i(x, y)$  is the distance from the current location of the object to the  $i^{\text{th}}$  sensor does not correctly reflect any probability. First, the necessity to

exclude the first argument of the function  $\min(\cdot, 1)$ , the absence of smoothness of this dependence on of the object's position indicates the artificial nature of approximation of the true probability function of the considered event – the detection of a moving object by sensors at a given point. Second, the introduced function does not allow us to evaluate the probabilities of detection by sensors or the probability of damage from fire sources or other adverse factors of the enemy when the assumption of the instantaneous action of these sources of counteraction has already been incorrect. Thus, the model constructed by the authors does not permit to accumulate correctly the probability of damage/detection during the final mission time in the general case.

In [18], the authors enhance the problem set in [17] by introducing the factor of concentration of individual moving objects in a small area, which increases the overall risk of their detection by the sensor system. The  $p_i$  value, introduced here by the authors, formally reflects the probability of detecting a moving object by a group of sensors under conditions of finding other objects is also introduced by the cut-off principle of the subintegral expression of the respective risk function using the function  $\min(\cdot, 1)$ . The authors themselves notice that the issue of the correct representation of this probability has not been fully considered by them.

In addition, please, note that the problem of estimation of the probability of damaging the moving object in case of its detection is not raised in [17, 18] as well.

The common thing of works [10-18] is the use of the risk function and absence of methods to calculate the probabilities of spotting, damage, etc. For example, an extreme trajectory, which can be obtained by an effective numerical method for optimizing risks on a network indirect graph [10], needs to determine this probability. Indeed, knowing the optimal trajectory does not yet guarantee the completion of the mission by a single mobile object or a group of mobile objects if there is no way to calculate the probability of completing a mission. Having a methodology for calculating the probability of completing a mission, which is connected with passing the trajectory, will allow us in some cases to choose acceptable trajectories.

The papers [17, 18] use the concept of the probability of object's damage in case of its detecting, but this probability is not considered as a function of trajectory and/or moving speed, because it is set as an external constant.

The papers [19-22] also present different methods of optimizing the risk function in the conflict environment. The method of planning of robot's behavior in an environment with threats is developed in the article [19]. It proposes the bioinspired system that realizes the global and local robot's

behavior. On the local level, the risk function is used, which is optimized with the proposed AI system. Also, in the mentioned paper, the collision probabilities are not introduced, and the risk function depends on distances and experimentally adjusted parameters. In the article [20] the problem of visiting the target points by one or several robots in the hostile environment is solved. Heuristic algorithms for obtaining optimal paths from the point of view of the probability of the task are proposed in the article. The article uses probabilities set by default, which calculation method is not proposed.

The study [21] considers the problem of finding a reliable path in an uncertain conflict environment, which is solved by minimizing the expected risk. To solve the problem, a topological map is compiled.

The authors of [22] propose the method of path planning in the stochastic environment. This method maximizes the probability of arriving at a given point within the given time interval. The authors describe the probability of passing the area using Levi's distribution. The problem is solved for an environment represented by the graph.

Thus, the problem of calculation of passing probability for random trajectories in conditions of random sources, also including their heterogeneity, is relevant and not well studied.

It should be mentioned that the problem of moving in the area with the sources that create threats for completing the assigned mission has much in common with movement in the environment with the obstacles. To solve this problem a significant number of methods are used which are based on potential fields [23-26], dynamic (including unstable) forces [4, 5, 27], graph-searching algorithms [28-31], and assessment of geometrical complexity of the environment [32].

Potential fields allow us to find the optimal path with a rigorous justification of the stability of the impact of the introduced virtual forces. However, the method restrictions are that it can guarantee obstacle avoidance, but the particular look of the planned trajectories cannot be exactly forecasted.

Dynamic (including unstable) fields make it possible to efficiently solve the problem of local minima; however, predicting the robot's trajectory in advance also seems problematic.

In many cases the discretized graph-searching algorithms allow us to find paths in the conflict and uncertain environments more effectively. Thus, [28] presents the algorithms of calculating the shortest path basing on the piecewise-linear discrete model of the configuration space, which permits to use it for random topology and dimensionality. The proposed method builds the geodesic path in the metrical space more precisely than the Dijkstra's algorithm.

The article [29] considers the multicomponent procedure that includes ant colony optimization and A\*. The 3-D space is considered. There is a given set of target points for which the ant colony optimization calculated the sequence of passage on large cells. The path plan is clarified using A\*, which takes into account the local obstacles.

The paper [30] presents the algorithm of planning in the 3-D environment that is presented in the form of the probability graph. To build the graph, a sufficient number of points-nodes are generated, the coordinates of which are random variables with a uniform distribution law inside an admissible region of space. On this graph, the permissible movements are highlighted without taking into account the obstacles. Then, using the algorithm A\* and potential fields, the obstacles are taken into account and the path is formed.

The discrete searching procedures allow us to find the suboptimal paths with insignificant calculation expenses, but the obtained trajectory may need further processing, for example, path smoothing. From this point of view, the continuous methods can at once take into account the characteristic peculiarities of passing the conflict areas by the robots.

The present article is organized in the following way. Section 2 formulates the problem to be solved and gives a probabilistic description of the source with a local field of action. The description of the characteristic probability function is introduced and the basic assumptions are made. In section 3, based on the assumptions made, the characteristic probability function in continuous form for one source is proposed. In section 4, based on the finite-difference introduction, the function is introduced, which allows us to approximately calculate the probability of robot's non-detecting when it is moving by a random trajectory in the area of the source. The obtained result is generalized in the case of several repeller sources. Also, the expression for describing the probability of a robot's non-detecting is given in continuous form. Section 5 presents the examples of optimization problems connected with robot's movement within the area of one or several repeller sources. Chapter 6 contains the examples of numerical simulation.

**2. Problem statement.** Let us assume that each repeller source  $S$  has a center  $O$  in small neighborhood of which its radiation is maximal. For definiteness, we assume that the source creates probing radiation and we estimate the probability of the object passing undetected in the field of this source. However, all subsequent conclusions can be transferred to the sources of other types, in particular, creating damaging factors.

We will single out the sources whose scope is the entire subspace of the Euclidean plane that is valid for laying target trajectories of a continuous

type, and sources with a scope limited by some figure inside the specified subspace, for example, by a circular sector.

Basing on the information about technical characteristics of this source it is possible to construct a dependence of the probability  $q_s(Tr)$ ,  $q_s \leq 1$  of a mobile robot passing undetected/undamaged from the particular trajectory  $Tr$  defined as a vector function of time. We will consider only the trajectories that can be presented as a set of a finite number of parameters.

Let us divide the initial object's movement trajectory  $Tr$  by separate sections  $\Delta r_i$ ,  $i=1,2,\dots,N$ ; each section corresponding to an elementary trajectory ( $Tr_i$ ).

We introduce the following probabilistic space  $(\Omega_{Tr}, F, P)$ , where  $\Omega_{Tr}$  is the set of elementary events corresponding to the given trajectory  $Tr$ ,  $F$  is the admissible set of the subsets  $\Omega_{Tr}$ ;  $P$  is the countably additive function on the set  $\forall F \in F: P(F) \leq 1, P(\Omega_{Tr})=1, P(\emptyset)=0$ .

The set  $\Omega_{Tr}$  contains of: A) finite set  $\widehat{\Omega}_{Tr}$  of events  $\omega(A_i A_{i+1}) \in \Omega$ ,  $A_i A_{i+1} \equiv Tr_i \subset Tr$  – random elementary trajectory section (of the separation described above) of the type:

$$\omega(A_i A_{i+1}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{"Object moving along the } Tr \text{ will be detected} \\ \text{on the section } A_i B_i \text{ of the given trajectory } Tr \end{array} \right\}.$$

B) one elementary event  $\omega^*$ :

$$\omega^* = \left\{ \text{"Object moving along the } Tr \text{ will not be detected} \right\}.$$

Thus,  $\Omega_{Tr} = \widehat{\Omega}_{Tr} \cup \omega^*$ .

Notice, that the probability value for each event of the type  $\omega(A_i A_{i+1})$  is calculated according to the rule:

$$P[\omega(Tr_i)] = q_s(AA_i) \cdot [1 - q_s(Tr_i)],$$

where  $q_s(Tr_i)$  is the probability of the object's non-detecting on the elementary section  $A_i A_{i+1}$  of the trajectory  $Tr$  irrelatively to the already passed section  $AA_i$  of this trajectory;  $q_s(AA_i)$  is the probability of the object's non-detecting when passing the section  $AA_i$ .

If for each section  $Tr_i$  we determine its passing probability  $q_{si}(Tr_i)$  then the value of the probability function of passing the mobile robot *undetected* along the entire trajectory  $q_s(Tr)$  is calculated using the expression [33]:

$$q_s(Tr) = \prod_{i=1}^N q_{si}. \quad (1)$$

It needs to be mentioned that for the sources of continuous type we should use the division mentioned above to the entire trajectory, since, according to the definition of such sources, the entire trajectory is within their scope (see Fig. 1). In case of discrete sources it is enough to divide by sections only those parts of the trajectory that are within the respective figure which is the combination of scopes of these sources (see Fig. 2).

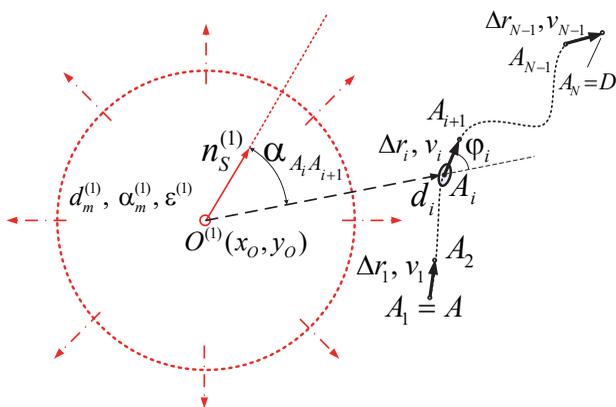


Fig. 1. Division of the final trajectory into elementary sections for the case of a continuous source: the entire trajectory is divided

In case of rather small sections  $\Delta r_i$  the probability  $q_s(Tr)$  can be calculated using the limit

$$q_s(Tr) = \lim_{|\Delta r|_{\max} \rightarrow 0} \left[ \prod_{i=1}^{N(|\Delta r|_{\max})} q_{S,i} \right], \quad (2)$$

where  $|\Delta r|_{\max} = \max_{\{i\}} [|\Delta r_i|]$ .

Thus, the problem can be reduced to determining the values of the function  $q_s$  on rather small sections of the trajectory  $Tr$  within each of which the change in the distance from the object to each source can be neglected, as well as the change of the object's velocity.

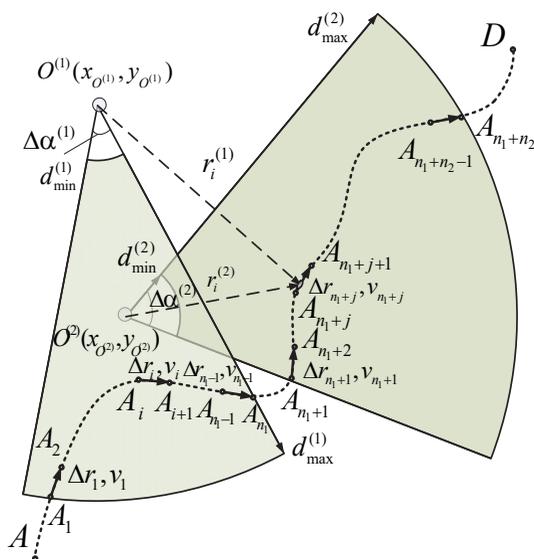


Fig. 2. Division of a finite trajectory into elementary sections for the case of discrete sources: in the general case, not the entire trajectory is divided

Assume that  $q_{si}$  is the monotonically increasing function of the distance  $d_i$  between the geometrical center  $M_i$  of the area  $Tr_i$  and the source's center  $O$ . This assumption is based on the fact that the probability of the robot spotting is monotonically increasing with decreasing distance to the center  $O$ . Assume that the source is directed. For simplicity, we assume that there is one characteristic direction of the maximum of its influence on the object and it is described by the unit vector  $n_s$ . If  $\alpha_i$  is the angle between  $n_s$  and direction drawn from the source's center  $O$  to the point  $M_i$ , then the function  $q_{si}$  is monotonically increasing with the increase of the module  $\alpha_i$ . In case of the discrete source we assume that the vector  $n_s$  simultaneously sets the direction of the axis of symmetry of the circular cone – the range of action of such source according to the accepted assumption.

Let us describe the characteristic change of the source's influence depending on the distance using the parameter  $d_m$ , and the respective change by angle using the parameter  $\alpha_m$ .

Next, assume that the source has response inertia and detection error. The latter can be caused by the influence of interference and errors in the identification system associated with the source. Let  $\varepsilon$  be the effective frequency of the source, which is the greater, the lower the

indicated inertia is. Thus, in case of fixed  $\varepsilon$ , the function  $q_{si}$  depends on the time  $T_i$  of passing the trajectory  $Tr_i$ . Let us assume that  $q_{si}$  is the monotonically decreasing function  $T_i$ . The bigger is,  $\varepsilon$  the lower is the probability of the objects' passing given the fixed time  $T_i$  of being within the source's field.

Notice, that in general case  $q_{si}$  depends on the orientation of the vector  $\Delta r_i$  in relation to the direction  $OM_i$ . However, in case of rather small  $\Delta r$  the influence of orientation can be neglected.

For the discrete type sources it might be appropriate to introduce the lower boundaries for values  $d$  and  $T$ :  $d_{\min}$  и  $T_{\min}$ . For example, the restrictions on minimum detection distance can be connected with the peculiarities of the beam pattern. The minimum duration of the object's presence in the field of the source can be determined by the necessity of signal accumulation or inertia of identification or guidance systems.

Thus, we will characterize the sources of both types by the set of values:  $\tilde{S}\{S, O, n_s, d_m, \alpha_m, \varepsilon\}$ , moreover  $S$  (the scope) for the continuous type source coincides with the plane subspace indicated above, within which the movements of the object are permissible, and for the discrete type source it coincides with the indicated above circled cone with the center  $O$ , opening angle  $\Delta\alpha^{(1)}$ , directing vector of the symmetry axis  $n_s$ , minimum and maximum radiuses  $d_{\min}$  and  $d_{\max}$  ( $d_{\min}$  can be zero).

*Definition 1.* The value  $q_{0s}(d_i, \alpha_i, T_i)$  we will call the *characteristic probability function* of the source  $\tilde{S}$ , if for rather small sections  $Tr_i$  it determines the probability of their passing, i.e.  $q_{si}(Tr_i) = q_{0s}(d_i, \alpha_i, T_i)$ .

**3. Synthesis of the characteristic probability function.** According to the Definition 1, the function  $q_{0s}(d_i, \alpha_i, T_i)$  satisfies the following Statement 1.

*Statement 1.* The probability of robot detection by the considered source remains unchanged in two cases:

1. The mobile robot is at rest for a time  $T$  at some point  $M$  determined by the distance  $d$  and the angle  $\alpha$ ;
2. The mobile robot is moving for a time  $T$  along the circular arc determined by the radius  $d$  and the angle  $\alpha$ .

The indicated cases are presented on the example of continuous type source in Figure 3.

Let us introduce two events. Event 1  $Q_1(\tilde{S}, d, T, \alpha)$  means that the robot is not detected while being at rest. Event 2  $Q_2(\tilde{S}, d, T, \alpha)$  means that the robot is not detected while moving along the respective circular arc.

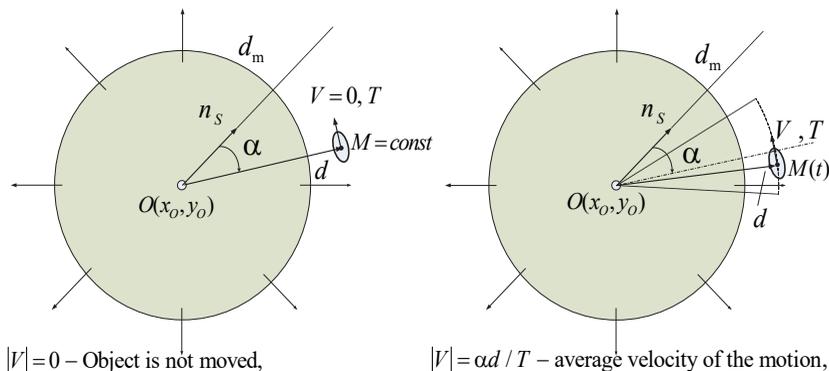


Fig. 3. Conditions for the constancy of the probability of detecting a robot appearing in Statement 1

Radial arrows in Figure 3 show that the source's scope is exceeding the circle with the radius  $d_m$  that has the meaning of characteristic influence of the source over the distance to the object.

According to the definition 1, statement 1, as well as the assumptions made in section 2 regarding the properties of the function  $q_{0s}(d, \alpha, T)$  on rather small trajectory  $Tr$ , we propose the following function:

$$q_{0s}(d, T, \alpha) = \exp\left\{-\varepsilon T \exp\left[-(d/d_m)^{2p} - |\alpha/\alpha_m|^{2s}\right]\right\}, \quad (3)$$

where  $p, s \in R_+$ ; values  $d_m$  and  $\alpha_m$  are the normalizing divisors for the distance and the angle, respectively.

If we accept the hypothesis of a uniform distribution of the probability of non-detection of the robot in azimuth, then expression (3) will take the form:

$$q_{0s}(d, T) = \exp\left\{-\varepsilon T \cdot \exp\left[-(d/d_m)^{2p}\right]\right\}, \quad (4)$$

Figure 4 shows the dependencies of the characteristic probability function of the type (3) at  $\alpha=0$  from the distance  $d$  for different time spent by the robot in the field  $T=1, 2, 4, 10$  sec,  $2p=2, 2p=4, d_m=2$  m,  $\varepsilon=10 \text{ sec}^{-1}$ .

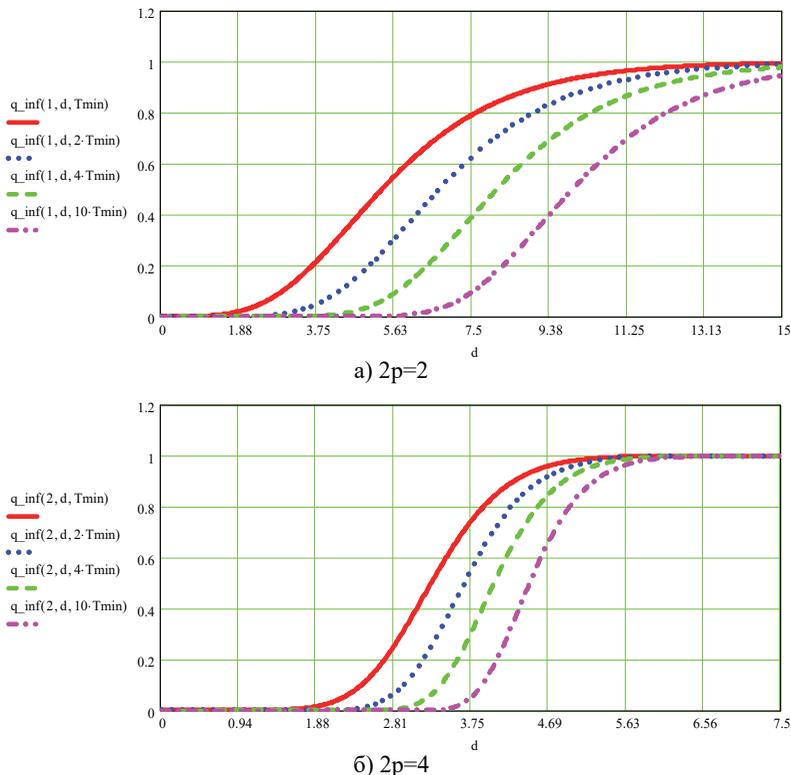


Fig. 4. Characteristic probability function

**4. Probability of non-detection of the robot moving along random trajectory in the field of one or several sources.** Let us consider the robot's movement along the random trajectory  $AD$  (Fig. 1), which travels through the scope of the source.

Let us divide the part of the trajectory into rather small intervals  $A_i A_{i+1} = \Delta r_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N-1$ . Obviously, for sufficiently big  $N$  we can neglect the change of the distance  $d$  and approximately assume:

$$q_{si}(A_i A_{i+1}) \approx q_{0s}(d_i, |\Delta r_i / v_i|, \alpha_i), \quad (5)$$

where  $q_{si}(A_i A_{i+1})$  is the desired probability of the object passing the area  $A_i A_{i+1}$  undetected;  $(d_i, \Delta r_i, v_i)$  are the distance to the source, vector of length, and velocity module of the  $i^{\text{th}}$  section of the trajectory.

For the correct use of the indicated approximation, we require that for each  $\Delta r_i$  the following condition is fulfilled:

$$|\Delta r_i| \cos \varphi_i \leq k_d d_{\max}, \quad (6)$$

where  $k_d \ll 1$  is the parameter that characterizes the allowable maximum value of projection  $\Delta r_i$  on the radius-vector connecting the source's center with the initial point  $A_i$  of the area  $A_i A_{i+1}$ ;  $\varphi_i$  is the angle between the direction from the source to the point  $A_i$  and the directed segment  $\Delta r_i$ .

The fulfillment of condition (6) allows us to use of the expression (5) for an approximate calculation of the probability of the robot non-detection.

If the obtained division fulfills the condition (6) then, according to the product theorem of event probabilities following one another [33], we obtain that the probability  $q_S(AD)$  of the robot's passing along the trajectory  $AD$ , taking into account (5), (6) and (3), determined in the following way:

$$\begin{aligned} q_S(AD) &= \prod_{i=1}^{N-1} q_S(A_i A_{i+1}) \approx \prod_{i=1}^{N-1} q_{0S}(d_i, |\Delta r_i| / v_i, \alpha_i) = \\ &= \exp \left[ -\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{N-1} (|\Delta r_i| / v_i) \cdot \exp \left[ -\left( \frac{d_i}{d_m} \right)^{2p} - \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_m} \right|^{2s} \right] \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

The expression (7) can be generalized in case of a finite number of sources of the observed type under the assumption of their independence from each other. Suppose there are  $K$  sources  $\tilde{S}^{(k)} = \tilde{S}^{(k)} \{ S^{(k)}, O^{(k)}, n_S^{(k)}, d_m^{(k)}, \alpha_m^{(k)}, \varepsilon^{(k)} \}$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . In this case, the probability of the robot's passing undetected along the trajectory  $AD$  is determined by the expression

$$\begin{aligned} q_S(AD) &\approx \prod_{k=1}^K q_{S^{(k)}}(AD) = \\ &= \exp \left[ -\sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} \cdot \sum_{i=1, i \in \{N^{(k)}\}}^{N-1} (|\Delta r_i| / v_i) \cdot \exp \left[ -\left( \frac{d_i^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right)^{2p} - \left| \frac{\alpha_i^{(k)}}{\alpha_m^{(k)}} \right|^{2s} \right] \right], \end{aligned} \quad (8)$$

where  $q_{S^{(k)}}(AD)$  is the probability of the robot's passing undetected by the  $k^{\text{th}}$  source. It is assumed here that to calculate each probability  $q_{S^{(k)}}(AD)$  the initial trajectory is divided by the same system of points  $A_i A_{i+1} = \Delta r_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N-1$  that fulfill the correlation (5) for each source (see Fig. 3); in case of fixed  $k$  the summation over  $i$  is carried out over the subset of indices  $i \in \{N^{(k)}\}$ , which correspond only to the sections of the division within the area  $S^{(k)}$ . All other values with the upper index  $k$  have the meaning similar to the considered above for one source.

Now let us obtain the expression for the probability of non-detection of the robot moving along the random trajectory in the continuous form. By tending the upper limit for the lengths of division sections in (7) to zero, in the limit we transform (7) to the following expression:

$$q_S(Tr) = \exp \left[ -\varepsilon \cdot \lim_{|\Delta r|_{\max} \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N(|\Delta r|_{\max})-1} \Delta t_i \cdot \exp \left[ -\left( \frac{d_i}{d_m} \right)^{2r} - \left| \frac{\alpha_i}{\alpha_m} \right|^{2s} \right] \right], \quad (9)$$

Where  $\Delta t_i = |\Delta r_i| / v_i$  is the time of object's movement on the elementary linear sector of the trajectory  $\Delta r_i$  with velocity  $v_i$ .

From the expression (9) we obtain:

$$q_S(Tr) = \exp \left[ -\varepsilon \cdot \int_{t_A}^{t_D} \exp \left[ -(d(t) / d_m)^{2r} - |\alpha(t) / \alpha_m|^{2s} \right] dt \right], \quad (10)$$

where  $d(t) = \sqrt{[x(t) - x_O]^2 + [y(t) - y_O]^2}$ ,  $\alpha(t) = \text{acos}(ns, OM(t) / \|OM(t)\|)$ ,  $M(t) = [x(t); y(t)]$ ,  $O = [x_O; y_O]$ ;  $t_A, t_D$  are the moment of the robot being at the starting ( $A$ ) and finishing ( $B$ ) points.

For the source with the function  $q_{0s}(d, \alpha, T)$  that does not depend on the azimuth, basing on the expression (4), in the same way we obtain

$$q_S(Tr) = \exp \left[ -\varepsilon \cdot \int_{t_A}^{t_B} \exp \left[ -(d(t) / d_m)^{2r} \right] dt \right]. \quad (11)$$

**5. Optimization problems of the robot passing in the field of one or several sources. 5.1. The problem of movement in the field of the sources that does not depend on the angle  $\alpha$ .** Let's consider the case of several continuous type sources, where each source is described by the characteristic probability function of the type (4).

Let us assume that the movement is made along the piecewise-linear trajectory  $Tr$  with the points  $\{A_l\}$ ,  $l=1,2,\dots,N_0$  and constant velocity  $v$ .

For several independent sources the probability of passing the considered trajectory without being detected  $q(Tr)$  is determined by the following multiplication

$$q(Tr) \equiv \prod_{k=1}^K q_S^{(k)}(Tr), \quad (12)$$

where  $q_S^{(k)}(Tr)$  is the probability of passing the trajectory under influence of the source  $\tilde{S}^{(k)}$ .

Considering the expressions (11) and (12) and the fact that at a constant movement velocity it is possible to go from the differential of time to the differential of movement, for the piecewise-linear trajectory we obtain:

$$q(Tr) = \exp \left[ - \sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} \cdot I^{(k)} \right], \quad (13)$$

$$I^{(k)} \equiv \frac{1}{v} \sum_{l=1}^{N_0-1} \int_0^{|A_l A_{l+1}|} \exp \left[ - \left( d_{(l)}^{(k)}(\rho) / d_m^{(k)} \right)^2 \right] d\rho, \quad (14)$$

where  $\varepsilon^{(k)}$  and  $d_m^{(k)}$  are the characteristic frequency and distance of the  $k^{\text{th}}$  source;  $d_{(l)}^{(k)}(\rho)$  is the distance from the center of the  $k^{\text{th}}$  source to the integration point on the linear section  $A_l A_{l+1}$ . The value of  $d_{(l)}^{(k)}(\rho)$  is calculated in the following way:

$$d_{(l)}^{(k)}(\rho) = \sqrt{\rho^2 + \left( d_l^{(k)} \right)^2 + 2d_l^{(k)} \rho \cos \varphi_l^{(k)}}, \quad (15)$$

where  $d_l^{(k)} = |O^{(k)} A_l|$ ;  $\varphi_l^{(k)}$  is the angle between the direction  $O^{(k)} A_l$  and the vector  $A_l A_{l+1}$ . The respective geometrical constructions are given in the Figure 5.

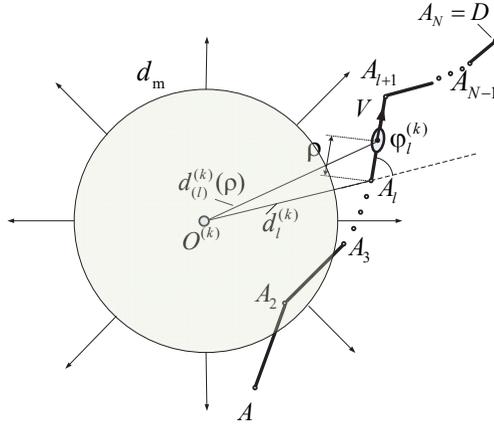


Fig. 5. Determination of the characteristic geometrical values

By performing integration in (14), the summation over  $l$  can be converted to:

$$I^{(k)} \equiv \frac{\sqrt{\pi} d_m^{(k)}}{2\nu} \sum_{l=1}^{N_0-1} \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{d_l^{(k)} \sin \varphi_l^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right)^2 \right] \right\}. \quad (16)$$

$$\left[ \operatorname{sign}(\tilde{\rho}_{2,l}^{(k)}) \operatorname{erf} \left( \left| \tilde{\rho}_{2,l}^{(k)} \right| \right) - \operatorname{sign}(\tilde{\rho}_{1,l}^{(k)}) \operatorname{erf} \left( \left| \tilde{\rho}_{1,l}^{(k)} \right| \right) \right],$$

$$\tilde{\rho}_{1,l}^{(k)} = \frac{d_l^{(k)} \cos \varphi_l^{(k)}}{d_m^{(k)}}, \quad \tilde{\rho}_{2,l}^{(k)} = \tilde{\rho}_{1,l}^{(k)} + \frac{\rho}{d_m^{(k)}}. \quad (17)$$

Here we use the designation of the probability integral [34]:

$$\operatorname{erf}(x) = \left( 2 / \sqrt{\pi} \right) \int_0^x \exp(-\xi^2) d\xi. \quad (18)$$

It is obvious that the function (13) on the set of all possible piecewise-linear trajectories has no global extremum if the number of sources of the observed type is finite. Therefore, the quality functional should include, along with (13), at least one more component. Let such component describe the the requirement of minimizing deviations from the given initial trajectory  $Tr^{(0)}$  with the fixed endpoints  $A_1=A$ ,  $A_{N_0}=D$ . Then we can propose the following optimization function:

$$G(Tr) = \delta d_{m0}^2 q_S(Tr) - (1 - \delta) \rho^2(Tr, Tr^{(0)}) \rightarrow \max, \delta \in (0, 1), \quad (19)$$

where  $d_{m0} = \sum_{k=1}^K d_{\max}^{(k)} / K$  is the normalizing factor for equalizing the dimensions and orders of magnitude of the terms in (19); the value  $\rho$  is the distance between the target and the initial trajectory described by the coordinates  $A_{l0}$ :

$$\rho(Tr, Tr^{(0)}) \triangleq \sqrt{\sum_{l=1}^{N_0} (x_l - x_{l0})^2 + (y_l - y_{l0})^2}, \quad (20)$$

$A_{l0} = (x_{l0}, y_{l0})$ ,  $l = 2, \dots, N_0 - 1$  are the coordinates of the points of the initial trajectory of the null approximation;  $A_l = (x_l, y_l)$  are the coordinates of the points of the trajectory. Parameter  $\delta \in (0, 1)$  characterizes the weights of each component of the criterion (19).

Let us consider an approximate solution to the problem of optimal motion in the field of repeller sources according to the criterion (19).

Due to the high complexity of the function  $q_S(Tr)$  in the functional (19), we will consider the other function, which behavior is close to the  $q_S(Tr)$ . As such a function, we choose the distance from the current point to the geometric center of the repeller sources  $\tilde{O}$ .

Then the functional (19), taking into account the expression (20) takes the form:

$$G^*[\{X^l\}] = \delta \sum_{k=1}^K \sum_{l=2}^{N-1} |A_l - O^{(k)}|^2 - (1 - \delta) \sum_{l=2}^{N-1} |A_l - A_{l0}|^2. \quad (21)$$

After calculating the partial derivatives of the function (21), using the coordinates  $(x_l, y_l)$ , we find the stationery point  $A_{l1}$ :

$$A_{l1} = \frac{\delta K \tilde{O} - (1 - \delta) A_{l0}}{\delta(K + 1) - 1}, \quad (22)$$

$$\tilde{O} = \sum_{k=1}^K O^{(k)} / K.$$

Index 1 in the expression (22) means the first iteration of finding the stationery point.

After calculating the second derivative of the expression (21), let us find the condition for local maximum in the form of

$$\delta < 1 / (K + 1). \quad (23)$$

In case of fulfillment of the condition (23), according to the Sylvester's criterion [35], we have the alternating signs of all the subminors of the corresponding Hessian matrix, starting with the negative one, which is easily established due to the diagonal form of this matrix. This indicates that at the point (22) there is the local maximum of the function (21). Moreover, this maximum is global, because this function has no other stationary points besides (22). That is why  $G^*[A_{11}] > G^*[A_{10}]$ . Points  $A_{11}$  are the coordinates of the suboptimal trajectory of the first iteration.

If we now consider the trajectory of the first iteration as the original trajectory, and apply the transformations described above, then we obtain the expression:

$$A_{12} = \frac{\delta [\delta (K + 1) - 1 + \delta - 1] K \tilde{O} - (1 - \delta)^2 A_{10}}{[\delta (K + 1) - 1]^2}. \quad (24)$$

Points  $A_{12}$  are the coordinates of the suboptimal trajectory of the second iteration.

By carrying out further calculations using the method of mathematical induction we obtain the following expression:

$$A_{1u} = \frac{\delta \sum_{m=1}^u \left\{ [\delta (K + 1) - 1]^{u-m} (\delta - 1)^{m-1} \right\} K \tilde{O} + (\delta - 1)^u A_{10}}{[\delta (K + 1) - 1]^u}. \quad (25)$$

By simplifying the last expression, we obtain:

$$A_{1u} = \tilde{O} + (A_{10} - \tilde{O}) s^u, \quad (26)$$

$$s = \frac{1 - \delta}{1 - \delta(K + 1)}. \quad (27)$$

Under the condition (24) the expression (27) is greater than one, therefore, with an increase in the iteration number, the coordinates  $A_{1u}$  becomes more distant from the geometric center of the sources  $\tilde{O}$ .

We show that as the iteration number  $u$  increases, the first term of the criterion (21) monotonically increases. Let us consider the first term of the criterion (21) as the function of parameter  $b=s^u$ . By substituting the expression (26) to the first term (21) we obtain:

$$G_1^*(b) = \delta \sum_{k=1}^K \sum_{l=2}^{N-1} \left| \tilde{O} + (A_{l0} - \tilde{O})b - O^{(k)} \right|^2. \quad (28)$$

By differentiating (28) we obtain:

$$\partial_b [G_1^*(b)] = 2b \sum_{k=1}^K \sum_{l=2}^{N-1} |A_{l0} - \tilde{O}|^2. \quad (29)$$

According to (29), the function (28) reaches the minimum at the point  $b=0$  and monotonically increases as  $b$  increases. Moreover, as the iteration number increases, the probability  $q_s(Tr)$  in (19) should also increase, since the increase of  $G_1^*(b)$  means distancing the path points from the sources. In this regard, we consider the asymptotic behavior of the function  $q_s(Tr)$ .

Note, that the coordinates of all points  $A_{lu}$ ,  $i=1,2,N-1$ , in accordance with (26) and when  $u \rightarrow \infty$  are infinitely increasing, so all the segments of the trajectory  $A_{lu}$ , except the first and the last one, are asymptotically leaving the scope of repeller sources. This corresponds to the fact that in the sum (16) for each source it is necessary to take only the first and last terms.

We consider these terms at the iteration  $u$ , and then move on to the corresponding limits for  $u \rightarrow \infty$ . For the first term we obtain:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow \infty} [\cos \varphi_{1,u}^{(k)}] &\triangleq \cos \varphi_{1,\lim}^{(k)} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[ \frac{(O^{(k)}A, \tilde{O} + (A_{20} - \tilde{O})b)}{d_1^{(k)} |\tilde{O} + (A_{20} - \tilde{O})b|} \right] = \\ &= \frac{(O^{(k)}A, A_{20} - \tilde{O})}{d_1^{(k)} |A_{20} - \tilde{O}|}, \quad \cos \varphi_{1,u}^{(k)} = \frac{(O^{(k)}A, AA_{2u})}{|O^{(k)}A| |AA_{2u}|}, \\ \tilde{\rho}_{1,l,u}^{(k)} &= \frac{d_l^{(k)} \cos \varphi_l^{(k)}}{d_m^{(k)}}, \quad \lim_{u \rightarrow \infty} [\tilde{\rho}_{1,l,u}^{(k)}] = \frac{d_1^{(k)} \cos \varphi_{1,\lim}^{(k)}}{d_m^{(k)}}, \\ \rho_{1,u} &\rightarrow \infty, \quad \tilde{\rho}_{2,1,u}^{(k)} = \tilde{\rho}_{1,1,u}^{(k)} + \frac{P_{1,u}}{d_m^{(k)}} \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Taking into account the latter expressions and the properties of the function (18)  $erf(\infty)=1$ , we obtain:

$$I_I^{(k)} = \frac{1}{v} \exp \left[ - \left( \frac{d_1^{(k)} \sin \varphi_{1,\lim}^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right)^2 \right] \cdot \left[ 1 - \operatorname{sign} \left( \cos \varphi_{1,\lim}^{(k)} \right) \operatorname{erf} \left( \left| \frac{d_1^{(k)} \cos \varphi_{1,\lim}^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right| \right) \right]. \quad (30)$$

Similarly, for the last term of the sum (16) we calculate:

$$\begin{aligned} \cos \alpha_{N-1,u}^{(k)} &= \frac{(O^{(k)} D, O^{(k)} A_{N-1u})}{|O^{(k)} D| |O^{(k)} A_{N-1u}|}, \\ \lim_{u \rightarrow \infty} [\cos \alpha_{N-1,u}^{(k)}] &\triangleq \cos \alpha_{N-1,\lim}^{(k)} = \frac{(O^{(k)} D, A_{N-10} - \tilde{O})}{d_N^{(k)} |A_{N-10} - \tilde{O}|}, \\ d_{N-1,u}^{(k)} \sin \varphi_{N-1,u}^{(k)} &= d_N^{(k)} \sin \alpha_{N-1,u}^{(k)} \rightarrow d_N^{(k)} \sin \alpha_{N-1,\lim}^{(k)}, \\ d_{N-1,u}^{(k)} \cos \varphi_{N-1,u}^{(k)} + \rho_{N-1,u} &= -d_N^{(k)} \cos \alpha_{N-1,u}^{(k)} \rightarrow -d_N^{(k)} \cos \alpha_{N-1,\lim}^{(k)} \\ \cos \varphi_{N-1,u}^{(k)} &= \frac{(O^{(k)} A_{N-10}, A_{N-10} D)}{|O^{(k)} A_{N-1u}| |A_{N-1u} D|} \rightarrow \frac{-(A_{N-10}, A_{N-10})}{|A_{N-10}|^2} = \\ &= -1 \triangleq \cos \varphi_{N-1,\lim}^{(k)}. \end{aligned}$$

$$I_{II}^{(k)} = \frac{1}{v} \exp \left[ - \left( \frac{d_N^{(k)} \sin \alpha_{N-1,\lim}^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right)^2 \right] \cdot \left\{ \operatorname{sign} \left( -\cos \alpha_{N-1,\lim}^{(k)} \right) \operatorname{erf} \left( \left| \frac{d_N^{(k)} \cos \alpha_{N-1,\lim}^{(k)}}{d_m^{(k)}} \right| \right) + 1 \right\}. \quad (31)$$

Then the limit value of the probability  $q_{S,\lim}$  is determined by the expression:

$$q_{S,\lim} \triangleq \prod_{k=1}^K q_{S,\lim}^{(k)} = \exp \left[ - \sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} (I_I^{(k)} + I_{II}^{(k)}) \right]. \quad (32)$$



$$c_i = \delta c_i^{(1)} + c_{\max}^{(1)} (1 - \delta) c_i^{(2)}, i = 1, 2, \dots, N, \quad (33)$$

where  $c_{\max}^{(1)}$  is the maximum allowable value of partial weight  $c_i^{(1)}$ ;  $\delta$  is the weight fraction of the first type in the total weight  $c_i$ .

In order to make weights  $c_i^{(2)}$  invariant to the trajectory, let us make the following assumption. We assume that the robot passes through each cell during the same time  $T_e$ . This assumption is valid at a constant velocity  $v_e$  and the same cell sizes  $L_{in}$ . Then  $T_e$  is determined by the expression:

$$T_e = L_{in} / v_e. \quad (34)$$

Assuming the characteristic size of the cell  $L_{in}$  sufficiently small compared to the distance from the sources to the path, we can replace the distance from the source to the path point by the distance from the source to the center of the cell, i.e.:

$$d_i^{(k)} = |O^{(k)} O_i|, \quad (35)$$

where  $O_i$  is the center of the  $i^{\text{th}}$  cell.

Under the made assumptions, the probability of passing the  $i^{\text{th}}$  cell without detection takes the form:

$$q_i = \prod_{k=1}^K \exp \left\{ -\varepsilon^{(k)} T_e \exp \left[ -\left( d_i^{(k)} / d_m^{(k)} \right)^{2r} - \left| \alpha_i^{(k)} / \alpha_m^{(k)} \right|^{2s} \right] \right\}. \quad (36)$$

Then we choose the weight  $c_i^{(2)}$  of each cell so that it decreases with increasing probability (36), i.e.:

$$c_i^{(2)} = 1 - q_i = 1 - e^{-\left( \sqrt{2} a / 2 v_e \right) \sum_{k=1}^K \varepsilon^{(k)} \exp \left[ -\left( d_i^{(k)} / d_m^{(k)} \right)^{2r} - \left| \alpha_i^{(k)} / \alpha_m^{(k)} \right|^{2s} \right]}. \quad (37)$$

Since the optimization algorithms build the trajectory that passes through the cells with minimum total weight, then the proposed method of forming weights takes into account both the geometric passability of the cells and the probability of detecting a robot in this cell.

Figure 7 gives a geometric explanation of the search for the optimal path using search procedures, for example, D\*.

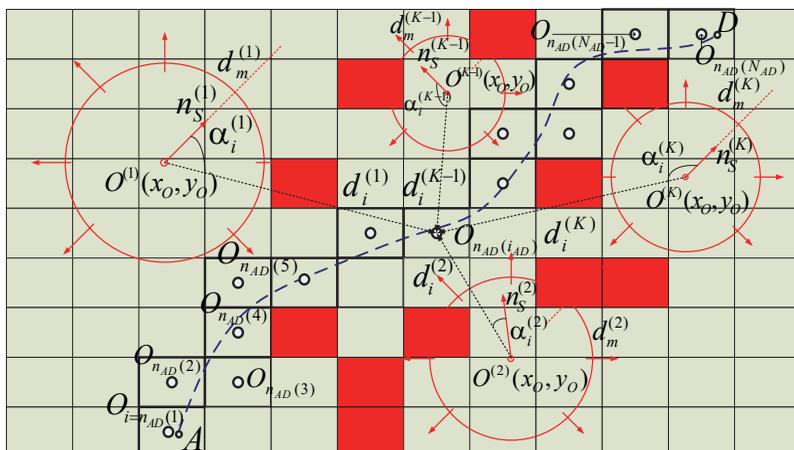


Fig. 7. Geometric explanations of the search for the optimal path in the environment with obstacles and repeller sources

Figure 7 shows the cells passed by the robot. For these cell the internal numeration  $i=n(i_{AD})$  is introduced. It also shows four sources and their characteristics  $d_i^{(k)}, \alpha_i^{(k)}$  that determine the influence on the robot in this cell. Red squares indicate the obstacles impassable for the object.

Thus, the correct estimation of the “average” probability of passing each partition cell by a moving object under the conditions of counteraction sources when solving the problems of path planning by the methods of the D\* family of algorithms makes it possible to take into account the influence of these sources in the respective patency maps. Therewith, it is required to bring correctly to the same weight the two partial weights of each cell using a reasonable choice of parameters  $\delta, c_{\max}^{(1)}$  in the expression (33).

**6. Example of identifying the parameters of the characteristic probability function.** Let us consider an example of determining the parameters of the characteristic probability function (CPF) for the Abrams tank, which has the following specifications: the M256 directing gun; the rate of fire is  $\eta = 8$  rounds per minute, effective firing range: 2500-3000 m. The average effective firing range is  $D_0=2750$  m.

Let the “effective damage” mean damage with a probability from the range of  $0.9 \leq p \leq 0.95$ . Then the respective probability range for non-defeat is  $q_2=0.05 \leq q \leq q_1=0.1$ . The average probability of non-defeat is:

$$\langle q \rangle = (q_1 + q_2) / 2 = 0,075. \quad (38)$$

In this case, the effective frequency of the source is its rate of fire:  $\varepsilon = \eta = 8$  rounds per minute.

We need to find the CPF in the form of (4) that does not depend on the azimuth angle.

First, let us consider the case when we take into account the requirement of the CPF at the distance  $D_0$  to the object moving over time  $T = T_0 = 1$  minute giving the value of the average probability of damaging from (38):

$$q_{0S}(D_0, T = T_0 = 1) = \langle q \rangle = 0,075. \quad (39)$$

Then the characteristic parameter of the effective range of the source  $d_m$  in terms of CPF, basing on (4) and (39), will be equal to:

$$d_m = D_0 / \sqrt{\ln \left[ 1 / \ln \left( q_0^{-1} \right) \right]} = 2590 \text{ m}. \quad (40)$$

The dependence  $q_{0S}(d, T_0)$  is represented by the solid line in Figure 8.

Now let us consider the case when, in addition to the condition (39), it is necessary to ensure the given probability value in case of some distance  $D_{02} < D_0$ . For example, let  $D_{02}$  be the lower limit for the effective damage, and it is required to fulfill the condition:

$$q_{0S}(D_{02}, T_0) = q_2 \equiv 0,05. \quad (41)$$

Then, for the generality and accuracy of the CPF's approximation, we will consider the exponent  $2p$  in the equation (4) as a real positive number.

If the frequency  $\varepsilon$  is fixed, then the conditions (39) and (41) generate two equations with respect to the parameters  $d_m$  and  $2p$ :

$$\begin{cases} \langle q \rangle = \exp \left\{ -\varepsilon T \cdot \exp \left[ -\left( D_0 / d_m \right)^{2p} \right] \right\}, \\ q_2 = \exp \left\{ -\varepsilon T \cdot \exp \left[ -\left( D_{02} / d_m \right)^{2p} \right] \right\}. \end{cases} \quad (42)$$

By introducing the new variables:

$$x = \exp \left[ -\left( D_0 / d_m \right)^{2p} \right], \quad y = \left( D_{02} / D_0 \right)^{2p}, \quad (43)$$

it is possible to rewrite the system (42) in the form of

$$\begin{cases} \langle q \rangle = \exp \{ -\varepsilon T \cdot x \}, \\ q_2 = \exp \{ -\varepsilon T \cdot x^y \}. \end{cases} \quad (44)$$

By solving the obtained system with respect to  $x, y$  and then returning to the variables  $d_m$  and  $2p$ , we obtain:

$$d_m = D_0 / \left[ \ln(A^{-1}) \right]^{1/2p}, \quad p = 0,5 \log_{\beta}(\log_A B), \quad (45)$$

$$A = \ln(\langle q \rangle^{-1}) / \varepsilon T, \quad B = \ln(q_2^{-1}) / \varepsilon T.$$

When we make calculations (4) using the equations for the distance  $d_m$  and exponent  $2p$  according to (45) and taking into account  $T=T_0=1\text{min.}$ ,  $\varepsilon=8$  rounds per minute, we obtain  $d_m=2531$  m,  $2p=1.449$ . The dependence of CPF is shown in Fig. 8 with the dash-dotted line.

If we reduce the probability value  $q_2$ , for example, to the level of  $q_2=0,03$ , then the corresponding calculation by formulas (4) and (45) will result in:  $d_m=2651$  m,  $2p=3,282$ . The respective CPF dependence is shown in Figure 8 with the dashed line.

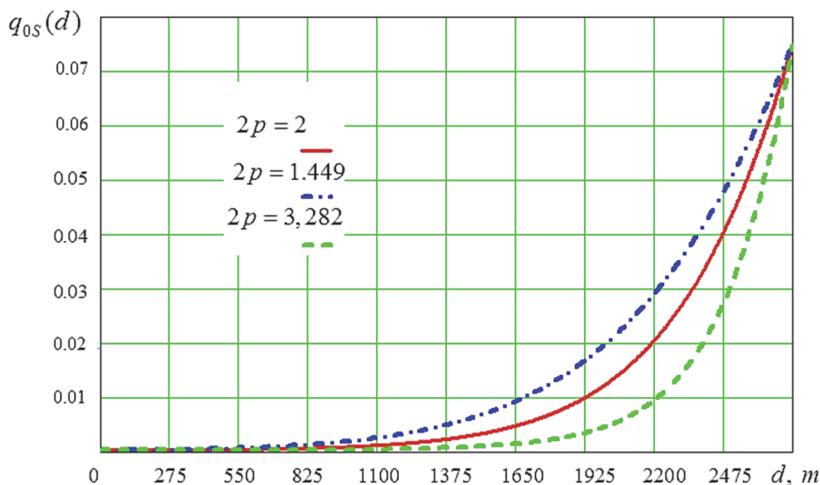


Fig. 8. Approximation dependences of the characteristic probability functions for the Abrams tank

The obtained results show the possibility to approximate the effective adjustment of the parameters of characteristic probabilistic functions to the already known or obtained data on the specifications that determine the probabilistic properties of this weapon. A similar technique for identifying the CPF parameters is also valid for other types of sources.

**7. Numerical simulation results.** During the simulation, the iterative procedure (26) has been investigated. The goal is to construct a trajectory that provides a given probability  $q_g$  and which deviates least from the original path. The problem of obtaining the highest possible probability of passing under fixed boundary conditions has also been studied.

In the simulation the criterion for robot stopping is the fulfillment of one of three conditions: 1) the passing probability  $q_g$  is reached; 2) the difference in the passing probabilities between the adjacent iterations is less than a given value  $\varepsilon_{kr}$ ; 3) the maximum deviation of the average distance between the original and current trajectories  $\rho_{Tmax}$  is reached.

The total number of points of the piecewise-linear trajectory for all numerical experiments is  $N=5$ .

Figure 9 and Figure 10 present the simulation results for the following initial data (experiment “A”). Coordinates of the sources’ centers:  $O^{(1)}=[2; 8]m$ ,  $O^{(2)}=[4; 4]m$ ,  $O^{(3)}=[8; 9]m$ ,  $O^{(4)}=[10; 5]m$ . Effective radiuses of the sources:  $d_m=[2.5; 3.75; 3.75; 2.5]m$ . Characteristic frequencies of the sources  $\varepsilon=[10; 10; 10; 10]$  1/sec. Stopping parameters at  $k_\delta=\delta(K+1)=0.05$ :  $q_g=0.9$ ,  $\varepsilon_{kr}=0$ ,  $\rho_{Tmax}=50m$ . Average velocity of passing the path  $v=10$  m/sec.

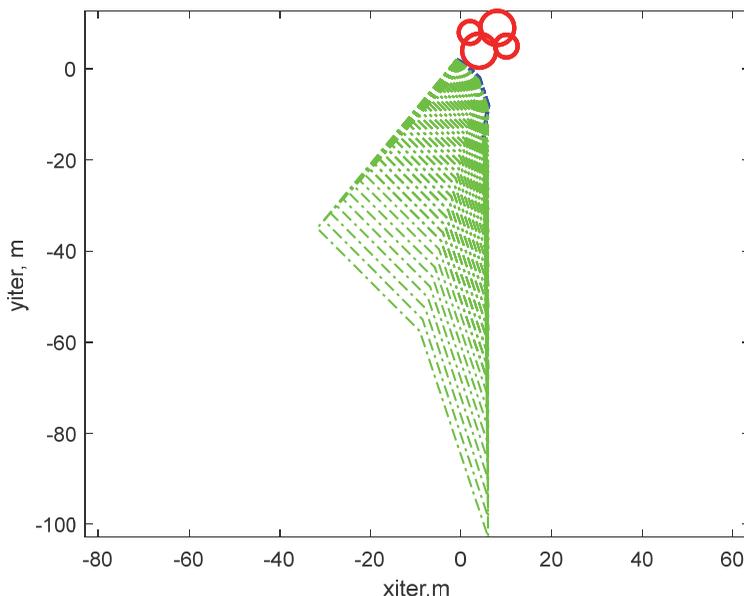


Fig. 9. Movement trajectories for the simulation of the experiment “A”

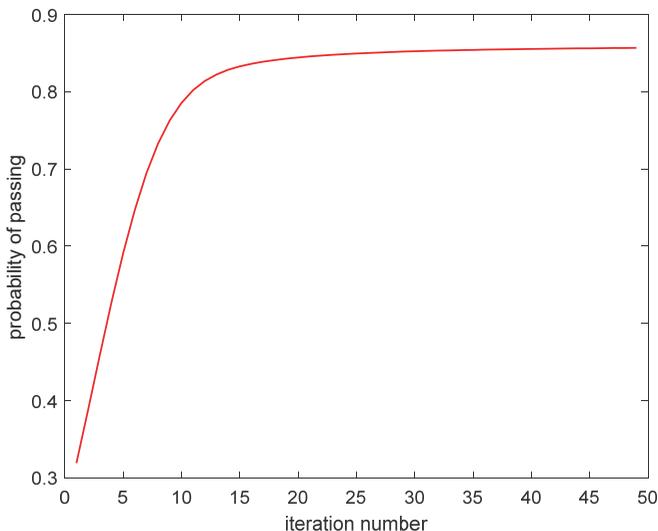


Fig. 10. The probability of passing in the simulation of the experiment “A”

The initial trajectory is marked in blue; the trajectories of the following iterations are marked in green. The probability of passing the initial iteration is  $q_0=0.2554$ . The probability of passing the trajectory in the last iteration is  $q=0.8567 < q_g$ ; The maximum possible probability is  $q_{lim}=0.8588$ . Since  $q_{lim} < q_g$ , the given probability of passing cannot be reached.

Now let us investigate the influence of the characteristic frequencies of the sources  $\varepsilon^{(k)}$ . To do this let's carry out the experiment “B”, the conditions of which differ from experiment “A” by the values of the vector  $\varepsilon=[5; 5; 5; 5]1/\text{sec}$ . The probability of passing each elementary section of the trajectory should be higher than in case of the sources in the experiment “A”. The simulation results are shown in Figure 11 and Figure 12.

In case of the experiment “B” the limit value of probability is increased in comparison with the experiment “A”  $q_{lim}=0.9267$ . The given probability of passing the path undetected was reached in 12 iterations  $q=0.902 > q_g$ . The probability of passing the initial trajectory is  $q_0=0.505$ .

Now let us consider the case when the initial trajectory crosses the effective circle of at least one source. The conditions for the experiment “C” are the following. Coordinates of the sources' centers:  $O^{(1)}=[-1; 4]m$ ,  $O^{(2)}=[4; 4]m$ ,  $O^{(3)}=[8; -2]m$ ,  $O^{(4)}=[10; 5]m$ ,  $O^{(5)}=[-2; -1]m$ ,  $O^{(6)}=[2; -6]m$ . Effective radiuses of the sources:  $d_m=[2.5; 3.75; 6.25; 2.5; 5; 3.75]m$ . Characteristic frequencies of the sources  $\varepsilon=[5; 5; 5; 5; 5; 5]1/\text{sec}$ . Stopping parameters at  $k\delta=0.15$ :  $q_g=0.9$ ,  $\varepsilon_{kr}=0.0001$ ,  $\rho_{Tmax}=50m$ . Average velocity of passing the trajectory  $v=10$  m/sec.

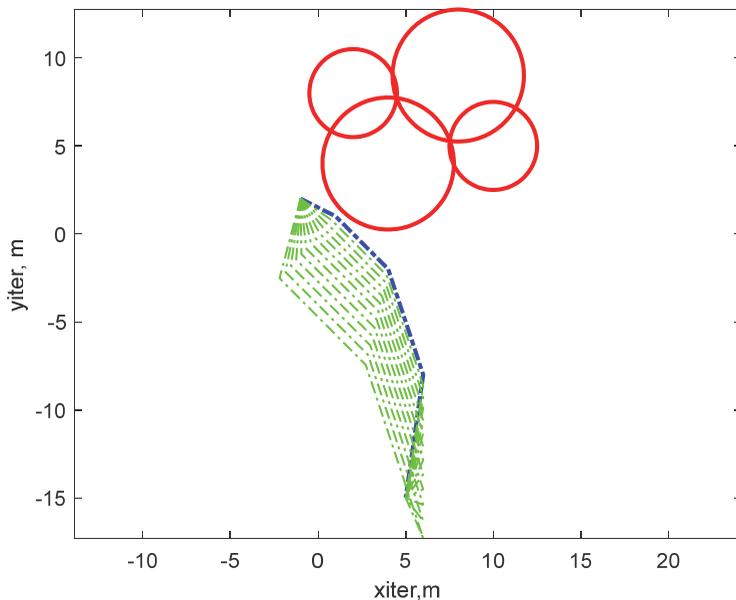


Fig. 11. Movement trajectories for the simulation of the experiment “B”

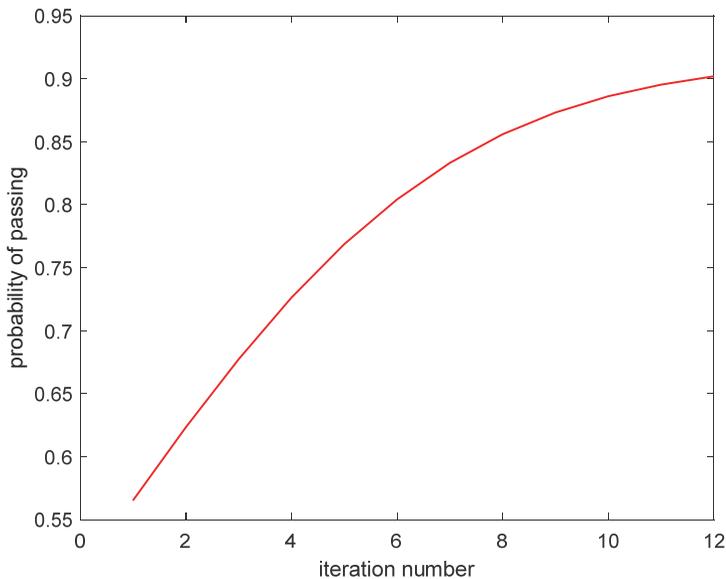


Fig. 12. The probability of passing in the simulation of the experiment “B”

The results are shown in Figure 13 and Figure 14. The probability of passing  $q=0.9 > q_g$  is reached in 14 iterations. The probability of passing the initial path is  $q_0=1.6 \cdot 10^{-4}$ . The maximum possible probability is  $q_{lim}=0.987$ .

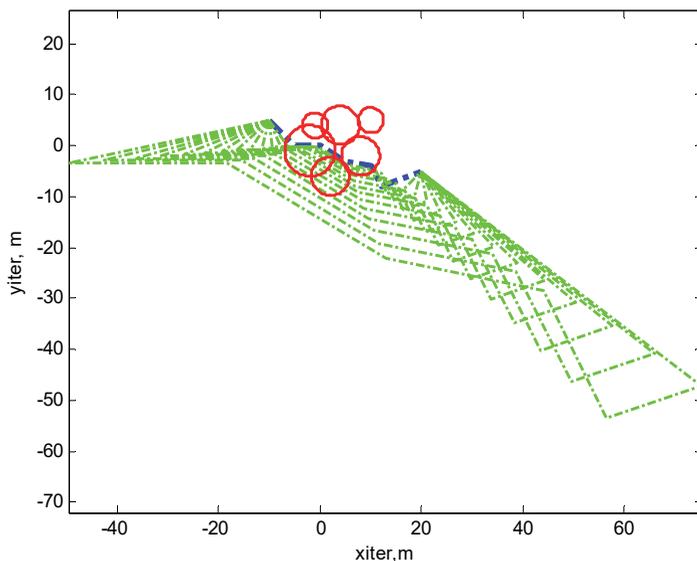


Рис. 13. Movement trajectories for the simulation of the experiment “C”

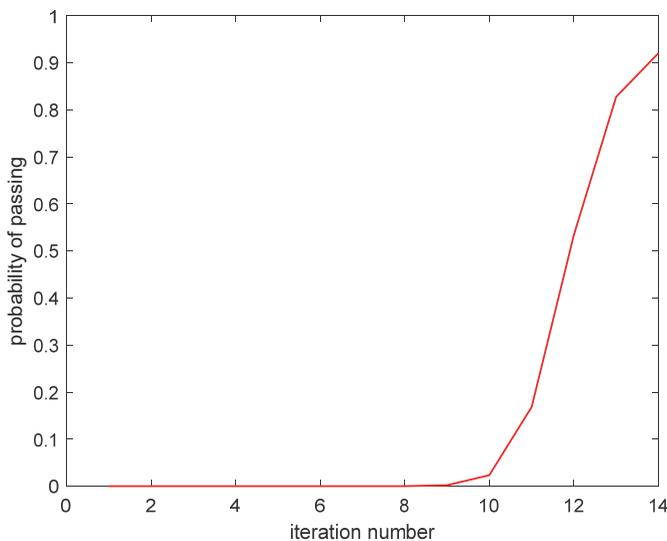


Fig. 14. The probability of passing in the simulation of the experiment “C”

In case of increasing the iteration number the monotonic increase of the passing probability is observed in all simulation results. This confirms the previously expressed qualitative consideration on the correlation of functionals (13) and (21). Moreover, a monotonic increase in these examples is observed near repeller sources, i.e. monotony is not only in the limit with sufficiently large numbers of iterations but also for small  $b$ .

However, in the general case, the behavior of the probability function of the passing from the iteration number near the sources may not be monotonic.

The comparison of the simulation results for cases “A” – “C” implies a significant influence of the initial trajectory on the behavior of the probability function  $q_s(b)$ . In particular, in Figure 13 and Figure 14 we can see that when the trajectory goes beyond the effective radiuses of the sources; a sharp increase in the function  $q_s(b)$  is observed.

**7. Conclusion.** This article presents the probabilistic description of the detection of the moving objects in circular-symmetrical fields and non-symmetrical fields of the contiguous type sources and sources with finite scope. The concept of characteristic probability function of the source is introduced; this allow us to calculate the probability of successful passing of a random trajectory in the given source field. The opportunity of using the characteristic probability function for additional accounting of repeller sources on the trafficability maps for further optimization of the trajectory using the special algorithms is shown.

An iterative procedure has been developed that enables to find a piecewise-linear trajectory for which the probability of passing takes a given value, with restrictions on the allowable deviation from the original trajectory. When the boundary points of the trajectory are fixed, an analytical limit is found to which the function of the characteristic probability of passage tends with an unlimited increase in the iteration number. This limit can be used both for direct assessment of the upper boundary of the achievable probability of passing and for synthesis of the method of trajectory optimization with the moving endpoints.

The procedure developed in this article is much simpler in software implementation compared to more accurate methods for finding the optimum associated with the problem of solving systems of nonlinear equations and finding all their roots.

## References

1. LaValle S.M. Planning Algorithms. Cambridge University Press. 2006. 842 p.
2. Yang L. et al. Survey of Robot 3D Path Planning Algorithms. *Journal of Control Science and Engineering*. 2016. vol. 2016. pp. 22.
3. Qu Y., Zhang Y., Zhang Y. A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2018. vol. 91(3-4). pp. 691–707.

4. Pshikhopov V.H., Medvedev M.Yu. [Group control of autonomous robots motion in uncertain environment via unstable modes]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2018. vol. 5(60). pp. 39–63. (In Russ.).
5. Pshikhopov V., Medvedev M. Motion Planning and Control Using Bionic Approaches Based on Unstable Modes. Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. 2017. pp. 239–280.
6. Galyaev A.A. Evasion on plane from a single mobile observer in the conflict environment. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2014. vol. 6. pp. 39–48. (In Russ.).
7. Agrawal P., Agrawal H. Adaptive algorithm design for cooperative hunting in multi-robots. *International Journal of Intelligent Systems and Applications*. 2018. vol. 10(12). pp. 47–55.
8. Dai Y., Xiong H., Tao Y., Li G. A method for path planning of mobile robots based on threat assessment and biologically inspired neural network. *Chinese High Technology Letters*. 2019. vol. 29(6). pp. 585–593.
9. Ni T., Wei R., Zhao X., Xu Z. Neural Dynamic Collision-Avoidance Strategy for Robots Based on Evaluation of Threat Degree. *Robot*. 2017. vol. 39(6). pp. 853–859.
10. Krokmal P., Zabaranin M., Uryasev S. Modeling and optimization of risk. *Surveys in Operations Research and Management Science*. 2001. vol. 16. pp. 49–66.
11. Zabaranin M., Uryasev S., Pardalos P. Optimal Risk Path Algorithms. Cooperative Control and Optimizat. 2002. pp. 273–298.
12. Galyaev A.A., Maslov E.P., Rubinovich E.Ya. [About one task of controlling the movement of an object in a conflict environment]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the RAS. Theory and control systems*. 2009. vol. 3. pp. 134–140. (In Russ.).
13. Galyaev A.A., Maslov E.P. [Optimization of the laws of evasion of a moving object from detection]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the RAS. Theory and control systems*. 2010. vol. 4. pp. 43–53. (In Russ.).
14. Abramyants T.G., Maslov E.P., Yahno V.P. [Evasion of a moving object from detection by a group of observers]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 2010. vol. 5. pp. 73–79. (In Russ.).
15. Galyaev A.A. [The problem of evading a moving single observer on a plane in a conflict environment]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2014. vol. 6. pp. 39–48. (In Russ.).
16. Abramyants T.G. et al. [Evasion of a moving object in a conflict environment from detection by a system of dissimilar observers]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 2015. vol. 2. pp. 31–37. (In Russ.).
17. Korepanov V.O., Novikov D.A. [The diffuse bomb problem]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 2011. vol. 5. pp. 66–73. (In Russ.).
18. Korepanov V.O., Novikov D.A. [Strategic behavior models in the diffuse bomb problem]. *Problemy upravleniya – Control Sciences*. 2015. vol. 2. pp. 38–44. (In Russ.).
19. Liu D., Cong M., Du Y. Episodic Memory-Based Robotic Planning under Uncertainty. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2017. vol. 64(2). pp. 1762–1772.
20. Yehoshua R., Agmon N., Kaminka G.A. Robotic adversarial coverage of known environments. *International Journal of Robotics Research*. 2016. vol. 35(12). pp. 1419–1444.
21. Zhang B., Lu Q., Wang J. A strategy for finding the most reliable path in uncertain environments. Proceedings of the 18th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines. 2015. pp. 677–684.
22. Agafonov A.A., Myasnikov V.V. [Method for reliable shortest path determination in stochastic networks using parametrically defined stable probability distributions]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2019. Issue 18(3). pp. 557–581. (In Russ.).

23. Khatib O. Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots. Autonomous robot vehicles. 1986. pp. 396–404.
24. Montiel O., Orozco-Rosas U., Sepúlveda R. Path planning for mobile robots using Bacterial Potential Field for avoiding static and dynamic obstacles. *Expert Systems with Applications*. 2015. vol. 42(12). pp. 5177–5191.
25. Rasekhipour Y., Khajepour A., Chen S.-K., Litkouhi B. A Potential Field-Based Model Predictive Path-Planning Controller for Autonomous Road Vehicles. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*. 2016. vol. 18(5). pp. 1255–1267.
26. Mabrouk M.H., McInnes C.R. Solving the potential field local minimum problem using internal agent states. *Robotics and Autonomous Systems*. 2008. vol. 56(12). pp. 1050–1060.
27. Pshikhopov V., Medvedev M., Soloviev V. The Multicopter Control Algorithms with Unstable Modes. 2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'19). 2019. pp. 1179–1184.
28. Bhattacharya S. Towards optimal path computation in a simplicial complex. *International Journal of Robotics Research*. 2019. vol. 38(8). pp. 981–1009.
29. Yu X. et al. ACO-A\*: Ant Colony Optimization plus A\* for 3D Traveling in Environments with Dense Obstacles. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*. 2018. vol. 23(4). pp. 617–631.
30. Sanchez-Lopez J.L. et al. A Real-Time 3D Path Planning Solution for Collision-Free Navigation of Multirotor Aerial Robots in Dynamic Environment. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2019. vol. 93(1-2). pp. 33–53.
31. Stentz A. Optimal and Efficient Path Planning for Partially-Known Environments. IEEE Conference on Robotics and Automation. 1994. pp. 3310–3317.
32. Karkishchenko A.N., Pshikhopov V.Kh. [On finding the complexity of an environment for the operation of a mobile object on a plane]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2019. vol. (5). pp. 136–154. (In Russ.).
33. Wentzel E.S. *Teoriya veroyatnostej* [Probability theory]. M.: Nauka. 1969. 576 p. (In Russ.).
34. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablicy integralov ryadov summ i proizvedenij* [Tables of integrals of series of sums and products]. M.: FIZMATLIT. 1963. 1108 p. (In Russ.).
35. Kudryavtsev L.D. *Kurs matematicheskogo analiza* [The course of mathematical analysis]. M.: Drofa. 2004. Issue 2. 720 p. (In Russ.).
36. Carsten J., Ferguson D., Stentz A. 3D Field D\*: Improved Path Planning and Replanning in Three Dimensions. Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2006. pp. 3381–3386.
37. Koenig S., Likhachev M. Fast Replanning for Navigation in Unknown Terrain. *Transactions on Robotics*. 2005. vol. 21(3). pp. 354–363.
38. Koenig S., Likhachev M., Furcy D. Lifelong Planning A\*. *Artificial Intelligence*, 2004. vol. 155(1-2). pp. 93–146.
39. Pshikhopov V., Medvedev M. Position-Path Control of a Vehicle. Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. 2017. pp. 1–23.

**Kostjukov Vladimir** — Ph.D., Associated Professor, Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University (SFedU). Research interests: mathematical modeling, mobile robots, path planning algorithms, wind power plants construction. The number of publications — 65. [wkost-einheit@yandex.ru](mailto:wkost-einheit@yandex.ru); 2, Shevchenko str., 347922, Taganrog, Russia; office phone: +7(8634)371-694; fax: +7(8634)681-894.

**Medvedev Mikhail** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading Researcher, Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University (SFedU). Research interests: adaptive and robust control of mobile robots, estimation, analysis and synthe-

sis attitudes of control systems. The number of publications — 240. medvmihal@gmail.com; 2, Shevchenko str., 347922, Taganrog, Russia; office phone: +7(8634)371-694; fax: +7(8634)681-894.

**Pshikhopov Viacheslav** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Head of Institute, Research and Development Institute of Robotics and Control Systems, Southern Federal University (SFedU). Research interests: control of mobile robots in uncertain environment, optimal control of robots, analysis and synthesis of collective robots control, intelligent control and planning in the robotics. The number of publications — 260. pshichop@rambler.ru; 2, Shevchenko str., 347922, Taganrog, Russia; office phone: +7(8634)371-694; fax: +7(8634)681-894.

**Acknowledgements.** The study is supported by the Russian Science Foundation, grant 18-19-00621, executed at Joint stock Company “Scientific-Design bureau of Robotics and Control Systems”.

В.А. КОСТЮКОВ, М.Ю. МЕДВЕДЕВ, В.Х. ПШИХОПОВ  
**ОПТИМИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ МОБИЛЬНОГО РОБОТА НА  
ПЛОСКОСТИ В ПОЛЕ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ИСТОЧНИКОВ-  
РЕПЕЛЛЕРОВ**

*Костюков В.А., Медведев М.Ю., В.Х. Пшихопов* **Оптимизация движения мобильного робота на плоскости в поле конечного числа источников-репеллеров.**

**Аннотация.** Рассматривается задача планирования движения мобильного робота в конфликтной среде, которая характеризуется наличием областей, препятствующих выполнению роботом поставленных задач. Дается обзор основных результатов планирования пути в конфликтных средах. Отдельное внимание уделяется подходам, основывающимся на функциях рисков и вероятностных методах. Рассматриваются конфликтные области, которые формируются точечными источниками, генерирующими в общем случае несимметричные поля непрерывного типа. Предлагается вероятностное описание таких полей, примерами которых являются вероятность обнаружения или поражения мобильного робота. В качестве характеристики поля вводится понятие характерной вероятности функции источника, которая позволяет оптимизировать движение робота в конфликтной среде. Показана связь характерной вероятности функции источника и функции риска, которая может быть использована для постановки и решения упрощенных оптимизационных задач. Разрабатывается алгоритм планирования пути мобильного робота, обеспечивающий заданную вероятность прохождения конфликтной среды. Получена верхняя оценка вероятности прохождения заданной среды при фиксированных граничных условиях. Предложена процедура оптимизации пути робота в конфликтной среде, которая характеризуется более высокой вычислительной эффективностью, достигаемой за счет ухода от поиска точного оптимального решения к субоптимальному. Предложенные алгоритмы реализованы в виде программного обеспечения симулятора группы наземных роботов и исследуются методами численного моделирования.

**Ключевые слова:** планирование пути, конфликтная среда, характерная вероятностная функция, оптимизация движения.

**Костюков Владимир Александрович** — канд. техн. наук, доцент, научно-исследовательский институт робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет (ЮФУ). Область научных интересов: : математическое моделирование, мобильные роботы, алгоритмы планирования пути, ветроэнергетические установки. Число научных публикаций — 65. [wkost-einheit@yandex.ru](mailto:wkost-einheit@yandex.ru); ул. Шевченко, 2, 347922, Таганрог, Россия; р.т.: +7(8634)371-694; факс: +7(8634)681-894.

**Медведев Михаил Юрьевич** — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, научно-исследовательский институт робототехники и процессов управления, Южный федеральный университет (ЮФУ). Область научных интересов: : адаптивное и робастное управления мобильными роботами; оценивание возмущений; методы анализа и синтеза систем автоматического управления. Число научных публикаций — 240. [medvmihal@gmail.com](mailto:medvmihal@gmail.com); ул. Шевченко, 2, 347922, Таганрог, Россия; р.т.: +7(8634)371-694; факс: +7(8634)681-894.

**Пшихопов Вячеслав Хасанович** — д-р техн. наук, профессор, директор, научно-исследовательский институт робототехники и процессов управления, Южный феде-

ральный университет (ЮФУ). Область научных интересов: управление мобильными роботами в неопределенных средах; оптимальное управление роботами; анализ и синтез систем группового управления; интеллектуальное управление и планирование в робототехнике. Число научных публикаций — 260. pshichop@rambler.ru; ул. Шевченко, 2, 347922, Таганрог, Россия; р.т.: +7(8634)371-694; факс: +7(8634)681-894.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансировании Российского научного фонда (грант 18-19-00621, выполняемый в ОАО «НКБ робототехники и систем управления»).

### Литература

1. *LaValle S.M.* Planning Algorithms // Cambridge University Press. 2006. 842 p.
2. *Yang L. et al.* Survey of Robot 3D Path Planning Algorithms // Journal of Control Science and Engineering. 2016. vol. 2016. pp. 22.
3. *Qu Y., Zhang Y., Zhang Y.* A Global Path Planning Algorithm for Fixed-wing UAVs // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2018. vol. 91(3-4). pp. 691–707.
4. *Пишихов В.Х., Медведев М.Ю.* Групповое управление движением мобильных роботов в неопределенной среде с использованием неустойчивых режимов // Труды СПИИРАН. 2018. Вып. 5(60), С. 39–63.
5. *Pshikhov V., Medvedev M.* Motion Planning and Control Using Bionic Approaches Based on Unstable Modes // Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. 2017. pp. 239–280.
6. *Галеев А.А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. 2014. № 6. С. 39–48.
7. *Agrawal P., Agrawal H.* Adaptive algorithm design for cooperative hunting in multi-robots // International Journal of Intelligent Systems and Applications. 2018. vol. 10(12). pp. 47–55.
8. *Dai Y., Xiong H., Tao Y., Li G.* A method for path planning of mobile robots based on threat assessment and biologically inspired neural network // Chinese High Technology Letters. 2019. vol. 29(6). pp. 585–593.
9. *Ni T., Wei R., Zhao X., Xu Z.* Neural Dynamic Collision-Avoidance Strategy for Robots Based on Evaluation of Threat Degree // Robot. 2017. vol. 39(6). pp. 853–859.
10. *Krokhmal P., Zabarankin M., Uryasev S.* Modeling and optimization of risk // Surveys in Operations Research and Management Science. 2001. vol. 16. pp. 49–66.
11. *Zabarankin M., Uryasev S., Pardalos P.* Optimal Risk Path Algorithms // Cooperative Control and Optimization. 2002. pp. 273–298.
12. *Галеев А.А., Маслов Е.П., Рубинович Е.Я.* Об одной задаче управления движением объекта в конфликтной среде // Известия РАН. Теория и системы управления. 2009. № 3. pp. 134–140.
13. *Галеев А.А., Маслов Е.П.* Оптимизация законов уклонения подвижного объекта от обнаружений // Известия РАН. Теория и системы управления. 2010. № 4. pp. 43–53.
14. *Абрамянц Т.Г., Маслов Е.П., Яхно В.П.* Уклонение подвижного объекта от обнаружения группой наблюдателей // Проблемы управления. 2010. № 5. pp. 73–79.
15. *Галеев А.А.* Задача уклонения от подвижного одиночного наблюдателя на плоскости в конфликтной среде // Автоматика и телемеханика. 2014. № 6. pp. 39–48.
16. *Абрамянц Т.Г. и др.* Уклонение подвижного объекта в конфликтной среде от обнаружения системой разнородных наблюдателей // Проблемы управления. 2015. № 2. pp. 31–37.
17. *Корепанов В.О., Новиков Д.А.* Задача о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2011. № 5. pp. 66–73.
18. *Корепанов В.О., Новиков Д.А.* Модели стратегического поведения в задаче о диффузной бомбе // Проблемы управления. 2015. № 2. pp. 38–44.

19. *Liu D., Cong M., Du Y.* Episodic Memory-Based Robotic Planning under Uncertainty // IEEE Transactions on Industrial Electronics. 2017. vol. 64(2). pp. 1762–1772.
20. *Yehoshua R., Agmon N., Kaminka G.A.* Robotic adversarial coverage of known environments // International Journal of Robotics Research. 2016. vol. 35(12). pp. 1419–1444.
21. *Zhang B., Lu Q., Wang J.* A strategy for finding the most reliable path in uncertain environments // Proceedings of the 18th International Conference on Climbing and Walking Robots and the Support Technologies for Mobile Machines. 2015. pp. 677–684.
22. *Агафонов А.А., Мясников В.В.* Метод определения надежного кратчайшего пути в стохастической сети с использованием параметрически заданных устойчивых распределений вероятностей // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18(3). С. 557–581.
23. *Khatib O.* Real-Time Obstacles Avoidance for Manipulators and Mobile Robots // Autonomous robot vehicles. 1986. pp. 396–404.
24. *Montiel O., Orozco-Rosas U., Sepúlveda R.* Path planning for mobile robots using Bacterial Potential Field for avoiding static and dynamic obstacles // Expert Systems with Applications. 2015. vol. 42(12). pp. 5177–5191.
25. *Rasekhipour Y., Khajepour A., Chen S.-K., Litkouhi B.* A Potential Field-Based Model Predictive Path-Planning Controller for Autonomous Road Vehicles // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2016. vol. 18(5). pp. 1255–1267.
26. *Mabrouk M.H., McInnes C.R.* Solving the potential field local minimum problem using internal agent states // Robotics and Autonomous Systems. 2008. vol. 56(12). pp. 1050–1060.
27. *Pshikhopov V., Medvedev M., Soloviev V.* The Multicopter Control Algorithms with Unstable Modes // 2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT'19). 2019. pp. 1179–1184.
28. *Bhattacharya S.* Towards optimal path computation in a simplicial complex // International Journal of Robotics Research. 2019. vol. 38(8). pp. 981–1009.
29. *Yu X. et al.* ACO-A\*: Ant Colony Optimization plus A\* for 3D Traveling in Environments with Dense Obstacles // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2018. vol. 23(4). pp. 617–631.
30. *Sanchez-Lopez J.L. et al.* A Real-Time 3D Path Planning Solution for Collision-Free Navigation of Multirotor Aerial Robots in Dynamic Environment // Journal of Intelligent & Robotic Systems. 2019. vol. 93(1-2). pp. 33–53.
31. *Stentz A.* Optimal and Efficient Path Planning for Partially-Known Environments // IEEE Conference on Robotics and Automation. 1994. pp. 3310–3317.
32. *Каркищенко А.Н., Пишихов В.Х.* К определению сложности среды функционирования подвижного объекта на плоскости // Автоматика и телемеханика. 2019. № 5. С. 136–154.
33. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей // М.: Наука. 1969. 576 с.
34. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов рядов сумм и произведений // М.: ФИЗМАТЛИТ. 1963. 1108 с.
35. *Кудряцев Л.Д.* Курс математического анализа // М.: Дрофа. 2004. Т. 2. 720 с.
36. *Carsten J., Ferguson D., Stentz A.* 3D Field D\*: Improved Path Planning and Replanning in Three Dimensions // Proceedings of the 2006 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2006. pp. 3381–3386.
37. *Koenig S., Likhachev M.* Fast Replanning for Navigation in Unknown Terrain // Transactions on Robotics. 2005. vol. 21(3). pp. 354–363.
38. *Koenig S., Likhachev M., Furcy D.* Lifelong Planning A\* // Artificial Intelligence. 2004. vol. 155(1-2). pp. 93–146.
39. *Pshikhopov V., Medvedev M.* Position-Path Control of a Vehicle // Path Planning for Vehicles Operating in Uncertain 2D Environments. 2017. pp. 1–23.

А. А. МАЛЫШЕВ, Е. В. БУРГОВ  
**К ВОПРОСУ О ПАРАМЕТРАХ БИОИНСПИРИРОВАННЫХ  
МОДЕЛЕЙ ПОВЕДЕНИЯ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ  
ГРУППОВОЙ ФУРАЖИРОВКИ**

*Малышев А.А., Бургов Е.В. К вопросу о параметрах биоинспирированных моделей поведения при моделировании групповой фуражировки.*

**Аннотация.** Применение биоинспирированных моделей и методов является одним из подходов к решению задач групповой робототехники. Рассматривается одна из таких задач – моделирование фуражировки – и ее решение путем создания аналогов социальных структур муравьев и моделей кормового поведения. Показаны существенные для данной задачи характеристики семей муравьев – численность особей в социуме и его структура, скорость движения рабочих, дистанция взаимодействия индивидов и площадь территории. Кроме того, описан имеющийся экспериментальный базис – группа роботов и полигон, – использующийся в качестве аппаратной платформы для экспериментов. Рассмотрено несколько моделей кормового поведения – без дифференциации функций фуражиров и с разделением последних на активных и пассивных. Активные фуражиры самостоятельно ищут источники ресурсов, а затем вовлекают в процесс добычи пассивных фуражиров; пассивные, пока не вовлечены в добычу, находятся на базе.

Поведение агентов описано набором конечных автоматов: базовые автоматы реализуют базовые поведенческие функции, мета-автомат описывает поведение на основе базовых автоматов. На экспериментальном базисе были отработаны базовые движения, заданные в автоматной логике. Комплексное тестирование моделей проводилось в среде моделирования Kvoqum, где был создан аналог реального полигона. Моделирование представляло собой серию экспериментов для каждой модели, в которой агенты должны были собирать ресурсы. Серии отличались численностью агентов. Для оценки качества моделей использовалось отношение полученной энергии к среднему времени ее добычи. Эксперименты показали, что модель с дифференциацией функций работает эффективнее.

**Ключевые слова:** групповая робототехника, биоинспирированный подход, модели поведения, муравьи, фуражировка, сбор ресурсов.

**1. Введение.** Одним из подходов к решению задач групповой робототехники является применение биоинспирированных моделей и методов [1]. Биоинспирированные роботы (bioinspired robots) – роботы, которые своей морфологией, актуаторами, системой управления, электроникой и другими характеристиками имеют сходство с живыми организмами [2]. При этом модельными объектами выступают общественные насекомые – пчелы, термиты, муравьи.

Биоинспирированный подход включает в себя три основных направления. Первое связано с созданием технических аналогов морфологических структур животных. Второе сосредоточено на вопросах социальной организации групп роботов и разработке соответствующих моделей поведения [1]. Третье – традиционное – направлено на создание методов поисковой оптимизации, основанных на наблюдении за животными: муравьиный алгоритм (Ant Colony Optimization [3]), алгоритм

пчелиной колонии (Bees algorithm [4]), алгоритм светлячка (firefly algorithm [5]) и другие. В различных проектах воссоздаются отдельные природные механизмы: поиск цели в закрытом неисследованном помещении (алгоритм летучей мыши [6]); создание искусственных сооружений [7]; организация коммуникации роботов (посредством светового следа на LCD-экране [8], используя этанол [9]).

Вместе с тем, проводя такие аналогии, авторы нередко опускают существенные детали, играющие важную роль в поведении животных, и делают допущения, которые могут быть подвергнуты серьезной критике. Так, например, есть представление о существенной для муравьев роли химической коммуникации. Для некоторых видов это действительно так [10], но у немалого числа видов доминируют иные коммуникационные системы [11].

Далее будет рассмотрена одна из классических задач групповой робототехники – фуражировка, для решения которой используется биоинспирированный подход, в связи с чем особое внимание уделяется биологической системе, лежащей в основе решения: будут довольно подробно рассмотрены ее характеристики, механизмы, принципы функционирования. После изучения биологической основы задачи будут предложены модели, имеющие в основе реальные биологические процессы. Таким образом в рамках работы должна быть решена конкретная прикладная задача – фуражировка. Под фуражировкой понимается поиск и сбор ресурсов группой роботов с последующей доставкой в место сбора ресурсов – на базу. Работа в первую очередь нацелена на выделение существенных параметров биологической системы, их формализацию, создание модели поведения, основанной на этих параметрах, а не на полноценном, максимально подробном воспроизведении поведения объекта моделирования.

Структура работы: сначала будет уточнена область рассмотрения решаемой задачи; затем рассмотрена фуражировка в биологической системе – семье муравьев; после чего имеющаяся группа роботов будет охарактеризована с точки зрения применения в качестве аппаратной платформы для экспериментов; описаны несколько моделей поведения; наконец, рассмотрены результаты экспериментов – моделирования в среде Kvoqum.

**2. Фуражировка.** Фуражировка рассматривается в рамках более крупной задачи – поддержание энергетической автономности группы роботов, что определяет взаимодействующие объекты и их отношения. Основные объекты для моделирования фуражировки:

- группа роботов;
- база – место основного информационного обмена, переработки ресурсов;

- полигон – территория, на которой функционирует группа;
- источники ресурсов – места концентрации ресурсов;
- ресурсы – собираемые объекты.

Фуражировка включает в себя такие задачи, как нахождение, сбор, выгрузка ресурсов, определение местоположения базы, информирование членов группы об обнаруженных источниках ресурсов, и выполняется на ограниченной территории группой агентов (роботов). Важную роль играет база – область, куда роботы привозят собранные ресурсы, где они делятся информацией о местоположении источников, мобилизуют других роботов для сбора. Эти и другие задачи фуражировки требуют конкретных технических решений. Обратимся к биологической системе и рассмотрим, как в ней решается задача групповой фуражировки. В качестве модельного объекта выбраны муравьи как насекомые, успешно решающие эту задачу.

Создание биоинспирированной модели поведения стоит начинать с изучения ее биологической основы. Далее подробно рассмотрим те аспекты жизни муравьев, которые могут непосредственно касаться фуражировки.

**3. Муравьи как модельный объект в групповой робототехнике.** Муравьи – уникальный модельный объект, изучение которого может способствовать решению различных задач групповой робототехники. Для них характерно достижение высшего уровня сложности социальных структур в мире насекомых, они эффективно решают такие задачи, как:

- разведка, контроль, использование и охрана территории;
- добыча и обработка ресурсов, их распределение внутри группы;
- создание инфраструктуры с различными элементами (дороги, тоннели, вспомогательные гнезда), которые способствуют эффективному использованию кормового участка.

Таким образом, муравьи являются перспективным объектом исследования в области групповой робототехники в рамках биоинспирированного подхода. В настоящей работе рассматриваются возможности моделирования аналогов ряда внутрисемейных структуры и элементов инфраструктуры, связанных с организацией фуражировки.

**3.1. Модельный объект и его характеристики.** В качестве модельного объекта взяты муравьи рода *Formica*, так как они отличаются способностью к формированию поселений разного масштаба и сложности [12], способны эффективно использовать большие территории, уменьшать активность и численность на них других муравьев [13]. Размеры рабочих *Formica* варьируются: 0,45-0,75

см – *Formica exsecta*, 0,4-0,7 см – *F. cunicularia*, 0,45-0,95 см – *F. Pratensis* [14]. В недавнем эксперименте [15] были получены значения скорости движения для этих видов муравьев. При движении по мостику шириной 0,4 см средние значения составили: 3 см/с у *Formica exsecta*; 3,6 см/с у *F. cunicularia*; 4,5 см/с у *F. pratensis*. Усредненные значения, соответственно, составляют 0,62 см для размера тела и 3,7 см/с для скорости. Дальнейшие расчеты производятся на основе этих значений.

**3.2. Ориентация и коммуникация.** Нередко исследователи обращаются к муравьиному алгоритму [16]. В его основе лежит принцип непрямого взаимодействия между особями посредством изменения окружающей среды (стигмергии) [3], а конкретнее – использование некоторыми видами муравьев химического следа (феромонов) для формирования дорог и мобилизации [10]. Фуражиры муравьев таких родов, как *Lasius* и *Solenopsis*, на обратном пути в гнездо после обнаружения пищи оставляют пахучие метки. Со временем из-за интенсивного использования маршрута количество химических меток увеличивается, и таким образом маршрут со временем становится все более привлекательным для муравьев.

Часто этот механизм полагается основным в процессе самоорганизации сообществ насекомых. Но его изолированное использование практически невозможно как в случае описания функционирования семей муравьев, так и при моделировании. Не все муравьи широко используют феромонный след, но даже и при его использовании должна осуществляться разведка, во время которой особи должны ориентироваться в пространстве. При использовании аналогичного химическому следу механизма для оптимизации поиска группой роботов возникают сложности первичного освоения территории – на местности отсутствует «разметка».

Различные исследования показывают, что муравьи при организации совместных действий одновременно используют разные механизмы коммуникации и ориентации в комплексе. Так, например, муравьи-рабовладельцы *Polyergus*, когда совершают рейды, ориентируются по наземным объектам, используют поляризацию света и химический след [17]. Этот и другие примеры говорят о необходимости при проектировании группы роботов использовать целый комплекс механизмов, дублирующих и дополняющих друг друга.

У муравьев есть ряд способов передачи информации друг другу: тактильный код, кинописис («язык поз»), химический след, звуковые сигналы («стрекотание») [18]. Для муравьев *Formica* особенно важны первые два механизма, поэтому необходимо моделировать системы ближней (информационной) связи и дальней (сигнальной). Передача

информации у муравьев с использованием тактильного кода происходит при непосредственном контакте особей. Коммуникация посредством «языка поз» осуществляется на дистанции до 20 см (около 32 длин тела особи). Оценка последней дистанции приблизительная и требует дополнительных исследований.

**3.3. Численность особей и структура семьи.** Количество индивидов в социуме и его структура являются важными характеристиками для моделирования. Социум муравьев по своему устройству и происхождению является семьей. Описано три уровня внутрисемейных структур муравьев: клан, колонна и плеяда. Первый уровень – клан – объединение рабочих, основанное на индивидуальном взаимодействии, которое имеет иерархическую структуру. Колонна – координационная система, включающая несколько кланов рабочих. Плеяда – система, состоящая из нескольких колонн [19]. Для начала достаточно смоделировать первую внутрисемейную структуру – клан. В семье численность особей варьирует в зависимости от состояния и жизненной стадии группы, ее вида; в семье-клане – от нескольких десятков до нескольких сотен особей [13]. В рамках настоящей работы численность модельной семьи полагается равной 150-300 рабочих – часто семьи такой численности использовались в лабораторных и полевых экспериментах [11, 18, 20].

Рабочие особи в семьях муравьев выполняют разнообразные функции: забота о самке, потомстве, добыча пищи, строительство и ремонт гнезда. Фуражирами называют особей, занимающихся добычей пищи. Их численность составляет около 10-15% от населения муравейника [13]. То есть в семье-клане из 150-300 особей – около 15-45 фуражиров. Кроме того, среди фуражиров происходит дополнительное функциональное разделение. Две основные группы фуражиров: активные (самостоятельно ищут пищу) и пассивные (добывают пищу после активации – взаимодействия с активным фуражиром) [21].

**3.4. Стадии фуражировки у муравьев.** В работе Е.Б. Федосевой [11] выделяются следующие стадии фуражировки:

1. Разведка – разрозненное обследование кормового участка немногими фуражирами.
2. Активация – процедура стимуляции разведчиками внутригнездовых особей.
3. Наведение – массовый выход рабочих из гнезда к найденному источнику ресурсов.
4. Транспортировка – перемещение пищи в гнездо.
5. Насыщение – снижение фуражировочной активности.

### 3.5. Оценка размера территории модельной семьи муравьев.

При общем вторичном делении территории у многих *Formica* кормовой участок семьи разделяется на индивидуальные поисковые участки (ИПУ). ИПУ – фрагмент, обследуемый и используемый одним фуражиром [13]. Оценить размеры ИПУ сложно, так как они зависят от количества ресурсов на территории, особенностей микрорельефа и так далее. Поэтому для приблизительной оценки площади, необходимой для постановки содержательных экспериментов, рассмотрим семьи муравьев, которые содержатся в лабораторных условиях.

Практика показывает, что для длительного содержания в лабораторных условиях семей *Formica* численностью до 500 рабочих достаточно двух арен размерами 80х40 см каждая. Оценки эти грубые, однако их достаточно для моделирования на качественном уровне – проверки, насколько действенны описываемые механизмы в технической системе.

Таким образом, основные характеристики, связанные с моделированием фуражировки в группе агентов по аналогии с семьей муравьев, следующие:

- основным объединяющим группу элементом инфраструктуры является гнездо;
- численность фуражиров в модельной группе составляет 15-45 особей;
- у муравьев комбинируются различные механизмы ориентации и коммуникации;
- для модельных видов муравьев основные способы обмена информацией – тактильный код и кинописис («язык поз»);
- для модельных видов муравьев усредненные значения линейных размеров и скорости составляют 0,62 см и 3,7 см/с соответственно;
- минимальная оценочная площадь территории для модельной группы муравьев составляет 0.64 м<sup>2</sup>.

Выделенные аспекты используем в последующих разделах при сопоставлении модельной семьи и группы роботов, описания моделей поведения и моделирования.

**4. Экспериментальная база.** Экспериментальной базой для исследования является группа роботов и испытательный полигон лаборатории робототехники Курчатовского Института.

Для модельной семьи муравьев оценим несколько параметров: численность, дистанцию коммуникации индивидов и размер кормового участка. По этим параметрам сопоставим модельное сообщество муравьев с группой роботов.

**4.1. Характеристика модельной семьи муравьев.** Согласно оценке из предыдущего раздела семье муравьев из 500 особей достаточно территории с суммарной площадью  $S_{\text{ку}} = 6400 \text{ см}^2$ . Введем понятие единичной площади  $S'$  – площадь, занимаемая одним объектом. Для муравьев модельных видов:  $S'_m = 0.62^2 = 0,3844 \text{ см}^2$ . В семье муравьев в среднем 13% фуражиров, для группы из 500 особей, их количество составит 65. Выразив площадь кормового участка муравьев через единичную площадь индивида  $S_{\text{ку}} = 6400/0,3844 \approx 16830$  единичных площадей, получим, что на одного фуражира приходится  $s \approx 260$  ед. площади кормового участка.

В качестве единицы измерения перемещения индивидов используем относительную скорость – расстояние, выраженное в линейных размерах объекта  $L$ , преодолеваемое им за одну секунду. Для муравья она составляет примерно  $6 L/c$ .

Форма кормового участка у муравьев определяется видовыми качествами и условиями окружающей среды.

**4.2. Характеристика группы роботов НИЦ «Курчатовский Институт».** Экспериментальная база – гетерогенная группировка мобильных минироботов (рисунок 1).

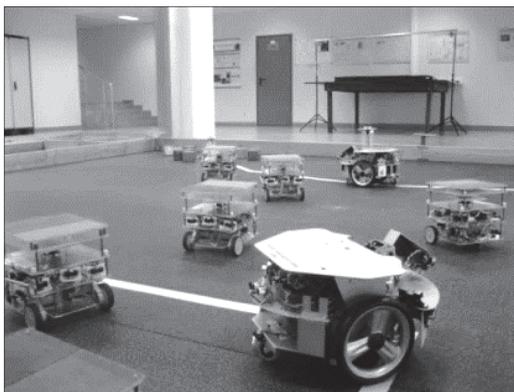


Рис. 1. Группа роботов YARP-2 и Dr.YARP

*Численность.* Группа состоит из 14 роботов: 10 роботов YARP - 2 и 4 роботов Dr.YARP.

*Сенсорика.* На YARP-2 сенсорная система представлена пятью ИК-дальномерами дальностью до 80 см. Dr. YARP оснащен четырьмя УЗД датчиками, пятью ИК-дальномерами дальностью до 80 см и камерой.

*Коммуникация.* Роботы оснащены системой локальной связи (маяком). Маяк – программно-аппаратный комплекс для передачи

данных в ИК-диапазоне. Передаваться могут как команды из ограниченного набора (сигнальная связь, передача 3 битовой команды на расстояние до 270 см), так и информация (информационная связь, передача 12 бит информации на расстояние до 100-150 см).

*Линейные размеры, скорость.* Размеры (ДхШхВ, см): YARP-2 – 21x21x23, Dr.YARP – 40x30x25. Скорость, см/с: YARP-2 – до 10, Dr.YARP – до 20. Относительная скорость обоих видов роботов составляет примерно 0,5 L/c.

**4.3. Расчет площади, необходимой для моделирования фуражировки в группе роботов.** Размер территории группы роботов рассчитывается по формуле (1):

$$S_{\text{кy}} = s * \sum S'_j, \quad (1)$$

где  $s$  – константа, площадь кормового участка (в ед. площади одного индивида), приходящаяся на одного индивида;  $S'$  – площадь, занимаемая одним индивидом.

Таким образом, общая площадь фуражировки группы роботов:  $S_{\text{кy}} = s * (10 * S'_{\text{yarp2}} + 4 * S'_{\text{dryarp}}) = 260 * (10 * 441 + 4 * 1200) = 2394600 \text{ см}^2 \approx 240 \text{ м}^2$ .

На оценку размера территории группы может существенно влиять скорость перемещения особей. Как показано ранее, для модельных видов муравьев она порядка 6 L/c, в то время как для робота – около 0,5 L/c. Так как скорости отличаются на порядок, сделаем предположение, что размер полигона может так же отличаться, самое больше – на порядок, то есть иметь площадь примерно  $24 \text{ м}^2$ .

Несмотря на привлекательность использования столь небольшого полигона, стоит учитывать, что муравьи значительно маневреннее роботов и могут использовать для перемещения не только горизонтальные, но и вертикальные поверхности. Поэтому хотя и можно говорить о допустимости использования полигона существенно меньше расчетного, при выборе его конечного размера стоит руководствоваться здравым смыслом – выбирать размер, достаточный для маневрирования роботов.

**4.4. Экспериментальный полигон.** Полигон (рисунок 2) имеет размер 4,8x9,0 м ( $43,2 \text{ м}^2$ ) с ограждением высотой 0.2 м. На его поверхность нанесена разметка – белые полосы с цветовой маркировкой на поворотах, соединяющие базу и поисковые участки. База – отделенная от «кормового участка» часть полигона, на которой располагается маяк (обеспечивает связь с роботами). Источники ресурсов – области полигона, оснащенные маяками, где располагаются ресурсы. Каждый маяк излучает сигнал о том, какой ресурс находится в этой области.



Рис. 2. Полигон с дорожной разметкой

**4.5. Сопоставление параметров модельной группы и экспериментального базиса.** По обоснованным ранее характеристикам группа роботов близка к условной семье-клану муравьев *Formica*. Сравнение характеристик модельной семьи-клана муравьем *Formica* и группы роботов представлено в таблице 1.

Таблица 1. Сравнение характеристик модельной семьи-клана муравьев *Formica* и группы роботов

Параметр	Модельная семья-клан муравьев <i>Formica</i>		Модельная группа роботов
	<i>Общая</i>	<i>Фуражиры</i>	
Численность группы, ед.	150-300	15-45	14
Доля кормового участка на одного фуражира, ед	260		~ 47
Территория модельной группы, м <sup>2</sup>	0,64		43,2
Относительная скорость, L/c	6		0,5
Макс. Дистанция локального взаимодействия (информационная обмен), ед. линейных размеров	0 (непосредственный тактильный контакт)		4
Макс. дистанция передачи коротких сигналов (сигнальная связь), дистанция / линейный размер объекта	~ 32		13

**5. Модель кормового поведения.** Кормовое поведение способствует обеспечению группы необходимым количеством ресурсов. Далее будут рассмотрены несколько моделей поведения, различающихся степенью сходства с поведением реального объекта.

Во всех моделях используются следующие основные объекты и элементы среды:

- фуражир – индивид, занятый добычей пищи;
- гнездо, базовая станция – место базирования роботов;
- источники ресурсов – области добычи ресурсов;
- ресурсы – собираемые объекты.

В общем случае есть несколько видов ресурсов.

Фуражировка – комплексная задача, проходящая в несколько этапов, соотносимых со стадиями фуражировки муравьев *Myrmica rubra* [9] – таблица 2.

Таблица 2. Соответствие стадий фуражировки муравьев и этапов фуражировки в технической системе

Стадии фуражировки <i>Myrmica rubra</i>	Фуражировка в технической системе	Назначение
Разведка	Поиск ресурсов	Разрозненное обследование кормового участка активными фуражирами
Активация	Информирование	Стимуляция внутригнездовых особей
Наведение	Добыча	Массовый выход рабочих из гнезда к найденному источнику ресурсов
Транспортировка	Транспортировка	Перемещение ресурсов в гнездо
Насыщение	Насыщение	Снижение фуражировочной активности

**5.1. Оценка эффективности поведения.** Оценку эффективности модели можно выполнить на основе различных показателей. Согласно одной из классических формулировок теории оптимального фуражирования – модели оптимального питания (optimal diet model) – оценка полезности добычи (P) основана на количестве обеспечиваемой жертвой энергии (E) и времени ( $t_E$ ), затраченном на получение энергии – (2).

$$P = E / t_E. \quad (2)$$

В работе в качестве оценки эффективности моделей рассматривается самая простая формулировка этой теории, при которой полезность ограничивается только временем добычи. В качестве «хищника» выступает вся семья. Такое предположение делается исходя

из того факта, что самостоятельно муравей вне семьи существовать продолжительное время не может, а основное место обмена пищи – гнездо. Дополнительным ограничением является то, что для получения энергии  $E$  требуется несколько ресурсов, то есть не имея хотя бы одного из них, энергия не производится. Учитывая все вышесказанное, оценка эффективности моделей выполняется по формуле (3):

$$P = E(R_1, \dots, R_n) / t_E, \quad (3)$$

где  $R_1, \dots, R_n$  – добываемые ресурсы;  $t_E$  – среднее время добычи одной единицы энергии.

**5.2. Базовая модель.** Для начала рассмотрим модель, учитывающую только потребность в ресурсах. Введем обозначения:

- $Behavior_{A_i} = (ResNeed_{A_i}, F_{A_i})$  – модель поведения агента  $A_i$ ;
- $A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$  – группа индивидов;
- $A_i = (Goal, Hunger, ResNeed)$  – некоторый индивид;
- $B = \{ResNeed\}$  – база;
- $Goal \in \mathbb{R}$  – искомый ресурс (ресурсы пронумерованы);
- $Hunger \in [0; 1] \in \mathbb{R}$  – показатель голода: 0 – не голоден, 1 – очень голоден;
- $ResNeed = \{Res_1, Res_2, \dots, Res_n\}$ ,  $Res_j \in [0; 1] \in \mathbb{R}$  – потребность базы в ресурсах;
- $F = \{F_1, F_2, \dots, F_q\}$  – набор базовых воздействий агента на внешнюю среду. Воздействие является фиксированной последовательностью действий, сформированных на аппаратном уровне;
- $n$  – количество видов ресурсов;
- $m$  – количество агентов в группе;
- $ResNeed_{A_i}$  – хранимая индивидом  $A_i$  информация о потребностях базы;
- $ResNeed_{B_i}$  – актуальная информация о потребностях базы.

База, являясь моделью гнезда и внутригнездовых особей одновременно (по крайней мере, частично), определяет потребность группы в ресурсах, а значит, является источником актуального уровня потребностей. Конечно, к семье муравьев понятие «потребность гнезда» практически не применимо. Но в рамках модели необходимо ввести понятие «потребность базы» как обобщение всех сложных процессов и взаимодействий, возникающих в семье муравьев и определяющих индивидуальные потребности особей. Как следствие, под потребностью индивида будем понимать локально хранимую потребность базы, обновляемую во время пребывания на ней ( $ResNeed_{A_i} \leftarrow ResNeed_{B_i}$ , когда агент находится на базе).

Так как агенты могут оперировать только качественным представлением о недостатке ресурсов (им неизвестно сколько нужно

принести), ResNeed целесообразно представить в виде нормированного вектора:

$$ResNeed = \{Res_j = F_{res}(t), \sum_j Res_j = I\}.$$

Зависимость от времени подчёркивает, что потребность меняется со временем.  $F_{res}(t)$  может быть любой. Зададим ее видом (4):

$$F_{res}(t) = \begin{cases} \frac{N_{j,norm} - N_j}{N_{j,norm}}, N_j < N_{j,norm} \\ 0, N_j \geq N_{j,norm} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $N_j$  – количество  $j$ -го ресурса в гнезде;  $N_{j,norm}$  – количество  $j$ -го ресурса, достаточное для нормальной работы группе.

Алгоритм процедуры фуражировки агента представлен на листинге 1.

```

Алгоритм фуражировки FStep_basic(Ai, B)
Если Ai.Hunger < starving: -- не голодает
    Если SeeResource(Ai) то: -- агент видит ресурс
        PickUpResource -- собирать ресурс
        ReturnToBase(Ai, B) -- вернуться на базу
        UnloadRes(Ai) -- выгрузить ресурс
        Charge(Ai) -- заряжаться
        Цикл пока не Signal(Ai, CollectResource)
            Sleep(Ai) -- ждать
        КЦикл
    Иначе:
        Если Ai.Goal.Curr = Ai.Goal.Prev то: -- агент ищет известный
            ресурс
            MoveToResource(Ai, Curr) -- двигаться к
местоположению ресурса
        Иначе:
            SearchResource(Ai, Curr) -- искать ресурсы
        КЕсли
    КЕсли
Иначе:
    ReturnToBase(Ai, B) -- вернуться на базу
    Charge(Ai) -- заряжаться
    Цикл пока не Signal(Ai, CollectResource)
        Sleep(Ai) -- ждать
    КЦикл
КЕсли
КПроцедура
    
```

Листинг 1. Алгоритм процедуры фуражировки агента

Общий цикл работы группы заключается в вызове процедуры  $FStep\_basic(A_i, B)$  для  $\forall A_i \in \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ , если он не разряжен.

Так как на поиск ресурсов энергия затрачивается каждым роботом, такая модель не эффективна с точки зрения расхода энергии. Введем в модель статус (активный или пассивный фуражир), который позволит ограничить поиск несколькими особями, при этом сбор осуществляется всеми агентами.

**5.3. Модель со статусом агентов.** Усложним модель, введя статус фуражиров (активный и пассивный) и связанные с ним процедуры обработки:

$$A_i = (Goal, Hunger, ResNeed, State);$$

$$State \in \{Active, Passive\} - \text{состояние агента.}$$

Активный фуражир (АФ) – фуражир, самостоятельно осуществляющий поиск пищи. Пассивный фуражир (ПФ) – особь, фуражировочная деятельность которого инициируется АФ.

Поскольку размер группы роботов ограничен, модель предполагает возможность быстрой смены статуса фуражира с пассивного на активный и обратно. Последний переход в природе маловероятен, однако в рамках модели рассматривается, чтобы позволить малой группе роботов увеличить мобилизационный потенциал.

*Алгоритм  $FStep\_withStatus(A_i, B)$ . Фуражировка*

Если  $A_i.Hunger < starving$ : -- не голодает

Если  $SeeResource(A_i)$  то: -- агент видит ресурс

$PickUpResource(A_i)$  -- собирать ресурс

$A_i.State \leftarrow Active$  -- активация

$ReturnToBase(A_i, B)$  -- вернуться на базу

$UnloadRes(A_i)$  -- выгрузить ресурс

$Charge(A_i)$  -- заряжаться

Цикл пока не  $Signal(A_i, CollectResource)$

$Sleep(A_i)$  -- ждать

Если  $A_i.State = Active$

$ActivateRobots(A_i)$  -- дать сигнал активации роботов

вокруг

КЦикл

Иначе:

Если  $A_i.Goal.Curr = A_i.Goal.Prev$  то: -- агент ищет известный ресурс

$MoveToResource(A_i, Curr)$  -- двигаться к

местоположению ресурса

Иначе:

```

SearchResource(Ai, Curr) -- искать ресурсы
КЕсли
КЕсли
Иначе:
Ai.State ← Passive – переход в пассивное состояние
ReturnToBase(Ai, B) -- вернуться на базу
Charge(Ai)-- заряжаться
Цикл пока не (Signal(Ai, CollectResource) ИЛИ
Estimate(Signal(Ai, Follow| Resj)))
Sleep(Ai)-- ждать
КЦикл
КЕсли
КПроцедура

```

Листинг 2. Алгоритм фуражировки

Обработка статуса агента включает в себя изменение статуса ( $A_i.State \leftarrow Passive$ ,  $A_i.State \leftarrow Active$ ) и оценку сигнала активации  $Estimate(signal)$ , где  $signal$  – получаемый сигнал активации, содержащий также информацию о ресурсе  $Res_j$ ,  $j \in [0; n]$ , за которым предлагается ехать. В этой модели «привлекательность»  $Estimate(signal) = A_j.Res_j$ , то есть вероятность отправиться на сбор соответствует потребности в ресурсе.

**6. Реализация модели кормового поведения.** Одной из распространенных, а также наиболее естественной и наглядной формой описания поведения является конечный автомат (КА). В рамках этого представления полагается, что поведение анимата (робота) складывается из ограниченного набора поведенческих последовательностей, составляющих ФКД – фиксированный комплекс действий. Для технической системы ФКД представляет собой библиотеку функций, реализованных в виде КА. Далее для определенности положим под КА понимать автоматы Мили, то есть автоматы, функции воздействия которых исполняются на переходах между состояниями. Так как существуют схожие поведенческие последовательности (например, поиск ресурсов и поиск гнезда, поворот налево и направо), для функций ФКД предпочтительнее использовать обобщенные КА – параметризованные конечные автоматы с предикатными условиями переходов. Параметры таких КА определяют направленность поведения [1]. На рисунке 3 изображен поисковый автомат, используемый далее в модели поведения.

Обобщенный поисковый автомат обеспечивает поиск цели, определенной входным параметром. Состояния  $S$  – начальное,  $T$  – терминальное,  $W$  – для позиционирования на цель и её достижения,  $R1, R2, R3$  – смена тактики поиска. Условия перехода

«спереди», «слева», «позади», «справа» срабатывают, когда цель находится по соответствующему направлению – спереди, слева, сзади или справа. Условиям сопоставлены действия – «ехатьВперед», «ехатьНалево», «ехатьНазад», «ехатьНаправо». Переход «если» обрабатывается, когда другие условия не выполняются, «истина» – безусловный переход, «вижу» – обнаружена цель. Действие «ехатьСлучайно» – выбор случайного направления движения, «-» – отсутствие действия на переходе. Переходы  $R1 \rightarrow W$ ,  $R2 \rightarrow W$ ,  $R3 \rightarrow W$  связаны с обнаружением объектов, потенциально являющимися искомыми. Переходы Т выполняются, если обнаружен искомый объект.

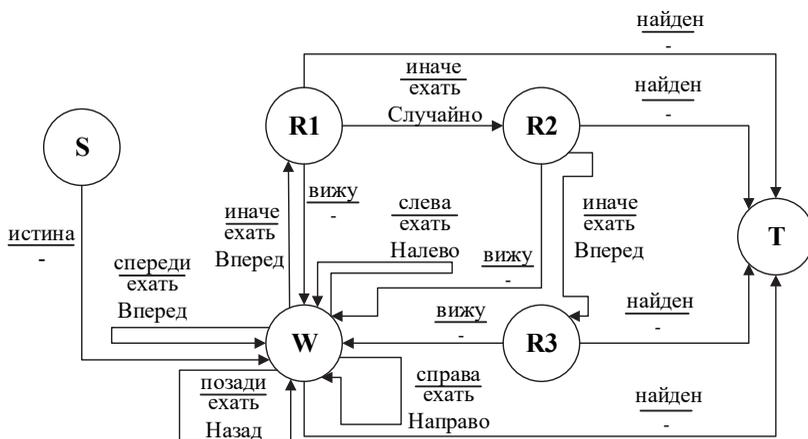


Рис. 3 Обобщенный поисковый автомат

Стоит отметить, что функции перехода, заданные в ФКД, не привязываются к какой-либо аппаратной платформе или программной среде. Они суть объявления, реализация которых зависит от объекта управления. Поэтому описываемые модели абстрактны, а перенесение между средами моделирования и аппаратными платформами несложно – требуется лишь сопоставление функций перехода с исполняющими функциями в среде или на работе.

Поведение агента также описывается автоматом – мета-автоматом. Его особенность в том, что функциями перехода являются только вызовы функции из ФКД, то есть других автоматов. На рисунке 4 представлен пример мета-автомата движения к цели с объездом препятствия.

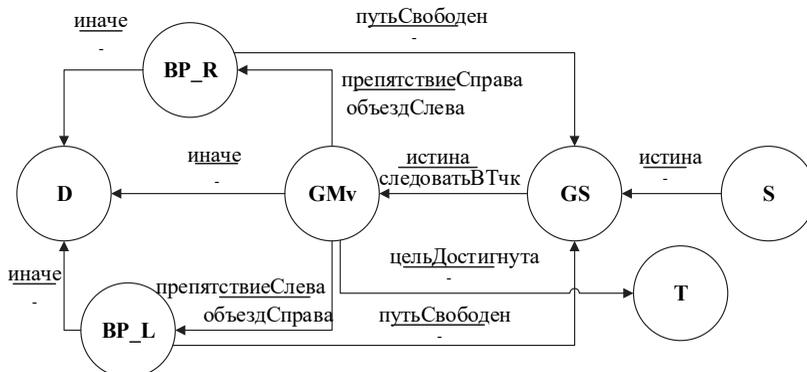


Рис. 4. Мета-автомат движения в точку с объездом препятствий

Координаты конечной точки передаются в автомат извне. Состояния S – начальное, T – терминальное, GS – начало следования, GMv – движение по направлению к точке, BP\_R, BP\_L – объезд препятствий, D – отладочное (в случае возникновения неизвестных условий). «следоватьВТчку», «объездСлева» и «объездСправа» – загрузка соответствующих автоматов. Условия перехода «препятствиеСправа», «препятствиеСлева» срабатывают при возникновении препятствия, «цельДостигнута» – когда достигнута точка, «путьСвободен» – агент миновал препятствие, «если» – безусловный переход, когда другие условия не выполняются, «истина» – безусловный переход. Отсутствие действия на переходе обозначено символом «-».

Непосредственно к моделируемому поведению этот автомат отношения не имеет (хотя и может быть интегрирован в него), однако является простой и понятной демонстрацией поведенческого мета-автомата. Полноценные мета-автоматы, используемые в технических системах, в том числе и описываемый далее, содержат большое число состояний и переходов, из-за чего их сложно изобразить в виде «как есть», поэтому чаще они представляемы фрагментарно или в укрупненном виде.

Для описания поведения, заданного рассмотренными моделями, составлена библиотека автоматов для ФКД, которая включает в себя:

- движение вперед, влево, вправо, назад, остановка;
- поворот на заданный угол;
- обобщенный поисковый автомат;
- движение вдоль объекта;
- «пустышка».

Автомат «пустышка» – автомат с одним переходом  $S \rightarrow T$  из начального состояния в терминальное, с ничем не выполняющей функцией перехода. Он позволяет описать общую логику поведения со всеми состояниями, переходами, условиями переходов без вызова конкретных КА и ускорить разработку в целом.

Рассмотренные модели реализуются одним мета-автоматом. Автомат объединяет поведение активных и пассивных фуражиров. Различие поведенческих реакций обеспечивается на уровне исполнительных процедур – на переходах исполняются разные функции, в автоматы передаются разные параметры.

Мета-автомат можно условно разделить на несколько частей:

1) Состояния и переходы, связанные с обменом информацией (рисунок 5). Все переходы этой группы отрабатываются на базе и в рамках рассмотренных моделей включают весь информационный обмен между агентами – обновление информации о потребностях, активация фуражировки.

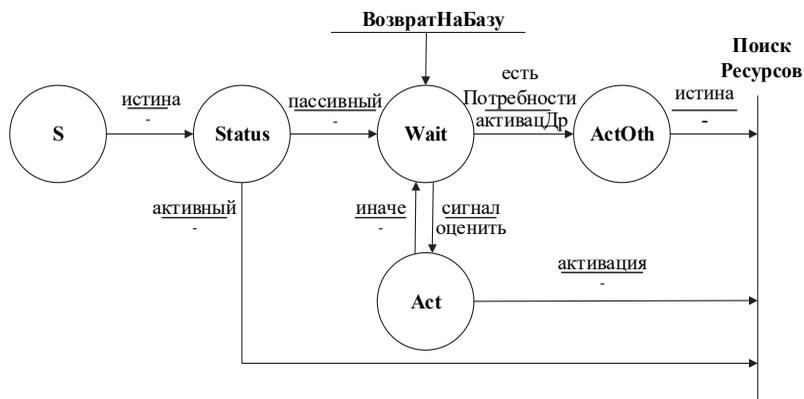


Рис. 5. Укрупненный мета-автомат информационного обмена

$S$  – начальное состояние,  $Status$  – выбор типа поведения;  $Wait$  – ожидание инициирующего сигнала от активного фуражера или базы;  $ActOth$  – активация пассивных фуражиров;  $Act$  – оценивание активационного сигнала. Условиями перехода «активный» и «пассивный» выполняется начальное разделение агентов на активных и пассивных, «естьПотребности» срабатывает, когда у гнезда есть потребности в ресурсах, «сигнал» – для выполнения пассивными фуражерами оценки сигнала активации, «истина» – безусловный переход. Отсутствие действия на переходе обозначено «-», «активациДр» – активация пассивных фуражиров, «оценить» – оценка

привлекательности призыва к активации. «ПоискДороги» – переход к другой части автомата, «ВозвратНаБазу» – из другой части.

2) Состояния и переходы, связанные с поиском ресурсов (рисунок 6). Ключевые состояния этой группы – AAct и APass – различают поведение активных и пассивных фуражиров. Переходы в эти состояния связаны с выполнением анализа данных о среде, из них – с обработкой реакций. Для активных фуражиров это в первую очередь выбор и запоминание маршрута, для пассивных – следование маршруту.

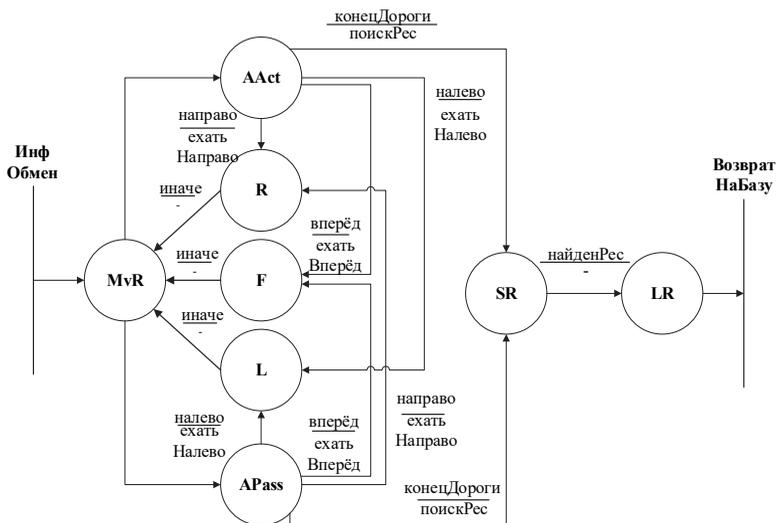


Рис. 6. Укрупненный мета-автомат. Поиск ресурсов

«ИнфОбмен» – предыдущая часть автомата, «ВозвратНаБазу» – следующая. Состояния: MvR – движение по дороге; F, R, L – преодоление перекрёстков, перемещаясь вперёд, вправо, влево; AAct/APass – анализ дороги активными/пассивными фуражиром; SR – поиска ресурса; LR – сбор ресурса. Условия перехода «вперёд», «налево», «направо» верны, когда блок анализа определил соответствующее направление движения; «конецДороги» – агент достиг конца дороги; «найденРесурс» – агент обнаружил искомый ресурс; «если» – когда другие условия не выполняются. «истина» – безусловный переход. Функция перехода «поискРес» – загрузка автомата поиска ресурсов, «-» – отсутствие перехода.

3) Состояния и переходы, связанные с возвратом на базу (рисунок 7). В этой группе ключевое состояние одно – АВ, одинаковое для фуражиров обоих состояний.

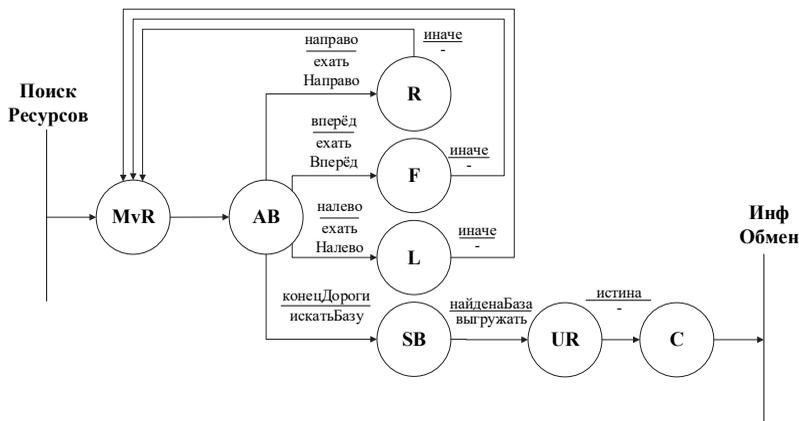


Рис. 7. Укрупненный мета-автомат. Возвращение на базу

Состояния: MvR – движение по дороге; F, R, L – преодоление перекрёстков, перемещаясь вперёд, вправо, влево; АВ – анализ ситуации на дороге; SB – поиска базы; UR – разгрузка ресурса; С – подзарядка. Условия перехода «вперёд», «налево», «направо» верны, когда блок анализа определил соответствующее направление движения; «конецДороги» – агент достиг конца дороги; «найденБаза» – агент обнаружил базу; условие «если» выполнимо, когда другие не выполняются; «истина» – безусловный переход. Функция перехода «искатьБазу» – загрузка автомата поиска базы, «-» – отсутствие перехода.

В рамках экспериментов на экспериментальной базе были отработаны некоторые частные поведенческие алгоритмы и механизмы, реализованные в автоматной логике – базовые движения, езда по линии. Комплексные эксперименты (тестирование как всей поведенческой модели, так и отдельных ее элементов) проводились в среде моделирования Kvozum [22, 23]. В рамках работы большее внимание было уделено моделированию, так как работа с группировкой является менее удобным вариантом тестирования моделей поведения – меньше возможностей по отладке, наблюдению, переконфигурированию системы. Кроме того, моделирование позволяет проводить более масштабные эксперименты – расширять виртуальную группировку намного легче.

В среде создан аналог реального полигона: нанесена разметка с маркерами, источники ресурсов, база. Два типа фуражиров – активный и пассивный – визуально различаются. В силу ограничений

вычислительной мощности проводилось моделирование группировки, включающей 7 агентов: 7 активных для базовой модели и 2 активных и 5 пассивных для модели со статусом.

Моделирование поведения представляло собой серию экспериментов для каждой из двух моделей: базовой и модели со статусом. Изменяемым параметром в экспериментах было количество фуражиров и их соотношение. Эксперименты без пассивных фуражиров относятся к модели базовой, с ними – к модели со статусом. Каждый эксперимент длился 50000 тактов, что примерно соответствует 12 ч реального времени. Параметры агентов – продолжительность работы, скорость перемещения, а также размер полигона, его конфигурация – подбирались в соответствии с их реальными аналогами. Количество видов ресурсов – 2. Агент за раз приносит достаточное количество ресурса одного типа, для производства энергии на одну полную емкость батареи агента. На рисунке 8 представлены результаты – оценка эффективности поведения в зависимости от конфигурации группы роботов. Для вычисления эффективности модели время добычи  $t_E$  используется среднее время добычи энергии за время эксперимента.

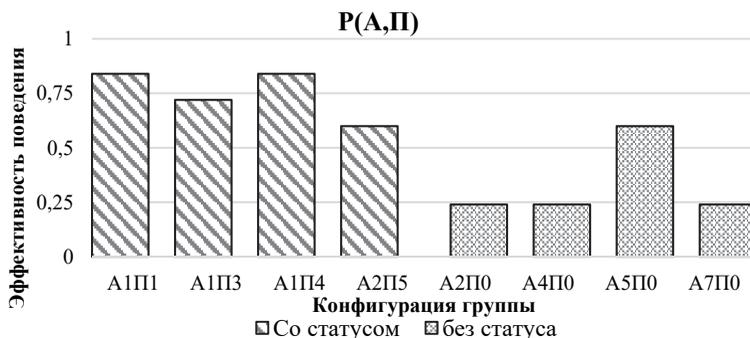


Рис. 8. Эффективность поведения групп роботов разной конфигурации. Число после А – количество активных фуражиров, после П – пассивных

В конфигурациях группы число после символа А – количество активных фуражиров, после П – пассивных. Из диаграммы видно, что модель поведения со статусом эффективнее. В ходе экспериментов с большими группировками (7 и более агентов) наблюдались частые столкновения, что приводило к значительному ухудшению эффективности. Поэтому в результирующую диаграммы они не вошли.

Для конфигураций А1П4 и А5П0 была проведена серия экспериментов для определения продолжительности выживания группы. Результаты представлены на рисунке 9.

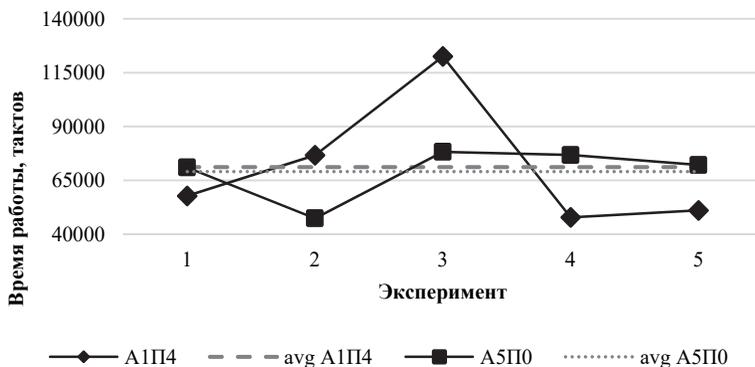


Рис. 9. Время работы модельной группы в основном цикле (пока все агенты «заряжены»)

Группа A5П0 показала более стабильную работу. Но средние значения времени для обеих конфигураций очень близки (разница около 3% от среднего значения), поэтому продолжительность работы примерно одинакова. Как и во время экспериментов для определения эффективности, агенты мешали друг другу, что часто влияло на продолжительность работы – сходя с дороги, агенты терялись, продолжительность поиска ресурсов и базы сильно увеличивались, они разряжались, не восполнив свой запас энергии.

В ходе экспериментов наблюдалась адекватная работа модели – и активные, и пассивные фуражиры успешно обрабатывали поведенческие автоматы.

**7. Заключение.** Разрабатывая биоинспирированные модели поведения, важно уделять внимание тем механизмам и комплексам механизмов, которые лежат в основе поведения реальных биологических систем. Работа является одной из первых, где выделены и формализованы существенные для фуражировки параметры биологической системы – семьи муравьев – в форме, удобной для специалистов технических наук. При всей своей простоте выделенные параметры являются хорошей отправной точкой для дальнейшего развития подхода, подразумевающего наличие формализованных результатов, на основе которых могут разрабатываться технические системы, а разработанные модели – подтверждением работоспособности механизмов, лежащих в их основе. Работа является примером междисциплинарных исследований – как научные изыскания ученых-мирмекологов ложатся в основу решений конкретных

прикладных задач робототехники. В дальнейшем параметры могут быть использованы для разработки более сложных моделей поведения, чем рассмотренные в работе.

Таким образом, основными результатами работы являются выделение и формализация некоторых механизмов функционирования семьи муравьев, существенных для моделирования фуражировки, и подтверждение работоспособности этих механизмов средствами имитационного моделирования.

Важный вывод, сделанный в ходе работы – семьи муравьев являются привлекательным объектом для моделирования биоподобных робототехнических систем как в продолжение работы по моделированию фуражировки, так и при создании аналогов иных биологических механизмов. Созданная модель группы роботов, несмотря на ряд упрощений и допущений, приближена к природным прототипам (семьям муравьев) в сравнении с аналогичными работами в групповой робототехнике. Создание базы как функционального аналога гнезда и внутригнездовых особей у муравьев биоинспирированной системы стимулов для агентов – основа для формирования более сложного поведения. В рамках настоящей работы были рассмотрены лишь отдельные механизмы, а эксперименты показали эффективность предложенных моделей.

Полученные модели апробированы только на программных средствах. Их перенесение на реальную группировку роботов, проведение комплексного тестирования системы, добавление в модель других механизмов, используемых *Formica* и другими муравьями, является следующим этапом развития работы. Также во время экспериментов обнаружилось сложности с моделированием больших группировок – проблема, решение которой требует расширения стандартных функций среды *Kvorum*.

### Литература

1. *Карпов В.Э., Карпова И.П., Кулинич А.А.* Социальные сообщества роботов // М.: УРСС. 2019. 352 с.
2. *Floreano D., Mattiussi C.* Bio-Inspired Artificial Intelligence: theories, methods, and technologies // MIT Press. 2008. 659 p.
3. *Dorigo M., Stützle T.* Ant Colony Optimization // IEEE Computational Intelligence Magazine. 2006. vol. 1(4). pp. 28–39.
4. *Karaboga D., Basturk B.* A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (ABC) algorithm // Journal of Global Optimization. 2007. vol. 39. no. 3. pp. 459–471.
5. *Yang X.S.* A new metaheuristic Bat-inspired Algorithm // Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICSO 2010). 2010. pp. 65–74.
6. *Suárez P., Iglesias A., Gálvez A.* Make robots be bats: specializing robotic swarms to the Bat algorithm // Swarm and Evolutionary Computation. 2019. vol. 44. pp. 113–129.

7. *Petersen K.H, Nagpal R., Werfel J.K.* TERMES: An Autonomous Robotic System for Three-Dimensional Collective Construction // *Robotics: science and systems VII*. 2011. 8 p.
8. *Arvin F. et al.* COSΦ: Artificial pheromone system for robotic swarms research // 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015. pp. 407–412.
9. *Fujisawa R. et al.* Designing pheromone communication in swarm robotics: Group foraging behavior mediated by chemical substance // *Swarm Intelligence*. 2014. vol. 8. no. 3. pp. 227–246.
10. *Wilson E.O.* Chemical communication among workers of the fire ant *Solenopsis saevissima* (Fr. Smith) 2. An information analysis of the odor trail // *Animal Behaviour*. 1962. vol. 10. no. 1-2. pp. 148–158.
11. *Федосеева Е.Б.* Технологический подход к описанию групповой фуражировки муравьев *Mutnica rubra* // *Зоологический журнал*. 2015. Т. 94. № 10. С. 1163–1178.
12. *Бургов Е.В.* Пространственно-функциональные структуры у муравьев *Serviformica* (Hymenoptera: Formicidae) // *Вестник МГПИУ. Серия: Естественные науки*. 2016. № 4. С. 19–27.
13. *Захаров А.А.* Муравьи лесных сообществ, их жизнь и роль в лесу // *KMK Scientific Press*. 2015. 404 с.
14. *Collingwood C.A. et al.* The Formicidae (Hymenoptera) of Fennoscandia and Denmark // *Scandinavian Science Press*. 1979. 156 p.
15. *Бургов Е.В.* Функциональные основы экологической сегрегации видов у муравьев: предварительные данные // *Материалы XV Всероссийского мирмекологического симпозиума «Муравьи и защита леса»*. 2018. С. 25–31.
16. *Khaluf Y., Vanhee S., Simoens P.* Local ant system for allocating robot swarms to time-constrained tasks // *Journal of Computational Science*. 2019. vol. 31. pp. 33–44.
17. *Mori A. et al.* Comparison of reproductive strategies and raiding behavior in facultative and obligatory slave-making ants: the case of *Formica sanguinea* and *Polyergus rufescens* // *Insectes Sociaux*. 2001. vol. 48. no 4. pp. 302–314.
18. *Длусский Г.М.* Принципы коммуникации у муравьев // *Доклады на 33-м ежегодном чтении памяти Н.А. Холодковского*. 1981. С. 3–33.
19. *Захаров А.А.* Организация сообществ у муравьев // *М.: Наука*. 1991. 278 с.
20. *Богатырева О.А., Шиллеров А.Е.* Синергетика социальности // *СО РАН*. 1998. 292 с.
21. *Захаров А.А.* Внутривидовые отношения у муравьев // *М.: Наука*. 1972. 216 с.
22. *Карпов В.Э., Ровбо М.А., Овсянникова Е.Е.* Система моделирования поведения групп робототехнических агентов с элементами социальной организации Кворум // *Программные продукты и системы*. 2018. Т. 3. № 31. С. 581–590.
23. *Rovbo M.A., Ovsyannikova E.E.* Simulating robot groups with elements of a social structure using KVORUM // *Procedia Computer Science*. 2017. vol. 119. pp. 147–156.

**Малышев Александр Александрович** – инженер-исследователь, лаборатория робототехники, НБИКСТ-ПТ НИЦ «Курчатовский институт». Область научных интересов: робототехника. Число научных публикаций – 9. a.san.malyshev@mail.ru; пл. Академика Курчатова, 1, 123182, Москва, Россия; р.т.: +7(985)301-11-49.

**Бургов Евгений Вадимович** – инженер-исследователь, лаборатория робототехники, НБИКСТ-ПТ НИЦ «Курчатовский институт». Область научных интересов: мирмекология. Число научных публикаций – 12. burgov.ev@yandex.ru; пл. Академика Курчатова, 1, 123182, Москва, Россия; р.т.: +7 910 630 01 01.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при частичном финансировании РФФИ (проект № 17-29-07083 офн\_м).

A. MALYSHEV, E. BURGOV  
**REVISITING PARAMETERS OF BIOINSPIRED BEHAVIOR  
MODELS IN GROUP FORAGING MODELING**

*Malyshev A., Burgov E. Revisiting Parameters of Bioinspired Behavior Models in Group Foraging Modeling.*

**Annotation.** Using bioinspired models and methods is one of approaches for solving tasks of swarm robotics. In this paper one of such tasks, modeling of foraging, and it's solving by creating analogues of social structures of ants and models of feeding behavior are considered. The most important characteristics of ants' colonies for modeling were defined – individuals number in society and it's structure, workers' speed, a communication distance and working area size. Besides, existing experimental basis (a group of robots and a polygon) was estimated for a usage as a hardware platform for experiments. Several models of feeding behavior were considered: a model without foragers' functions differentiation and a model with differentiation on active and passive ones. Active foragers look for resources by themselves, then they involve passive foragers; passive foragers are settled on a base, while are not involved in harvesting.

A set of finite state machines describe the behavior of agents: basic automatons (provide basic behavior functions) and a meta- automaton, that switches with some conditions an execution of basic automatons. Basic movements were tested on experimental basis. A complex test of models were conducted in a simulation program Kvorum. An analogue of real polygon was made in the program. Modeling consists of series of experiments for every model in which agents must harvest resources. Series differ from each other by number of agents. For models' quality estimation a ratio of received energy to average obtaining time. Experiments settle that model with functions differentiation works more effective.

**Keywords:** Group Robotics, Bioinspired Approach, Behavior Modeling, Ants, Foraging, Resource Harvesting.

**Malyshev Alexander** – Research Engineer, Robotics Laboratory, NBICS NRC «Kurchatov Institute». Research interests: robotics. The number of publications – 9. a.san.malyshev@mail.ru; 1, Akademika Kurchatova pl., 123182, Moscow, Russia; office phone: +7(985)301-11-49.

**Burgov Evgenii** – Research Engineer, Robotics Laboratory, NBICS NRC «Kurchatov Institute». Research interests: myrmecology. The number of publications – 12. burgov.ev@yandex.ru; 1, Akademika Kurchatova pl., 123182, Moscow, Russia; office phone: +7 910 630 01 01.

**Acknowledgements.** This research is supported by RFBR (grant № 17-29-07083 офи\_м).

### References

1. Karpov V.E., Karpova I.P. *Social'nye soobshhestva robotov* [Social Robot Communities]. M.: YRSS. 2019. 352 p. (In Russ.).
2. Floreano D., Mattiussi C. *Bio-Inspired Artificial Intelligence: theories, methods, and technologies*. London: MIT Press. 2008. 659 p.
3. Dorigo M., Stützle T. Ant Colony Optimization. *IEEE Computational Intelligence Magazine*. 2006. vol. 1(4). pp. 28–39.
4. Karaboga D., Basturk B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization: Artificial bee colony (ABC) algorithm. *Journal of Global Optimization*. 2007. vol. 39. no. 3. pp. 459–471.

- 5 Yang X.S. A new metaheuristic Bat-inspired Algorithm. Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICO 2010). 2010. pp. 65–74.
- 6 Suárez P., Iglesias A., Gálvez A. Make robots be bats: specializing robotic swarms to the Bat algorithm. *Swarm and Evolutionary Computation*. 2019. vol. 44. pp. 113–129.
- 7 Petersen K.H, Nagpal R., Werfel J.K. TERMES: An Autonomous Robotic System for Three-Dimensional Collective Construction. *Robotics: science and systems VII*. 2011. 8 p.
- 8 Arvin F. et al. COSF: Artificial pheromone system for robotic swarms research. 2015 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2015. pp. 407–412.
- 9 Fujisawa R. et al. Designing pheromone communication in swarm robotics: Group foraging behavior mediated by chemical substance. *Swarm Intelligence*. 2014. vol. 8. no. 3. pp. 227–246.
- 10 Wilson E.O. Chemical communication among workers of the fire ant *Solenopsis saevissima* (Fr. Smith) 2. An information analysis of the odor trail. *Animal Behaviour*. 1962. vol. 10. no. 1-2. pp. 148–158.
- 11 Fedoseeva E.B. [Technological approach to the description of group foraging of ants *Myrmica rubra*]. *Zoologicheskij zhurnal – Zoological Journal*. 2015. vol. 94. no. 10. pp. 1163–1178. (In Russ.).
- 12 Burgov E.V. [Spatial-functional structures in ants *Serviformica* (Hymenoptera: Formicidae)]. *Vestnik MGPU. Serija «Estestvennye nauki» – Vestnik Moscow City University*. Series «Informatics and Informatization of Education». 2016. vol. 4. pp. 19–27. (In Russ.)
- 13 Zaharov A.A. *Murav'i lesnyh soobshhestv, ih zhizn' i rol' v lesu* [Ants of forest communities, their life and role in the forest]. KMK Scientific Press. 2015. 404 p. (In Russ.)
- 14 Collingwood C.A. The Formicidae (Hymenoptera) of Fennoscandia and Denmark. Scandinavian Science Press. 1979. 156 p.
- 15 Burgov E.V. [The functional basis of ecological segregation of species in ants: preliminary data]. *Materialy XV Vserossijskogo mirmekologicheskogo simpoziuma*. [Materials of the XV All-Russian Peace-Symposium on Ants and forest protection]. 2018. pp. 25–31. (In Russ.).
- 16 Khaluf Y., Vanhee S., Simoens P. Local ant system for allocating robot swarms to time-constrained tasks. *Journal of Computational Science*. 2019. vol. 31. pp. 33–44.
- 17 Mori A. et al. Comparison of reproductive strategies and raiding behavior in facultative and obligatory slave-making ants: the case of *Formica sanguinea* and *Polyergus rufescens*. *Insectes Sociaux*. 2001. vol. 48. no 4. pp. 302–314.
- 18 Dlusskij G.M. [Principles of Ant Communication]. *Doklady na 33-m ezhegodnom chtenii pamjati N.A. Holodkovskogo*. [Papers at the 33rd annual reading in memory of N.A. Kholodkovsky]. 1981. pp. 3–33. (In Russ.).
- 19 Zaharov A.A. *Organizacija soobshhestv u murav'ev* [Community organization for ants]. M.: Nauka. 1991. 278 p. (In Russ.).
- 20 Bogatyreva O.A., Shillero A.E. *Sinergetika social'nosti* [Synergy of sociality]. SO RAN. 1998. 292 p. (In Russ.).
- 21 Zaharov A.A. *Vnutrividovye otnoshenija u murav'ev* [Intraspecific relationships in ants]. M.: Nauka. 1972. 216 p. (In Russ.).
- 22 Karpov V.E., Rovbo M.A., Ovsjannikova E.E. [System for modeling the behavior of groups of robotic agents with elements of the social organization Kvorum]. *Programmnye produkty i sistemy – Software Products and Systems*. 2018. Issue 3. vol. 31. pp. 581–590. (In Russ.).
- 23 Rovbo M.A., Ovsjannikova E.E. Simulating robot groups with elements of a social structure using KVORUM. *Procedia Computer Science*. 2017. vol. 119. pp. 147–156.

Н.А. ДУДАРЕНКО, Н.А. ВУНДЕР  
**АПРИОРНЫЙ КОНТРОЛЬ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО  
ВЫРОЖДЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ МНОГОКАНАЛЬНЫХ  
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ**

*Дударенко Н.А., Вундер Н.А. Априорный контроль потенциального вырождения непрерывных многоканальных динамических систем.*

**Аннотация.** Рассматривается проблема априорного контроля потенциального вырождения непрерывных многоканальных динамических систем. Склонность системы к возможному вырождению, которое может повлечь за собой частичную или полную потерю работоспособности системы, рассматривается как системное свойство, которое необходимо контролировать на этапе проектирования системы наравне со свойствами устойчивости, надежности и инвариантности к изменяющимся условиям. Получена количественная оценка потенциального вырождения системы и организации ее структуры в совокупности с перекрестными связями и задающими воздействиями полиномиального вида. Показано, что процесс вырождения многоканальной динамической системы есть процесс уменьшения ранга ее линейного оператора. На основании этой математической концепции и строится аппарат функционалов вырождения многоканальной динамической системы, который опирается на алгебраические свойства матрицы оператора системы, называемой далее ее критериальной матрицей. Для решения поставленной задачи используется такой показатель, как функционал вырождения, который конструируется на спектре сингулярных чисел критериальной матрицы системы и в предельном случае представляет собой величину, обратную числу обусловленности критериальной матрицы системы (глобальный функционал вырождения). В отличие от существующих ранее решений в данной статье предлагается алгоритм формирования критериальной матрицы системы с использованием резольвенты матрицы ее состояния. Депараметризация линейной алгебраической задачи осуществляется посредством аддитивного разложения вектора выхода системы по производным задающего воздействия и подробно рассмотрена для случая установившегося режима работы системы. Предлагаются процедура априорного контроля потенциального вырождения многоканальной непрерывной динамической системы, а также рекомендации по возможному обеспечению требуемого значения функционала вырождения критериальной матрицы системы с использованием методов модального управления.

**Ключевые слова:** вырождение, многоканальная система, критериальная матрица, сингулярное разложение.

**1. Введение.** Многоканальные динамические системы применяются в современной теории управления для разработки встраиваемых в техническую среду современных многоканальных управляющих комплексов для обслуживания технологических процессов. Достаточно часто технологический процесс описывается сложными нелинейными дифференциальными уравнениями и нет возможности получить в явном виде описание динамического процесса системы. В таких случаях применяются методы линеаризации и идентификации, после которых проблема управления сложным технологическим процессом сводится к синтезу регуляторов для

многоканальной линейной динамической системы с множеством входов и выходов. В процессе синтеза регулятора разработчик свободен в выборе регулирующих устройств, регулируемых параметров и их комбинаций [1-3] в зависимости от стратегии эксплуатации, экономических, экологических и производственных показателей. Кроме того, параметры систем автоматического управления в процессе работы не остаются равными расчетным значениям. Это объясняется изменением внешних условий, неточностью изготовления отдельных устройств системы, старением элементов и тому подобным. Изменение параметров систем автоматического управления, то есть изменение коэффициентов уравнений системы, вызывает изменение статических и динамических свойств системы [4], а зачастую может повлечь и вырождение системы – нарушение работоспособности. Таким образом, на этапе проектирования многоканальной системы управления важно оценить, насколько удачно выбрана ее конструкция (структура).

Среди методов, ориентированных на анализ структуры многоканальной системы и выбор конфигурации управления, широко известен метод относительных усилений RGA (relative gain array) [5] и его различные модификации [6-9]. Данный метод прост в использовании, однако он не подходит для больших систем высоких порядков и не гарантирует устойчивость замкнутой системы.

Метод структурных несоответствий (structural mismatches) [10-12] используется для многоканальных систем управления с децентрализованным управлением и основывается на матрицах чувствительности передаточной функции системы. Данный метод позволяет получить информацию о нежелательной динамике в каналах системы, а также оценить производительность системы выбранной конструкции. Ограничение данного метода в том, что он ориентирован на системы с децентрализованным управлением.

Управление с самооптимизацией (self-optimizing control) [13, 14] и метод нулевого пространства (null space method) [15] – еще один класс методов, которые ориентированы на выбор управления с минимизацией потерь в процессах при наличии возмущений за счет поддержания выбранных регулируемых переменных в постоянных рабочих точках. Однако основной недостаток последних двух методов в том, что в процессе выбора комбинаций управления мало внимания уделяется динамическим характеристикам. Кроме того, одним и тем же значениям минимальных потерь может соответствовать множество решений, что затрудняет поиск «оптимального решения».

Также стоит отметить, что в последнее время большое внимание уделяется методам оценки эффективности (производительности)

проектируемых технических систем [16-20], поскольку показатель производительности системы является базовым при разработке технологических комплексов. В упомянутых работах оценка производительности системы осуществляется на основе методов анализа чувствительности системы к возмущениям и аппарата сингулярного разложения. Тем не менее, несмотря на множество различных подходов, разработка количественных оценок производительности технических систем и универсальных методов выбора структуры системы по-прежнему остается актуальной задачей. Методы для количественной оценки производительности системы могут позволить нам сравнивать различные структуры управления и таким образом оценивать преимущества и недостатки различных методологий.

В данной статье рассматривается аппарат функционалов вырождения, который используется для оценки «удачности» конструкции многоканальной динамической системы. Функционалы вырождения конструируются на спектре сингулярных чисел критериальной матрицы системы, которая в своем составе может содержать как информацию о самой многоканальной системе, так и о входных задающих воздействиях, поступающих на ее входы. Аппарат функционалов вырождения позволяет оценить склонность системы к возможному вырождению, являющемуся системным свойством, которое может повлечь за собой частичную или полную потерю работоспособности системы. Склонность системы к возможному вырождению необходимо контролировать на этапе проектирования системы наравне со свойствами устойчивости, надежности и инвариантности [21] к изменяющимся условиям.

Аппаратно многоканальная динамическая система реализуется оператором, отображающим множество целевых входов в множество целевых выходов. Будем считать, что этот оператор является линейным или локально линейным, а множества входов и выходов согласованы по размерности. Тогда в математической постановке линейный оператор считается вырожденным [22], если его ранг становится меньше размерности пространства выходов. Таким образом, процесс вырождения некоторой многоканальной динамической системы есть процесс уменьшения ранга ее линейного оператора. На основании этой математической концепции строится данная работа. Предлагаемый подход основывается на алгебраических свойствах матрицы линейного оператора, называемой далее критериальной матрицей.

Стоит отметить возможные причины вырождения многоканальных систем. Это, например, сокращение размерности множества целевых выходов системы в силу нарушения работоспособности какого-либо ее

функционального компонента. Такую ситуацию можно назвать структурным вырождением. К организационным причинам вырождения можно отнести неудачное распределение целевых намерений по входам многоканальной динамической системы. К вырождению также приводят некорректно выбранные параметры системы, такие как организация и параметры связей между отдельными каналами системы, сформированные полосы пропускания каналов. В случае, если в состав многоканальной динамической системы входит человек-оператор, то причиной вырождения может стать и человеческий фактор, например усталость [22].

Исследования проблемы вырождения многоканальных динамических систем для полноты их решения могут проводиться как в параметризованном, так и в не параметризованном времени виде. Существенным образом проблема вырождения зависит от типа входных заявок (целевых намерений) на их обслуживание многоканальными динамическими системами. В данной статье рассматривается проблема формирования критериальных матриц в задаче контроля возможного вырождения многоканальных непрерывных динамических систем с учетом векторного входного воздействия, векторов скорости и ускорения его изменения в предположении его дифференцируемости по времени.

**2. Математическая постановка задачи вырождения многоканальных динамических систем.** Рассматривается динамическая многоканальная система с линейным матричным оператором  $N(*)$ , отображающим пространство входов в пространство выходов:

$$\eta(w) = N(w, \theta)\chi(w), \quad (1)$$

где  $N(w, \theta)$  – критериальная матрица размерностью  $m \times m$  для любых значений  $w$ ,  $\theta$ ;  $\chi(w)$ ,  $\eta(w)$ , –  $m$ -мерные векторы;  $\theta$  –  $p$ -мерный вектор изменяющихся параметров матрицы  $N$ ;  $w$  может являться непрерывным временем  $t$ .

Задача (1) имеет наглядную геометрическую интерпретацию, которую можно представить, применив к критериальной матрице  $N$  сингулярное разложение [23]:

$$N = U_N \Sigma_N V_N^T, \quad (2)$$

где  $\Sigma_N = \text{diag}\{\alpha_j : j = \overline{1, m}\}$  – матрица сингулярных чисел  $\alpha_j$ ;  $U_N$  и  $V_N$  – матрицы левого и правого сингулярных базисов [23] такие, что можно записать:

$$NV_{N_j} = \alpha_j U_{N_j}, j = \overline{1, m}. \quad (3)$$

В выражении (3) каждый вектор  $\chi = V_{N_j}, j = \overline{1, m}$  правого сингулярного базиса отражается в соответствующее  $j$ -ое подпространство элемента  $U_{N_j}$  левого сингулярного базиса с нормой, равной  $\alpha_j$ . Геометрическая интерпретация данной задачи заключается в том, что единичная сфера отображается в эллипсоид с размерами полуосей, равными сингулярным числам матрицы  $N$ .

Для оценки степени вырождения системы (1) воспользуемся числом обусловленности [23] матрицы  $N$ , которое по определению записывается в виде:

$$C\{N\} \triangleq \|N\| \cdot \|N^{-1}\|. \quad (4)$$

Из выражения (4) видно, что значение числа обусловленности зависит от выбранной матричной нормы, и для поставленной задачи целесообразно выбрать спектральную норму, которая совпадает с максимальным сингулярным числом матрицы, тогда число обусловленности примет вид:

$$C\{N\} = \alpha_{\max}\{N\} \cdot \alpha_{\max}\{N^{-1}\} = \alpha_{\max}\{N\} \cdot \alpha_{\min}^{-1}\{N\}, \quad (5)$$

где  $\alpha_{\max}\{N\}$ ,  $\alpha_{\min}\{N\}$  – максимальное и минимальное сингулярные числа матрицы  $N$  соответственно.

В силу определения (2) для числа обусловленности справедливы неравенства:

$$1 \leq C\{N\} \leq \infty. \quad (6)$$

Однако контроль близости числа обусловленности к бесконечной величине является весьма затруднительным. Поэтому в дальнейшем предлагается рассматривать величину, обратную числу обусловленности, которая задается соотношением:

$$J_D\{N\} = C^{-1}\{N\} = \alpha_{\min}\{N\} \alpha_{\max}^{-1}\{N\}, \quad (7)$$

которую далее будем называть функционалом вырождения  $J_D$  [22].

Для функционала вырождения (7) с учетом (6) верны следующие неравенства:

$$0 \leq J_D = C^{-1}\{N\} \leq 1. \quad (8)$$

Процесс вырождения системы (1) при уменьшении функционала вырождения (7) критериальной матрицы  $N$  геометрически представляет собой деформацию исходной сферы  $\|\chi\|=1$  при ее отображении в эллипсоид. Причем при деформации происходит «сплющивание» эллипсоида сначала вдоль его  $m$ -ой полуоси, принадлежащей линейной оболочке  $m$ -ого элемента  $U_{N_m}$ , затем «сплющивание» его вдоль  $(m-1)$ -ой полуоси и так далее, так что наблюдается последовательное «сплющивание» эллипсоида вдоль векторов  $U_{N_m}, U_{N_{m-1}} \dots U_{N_2}$  до отображения эллипсоида в отрезок прямой. Система оказывается на границе глобального вырождения. В случае, если все сингулярные числа становятся нулевыми, происходит глобальное вырождение линейной алгебраической задачи (ЛАЗ) (1), при котором сфера отображается в точку.

Рассмотрим иллюстративный пример.

*Пример 1.* Представим реализацию матрицы  $N$  размерности

$2 \times 2$  в виде  $N = U_N \Sigma_N V_N^T$ , где  $U_N = \begin{vmatrix} \cos \mu & -\sin \mu \\ \sin \mu & \cos \mu \end{vmatrix}$  – матрица левого

сингулярного базиса;  $V_N = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$  – матрица правого сингулярного

базиса, такие что главная ось эллипсоида развернута на угол  $\mu$  относительно оси абсцисс;  $\Sigma_N = \text{diag}\{\alpha_1, \alpha_2\}$  – диагональная матрица сингулярных чисел. Для наглядной иллюстрации результатов предлагаемого примера угол  $\mu$  выбирается для каждого сочетания сингулярных чисел различным.

Исследуемые матрицы  $N_j, j = \overline{1,7}$  для фиксированных значений  $\mu_j$  и соответствующие им значения функционала вырождения сведем в таблицу 1.

На рисунке 1 приведены результаты отображения  $y = Nx$  единичной сферы  $x = \text{col}\{\cos \beta, \sin \beta\}$ , где  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  в

эллипсоид для матриц  $N_j$  с функционалами вырождения  $J_D\{N_j\}$  в соответствие с таблицей 1.

Таблица 1. Отображение единичной сферы в эллипсоид

$j = \overline{1,7}$	$N_j$	$\mu_j$	$J_D\{N_j\}$
1	$\begin{vmatrix} -0.9111 & -0.2061 \\ 0.4121 & -0.4556 \end{vmatrix}$	9	1/2
2	$\begin{vmatrix} 0.5551 & 0.1664 \\ -0.8318 & 0.1110 \end{vmatrix}$	43	1/5
3	$\begin{vmatrix} 0.0044 & 0.0500 \\ -1.0000 & 0.0002 \end{vmatrix}$	11	1/20
4	$\begin{vmatrix} 0.4081 & -0.0183 \\ 0.9129 & 0.0082 \end{vmatrix}$	20	1/50
5	$\begin{vmatrix} 0.8142 & -0.0029 \\ 0.5806 & 0.0041 \end{vmatrix}$	120	1/200
6	$\begin{vmatrix} -0.9844 & 0 \\ -0.1761 & 0 \end{vmatrix}$	85	$\rightarrow 0$
7	$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	0	1

На рисунке 1 наглядно представлен процесс «сплющивания» эллипсоида в прямую линию с уменьшением значения функционала вырождения матрицы  $N$ . Таким образом, сингулярные числа и числа обусловленности геометрически прозрачно показывают их содержательную концепцию механизма численного контроля процесса вырождения многоканальной системы вида (1) при изменении параметров  $\theta$  и времени  $w$ .

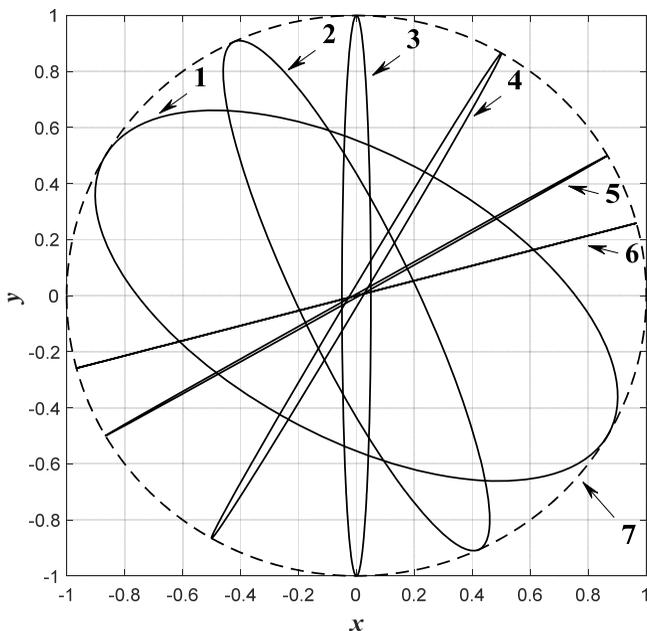


Рис. 1. Отображение единичной сферы в эллипсоид для различных значений функционала вырождения  $J_D\{N_j\}$

Следует заметить, что помимо глобального функционала вырождения  $J_D$  (7) также контролируются и отдельные функционалы вырождения  $J_{D_j}$  ЛАЗ (1), которые формируются на алгебраическом спектре сингулярных чисел матрицы  $N$  с помощью выражения:

$$J_{D_j}\{N\} = \alpha_{m+1-j}\{N\}\alpha_{\max}^{-1}\{N\}, \quad (9)$$

где  $\alpha_{m+1-j}\{N\}$ ,  $j = \overline{1, m-1}$ ,  $\alpha_{\max}\{N\} = \alpha_1\{N\}$  –  $j$ -ое и максимальное сингулярные числа матрицы  $N$  соответственно, вычисляемые с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_j &= \mu_j^{1/2}, \mu_j : \det(\mu_j I - NN^T) = 0, \\ \alpha_j &= \mu_j^{1/2}, \mu_j : \det(\mu_j I - N^T N) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Следует отметить, что сингулярные числа проиндексированы в порядке убывания их значений с ростом индекса  $j$ . При этом глобальный функционал вырождения (7) является функционалом вырождения (9) с индексом, равным единице.

Таким образом, процесс вырождения ЛАЗ (1) можно отслеживать по последовательному обнулению функционалов вырождения  $J_{D_j}$ , контроль граничных значений которых в пределах 0 и 1 заметно проще контроля граничных значений чисел обусловленности в пределах 1 и  $\infty$ .

Можно сделать вывод, что линейная алгебраическая задача оказывается на границе глобального вырождения, когда линейный оператор с матрицей  $N$  отображает единичную сферу в отрезок прямой, длина которого определяется единственным ненулевым сингулярным числом, а положение в пространстве определяется первым элементом левого сингулярного базиса матрицы  $N$ . В приведенном примере этому случаю соответствует шестой вариант реализации матрицы  $N$  (таблицы 1, рисунок 1). Система оказывается глобально вырожденной, когда в нуль обращаются все сепаратные функционалы вырождения, в этом случае линейный оператор с матрицей  $N$  отображает единичную сферу в ноль.

Контроль вырождения линейных алгебраических задач (1) параметризованных параметрами  $w$  и  $\theta$ , которые могут принимать значения непрерывного времени и частоты, с помощью сепаратных функционалов вырождения делают значения последних параметризованными непрерывным временем, а также частотой, что позволяет выделять временные интервалы и диапазоны частот, характеризующиеся различной степенью вырожденности многоканальной непрерывной динамической системы.

Приводимый ниже пример развивает иллюстрационный аспект проблемы вырождения.

*Пример 2.* Рассмотрим критериальную матрицу  $N(q)$ , параметризованную векторным параметром  $q = \text{col}\{q_1, q_2, q_3 : q_1 = 0; -1 \leq q_2 \leq 0; -1 \leq q_3 \leq 0\}$ , так что она принимает вид:

$$N = \begin{pmatrix} -1(1+q_1) & 7(1+q_2) & 13(1+q_3) \\ 3(1+q_1) & 9(1+q_2) & -15(1+q_3) \\ 5(1+q_1) & -11(1+q_2) & 17(1+q_3) \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы в соответствии с соотношением (9) конструируются сепаратные функционалы вырождения:

$$J_{D_1}(q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = \text{var}) = \alpha_3(\alpha_1)^{-1},$$

$$J_{D_2}(q_1 = 0, q_2 = 0, q_3 = \text{var}) = \alpha_2(\alpha_1)^{-1}.$$

и

$$J_{D_1}(q_1 = 0, q_2 = \text{var}, q_3 = 0) = \alpha_3(\alpha_1)^{-1},$$

$$J_{D_2}(q_1 = 0, q_2 = \text{var}, q_3 = 0) = \alpha_2(\alpha_1)^{-1}.$$

Кривые сепаратных функционалов вырождения критериальной матрицы  $N(q)$  для оговоренных выше значений  $q_2$  и  $q_3$  приведены на рисунке 2.

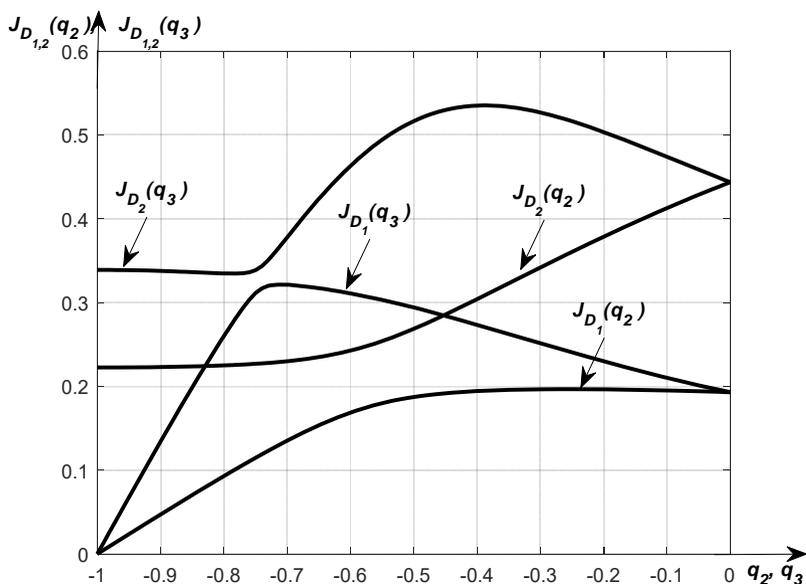


Рис. 2. Значения сепаратных функционалов вырождения критериальной матрицы  $N(q)$  для различных значений  $q_2$  и  $q_3$

При построении кривых значений сепаратных функционалов вырождения в связи с решением иллюстративной задачи использован

весьма ограниченный набор сочетаний варьируемых параметров, но даже он обнаруживает возможность решать задачу «оптимального номинала», при котором достигается максимальное значение глобального и сепаратного функционалов вырождения.

Приведенная выше трактовка содержания функционалов вырождения носит геометрически прозрачный характер, но они имеют и богатое алгебраическое содержание, которое раскроем с помощью следующего примечания.

*Примечание 1.* Величина  $J_D^{-1}$ , обратная глобальному функционалу  $J_D$  вырождения – число обусловленности  $C(N)$ , выступает в качестве коэффициента усиления относительных погрешностей задания  $\delta_N$  и  $\delta_\chi$  матрицы  $N$  и вектора  $\chi$  ЛАЗ (1) в задаче оценки относительной погрешности  $\delta_\kappa$  решения ЛАЗ в форме:

$$\delta_\kappa \leq J_D^{-1} \{N\} (\delta_N + \delta_\chi + \delta_N \delta_\chi) = C \{N\} (\delta_N + \delta_\chi + \delta_N \delta_\chi). \quad (11)$$

Доказательство можно найти в [23].

*Пример 3.* У алгебраического свойства глобального функционала вырождения  $J_D(N)$  есть конструктивные оценочные возможности. Так, например, допустим, что в некоторый момент времени в системе произошли вариации параметров [4], тогда, если положить относительные погрешности задания компонентов ЛАЗ  $\chi$  и  $N$  соответственно равными  $\delta_\chi = 0$ ,  $\delta_N = 0.01(1\%)$  при  $J_D \{N\} = 0.01$ , то оценка  $\hat{\delta}_\kappa = J_D^{-1} \{N\} (\delta_N + \delta_\chi + \delta_N \delta_\chi)$  относительной ошибки  $\hat{\delta}_\kappa$  решения ЛАЗ составит величину  $\hat{\delta}_\kappa = 1(100\%)$ .

**3. Формирование критериальной матрицы отношения «вход-выход» на основе резольвенты матрицы состояния многоканальной динамической системы.** Рассмотрим непрерывную многоканальную динамическую систему, задаваемую в виде:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Lg(t); \quad y(t) = Cx(t) + Hg(t), \quad (12)$$

где  $F$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $H$  – матрицы состояния, входа, выхода и отношения «вход-выход» системы соответственно, которые согласованы по размерности с размерностью векторов состояния  $x$ , задающего воздействия  $g$  и выхода  $y$  так, что  $F \in R^{n \times n}$ ;  $L, C^T \in R^{n \times m}$ ;

$H \in R^{m \times m}$ ;  $x \in R^n$ ;  $g, y \in R^m$ . При этом матрица  $F$  состояния системы полагается гурвицевой [24], а векторное задающее воздействие  $g(t)$  является при  $t > 0$  непрерывно дифференцируемым по времени  $t$ .

Для цели дальнейших исследований применим к системе (12) преобразование Лапласа и получим представление системы, разрешенное в форме отношения «вход-выход»,

$$Y(s) = \{C(sI - F)^{-1}L + H\}G(s) = \Phi(s)G(s), \quad (13)$$

где  $Y(s)$  и  $G(s)$  – лапласовы образы  $y(t)$  и  $g(t)$  соответственно, а  $\Phi(s)$  – передаточная матрица отношения «вход-выход», записываемая в виде:

$$\Phi(s) = \{C(sI - F)^{-1}L + H\}. \quad (14)$$

По сути, линейная модель (13) параметризована комплексной переменной  $s$ , в связи с чем возникают трудности ее использования в решении задач вырождения многоканальной системы. Уйдем от явной параметризации переменной  $s$ , воспользовавшись алгоритмом Фаддеева – Леверье.

Задачу депараметризации ЛАЗ (13) будем решать для случая установившегося режима системы (12). Для указанных целей вектор выхода системы  $y(t)$  запишем в форме аддитивного разложения по производным задающего воздействия:

$$y(t) = D_0g(t) + D_1\dot{g}(t) + D_2\ddot{g}(t) + \dots = y_g(t) + y_{\dot{g}}(t) + y_{\ddot{g}}(t) + \dots \quad (15)$$

для  $t > t_n$ , где  $t_n$  – длительность переходного процесса в системе, который считается законченным, когда переходная составляющая не выходит за пределы 5%-окрестности от своего установившегося значения.

Нетрудно заметить, что выражение (15) порождает систему линейных алгебраических задач вида (1), где в качестве критериальных матриц  $N$  выступают вещественнозначные матричные коэффициенты разложения  $D_l, l = 0, 1, 2, \dots$ . Очевидно, что поставленная задача анализа возможного вырождения будет решена, если будут сконструированы аналитические представления матриц  $D_l$  для  $l = 0, 1, 2, \dots$

Если (15) записать с использованием преобразования Лапласа, то получим цепочку равенств:

$$Y(s) = D_0 G(s) + D_1 s G(s) + D_2 s^2 G(s) + \dots = (D_0 + D_1 s + D_2 s^2 + \dots) G(s). \quad (16)$$

Сравнение соотношений (16) и (13) позволяет записать для матричных коэффициентов  $D_l, l = 0, 1, 2, \dots$  представления:

$$D_0 = \Phi(s) \Big|_{s=0}; D_1 = \frac{d\Phi(s)}{ds} \Big|_{s=0}; D_2 = 0.5 \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} \dots \quad (17)$$

Функция  $\Phi(s)$  в своем аналитическом представлении (14) содержит в качестве мультипликативного компонента резольвенту  $(sI - F)^{-1}$ , которая представляет собой обратную матрицу, параметризованную переменной  $s$ . Для целей дальнейших исследований сформулируем лемму.

*Лемма.* Пусть  $Q(q)$  – квадратная матрица, элементы которой непрерывно зависят от скалярной переменной  $q$  так, что при  $q \in [q, \bar{q}]$   $\exists (Q(q))^{-1}$ . Тогда производная по переменной  $q$  от матрицы  $(Q(q))^{-1}$ , обратной матрице  $Q(q)$ , вычисляется в силу соотношения:

$$\frac{d}{dq} (Q(q))^{-1} = - (Q(q))^{-1} \frac{d}{dq} (Q(q)) (Q(q))^{-1}. \quad (18)$$

*Доказательство.* Для  $q \in [q, \bar{q}]$  справедливо соотношение  $Q(q) \cdot (Q(q))^{-1} = I$ , дифференцирование которого по  $q$  дает:

$$\frac{d}{dq} \{ Q(q) \cdot (Q(q))^{-1} \} = \frac{d}{dq} Q(q) (Q(q))^{-1} + Q(q) \frac{d}{dq} \{ (Q(q))^{-1} \} = 0. \quad (19)$$

Разрешение соотношения (19) относительно производной  $\frac{d}{dq} \{ (Q(q))^{-1} \}$  приводит к (18). Теперь можно приступить к

формированию матричных коэффициентов  $D_l, l = 0, 1, 2 \dots$  для первых трех коэффициентов с помощью соотношений (17), (14) и (18). В результате получим:

$$D_0 = \Phi(s) \Big|_{s=0} = \left\{ C(sI - F)^{-1} G + H \right\} \Big|_{s=0} = -CF^{-1}G + H; \quad (20)$$

$$D_1 = \frac{d\Phi(s)}{ds} \Big|_{s=0} = - \left\{ C(sI - F)^{-1} \left\{ \frac{d}{ds}(sI - F) \right\} (sI - F)^{-1} G \right\} \Big|_{s=0} = \\ = -CF^{-2}G; \quad (21)$$

$$D_2 = 0.5 \frac{d^2\Phi(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = \\ = 0.5 \frac{d}{ds} \left\{ - \left\{ C(sI - F)^{-1} \left\{ \frac{d}{ds}(sI - F) \right\} (sI - F)^{-1} G \right\} \right\} \Big|_{s=0} = -CF^{-3}G. \quad (22)$$

Очевидно, решение задачи представления выхода системы (12) при  $t > t_n$  в форме (15) наиболее целесообразно для случая задающего воздействия полиномиального вида, так как оно содержит конечное число ненулевых производных.

Нетрудно заметить, что отношение «вход-выход», задаваемое критериальными матрицами (20), (21) и (22), дает возможность контролировать и корректировать возможное вырождение системы. Так, с помощью матрицы  $L$  можно организовывать необходимые межканальные связи по сепаратным входам, с помощью матрицы  $C$  – решать аналогичную задачу в пространстве выходов, а с помощью матрицы  $F$  – обнаруживать способность назначения системных параметров сепаратных каналов и организовывать внутрисистемные межканальные связи [25]. Действительно, если предположить, что система (12) получена объединением многоканального объекта управления:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) + Hg(t) \quad (23)$$

и закона управления в виде прямой связи по задающему воздействию  $g(t)$  и обратной связи по вектору  $x(t)$  состояния

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (24)$$

то критериальная матрица (20) примет вид:

$$N = H - C(A - BK)^{-1}BK_g. \quad (25)$$

Выражение (25) разрешаемо относительно матрицы  $K_g$  прямых связей по задающему воздействию в форме:

$$K_g = (CF^{-1}B)^{-1}(H - N). \quad (26)$$

Если в (26) положить  $N = I$ , то матрица  $K_g$  будет обеспечивать естественное равенство выхода входу в неподвижном состоянии и идеальную обусловленность, характеризующуюся единичным значением глобального функционала вырождения в неподвижном состоянии.

Дополнительным системным ресурсом является матрица  $H$ . К сожалению, этот системный ресурс закладывается в многоканальные динамические системы (12) достаточно редко и в основном реализуется в «кризисных» ситуациях. В этой связи отметим две реализационные ситуации критериальных матриц (20), (21) и (22). Первая ситуация характеризуется выполнением условия  $H = 0$ , вторая – выполнением условия  $H \neq 0$  и при этом она может модифицироваться. Первая реализационная ситуация, как правило, имеет место в антропогенных системах технического характера. Вторая реализационная ситуация, как правило, имеет место в антропогенных системах с человеком-оператором – лицом, принимающим решения в составе системы [22].

Тем самым в решении задачи заложен принцип: прежде чем исследовать склонность системы к вырождению в динамике при обработке потоков входных заявок необходимо проверить систему в статике на предмет удачности ее «конструкции».

Представление критериальной матрицы определяется заданной моделью многоканальной динамической системы и видом экзогенного задающего воздействия.

*Примечание 2.* Приведем критериальные матрицы многоканальных динамических систем для случаев гармонических и стохастических экзогенных задающих воздействий [26].

Так, например, для непрерывной многоканальной системы, задаваемой в форме:

$$\dot{x}(t) = Fx(t) + Lg(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (27)$$

при внешнем конечномерном воздействии вида:

$$\dot{z}(t) = Ez(t), z(0); g(t) = Pz(t),$$

где  $z \in R^l$ ,  $E \in R^{l \times l}$ ,  $P \in R^{m \times l}$ ;  $z$  – вектор состояния модели задающего воздействия  $E$ ,  $P$  – матрицы состояния и выхода модели задающего воздействия соответственно, причем  $P \cdot P^T = I$ , где  $I$  – единичная матрица размерности  $m \times m$ , критериальная матрица имеет вид:

$$N(\omega) = -C(F^2 + \omega^2 I)^{-1} \{ [F \quad \omega I] L \},$$

где  $\omega$  – частота задающего воздействия.

Для случая стохастического внешнего воздействия стационарного в широком смысле типа «белый шум»  $g(t) = w(t)$  матрица спектральной плотности  $S_y(\omega)$  системы (27) по выходу, выступающая в роли критериальной матрицы системы, задается выражением:

$$S_y(\omega) = CS_x(\omega)C^T = -2CF(F^2 + \omega^2 I)^{-1}D_xC^T, \quad (28)$$

при этом матрица  $D_x \stackrel{\Delta}{=} M[x(t)x^T(t)]$  является матрицей дисперсии вектора состояния  $x(t)$ , где  $M[\cdot]$  есть оператор вычисления математического ожидания стохастической переменной  $(\cdot)$ .

Для системы (27), возбуждаемой стохастическим воздействием  $\xi(t)$  стационарным в широком смысле типа «окрашенный шум», с моделируемым выходом формирующего фильтра вида:

$$\dot{z}_\phi(t) = \Gamma_\phi z_\phi(t) + G_\phi w(t); \xi(t) = P_\phi z_\phi(t),$$

возбуждаемого по входу «белым шумом»  $w(t)$  с матрицей интенсивности  $Q$ , где  $z_\phi \in R^l$ ;  $w$ ,  $\xi \in R^m$ ;  $\Gamma_\phi \in R^{l \times l}$ ;  $G_\phi \in R^{l \times m}$ ;  $P_\phi \in R^{m \times l}$ ;  $\Gamma_\phi$ ,  $G_\phi$ ,  $P_\phi$  – матрицы состояния, входа и выхода модели формирующего фильтра соответственно;  $z_\phi$  – вектор состояния модели формирующего фильтра, матрица дисперсии  $D_x$  вектора состояния системы определяется с помощью выражения:

$$D_x = \tilde{C}_x \tilde{D}_x \tilde{C}_x^T, \quad \tilde{C}_x = \begin{vmatrix} I_{n \times n} & 0_{n \times l} \end{vmatrix}, \quad (29)$$

где  $\tilde{D}_x = M[\tilde{x}(t)\tilde{x}^T(t)]$  – матрица дисперсии составного вектора  $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T \\ z_\phi^T \end{bmatrix}$ , вычисляемая в силу матричного алгебраического уравнения Ляпунова:

$$\tilde{F}\tilde{D}_x + \tilde{D}_x\tilde{F}^T = -\tilde{G}Q\tilde{G}^T, \quad (30)$$

в котором матрицы  $\tilde{F}$  и  $\tilde{G}$  составной системы имеют представление

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} F & LP_\phi \\ 0 & \Gamma_\phi \end{bmatrix}, \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ G_\phi \end{bmatrix}. \text{ Соотношение (28) позволяет сформировать}$$

критериальную матрицу в форме  $N = S_y(\omega)$ , где матрица дисперсий  $D_x$  рассчитывается с помощью выражений (29) и (30).

Конкретный выбор критериальной матрицы определяется предметом исследования.

**4. Априорный контроль потенциального вырождения непрерывных многоканальных динамических систем.** Априорный контроль потенциального вырождения непрерывных многоканальных динамических систем будем осуществлять посредством вычисления функционала вырождения критериальной матрицы системы. Допустимое значение функционала вырождения при этом назначается, исходя из технических требований к системе.

Процедуру контроля склонности многоканальной непрерывной динамической системы вида (12) к вырождению на основе критериальных матриц, полученных с помощью резольвенты матрицы состояния многоканальной системы, оформим в виде алгоритма.

*Алгоритм:*

Шаг 1. Задать  $\{F, L, C, H\}$  – представление многоканальной непрерывной динамической системы (12).

Шаг 2. Сконструировать критериальные матрицы многоканальной динамической системы (12).

Шаг 3. Задать допустимое значение  $J_{DR}$  функционала вырождения  $J_D$ .

Шаг 4. Вычислить значение функционала вырождения  $J_D$  в силу соотношения (7).

Шаг 5. Проверить выполнение условия  $J_D \geq J_{DR}$ .

Шаг 6. В случае нарушения условия осуществить переход к шагу 1 алгоритма с целью изменения параметров матричных системных

компонентов (модификация матрицы входа  $L = BK_g$  с целью изменения матрицы  $K_g$  прямых связей по сепаратным входам, модификация матрицы состояния  $F$  путем изменения структуры ее собственных значений и собственных векторов с помощью процедуры обобщенного модального управления [27], а также введение необходимых межканальных перекрестных связей, матрицы отношения «вход-выход»  $H$  и т.д.), в случае выполнения условия – переход к шагу 7.

Шаг 7. Выход из алгоритма.

*Пример 4.* Для иллюстрации приведенного алгоритма рассмотрим многоканальную непрерывную систему с тремя входами и тремя выходами. Сепаратные функциональные динамические каналы вход-выход охвачены единичной обратной связью. Эти сепаратные каналы обладают разнотемповыми динамическими свойствами, а потому характеризуются полосами пропускания, которые по мере перемещения от верхнего уровня к нижнему изменяются с расширением их диапазонов. Такая система представима в форме (12) таким образом, что ее матричные компоненты задаются в следующем виде

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\omega_{01}^3 & -2\omega_{01}^2 & -2\omega_{01} & k_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & 0 & -\omega_{02}^3 & -2\omega_{02}^2 & -2\omega_{02} & k_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k_{32} & 0 & 0 & -\omega_{03}^3 & -2\omega_{03}^2 & -2\omega_{03} \end{bmatrix},$$

$$L = \text{diag} \left\{ L_{jj} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{0j}^3 \end{bmatrix}; j = \overline{1,3} \right\}; \quad C^T = \text{diag} \left\{ C_{ll}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; l = \overline{1,3} \right\}, \quad H = [0].$$

Значения характеристических частот каждого из сепаратных каналов положим равными в соответствие с распределениями мод Баттерворта, параметризованными характеристическими частотами

$\omega_{01} = 2c^{-1}$ ,  $\omega_{02} = 6c^{-1}$ ,  $\omega_{03} = 18c^{-1}$ , так что полосы пропускания двух соседних сепаратных каналов разнятся в три раза. Межканальные связи в процессе исследования варьируются.

Многомерная система функционирует без вырождения, если потоки заявок, поступающие на вход каждого из сепаратных каналов многомерной системы, по своей скорости согласованы с полосой пропускания этих каналов.

Рассмотрим многоканальную систему для двух случаев задания межканальных связей: 1)  $k_{12} = k_{23} = -1$ ,  $k_{21} = k_{32} = 1$ ; 2)  $k_{12} = k_{23} = -0.3$ ,  $k_{21} = k_{32} = 1$ .

Следуя приведенному ранее алгоритму, сконструируем критериальную матрицу многоканальной системы в форме (20). Допустимое значение функционала вырождения  $J_D$  положим равным  $J_{DR} = 0.8$ . Вычислим значение функционала вырождения  $J_D$  критериальной матрицы системы согласно соотношению (7), в результате получим: 1)  $J_D = 0.7903$ ; 2)  $J_D = 0.9289$ .

В рассматриваемых вариантах задание межканальных связей в случае (1) не удовлетворяет условию  $J_D \geq J_{DR}$ , а следовательно, такая организация связей между каналами повлечет вырождение системы. Коррекция первой ситуации достигается с помощью модификации матрицы  $K_g$  прямых связей по вектору внешнего воздействия  $g(t)$  путем включения на входе корректирующей матрицы  $K_{kg}$  вида

$$K_{kg} = \begin{bmatrix} 1 & 0.125 & 0 \\ -0.0046 & 1 & 0.0046 \\ 0 & -0.0002 & 1 \end{bmatrix}, \text{ доставляющей критериальной}$$

матрице  $N$  единичное значение глобального функционала вырождения  $J_D = 1$  вместо исходного  $J_D = 0.7903$ .

**Закключение.** Приведен эффективный инструмент для решения задачи априорного контроля возможного вырождения многоканальных систем. Сформирован алгоритм конструирования критериальных матриц на основе резольвенты матрицы состояния системы. С помощью процедуры сингулярного разложения критериальных матриц получена количественная оценка потенциального вырождения многомерной системы в виде функционалов вырождения.

Разработанный подход позволяет дать не только количественную оценку конфигурации системы управления, а также открывает

возможности для рассмотрения возможных путей модернизации ее структуры. Подход проиллюстрирован на примере многоканальной непрерывной системы, сепаратные каналы которой обладают разнотемповыми динамическими свойствами. Показано, как с помощью корректирующей матрицы на входе можно добиться единичного (максимального) значения глобального функционала вырождения. Это является показателем того, что многомерная непрерывная система функционирует без вырождения и потоки заявок, поступающие на вход каждого из ее сепаратных каналов, по своей скорости согласованы с полосой пропускания этих каналов.

### Литература

1. *Абдуллин А.А., Дроздов В.Н., Маматов А.Г.* Влияние нулей передаточной функции объекта на свойства регулятора // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 4(53). С. 73–96.
2. *Safari A., Eslamloueyan R.* Controlled variables selection based on lost work minimisation // International Journal of Exergy. 2018. vol. 27. no. 3. pp. 334–363.
3. *Pequito S., Kar S., Aguiar A.P.* A Framework for Structural Input/Output and Control Configuration Selection in Large-Scale Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2015. vol. 61. no. 2. pp. 303–318.
4. *Воронов А.А.* Введение в динамику сложных управляемых систем // М.: Наука. 1985. 351с.
5. *Bristol E.* On a new measure of interaction for multivariable process control // IEEE Transactions on Automatic Control. 1966. vol. 11. pp. 133–134.
6. *Hovd M., Skogestad S.* Simple frequency-dependent tools for control systems analysis, structure selection and design // Automatica. 1992. vol. 28. no. 5. pp. 989–996.
7. *Chang J.W., Yu C.C.* Relative disturbance gain array // American Institute of Chemical Engineers Journal. 1992. vol. 38. no. 4. pp. 521–534.
8. *Reyes E.N., Messina A.R., Pérez M.A.* Design of wide-area damping controllers using the block relative gain // Electric Power Systems Research. 2015. vol. 126. pp. 56–67.
9. *Moaveni B., Birk W.* Modified Hankel Interaction Index Array for Input-Output Pairing with Improved Characteristics // IFAC-PapersOnLine. 2018. vol. 51. no. 18. pp. 452–457
10. *Birk W.* Towards incremental control structure optimisation for process control // Proceedings of the 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. 2007. pp. 1832–1837.
11. *Birk W., Dudarenko N.A.* Reconfiguration of the Air Control System of a Bark Boiler // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2016. vol. 24. no. 2. pp. 565–577.
12. *Botelho V.R., Trierweiler J.O., Farenzena M., Duraiski R.* Assessment of model-plant mismatch by the nominal sensitivity function for unconstrained MPC // IFAC-PapersOnLine. 2015. vol. 48 no. 8. pp. 753–758.
13. *Alstad V., Skogestad S., Hori E.S.* Optimal measurement combinations as controlled variables // Journal of Process Control. 2009. vol. 19. no. 1. pp. 138–148.
14. *Skogestad S.* Control structure design for complete chemical plants // Computers & Chemical Engineering. 2004. vol. 28. no. 1-2. pp. 219–234.
15. *de Oliveira V., Jäschke J., Skogestad S.* Null-space method for optimal operation of transient processes // IFAC-PapersOnLine. 2016. vol. 49. no. 7. pp. 418–423.
16. *Yi C.K., Luyben W.L.* Evaluation of Plant-Wide Control Structures by Steady-State Disturbance Sensitivity Analysis // Industrial and Engineering Chemistry Research. 1995. vol. 34. no. 7. pp. 2393–2405.
17. *Konda N.V.S.N.M., Rangaiiah G.P.* Performance assessment of plantwide control systems of industrial processes // Industrial & Engineering Chemistry Research. 2007. vol. 46. pp. 1220–1231.

18. *Luppi P.A., Braccia L., Rullo P.G., Zumoffen D.A.R.* Plantwide Control Design Based on the Control Allocation Approach // *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 2018. vol. 57 no. 1. pp. 268–282.
19. *Vasudevan S., Rangaiah G.P.* Criteria for performance assessment of plantwide control systems // *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2010. vol. 49. no. 19. pp. 9209–9221.
20. *Shardt Y. et al.* Determining the state of a process control system: Current trends and future challenges // *Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2012. vol. 90. no. 2. pp. 217–245.
21. *Александрова С.А. и др.* Синтез робастной непрерывной системы на основе минимизации оценки относительной интервальности следа ее матрицы состояния // *Труды СПИИРАН*. 2017. Вып. 6(55). С. 63–85.
22. *Дударенко Н.А., Нуйя О.С., Сержантова М.В., Ушаков А.В.* Оценивание процесса вырождения многоканальных функциональных систем с человеком-оператором в их составе // *Известия высших учебных заведений. Приборостроение*. 2018. Т. 61. № 1. С. 5–11.
23. *Golub G.H., Van Loan C.F.* *Matrix Computations* // Johns Hopkins University Press. 2012. 790 p.
24. *Никифоров В.О., Слута О.В., Ушаков А.В.* Интеллектуальное управление в условиях неопределенности: учебное пособие // СПб: СПбГУ ИТМО. 2011. 226 с.
25. *Vunder N.A., Ushakov A.V.* The problem of forming the structure of eigenvectors of state matrix of continuous stable system which guarantees the absence of deviation of its trajectories from monotonically decreasing curve of free motion // *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. vol. 49. no. 1. pp. 27–40.
26. *Дударенко Н., Ушаков А.* Анализ многоканальных динамических систем: технология контроля вырождения // Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011. 232 с.
27. *Вундер Н.А., Ушаков А.В.* Алгебраические свойства матричных компонентов моделей процесса управления в алгоритмах размещения мод матрицы состояния проектируемой системы // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2016. Т. 16. № 2(102). С. 371–374.

**Вундер Нина Александровна** – канд. техн. наук, научный сотрудник, институт автоматического управления, Брауншвейгский Технический Университет. Область научных интересов: применение методов модального управления и метода последовательного компенсатора, системы с неопределенностями и запаздыванием, большие отклонения свободного движения устойчивых систем, управление многомерными системами. Число научных публикаций – 50. [wunder.n@mail.ru](mailto:wunder.n@mail.ru); ул. Ханс-Зоммер, 66, 38106, Брауншвейг, Германия; р.т.: +49 531-391-3835; факс: +49 531 391-5194.

**Дударенко Наталия Александровна** – канд. техн. наук, доцент, доцент, факультет систем управления и робототехники, Национальный исследовательский университет ИТМО (Университет ИТМО). Область научных интересов: анализ и диагностика работоспособности многомерных динамических систем, реконфигурация систем управления, устойчивость динамических систем, математическое моделирование и анализ многомерных динамических систем с человеком-оператором. Число научных публикаций – 100. [dudarenko@yandex.ru](mailto:dudarenko@yandex.ru); Кронверкский пр., 49, 197101, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)595-4128; факс: +7(812)595-4128.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при поддержке гранта правительства Российской Федерации 08-08.

N. DUDARENKO, N. VUNDER  
**A PRIORI CONTROL OF POTENTIAL DEGENERATION OF  
CONTINUOUS MULTICHANNEL DYNAMIC SYSTEMS**

*Dudarenko N., Vunder N. A Priori Estimation of Potential Degeneration of Continuous Multichannel Dynamic Systems.*

**Abstract.** The problem of a priori control of potential degeneration of continuous multichannel dynamic systems is considered in the paper. Degeneracy is a property of a system describing operability of a multichannel dynamic system together with the basic properties of stability, reliability and invariance to the changing conditions. An assessment of potential generation of a system and its configuration together with the interconnections and polynomial exogenous signal is proposed. Degeneration process of a multichannel dynamic systems is a process of the rank reducing of the linear operator of the system. This statement is a basic concept of the degeneration factors approach. Algebraic properties of the matrix of the system's operator is considered, and the matrix is named as the criterion matrix. Degeneration factor is calculated with the singular values of the criterion matrix. The global degeneration factor is conditional number of the criterion matrix of a system. In contrast to previous solutions it is proposed to form the criterion matrix of a system with the resolvent of its state matrix. Deparameterization of the linear algebraic problem is realized by additive decomposition of the output vector of the system by derivatives of the exogenous signal, and the steady-state mode of the system is considered. The procedure of a priori estimation of degeneration of continuous multichannel dynamic systems is proposed. The ways to achieve the required value of degeneration of the criterion matrix of the system with the modal control methods are discussed. The paper is supported with examples.

**Keywords:** Degeneration, Multichannel System, Singular Value Decomposition, Criterion Matrix.

**Vunder Nina** – Ph.D., Researcher, Institute of Control Engineering, Technical University of Braunschweig. Research interests: application of the modal control approach and the method of consecutive compensator, systems with uncertainties and delays, large deviations of free motion of stable systems, control of multivariable systems. The number of publications – 50. wunder.n@mail.ru; 66, Hans-Sommer-Str., 38106, Braunschweig, Germany; office phone: +49 531-391-3835; fax: +49 531 391-5194.

**Dudarenko Natalia** – Ph.D., Associate Professor, Associate professor, Faculty of Control Systems and Robotics, ITMO University. Research interests: analysis and operability diagnostics of multivariable dynamic systems, control system reconfiguration, stability of dynamic systems, mathematical modeling and analysis of multivariable dynamic systems with a human operator. The number of publications – 100. dudarenko@yandex.ru; 49, Kronverksky Pr., 197101, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)595-4128; fax: +7(812)595-4128.

**Acknowledgements.** This research was supported by Government of Russian Federation, Grant 08-08.

## References

1. Abdullin A.A., Drozdov V.N., Mamatov A.G. [Influence of Transfer Function Zeros on Controller Parameters]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 4(53). pp. 73–96. (In Russ.).

2. Safari A., Eslamloueyan R. Controlled variables selection based on lost work minimization. *International Journal of Exergy*. 2018. vol. 27. no. 3. pp. 334–363.
3. Pequito S., Kar S., Aguiar A.P. A Framework for Structural Input/Output and Control Configuration Selection in Large-Scale Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2016. vol. 61. no. 2. pp. 303–318.
4. Voronov A.A. *Vvedenie v dinamiku slozhnykh upravlyaemykh sistem* [Introduction to the dynamics of complex control systems]. Moscow: Nauka. 1985. 351 p. (In Russ.).
5. Bristol E. On a new measure of interaction for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1966. vol. 11. pp. 133–134.
6. Hovd M., Skogestad S. Simple frequency-dependent tools for control systems analysis, structure selection and design. *Automatica*. 1992. vol. 28. no. 5. pp. 989–996.
7. Chang J.W., Yu C.C. Relative disturbance gain array. *American Institute of Chemical Engineers Journal*. 1992. vol. 38. no. 4. 521–534.
8. Reyes E.N., Messina A.R., Pérez M.A. Design of wide-area damping controllers using the block relative gain. *Electric Power Systems Research*. 2015. vol. 126. pp. 56–67.
9. Moaveni B., Birk W. Modified Hankel Interaction Index Array for Input-Output Pairing with Improved Characteristics. *IFAC-PapersOnLine*. 2018. vol. 51. no. 18. pp. 452–457.
10. Birk W. Towards incremental control structure optimisation for process control. Proceedings of the 2007 46th IEEE Conference on Decision and Control. 2007. pp. 1832–1837.
11. Birk W., Dudarenko N.A. Reconfiguration of the Air Control System of a Bark Boiler. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2016. vol. 24. no. 2. pp. 565–577.
12. Botelho V.R., Trierweiler J.O., Farenzena M., Duraiski R. Assessment of model-plant mismatch by the nominal sensitivity function for unconstrained MPC. *IFAC-PapersOnLine*. 2015. vol. 28 no. 8. pp. 753–758.
13. Alstad V., Skogestad S., Hori E.S. Optimal measurement combinations as controlled variables. *Journal of Process Control*. 2009. vol. 19. no. 1. pp. 138–148.
14. Skogestad S. Control structure design for complete chemical plants. *Computers & Chemical Engineering*. 2004. vol. 28. no. 1-2. pp. 219–234.
15. de Oliveira V., Jäschke J., Skogestad S. Null-space method for optimal operation of transient processes. *IFAC-PapersOnLine*. 2016. vol. 49. no. 7. pp. 418–423.
16. Yi C.K., Luyben W.L. Evaluation of Plant-Wide Control Structures by Steady-State Disturbance Sensitivity Analysis. *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 1995. vol. 34. no. 7. pp. 2393–2405.
17. Konda N.V.S.N.M., Rangaiah G.P. Performance assessment of plantwide control systems of industrial processes. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2007. vol. 46. pp. 1220–1231.
18. Luppi P.A., Braccia L., Rullo P.G., Zumoffen D.A.R. Plantwide Control Design Based on the Control Allocation Approach. *Industrial and Engineering Chemistry Research*. 2018. vol. 57 no.1. pp. 268–282.
19. Vasudevan S., Rangaiah G.P. Criteria for performance assessment of plantwide control systems. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2010. vol. 49. no. 19. pp. 9209–9221.
20. Shardt Y. et al. Determining the state of a process control system: Current trends and future challenges. *Canadian Journal of Chemical Engineering*. 2012. vol. 90. no. 2. pp. 217–245.
21. Aleksandrova S.A. et al. [Continuous robust system synthesis based on minimization of estimation of the relative intervality of trace of the state matrix]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 6(55). pp. 63–85. (In Russ.).
22. Dudarenko N.A., Nuyya O.S., Serzhantova M.V., Ushakov A.V. [Assessment of functional degeneration process of multichannel system incorporated a human

- operator]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2018. Issue 61. vol. 1. pp. 5–11. (In Russ.).
23. Golub G.H., Van Loan C.F. *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press. 2012. 790 p.
24. Nikiforov V.O., Slita O.V., Ushakov A.V. *Intellektual'noe upravlenie v usloviyah neopredelennosti: uchebnoe posobie* [Intelligent control in presence of uncertainty: a learning book]. SPb: SPbGU ITMO. 2011. 226 p. (In Russ.).
25. Vunder N.A., Ushakov A.V. The problem of forming the structure of eigenvectors of state matrix of continuous stable system which guarantees the absence of deviation of its trajectories from monotonically decreasing curve of free motion. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2017. vol. 49. no. 1. pp. 27–40.
26. Dudarenko N.A., Ushakov A.V. *Analiz mnogokanal'nyh dinamicheskikh sistem: tekhnologiya kontrolya vy-rozhdeniya* [Analysis of multidimensional dynamic systems: the degeneration estimation technique]. Saarbrücken: LAP LAMBERT Academic Publishing. 2011. 232 p. (In Russ.).
27. Vunder N.A., Ushakov A.V. [Algebraic properties of matrix components of control plant models in placement state matrix modes of system algorithms for designed system]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2016. Issue 16. no. 2(102). pp. 371–374. (In Russ.).

М.А. ПЕРЕГУДОВ, А.С. СТЕШКОВОЙ  
**МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛИЗОВАННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ  
ЭЛЕМЕНТОВ СЕТЕЙ ЦИФРОВОЙ РАДИОСВЯЗИ СО  
СЛУЧАЙНЫМ МНОЖЕСТВЕННЫМ ДОСТУПОМ К СРЕДЕ  
ТИПА CSMA/CA**

*Перегудов М.А., Стешковой А.С.* **Модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA.**

**Аннотация.** Большой интерес представляет централизованная синхронизация элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, от эффективности которой зависит процесс установления сеанса связи. При этом оценка эффективности централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA не проводилась. Также не проводилась оценка вклада потенциально возможных деструктивных воздействий со стороны злоумышленника в снижение эффективности такой синхронизации. Представлена аналитическая модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA. При теоретических исследованиях в модели используют вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета, а при экспериментальных исследованиях — частоту успешной доставки такого пакета. Модель учитывает потенциально возможные деструктивные воздействия со стороны злоумышленника в аналитических выражениях для известных вероятностных показателей. Приведено экспериментальное исследование централизованной синхронизации элементов сети цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA. В качестве такой сети рассмотрена наиболее распространенная сеть цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi). Результаты экспериментального исследования отличаются от результатов теоретического исследования незначительно, что свидетельствует об адекватности разработанной аналитической модели. Установлено, во-первых, что вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета не зависит от количества абонентских терминалов в сетях цифровой радиосвязи; во-вторых, при средней длительности передачи пакета данных таким терминалом меньше 0,85 мс целесообразно использовать не случайный, а зарезервированный множественный доступ к среде, а, в-третьих, централизованная синхронизация устойчива к деструктивным воздействиям. Модель применима при проектировании сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, а также при оптимизации работы таких сетей.

**Ключевые слова:** аналитическая модель, централизованная синхронизация, сеть цифровой радиосвязи, случайный множественный доступ к среде, CSMA/CA, деструктивное воздействие, вероятность передачи.

**1. Введение.** Сегодня особое внимание уделяется оцениванию эффективности функционирования сетей цифровой радиосвязи. Данная оценка необходима, с одной стороны, на этапе проектирования таких сетей, а с другой — на этапе их эксплуатации, причем в условиях де-

структивных воздействий. Цель данных воздействий — нарушение конфиденциальности, целостности и доступности информации легитимных элементов сети цифровой радиосвязи. Они реализуются и на физическом, и на канальном, и даже на вышестоящих уровнях сетей цифровой радиосвязи. Причем наиболее опасными являются деструктивные воздействия, реализуемые на канальном уровне сетей цифровой радиосвязи, так как данный уровень отвечает за доступ абонентских терминалов к среде передачи данных.

К основным процедурам канального уровня сетей цифровой радиосвязи относятся процедуры синхронизации, случайного множественного доступа к среде, зарезервированного доступа к среде и управления мощностью передатчиков абонентских терминалов. Причем при отсутствии синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи функционирование остальных процедур канального уровня невозможно. В [1-4] приведены аналитические модели случайного множественного доступа к среде, зарезервированного доступа к среде и управления мощностью передатчиков абонентских терминалов в условиях деструктивных воздействий. Однако модели синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи в условиях деструктивных воздействий нет, поэтому оценить вклад деструктивных воздействий в снижение эффективности синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи и, как следствие, на этапе эксплуатации своевременно скорректировать значения характеристик таких сетей в целях обеспечения их оптимального функционирования не представляется возможным.

Одними из основных способов синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи являются широковещательная рассылка средством коммутации и управления (централизованный способ) и абонентскими терминалами (распределенный способ) синхронизирующих пакетов. Модели синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи приведены в работах [5-14]. Однако модели [5-13] не учитывают централизованный способ синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи (далее — централизованная синхронизация), а модель [14] не позволяет количественно оценить эффективность такой синхронизации. Данная синхронизация применяется в сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA. К ним относятся сети цифровой радиосвязи стандартов IEEE 802.11 (Wi-Fi), IEEE 802.15.1 (Bluetooth), IEEE 802.15.4 (ZigBee) [15-17], которые сегодня используются в каждом доме. Также в таких сетях известно множество деструктивных воздействий [4, 18-23] со стороны злоумышленника.

Цель работы — разработать аналитическую модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи с случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, позволяющей количественно оценивать эффективность такой синхронизации в условиях деструктивных воздействий.

**2. Анализ существующих работ.** В настоящее время известен ряд трудов [5-14], в которых приведены модели синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи. В моделях [5-13] оценивается эффективность распределенной синхронизации элементов самоорганизующихся сетей цифровой радиосвязи с использованием времени, затрачиваемого на синхронизацию элементов таких сетей [5-6], разницы локального времени между всеми такими элементами [7-10] и вероятности успешной доставки синхронизирующих пакетов [11] при условии масштабируемости самоорганизующихся сетей цифровой радиосвязи [12-13]. Причем во всех моделях, кроме [11], рассмотрены самоорганизующиеся сети цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA. В [14] представлена модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, в которой в качестве показателя эффективности синхронизации элементов таких сетей используется среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета. Однако с помощью такого показателя оценить эффективность централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA возможно только качественно. Также существующие модели не оценивают влияния потенциально возможных деструктивных воздействий со стороны злоумышленника. Таким образом, разработка аналитической модели, позволяющей количественно оценивать эффективность централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий, является актуальной задачей.

**3. Описательная модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий.** В результате анализа описаний функционирования процедуры синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи стандартов IEEE 802.11 (Wi-Fi), IEEE 802.15.1 (Bluetooth), IEEE 802.15.4 (ZigBee), приведенных в спецификациях [15-17], и учета потенциально возможных деструктивных воздействий [4, 18-23] пред-

ложена обобщенная описательная модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA в виде представленной на рисунке 1 функциональной схемы, в состав которой входят средство коммутации и управления, абонентские терминалы и злоумышленник. В качестве средства коммутации и управления может выступать точка доступа или ведущий радиомост.

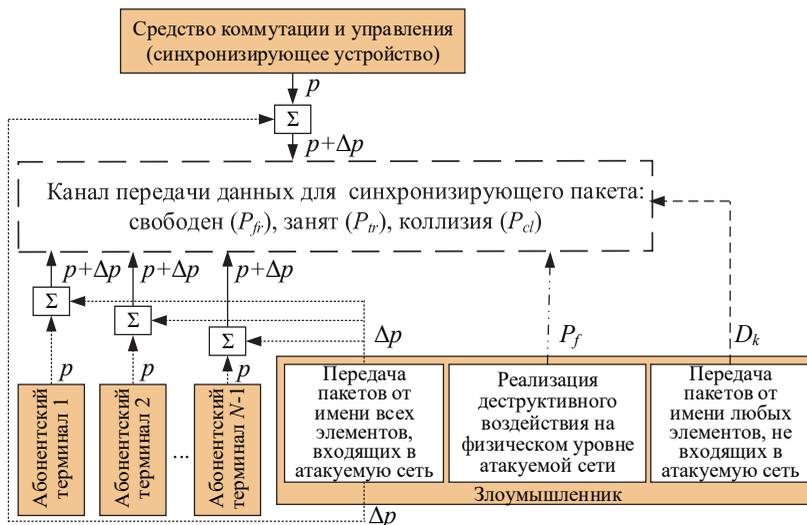


Рис. 1. Функциональная схема централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий

В сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA абонентскими терминалами и средством коммутации и управления осуществляются на конкурирующей основе с вероятностью  $p$  передачи пакетов данных. При этом среди пакетов данных встречаются не только пакеты пользовательских данных, но и пакеты служебных данных, отвечающие за установление, поддержание и прекращение сеанса связи. К пакетам служебных данных относятся пакеты синхронизирующих данных (далее – синхронизирующие пакеты). При централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA широковещательная рассылка синхронизирующих пакетов осуществляется только средством коммутации и

управления. При передаче синхронизирующего пакета средством коммутации и управления используется уменьшенный межпакетный интервал, что обеспечивает приоритетную передачу такого пакета в канале передачи данных со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA относительно пакетов пользовательских и служебных данных, отвечающих за установление сеанса связи. Причем передача синхронизирующего пакета осуществляется периодически каждый раз в начале повторяющегося интервала синхронизации, задаваемого средством коммутации и управления, при свободном канале передачи данных или по окончании передачи абонентским терминалом. Однако средство коммутации и управления не рассылает абонентским терминалам время начала и конца повторяющегося интервала синхронизации. В результате этого в канале передачи данных возможна коллизия синхронизирующего пакета с пакетом пользовательских или служебных данных абонентского терминала (далее — коллизия синхронизирующего пакета). При получении синхронизирующего пакета все абонентские терминалы устанавливают единое время в соответствии с принятым значением. Только с установленным единым временем для всех участников информационного взаимодействия в сетях цифровой радиосвязи возможно эффективное функционирование процедур случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA и управления мощностью передатчиков абонентских терминалов.

Таким образом, при передаче средством коммутации и управления синхронизирующего пакета в сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA возможно наступление двух событий:

- успешная доставка синхронизирующего пакета;
- коллизия синхронизирующего пакета.

На рисунке 2 представлены возможные исходы при передаче синхронизирующего пакета *Beacon* в сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi) с основным алгоритмом случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA [15].

В качестве уменьшенного межпакетного интервала в сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi), учитываемого средством коммутации и управления перед передачей синхронизирующего пакета *Beacon*, используется межпакетный интервал *PIFS*. Межпакетный интервал *PIFS* меньше межпакетного интервала *DIFS*, учитываемого и абонентским терминалом, и средством коммутации и управления перед передачей пакетов пользовательских данных *Data*

и служебных данных *RTS*. При начале повторяющегося интервала синхронизации *TBTT* средство коммутации и управления осуществляет по истечении межпакетного интервала *PIFS* передачу синхронизирующего пакета *Beacon*. При этом абонентский терминал откладывает передачу, ожидает окончания передачи *Beacon* и по истечении межпакетного интервала *DIFS* передает пакет пользовательских данных *Data* или пакет служебных данных *RTS*, отвечающий за установление сеанса связи в зависимости от алгоритма случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA [15].

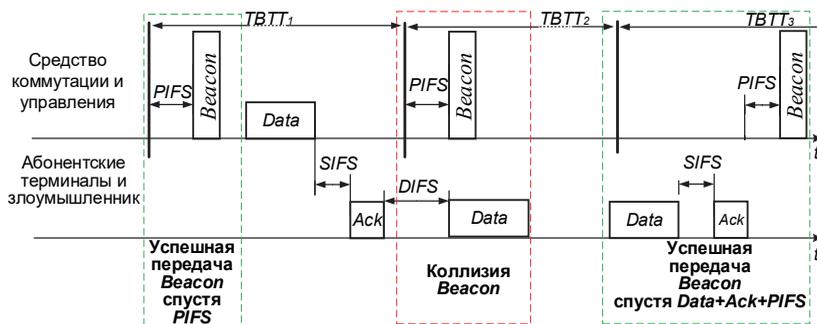


Рис. 2. Возможные события при передаче средством коммутации и управления синхронизирующего пакета в сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi)

Из анализа работ [4, 18-23] следует, что злоумышленник может осуществлять следующие деструктивные воздействия, направленные на создание коллизии синхронизирующего пакета:

- передача пакетов данных от имени всех  $N$  легитимных элементов, входящих в атакуемую сеть, с вероятностью  $\Delta p$ ;
- передача пакетов данных от имени любых  $K$  элементов, не входящих в атакуемую сеть, с вероятностью  $D_k$ ;
- формирование помехи на физическом уровне атакуемой сети с вероятностью  $P_f$ .

**4. Аналитическая модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий.** Из приведенной описательной модели централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий видно, что для доведения до каждого абонентского терминала единого времени требуется в каждом

повторяющемся интервале синхронизации успешно передавать средством коммутации и управления синхронизирующий пакет. Поэтому в качестве показателя эффективности централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA предлагается использовать вероятность успешной доставки средством коммутации и управления синхронизирующего пакета до каждого абонентского терминала в каждом повторяющемся интервале синхронизации (далее — вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета).

Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета  $\Omega_{syn}$  будем определять как отношение среднего времени успешной доставки синхронизирующего пакета от момента начала повторяющегося интервала синхронизации без учета возможной коллизии такого пакета  $\bar{T}_{BATSC}$  (благоприятный исход передачи синхронизирующего пакета) к среднему времени успешной доставки синхронизирующего пакета с учетом коллизии  $\bar{T}_{BAT}$  (общее число исходов передачи синхронизирующего пакета):

$$\Omega_{syn} = \frac{\bar{T}_{BATSC}}{\bar{T}_{BAT}}. \quad (1)$$

Однако приведенная вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета может использоваться только при теоретических исследованиях, так как на практике из-за отсутствия рассылки средством коммутации и управления информацией о повторяющемся интервале синхронизации неизвестно время начала такого интервала. Поэтому для экспериментальных исследований предлагается использовать в качестве показателя частоту успешной доставки синхронизирующего пакета, определяемую следующим выражением:

$$\eta_{syn} = \frac{\Delta T(S_0)}{\Delta T(S_1)}, \quad (2)$$

где  $S_0$  — состояние функционирования сети цифровой радиосвязи при условии отсутствия передач пакетов пользовательских данных;  $S_1$  — состояние функционирования сети цифровой радиосвязи при условии наличия передач таких пакетов;  $\Delta T$  — среднее время между появлениями синхронизирующего пакета в канале передачи данных.

В состоянии  $S_0$  при отсутствии пакетов пользовательских данных в канале передачи данных синхронизирующий пакет всегда будет успешно доставлен элементам сети цифровой радиосвязи, а в состоянии

$S_1$  возможна коллизия синхронизирующего пакета с пакетом пользовательских данных.

Среднее время между появлениями  $i+1$  и  $i$ -го синхронизирующих пакетов в канале передачи данных рассчитывается по формуле:

$$\Delta T = \frac{\sum_{i=1}^K (T_{syn_{i+1}} - T_{syn_i})}{K}, \quad (3)$$

где  $T_{syn_i}$  — время появления  $i$ -го синхронизирующего пакета в канале передачи данных;  $K$  — количество повторяющихся интервалов синхронизации, определяющееся длительностью эксперимента.

Для расчета вероятности успешной доставки синхронизирующего пакета определим среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета от момента начала повторяющегося интервала синхронизации (далее — среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета)  $\bar{T}_{BAT}$  на примере стандарта цифровой радиосвязи IEEE 802.11 (Wi-Fi).

С учетом описания известного события успешной доставки синхронизирующего пакета [14] и возможной коллизии синхронизирующего пакета в канале передачи данных среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета примет уточненное графическое отображение, представленное на рисунке 3, в зависимости от времени после окончания подтверждения передачи абонентским терминалом.

В насыщенных сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, к которым относятся и сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi), передачи пакетов данных следуют друг за другом [4, 24]. При этом по окончании подтверждения передачи абонентским терминалом по истечении межпакетного интервала *DIFS* длительностью  $T_{DIFS}$  готов к передаче другой абонентский терминал или средство коммутации и управления. Причем передача осуществляется с общей длительностью  $\bar{T}_m$ . Однако между такими передачами при наступлении повторяющегося интервала синхронизации *TBTT* длительностью  $T_{TBTT}$  средство коммутации и управления отправляет приоритетный синхронизирующий пакет *Beacon*. С учетом рисунка 3 рассмотрим полное описание возможных событий успешной доставки и коллизии синхронизирующего пакета *Beacon* и соответствующее этим событиям среднее время успешной доставки такого синхронизирующего пакета.

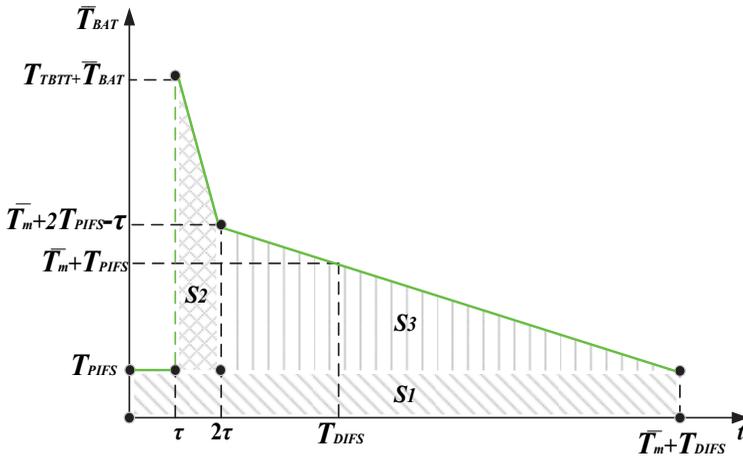


Рис. 3. Зависимость среднего времени успешной доставки синхронизирующего пакета от времени после окончания подтверждения передачи абонентским терминалом

1. Если повторяющийся интервал синхронизации  $T_{BTT}$  наступит в течение временного интервала  $\tau$  после окончания передачи абонентским терминалом, то произойдет успешная доставка синхронизирующего пакета *Beacon* по истечении межпакетного интервала  $PIFS$ . При этом среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета равняется длительности  $T_{PIFS}$ .

2. Если повторяющийся интервал синхронизации  $T_{BTT}$  наступит по истечении временного интервала  $\tau$  после окончания передачи абонентским терминалом, то произойдет коллизия синхронизирующего пакета *Beacon* и его повторная передача может осуществиться в следующем интервале  $T_{BTT}$ . При этом среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета увеличится на длительность повторяющегося интервала синхронизации  $T_{BTT}$  и, соответственно, равняется  $\bar{T}_{BAT} + T_{TBT}$ .

3. Если повторяющийся интервал синхронизации  $T_{BTT}$  наступит по истечении двух временных интервалов  $\tau$  после окончания передачи абонентским терминалом, то произойдет успешная доставка синхронизирующего пакета *Beacon* только уже по окончании передачи пакета данных абонентским терминалом. При этом среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета равняется  $\bar{T}_m + 2T_{PIFS} - \tau$ .

Пункт 3 описывает занятость канала передачи данных при наступлении повторяющегося интервала синхронизации  $T_{BTT}$ .

Из рисунка 3 видно, что среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета определяется как отношение суммы площадей прямоугольника, трапеции и треугольника, образующей площадь под кривой, к основанию:

$$\begin{aligned} \bar{T}_{BAT} &= \frac{S_1 + S_2 + S_3}{T_m + T_{DIFS}} = \\ &= T_{PIFS} + \frac{(T_{TBTT} + \bar{T}_{BAT} + \bar{T}_m - \tau)\tau}{2(T_m + T_{DIFS})} + \frac{(\bar{T}_m + T_{PIFS} - \tau)^2}{2(T_m + T_{DIFS})}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\bar{T}_m$  — средняя длительность передачи пакета данных абонентским терминалом;  $T_{TBTT}$  — длительность повторяющегося интервала синхронизации  $T_{BTT}$ ;  $T_{PIFS}$  — длительность межпакетного интервала  $PIFS$ ;  $T_{DIFS}$  — длительность межпакетного интервала  $DIFS$ ;  $\tau$  — длительность минимального временного интервала, из которого состоят межпакетные интервалы и пакеты данных.

Выражение (4) справедливо для насыщенных сетей цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi). Однако на практике такие сети не всегда насыщены и их канал передачи данных может простаивать. Поэтому уточним выражение (4) в части коэффициентов  $k_a$  и  $k_b$  перед слагаемыми, учитывающими коллизию синхронизирующего пакета  $Beacon$  и его успешную передачу в результате занятости канала передачи данных:

$$\bar{T}_{BAT} = T_{PIFS} + k_a \frac{(T_{TBTT} + \bar{T}_{BAT} + \bar{T}_m - \tau)\tau}{2(T_m + T_{DIFS})} + k_b \frac{(\bar{T}_m + T_{PIFS} - \tau)^2}{2(T_m + T_{DIFS})}, \quad (5)$$

где  $k_a$  — коэффициент создания коллизии синхронизирующего пакета  $Beacon$  в сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi);  $k_b$  — коэффициент занятости канала передачи данных.

В левой и правой частях равенства (5) содержится искомый показатель — среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета. Поэтому (5) преобразуем к виду:

$$\bar{T}_{BAT} = \frac{T_{PIFS} + k_a \frac{(T_{TBTT} + \bar{T}_m - \tau)\tau}{2(T_m + T_{DIFS})} + k_b \frac{(\bar{T}_m + T_{PIFS} - \tau)^2}{2(T_m + T_{DIFS})}}{1 - k_a \frac{\tau}{2(T_m + T_{DIFS})}}. \quad (6)$$

Исключив из выражения (6) слагаемые в числителе и знаменателе, учитывающие коллизию синхронизирующего пакета *Beacon*, получим среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета без учета возможной коллизии такого пакета:

$$\bar{T}_{BATSC} = T_{PIFS} + k_b \frac{(\bar{T}_m + T_{PIFS} - \tau)^2}{2(\bar{T}_m + T_{DIFS})}. \quad (7)$$

С учетом рисунка 3 коэффициент создания коллизии синхронизирующего пакета *Beacon* определим как часть времени, в течении которого возникает коллизия синхронизирующего пакета *Beacon*:

$$\begin{aligned} k_a &= \frac{P_{tr_{N-1}} \tau}{P_{fr_{N-1}} \tau + P_{tr_{N-1}} \tau + P_{tr_{N-1}} (\bar{T}_m + T_{DIFS} - 2\tau)} = \\ &= \frac{P_{tr_{N-1}} \tau}{P_{fr_{N-1}} \tau + P_{tr_{N-1}} (\bar{T}_m + T_{DIFS} - \tau)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $P_{tr_{N-1}}$  — вероятность занятости канала передачи данных одним из  $N-1$  элементом сети цифровой радиосвязи;  $P_{fr_{N-1}}$  — вероятность свободного канала передачи данных при  $N-1$  элементе такой сети.

В соответствии с [14] коэффициент занятости канала передачи данных определяется по формуле:

$$k_b = 1 - \frac{(1 - P_{tr_{N-1}}) \tau}{P_{sc_{N-1}} T_{sc} + P_{cl_{N-1}} T_{cl} + P_{fr_{N-1}} \tau}, \quad (9)$$

где  $P_{sc_{N-1}}$  — вероятность успешной доставки пакета данных одним из  $N-1$  элементом сети;  $P_{cl_{N-1}}$  — вероятность создания коллизии  $N-1$  элементом сети;  $T_{sc}$  — средняя длительность успешной передачи пакета данных;  $T_{cl}$  — средняя длительность коллизии.

Из аналитических выражений вероятностей свободного канала, успешной доставки пакета данных и создания коллизии для  $N$  элементов сети цифровой радиосвязи, приведенных в работе [4], получим аналогичные вероятности только для  $N-1$  элемента такой сети:

$$\begin{aligned}
 P_{fr_{N-1}} &= (1 - (p + \Delta p))^{N-1} (1 - P_f) \prod_{k=1}^K (1 - D_k); \\
 P_{sc_{N-1}} &= (N-1)p(1 - (p + \Delta p))^{N-2} (1 - P_f) \prod_{k=0}^K (1 - D_k); \\
 P_{cl_{N-1}} &= 1 - P_{fr_{N-1}} - P_{sc_{N-1}},
 \end{aligned} \tag{10}$$

где  $N$  — общее количество элементов в сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi);  $p$  — вероятность передачи абонентским терминалом или средством коммутации и управления пакета данных;  $\Delta p$  — вероятность передачи злоумышленником пакетов данных от имени всех  $N$  легитимных элементов, входящих в атакуемую сеть;  $D_k$  — вероятность передачи злоумышленником пакетов данных от имени любых  $K$  элементов, не входящих в атакуемую сеть;  $P_f$  — вероятность формирования помехи на физическом уровне атакуемой сети.

Выражения (10) описывают случайный множественный доступ к среде. В сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi) используется при централизованной синхронизации ее элементов случайный множественный доступ к среде типа CSMA/CA. Особенность случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA в условиях деструктивных воздействий [4] заключена в системе уравнений:

$$\left\{ \begin{aligned}
 p &= \frac{2(1 - P_{wN})}{W_0(1 - P_{wN-1}) \sum_{i=0}^{m-1} (2P_{wN-1})^i + W_0(2P_{wN-1})^m + 1}; \\
 P_{w_{N-1}} &= 1 - \left[ (1 - (p + \Delta p))^{N-1} \cdot (1 - P_f) \cdot \prod_{k=1}^K (1 - D_k) \right]; \\
 P_{wN} &= 1 - \left[ (1 - (p + \Delta p))^N \cdot (1 - P_f) \cdot \prod_{k=1}^K (1 - D_k) \right],
 \end{aligned} \right. \tag{11}$$

где  $W_0$  — значение счетчика отсрочки повторной передачи;  $m$  — количество повторных попыток передач.

Решив систему уравнений (11), определим вероятности  $p$ ,  $P_{w_{N-1}}$  и  $P_{wN}$ , которые являются исходными данными для выражений (8), (9) и (10).

В соответствии с [4] и [15] для основного алгоритма случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA в сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi) средние длительности передачи пакета данных абонентским терминалом, создания коллизии и успешной передачи такого пакета определяются выражениями:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_m = \overline{T}_{data} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma; \\ T_{cl} = \overline{T}_{data} + T_{DIFS} + \sigma; \end{array} \right. , \\ \text{если } (\Delta p = 0) \cap (D_k = 0) \cap (P_f = 0); \\ \left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_m = E[P_z] + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma; \\ T_{cl} = E[P_z] + T_{DIFS} + \sigma; \end{array} \right. , \\ \text{если } (E[P_z] > \overline{T}_{data}); \end{cases} \quad (12)$$

$$T_{sc} = \overline{T}_{data} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma + T_{DIFS},$$

а для дополнительного алгоритма случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA в таких сетях они примут вид:

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_m = T_{Rts} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Cts} + \sigma + T_{SIFS} + \\ + \overline{T}_{data} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma; \\ T_{cl} = T_{Rts} + T_{DIFS} + \sigma; \end{array} \right. , \\ \text{если } (\Delta p = 0) \cap (D_k = 0) \cap (P_f = 0); \\ \left\{ \begin{array}{l} \overline{T}_m = T_{Rts} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Cts} + \sigma + T_{SIFS} + \\ + E[P_z] + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma; \\ T_{cl} = E[P_z] + T_{DIFS} + \sigma; \end{array} \right. , \\ \text{если } (E[P_z] > \overline{T}_{data}); \end{cases} \quad (13)$$

$$T_{sc} = T_{Rts} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Cts} + \sigma + T_{SIFS} + \\ + \overline{T}_{data} + \sigma + T_{SIFS} + T_{Ack} + \sigma + T_{DIFS},$$

где  $\overline{T}_{data}$  — средняя длительность передачи пакета пользовательских данных *Data*;  $T_{Ack}$  — длительность пакета *Ack* подтверждения успешной доставки пакета пользовательских данных *Data*;  $T_{Rts}$  — длительность пакета *Rts* запроса на получение доступа к среде;  $T_{Cts}$  — длительность

пакета  $Cts$  подтверждения успешной доставки пакета  $Rts$ ;  $T_{SIFS}$  — длительность межпакетного интервала  $SIFS$ ;  $\sigma$  — задержка распространения сигнала;  $E[P_e]$  — средняя длительность передачи пакета данных злоумышленника или помехи на физическом уровне атакуемой сети.

Средняя длительность передачи пакета пользовательских данных  $Data$  [15] определяется выражением:

$$\bar{T}_{data} = T_{preamble} + T_{signalExtension} + 4\left(\frac{22 + (L_{header} + \bar{L}_{data})8}{4R}\right), \quad (14)$$

где  $T_{preamble}$  — длительность преамбулы пакета пользовательских данных  $Data$ ;  $T_{signalExtension}$  — длительность поля расширения сигнала;  $L_{header}$  — объем заголовка полезной нагрузки пакета  $Data$ ;  $\bar{L}_{data}$  — средний объем полезной нагрузки пакета  $Data$ ;  $R$  — скорость передачи пакета  $Data$ .

Учитывая возможные значения объема полезной нагрузки пакета пользовательских данных  $Data$ , передаваемой каждым элементом сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi), получим в такой сети средний объем полезной нагрузки пакета пользовательских данных  $Data$  в виде:

$$\bar{L}_{data} = \frac{\sum_{i=1}^N L_{data_i}}{N}, \quad (15)$$

где  $L_{data_i}$  — объем полезной нагрузки пакета пользовательских данных  $Data$ , передаваемой  $i$ -ым элементом сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11 (Wi-Fi).

С учетом рассмотренных показателей в аналитической модели предлагается использовать систему показателей эффективности централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, представленную на рисунке 4.

Из приведенной на рисунке 4 системы показателей видно, что, во-первых, вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета зависит от вероятностных и временных показателей случайного множественного доступа к среде, во-вторых, такая вероятность может использоваться не только в сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, но и в сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа ALOHA, S-ALOHA и другим, учитывающих централизованный способ синхронизации их элементов.



Рис. 4. Система показателей эффективности централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA

**5. Описание экспериментального исследования.** При экспериментальном исследовании разворачивалась сеть цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11n (Wi-Fi), состоящая из двух - семи элементов. Стандарт IEEE 802.11n (Wi-Fi) является одной из реализаций стандарта

IEEE 802.11 (Wi-Fi). В развернутой сети осуществлялся информационный обмен между каждым абонентским терминалом и точкой доступа с общим количеством пакетов данных  $N_{tr}$ .

Захват пакетов данных в канале передачи данных сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11n (Wi-Fi) и их анализ осуществлялся с использованием системы оптимизации работы сетей цифровой радиосвязи и обнаружения деструктивных воздействий, состоящей из приемного устройства, устройства вывода результатов и ПЭВМ с программным средством анализа сетевого трафика и комплексом оптимизации работы сетей цифровой радиосвязи [25]. Причем одним из средств программного комплекса оптимизации работы сетей цифровой радиосвязи является средство оценки эффективности синхронизации. В качестве приемного устройства использовали Wi-Fi адаптер Alfa AWUS036ACH.

Структурная схема экспериментальной оценки эффективности централизованной синхронизации для сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11n (Wi-Fi), состоящей из семи элементов, приведена на рисунке 5.

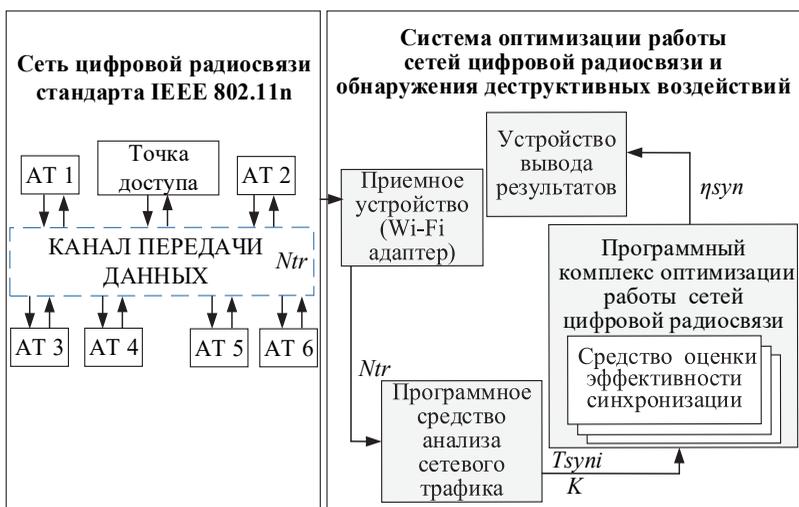


Рис. 5. Структурная схема экспериментальной оценки эффективности централизованной синхронизации для сети цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11n (Wi-Fi), состоящей из семи элементов

Из захваченных пакетов данных с использованием программного средства анализа сетевого трафика выделяют синхронизирующие пакеты точек доступа и упорядочивают по времени их появления, как показано на рисунке 6.

MAC источн.	Протокол	Время	Сигнал
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:34,789822	-52
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:34,888047	-68
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:34,998690	-55
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,096938	-72
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,195294	-81
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,305909	-68
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,404167	-58
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,502422	-63
B0:48:7A:D6:3B:9A	MN <i>Tsyn</i> ON	12:42:35,613042	-59
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,711410	-64
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,809661	-80
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:35,920280	-55
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,018655	-65
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,116903	-45
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,227514	-70
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,325757	-71
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,424137	-63
B0:48:7A:D6:3B:9A	MNGT/BEACON	12:42:36,534630	-65

Рис. 6. Определение времени появления синхронизирующего пакета

На основании полученных значений  $T_{syn_i}$  в соответствии с выражениями (2) и (3) для различного количества элементов в развернутой сети определялись:

- среднее время между появлениями синхронизирующего пакета в канале передачи данных  $\Delta T(S_0)$  при условии отсутствия передач пакетов пользовательских данных;
- среднее время между появлениями синхронизирующего пакета в канале передачи данных  $\Delta T(S_1)$  при условии наличия передач пакетов пользовательских данных;
- частота успешной доставки синхронизирующего пакета  $\eta_{syn}$ .

**6. Результаты теоретического и экспериментального исследований.** При теоретическом и экспериментальном исследованиях рассматривалась сеть цифровой радиосвязи стандарта 802.11n. Основные характеристики исследуемой сети цифровой радиосвязи приведены в таблице 1.

Таблица 1. Основные параметры исследуемой сети цифровой радиосвязи

Параметр	Значение
Длительность межпакетного интервала <i>PIFS</i> $T_{PIFS}$ , мкс	19
Длительность межпакетного интервала <i>DIFS</i> $T_{DIFS}$ , мкс	28
Значение счетчика отсрочки повторной передачи $W_0$ , слот	16
Количество повторных попыток передач $m$ , раз	5
Длительность временного слота $\tau$ , мкс	9
Задержка распространения сигнала $\delta$ , мкс	1
Длительность повторяющегося интервала синхронизации <i>TBTT</i> $T_{TBTT}$ , мкс	$10^5$

Результаты теоретического и экспериментального исследований приведены на рисунках 7–13.

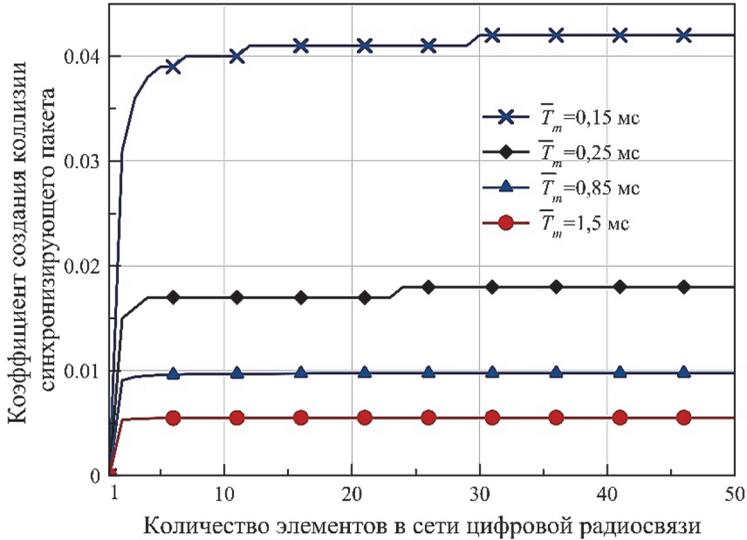


Рис. 7. Зависимость коэффициента создания коллизии синхронизирующего пакета от количества элементов в сети цифровой радиосвязи

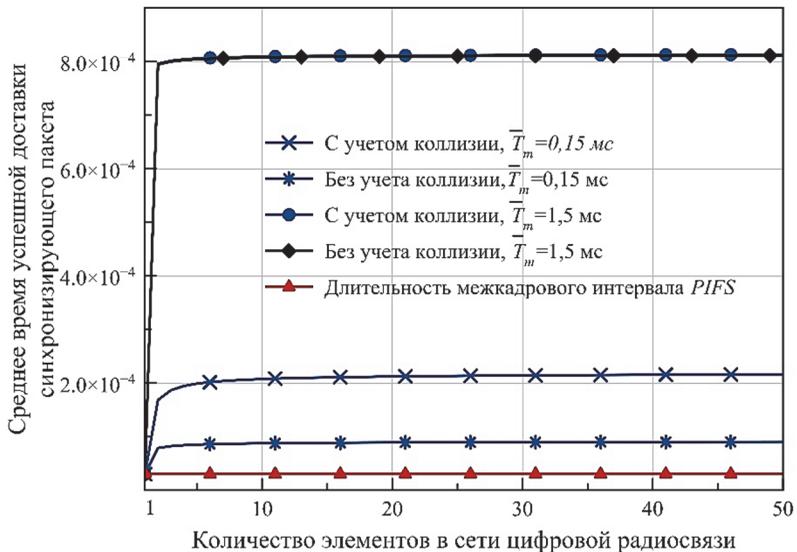


Рис. 8. Среднее времена успешной доставки синхронизирующего пакета с учетом его коллизии и без ее учета

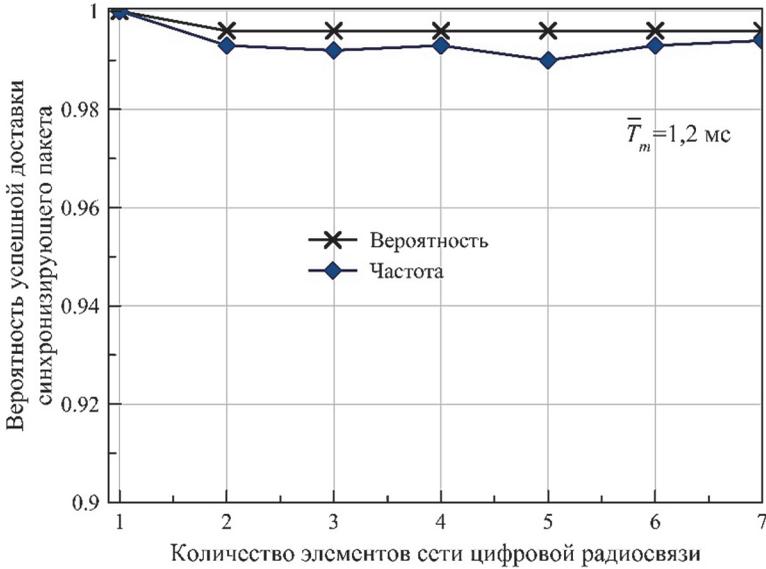


Рис. 9. Вероятность и частота успешной доставки синхронизирующего пакета при теоретическом и экспериментальном исследовании

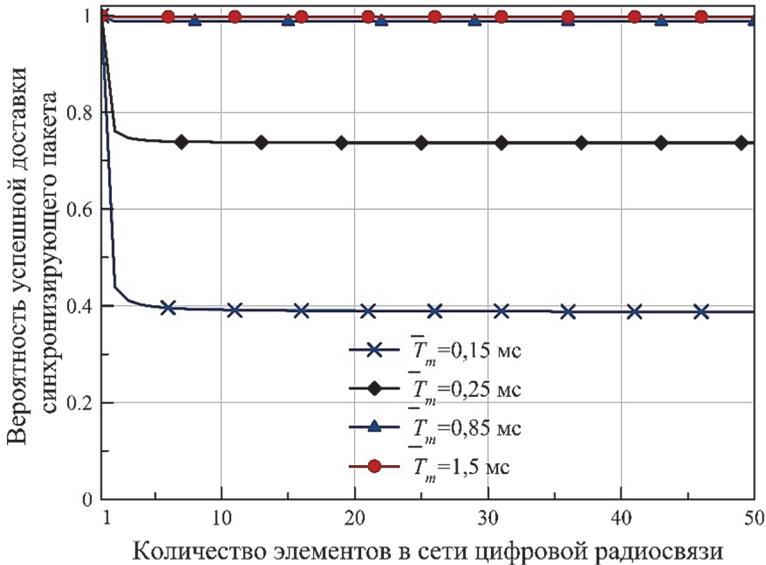


Рис. 10. Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета при различных значениях средней длительности передачи пакета данных абонентским терминалом

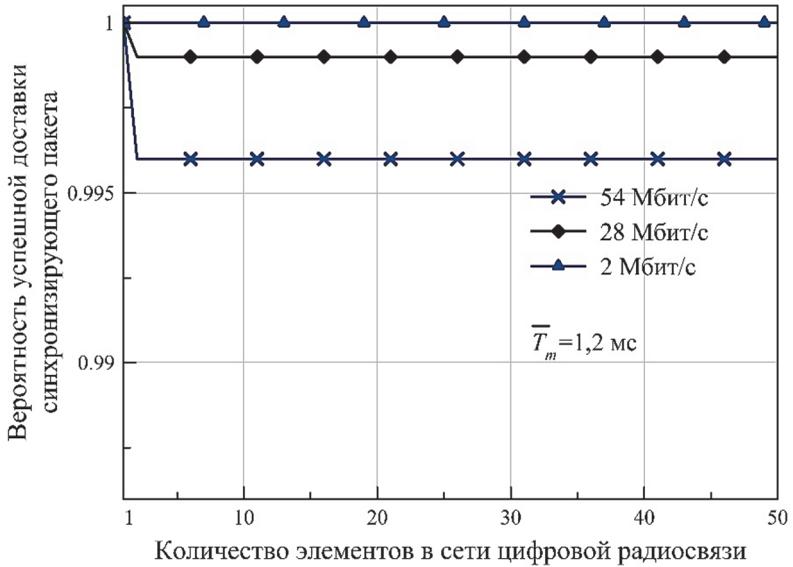


Рис. 11. Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета при различных значениях скорости передачи пакетов данных

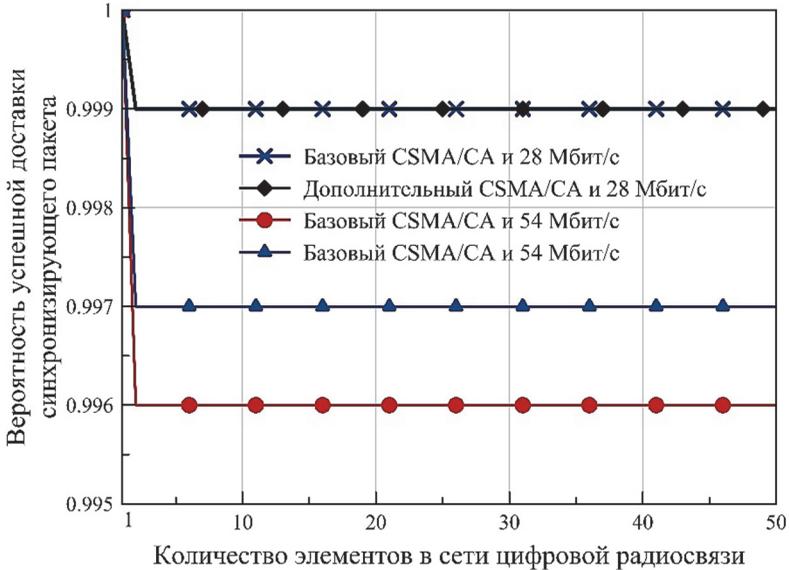


Рис. 12. Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета при базовом и дополнительном алгоритмах случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA

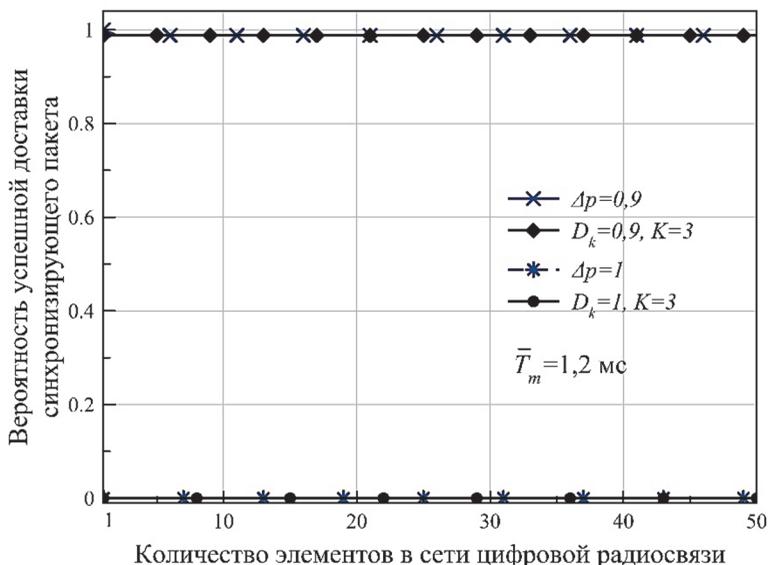


Рис. 13. Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета в условиях деструктивных воздействий

Из анализа результатов, приведенных на рисунках 7-13, следует.

1. С ростом количества абонентских терминалов ни коэффициент создания коллизии синхронизирующего пакета (рис. 7), ни среднее время успешной его доставки (рис. 8) практически не меняются, то есть они незначительно зависят от коллизий, вызванных столкновением пакетов данных таких терминалов. Однако уменьшение средней длительности передачи пакета данных абонентским терминалом приводит к увеличению такого коэффициента и, как следствие, к снижению такого среднего времени. При этом значительно растет вклад коллизии синхронизирующего пакета в среднее время успешной его доставки. При наличии только средства коммутации и управления в сети цифровой радиосвязи среднее время успешной доставки синхронизирующего пакета эквивалентно длительности межпакетного интервала *PIFS*. Все это подтверждает правильность описания реального процесса централизованной синхронизации элементов, протекающего в сетях цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA.

2. В сетях цифровой радиосвязи, состоящих из двух и более элементов, вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета не зависит от количества элементов в таких сетях. При этом результаты экспериментального исследования практически совпадают с результатами теоретического исследования и отличаются на сотые доли числа,

что в свою очередь подтверждает адекватность разработанной аналитической модели (рис. 9).

3. С уменьшением средней длительности передачи пакета данных абонентским терминалом снижается вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета (рис. 10). Причем при минимально возможной средней длительности передачи вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета снизилась почти в 2,5 раза. Такое снижение связано с значительным ростом коллизий синхронизирующего пакета. Аналогичная ситуация и с увеличением скорости передачи пакетов данных (рис. 11), так как с увеличением скорости уменьшается средняя длительность передачи пакета данных абонентским терминалом.

4. Использование средней длительности передачи данных абонентским терминалом более 0,85 мс позволяет обеспечить вероятность успешной доставки синхронизирующих пакетов близкой к единице. В сетях цифровой радиосвязи со средней длительностью передачи пакета данных абонентским терминалом меньше 0,85 мс также для обеспечения вероятности успешной доставки синхронизирующего пакета близкой к единице необходимо применять не случайный, а зарезервированный множественный доступ к среде, например в сетях цифровой радиосвязи стандарта IEEE 802.11n – PCF.

5. Вероятность успешной доставки синхронизирующего пакета как для базового, так и для дополнительных алгоритмов случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA вне зависимости от скорости передачи пакетов данных практически одинакова, отличается на тысячные доли числа (рисунок 12).

6. Централизованная синхронизация элементов сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA устойчива к деструктивным воздействиям (рисунок 13). И только при постоянной передаче злоумышленником пакетов данных в каждом временном интервале эффективность такой синхронизации стремится к нулю.

**7. Заключение.** Разработана аналитическая модель централизованной синхронизации элементов сетей цифровой радиосвязи, позволяющая определять вероятность (частоту) успешной доставки синхронизирующего пакета в условиях деструктивных воздействий с учетом вероятностей и средних длительностей успешной передачи и создания коллизии случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA. Проведены исследования, теоретические и экспериментальные результаты которых практически совпали, что подтверждает адекватность разработанной модели. При этом получили, что при средней длительности передачи пакета данных абонентским терминалом меньше 0,85 мс целесообразно использовать в сетях цифровой

радиосвязи не случайный, а зарезервированный множественный доступ к среде. Модель применима при проектировании сетей цифровой радиосвязи со случайным множественным доступом к среде типа CSMA/CA, а также при оптимизации работы таких сетей.

### Литература

1. *Перегудов М.А., Бойко А.А.* Модель процедуры случайного множественного доступа к среде типа S-ALOHA // Информационно-управляющие системы. 2014. № 6(73). С. 75–81.
2. *Перегудов М.А., Бойко А.А.* Модель процедуры зарезервированного доступа к среде сети пакетной радиосвязи // Телекоммуникации. 2015. № 6. С. 7–15.
3. *Перегудов М.А., Бойко А.А.* Модель процедуры управления питанием сети пакетной радиосвязи // Телекоммуникации. 2015. № 9. С. 13–18.
4. *Перегудов М.А., Степиковой А.С., Бойко А.А.* Вероятностная модель процедуры случайного множественного доступа к среде типа CSMA/CA // Труды СПИИРАН. 2018. Т. 4. № 59. С. 92–114.
5. *Pande H.K., Thapliyal S., Mangal L.C.* A new clock synchronization algorithm for multi-hop wireless ad hoc networks // 2010 Sixth International Conference on Wireless Communication and Sensor Networks. 2010. pp. 1–5.
6. *Lai T., Zhou D.* Efficient and Scalable IEEE 802.11 ad hoc mode timing synchronization function // 17th IEEE International Conferences on Advanced Information Networking and Applications. 2003. pp. 318–323.
7. *Mahmood A. et al.* Towards High Accuracy in IEEE 802.11 based Clock Synchronization using PTP // International IEEE Symposium on Precision Clock Synchronization for Measurement, Control and Communication (ISPCS 2011). 2011. pp. 13–18.
8. *Elson J., Estrin D.* Time Synchronization for Wireless Sensor Networks // Proceedings of the 15th International Parallel & Distributed Processing Symposium. 2001. p. 186.
9. *Herman T., Zhang C.* Stabilizing clock synchronization for wireless sensor networks // Springer Heidelberg. 2006. vol. 4280. pp. 335–349.
10. *Lai T.H., Zhou D.* Efficient and scalable IEEE 802.11 ad hoc mode timing pattern formation function // 17th International Conference on Advanced Information Networking and Applications. 2003. pp. 318–323.
11. *Сафонов А.А.* Анализ механизмов синхронизации в персональных и локальных беспроводных сетях // Автореферат дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н. Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН. 2008. 20 с.
12. *Sheu J.P., Chao C.M., Hu W.K., Sun C.W.* A Clock Synchronization Algorithm for Multi-Hop Wireless Ad Hoc Networks // Wireless Personal Communications. 2007. vol. 43. no. 2. pp. 185–200.
13. *Huang L., Lai T.H.* On the Scalability of IEEE 802.11 Ad Hoc Networks // Proceedings of the 3<sup>rd</sup> ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking & Computing. 2002. pp. 173–182.
14. *Garcia-Villegas E., Afaqui M.S., Lopez-Aguilera E.* A novel cheater and jammer detection scheme for IEEE802.11-based wireless LANs // Computer Networks. 2015. vol. 86. pp. 40–46.
15. *IEEE Computer Society LAN/MAN Standards Committee et al.* IEEE Standard for Information Technology-Telecommunications and information exchange between systems Local and metropolitan area networks-Specific Requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications // IEEE Std. 2012. vol. 802. 11 p.
16. *IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee et al.* IEEE Standard for Information Technology-Telecommunication and information exchange between systems – LAN/MAN

- Part 15.1: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications for Wireless Personal Area Networks (WPANs) // IEEE Std. 2002. vol. 802.
17. *IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee et al.* IEEE Standard for Information Technology, Part 15.4: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications for Low Rate Wireless Personal Area Networks (LR-WPANs) // IEEE Std. 2003. vol. 802.
  18. *Liu C., Qiu J.* Performance study of 802.11w for preventing DoS attacks on wireless local area networks // *Wireless Personal Communications*. 2017. vol. 95. no. 2. pp. 1031–1053.
  19. *Kaur J.* MAC Layer Management Frame Denial of Service Attacks // *International Conference on Micro-Electronics and Telecommunication Engineering (ICMETE)*. 2016. pp. 155–160.
  20. *Noman H.A., Abdullah S.M., Mohammed H.I.* An Automated Approach to Detect Deauthentication and Disassociation Dos Attacks on Wireless 802.11 Networks // *International Journal of Computer Science Issues (IJCSI)*. 2015. vol. 12. no. 4. pp. 107.
  21. *Filipek J., Hudec L.* Securing mobile ad hoc networks using distributed firewall with PKI // *2016 IEEE 14th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII)*. 2016. pp. 321–325.
  22. *Yacchirena A. et al.* Analysis of attack and protection systems in Wi-Fi wireless networks under the Linux operating system // *IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA)*. 2016. pp. 1–7.
  23. *Liu C., Qiu J.* Performance study of 802.11w for preventing DoS attacks on wireless local area networks // *Wireless Personal Communications*. 2017. vol. 95. no. 2. pp. 1031–1053.
  24. *Bianchi G.* IEEE 802.11–Saturation Throughput Analysis // *IEEE Communications Letters*. 1998. vol. 2. no. 12. pp. 318–320.
  25. *Бойко А.А., Перегудов М.А., Семченко И.А., Стешковой А.С.* Программный комплекс оптимизации работы сетей радиосвязи // *Свидетельство о регистрации программы на ЭВМ*. 2018. № 2018614894.

**Перегудов Максим Анатольевич** — канд. техн. наук, начальник лаборатории, научно-исследовательский испытательный институт, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (Воронеж). Область научных интересов: методы и системы защиты информации. Число научных публикаций — 14. [maharegudov@mail.ru](mailto:maharegudov@mail.ru); ул. Старых Большевиков, 54А, 394064, Воронеж, Россия; р.т.: +7(473)236-5228; факс: +7(473)244-7860.

**Стешковой Анатолий Сергеевич** — младший научный сотрудник, Военный учебно-научный центр Военно-воздушных сил «Военно-воздушная академия имени профессора Н.Е. Жуковского и Ю.А. Гагарина» (Воронеж). Область научных интересов: методы и системы защиты информации. Число научных публикаций — 6. [9515431635@mail.ru](mailto:9515431635@mail.ru); ул. Старых Большевиков, 54А, 394064, Воронеж, Россия; р.т.: +7(473)244-7860; факс: +7(473)244-7860.

M. PEREGUDOV, A. STESHKOVY  
**DIGITAL RADIO NETWORKS CENTRALIZED ELEMENTS  
SYNCHRONIZATION MODEL WITH RANDOM MULTIPLE  
ACCESS TO THE CSMA/CA TYPE MEDIUM**

*Peregudov M., Steshkovoy A.* **Digital Radio Networks Centralized Elements Synchronization Model with Random Multiple Access to the CSMA/CA Type Medium.**

**Abstract.** Currently, there is a great interest in digital radio network centralized elements synchronization with random multiple access to the CSMA/CA type, the effectiveness of which determines the process of establishing a communication session. At the same time, there was no assessment effectiveness digital radio communication network centralized elements synchronization with random multiple access to the CSMA/CA type. Also, there was no assessment made the contribution of potential destructive actions by the attacker to the reduction in the effectiveness of such synchronization. This paper presents digital radio networks centralized elements synchronization analytical model with random multiple access to the CSMA/CA type medium. In this model the theoretical resulting indicator is the probability of successful delivery of a synchronization package, and a package frequency of successful delivery is used in experimental indicator evaluation. The model takes into account the potential destructive effects of the attacker in analytical expressions for known probabilistic indicators. An digital radio network centralized elements synchronization with random multiple access to a CSMA/CA type experimental study an environment is also presented. The most common network of digital radio standard IEEE 802.11 (Wi-Fi) is considered as such network. The experimental research results differ from the theoretical research results slightly, which indicates the adequacy of the developed analytical model. It was established, firstly, that the successful delivery probability of a synchronization packet does not depend on number of subscriber terminals in digital radio communication networks, secondly, with an average duration of a data packet transmission by such terminal less than 0.85 ms, it is advisable to use non-random, and the reserved multiple access to the environment, and, thirdly, centralized synchronization is resistant to destructive influences. The model is applicable in the design of digital radio networks with random multiple access to the medium such as CSMA/CA, as well as in optimizing the operation of such networks.

**Keywords:** Analytical Model, Centralized Synchronization, Digital Radio Network, Random Multiple Media Access, CSMA/CA, Destructive Impact, Efficiency, Transmission Probability.

**Peregudov Maksim** — Ph.D., Head of Research Laboratory, Scientific Research Testing Institute, Military education-science center of Military aviation forces “Military aviation academy named for prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin” (Voronezh). Research interests: methods and systems of information protection. The number of publications — 14. maxaperudov@mail.ru; 54A, Old Bolsheviks street, 394064, Voronezh, Russia; office phone: +7(473)236-5228; fax: +7(473)244-7860.

**Steshkovoy Anatoliy** — Junior Researcher, Military Education-Science Center of Military Aviation Forces “Military Aviation Academy named for Prof. N.E. Zhukovsky and Yu.A. Gagarin” (Voronezh). Research interests: methods and systems of information protection. The number of publications — 6. 9515431635@mail.ru; 54A, Staryh Bol'shevikov str., 394064, Voronezh, Russia; office phone: +7(473)244-7860; fax: +7(473)244-7860.

## References

1. Peregudov M.A., Boyko A.A. [Model of the procedure of random multiple access to the medium of S-ALOHA type]. *Informacionno-upravljajushhie sistemy – Information-control systems*. 2014. vol. 6(73). pp. 75–81 (In Russ.).

2. Peregudov M.A., Boyko A.A. [Model of the procedure of reserved access to the packet radio network environment]. *Telekommunikacii – Telecommunications*. 2015. vol. 6. pp. 7–15. (In Russ.).
3. Peregudov M.A., Boyko A.A. [Model of the Power Management Procedure of the Packet Radio Network]. *Telekommunikacii – Telecommunications*. 2015. vol. 9. pp. 13–18. (In Russ.).
4. Peregudov M.A., Steshkovoj A.S., Boyko A.A. [Probabilistic Random Multiple Access Procedure Model to the CSMA/CA Type Medium]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2018. Issue 4. vol. 59. pp. 92–114. (In Russ.).
5. Pande H.K., Thapliyal S., Mangal L.C. A new clock synchronization algorithm for multi-hop wireless ad hoc networks. 2010 Sixth International Conference on Wireless Communication and Sensor Networks. 2010. pp. 1–5.
6. Lai T., Zhou D. Efficient and Scalable IEEE 802.11 ad hoc mode timing synchronization function. 17th IEEE International Conferences on Advanced Information Networking and Applications. 2003. pp. 318–323.
7. Mahmood A. et al. Towards High Accuracy in IEEE 802.11 based Clock Synchronization using PTP. International IEEE Symposium on Precision Clock Synchronization for Measurement, Control and Communication (ISPCS 2011). 2011. pp. 13–18.
8. Elson J., Estrin D. Time Synchronization for Wireless Sensor Networks. Proceedings of the 15th International Parallel & Distributed Processing Symposium. 2001. p. 186.
9. Herman T., Zhang C. Stabilizing clock synchronization for wireless sensor networks. Springer Heidelberg. 2006. vol. 4280. pp. 335–349.
10. Lai T.H., Zhou D. Efficient and scalable IEEE 802.11 ad hoc mode timing pattern formation function. 17th International Conference on Advanced Information Networking and Applications. 2003. pp. 318–323.
11. Safonov A.A. [Analysis mechanisms synchronization in personal and local wireless networks]. Extended abstract Ph.D. thesis. *Institut problem peredachi informacii imeny A.A. Harkevicha RAN – Institute transmission information problems named after A.A. Kharkevich Russian Academy of Sciences*. 2008. p. 20. (In Russ.).
12. Sheu J.P., Chao C.M., Sun C.W. A Clock Synchronization Algorithm for Multi-Hop Wireless Ad Hoc Networks. *Wireless Personal Communications*. 2007. vol. 43. no. 2. pp. 185–200.
13. Huang L., Lai T.H. On the Scalability of IEEE 802.11 Ad Hoc Networks. Proceedings of the 3rd ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking & Computing. 2002. pp. 173–182.
14. Garcia-Villegas E., Afaqui M.S., Lopez-Aguilera E. A novel cheater and jammer detection scheme for IEEE802.11-based wireless LANs. *Computer Networks*. 2015. vol. 86. pp. 40–46.
15. IEEE Computer Society LAN/MAN Standards Committee et al. IEEE Standard for Information Technology-Telecommunications and information exchange between systems Local and metropolitan area networks-Specific Requirements Part 11: Wireless LAN Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) Specifications. IEEE Std. 2012. vol. 802. 11 p.
16. IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee et al. IEEE Standard for Information Technology-Telecommunication and information exchange between systems – LAN/MAN Part 15.1: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications for Wireless Personal Area Networks(WPANs). IEEE Std. 2002. vol. 802.
17. IEEE 802 LAN/MAN Standards Committee et al. IEEE Standard for Information Technology, Part 15.4: Wireless Medium Access Control (MAC) and Physical Layer (PHY) specifications for Low Rate Wireless Personal Area Networks (LR-WPANS). IEEE Std. 2003. vol. 802.

18. Liu C., Qiu J. Performance study of 802.11w for preventing DoS attacks on wireless local area networks. *Wireless Personal Communications*. 2017. vol. 95. no. 2. pp. 1031–1053.
19. Kaur J. Mac Layer Management Frame Denial of Service Attacks. International Conference on Micro-Electronics and Telecommunication Engineering (ICMETE). 2016. pp. 155–160.
20. Noman H.A., Abdullah S.M., Mohammed H.I. An Automated Approach to Detect Deauthentication and Disassociation Dos Attacks on Wireless 802.11 Networks. *International Journal of Computer Science Issues (IJCSI)*. 2015. vol. 12. no. 4. pp. 1694–1784.
21. Filipek J., Hudec L. Securing mobile ad hoc networks using distributed firewall with PKI. 2016 IEEE 14th International Symposium on Applied Machine Intelligence and Informatics (SAMII). 2016. pp. 321–325.
22. Yacchirena A. et al. Analysis of attack and protection systems in Wi-Fi wireless networks under the Linux operating system. IEEE International Conference on Automatica (ICA-ACCA). 2016. pp. 1–7.
23. Liu C., Qiu J. Performance study of 802.11w for preventing DoS attacks on wireless local area networks. *Wireless Personal Communications*. 2017. vol. 95. no. 2. pp. 1031–1053.
26. Bianchi G. IEEE 802.11–Saturation Throughput Analysis. *IEEE Communications Letters*. 1998. vol. 2. no. 12. pp. 318–320.
24. Boyko A.A., Peregudov M.A., Semchenko I.A., Steshkovej A.S. [Software complex optimization networks radio communication]. *Svidetel'stvo ob ofitsial'noi registratsii programm dlya EVM – The Certificate on Official Registration of the Computer Program* 2018. vol. 2018614894. (In Russ.).

О.В. КАРСАЕВ, И.И. ШУКЛИН, С.П. ЮЩЕНКО  
**САМООРГАНИЗУЮЩЕЕСЯ В2В-ПРЕДПРИЯТИЕ  
РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ФОТОГРАММЕТРИЧЕСКОЙ  
ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ МЕСТНОСТИ В ЕТРИС**

*Карсаев О.В., Шуклин И.И., Ющенко С.П. Самоорганизующееся В2В-предприятие распределенной фотограмметрической обработки изображений местности в ЕТРИС.*

**Аннотация.** Рассмотрен подход к динамическому формированию (корректировке) расписаний распределенной фотограмметрической обработки изображений местности в сети наземных центров из состава Единой территориально-распределенной информационной системы приема и обработки данных дистанционного зондирования Земли из космоса. Имея целью наиболее полное удовлетворение требований потребителей к материалам космической съемки необходимых территорий, подход предусматривает формирование самоорганизующегося В2В-предприятия в указанной сети, обеспечивающего привлечение информационных, программных и аппаратных ресурсов наземных центров различной ведомственной и иной принадлежности для фотограмметрической обработки любого из поступивших в Единую территориально-распределенную информационную систему изображений местности. Показано, что поиск в узлах В2В-предприятия и заимствование требуемых ресурсов позволит наземным центрам гибко масштабировать физические и виртуальные средства фотограмметрической обработки данных дистанционного зондирования Земли, оперативно формировать их локальные структурно-функциональные организации в зависимости от текущих свойств потока заявок потребителей на получение данных дистанционного зондирования Земли в Единой территориально-распределенной информационной системе, характеристик потока материалов съемки местности от орбитальных средств мониторинга, а также учесть изобразительные и измерительные свойства изображений местности, подлежащих фотограмметрической обработке. Предложен способ усеечения множества потенциальных исполнителей заявки в соответствии с имеющимися семантическими и другими ограничениями на состав искомого множества исполнителей. Также предложены механизмы стимулирования наземных центров к предоставлению простаивающих ресурсов узлам В2В-предприятия. Их основой является возможность получения денежного или иного вознаграждения того или иного наземного центра за участие в распределенном обслуживании заявки. Развитие известной модели самоорганизующегося В2В-предприятия формирует условия для более эффективной организации обслуживания потока заявок в Единой территориально-распределенной информационной системе за счет привлечения незадействованных программных, информационных и аппаратных ресурсов наземных центров различной ведомственной принадлежности.

**Ключевые слова:** данные дистанционного зондирования Земли из космоса, фотограмметрическая обработка изображений местности, В2В-предприятие.

**1. Введение.** Возрастание числа, видов и сложности прикладных задач, решаемых с использованием данных дистанционного зондирования Земли (ДЗЗ), требует наращивания возможностей Единой территориально-распределенной информационной системы (ЕТРИС) [1]. В этой связи в наземные центры (НЦ) из состава ЕТРИС реализуются

возможности использования материалов съемки местности от российских и зарубежных космических аппаратов в интересах формирования и предоставления потребителям широкой номенклатуры информационных продуктов различных уровней их обработки [2]. Реализуя современные подходы к формированию инфраструктуры приема и обработки данных ДЗЗ, в ЕТРИС в ближайшей перспективе должны быть объединены в сеть стационарные и мобильные НЦ различной ведомственной принадлежности, а их информационные ресурсы интегрированы в единое геоинформационное пространство. С этой же целью в ЕТРИС создаются Центры обработки данных на базе облачных технологий (ЦОД ОТ).

В общем случае обслуживание заявки на предоставление данных ДЗЗ в ЕТРИС предусматривает прием от космических средств мониторинга материалов съемки местности, их фотометрическую, фотограмметрическую и тематическую обработки. Эти процессы реализуются в том ведомственном НЦ, в который поступила заявка. В перспективе, если ресурсов в этом НЦ окажется недостаточно, будет возможно воспользоваться услугами ЦОД ОТ.

Очевидно, что в условиях постоянного роста числа заявок на предоставление данных ДЗЗ и увеличения состава и производительности орбитальной группировки средств мониторинга Земли уже в ближайшей перспективе в ЦОД ОТ появятся очереди на обработку изображений местности. При этом имеющиеся аппаратные, программные и информационные ресурсы многих НЦ будут оставаться невостребованными (простаивать).

Объединение в сеть НЦ различной ведомственной принадлежности и формирование в ЕТРИС облачной среды открывает возможность организации взаимодействия наземных центров различной ведомственной принадлежности для совместного обслуживания любой из поступивших заявок на предоставление данных ДЗЗ. Это требует организации гибкого масштабирования физических и виртуальных средств обработки данных ДЗЗ, оперативного формирования их структурно-функциональной организации в зависимости от загрузки ЕТРИС и отдельных НЦ, требований потребителей и так далее.

В первую очередь это относится к фотограмметрической обработке (ФГО), которой в той или иной степени подвергаются все получаемые из космоса изображения местности. При этом фотометрическая обработка является прерогативой тех НЦ, которые осуществляют прием материалов съемки местности от конкретных космических средств мониторинга. Наконец, тематическая обработка

практически каждого изображения местности в силу своей специфики выполняется экспертами в той или иной предметной области и обычно за пределами ЕТРИС.

Учитывая изложенное в [3], предложена модель системы распределенной ФГО изображений местности в ЕТРИС, которая предусматривает взаимодействие НЦ различной ведомственной принадлежности при совместном обслуживании заявок на предоставление данных ДЗЗ. Показано, что организация такого взаимодействия может быть сведена к задаче динамического формирования (корректировки) расписаний распределенной ФГО с учетом приоритетов поступающих заявок, характеристик потока материалов съемки местности от орбитальных средств мониторинга, а также изобразительных и измерительных свойств изображений местности, подлежащих фотограмметрической обработке и тому подобное. Ниже рассмотрен подход к решению этой задачи.

Анализ существа процессов в предлагаемой системе распределенной ФГО показал, что их реализация возможна при формировании в ЕТРИС самоорганизующейся производственной системы [4, 5]. При этом компоненты самоорганизующейся системы должны соответствовать следующим основным требованиям:

- автономность, то есть быть в состоянии управлять собственными ресурсами для достижения своих целей без вмешательства извне;

- способность воспринимать внешний мир и локально воздействовать на него;

- наличие программных и/или физических элементов для взаимодействия с другими компонентами системы;

- поддерживать организацию системы (устанавливать отношения между различными автономными компонентами) и иметь средства и возможность координации функционирования.

Существующие подсистемы ФГО в НЦ соответствуют первым трем требованиям. Это обусловлено тем, что ЕТРИС является в целом децентрализованной системой, поскольку в каждый НЦПОР поступают заявки на получение данных ДЗЗ, которые он обслуживает. Кроме того, каждый НЦ обычно имеет в своем составе комплекс обмена данными с внешними системами. Одной из основных задач самоорганизующейся системы распределенной ФГО является координация функционирования различных НЦ. Под координацией понимается процесс согласования действий агентов в ходе решения некоторой общей задачи. В рассматриваемом случае – это процесс согласования использования ресурсов различных НЦ в ходе обслуживания потока заявок, поступающего в ЕТРИС.

К основным особенностям организации многоагентного распределенного выполнения ФГО материалов ДЗЗ можно отнести:

– все НЦ участвуют в обслуживании заявок потребителей на получение поступающих в ЕТРИС данных ДЗЗ, составляя локальные расписания использования своих ресурсов;

– ресурсы для выполнения распределенной ФГО может предоставить любой НЦ сети;

– организация взаимодействия агентов (НЦ) должна предусматривать возможность гибкого изменения связей между ними в процессе выполнения распределенной ФГО, а также динамического изменения расписания использования ресурсов;

– каждый НЦ сети обладает определенной «компетенцией» и решает «свой круг» задач при выполнении распределенной ФГО.

Особенностями таких систем являются: наличие средств формирования расписаний распределенной реализации бизнес-процессов, учет динамики изменения маркетинговой ситуации и так далее. Это определило выбор концепции В2В -сетей в качестве подхода к организации совместного функционирования НЦ различной ведомственной принадлежности.

Заметим, что к настоящему времени в рамках этой концепции предложен ряд путей распределенной реализации бизнес-процессов [4, 6]. При их практическом осуществлении обычно рассматриваются многоагентные В2В-предприятия. Вместе с тем не вполне исследованными остаются вопросы организации функционирования многоагентных В2В-предприятий с учетом специфики тех или иных приложений [7].

Так, базовая модель многоагентного самоорганизующегося В2В-предприятия предложена в [8]. Но организация на ее основе распределенной ФГО в ЕТРИС не позволяет учесть ряд особенностей рассматриваемой предметной области, а именно:

1) отсутствие механизмов стимулирования НЦ различной ведомственной принадлежности в части предоставления имеющихся информационных, программных и аппаратных ресурсов для обслуживания заявок, поступивших в другие НЦ;

2) наличие в отдельных НЦ вполне определенных ограничений на предоставление некоторых из имеющихся информационных, программных (алгоритмических) и аппаратных ресурсов для обслуживания заявок, поступивших в другие НЦ;

3) наличие в ЕТРИС коалиций НЦ, существование которых обусловлено, например, их принадлежностью одному министерству (ведомству), территории и тому подобное. Указанное

обстоятельство определяет, что наиболее высокими для этих НЦ всегда будут приоритеты заявок от организаций-участниц коалиции и тому подобное.

**2. Взаимодействие НЦ из состава ЕТРИС как узлов В2В - предприятия.** Проведенный анализ возможных путей учета указанных особенностей при формировании в ЕТРИС искомого В2В-предприятия позволил констатировать нижеследующее.

Базовая модель В2В-предприятия предусматривает использование финансовых расчетов между узлами сети за предоставленные услуги или полученные материальные ресурсы. Вместе с тем в процессе совместного обслуживания заявок любой из НЦ может передавать в другие узлы В2В-предприятия некоторые из имеющихся информационных и/или программных (алгоритмических) ресурсов, предоставлять доступ к своим аппаратным ресурсам. Другими словами, в ЕТРИС возможен обмен не только финансовыми, но и другими ресурсами. Организация взаимодействия НЦ требует формирования механизмов для информационного и иных обменов, в определенном смысле эквивалентных финансовому.

С учетом сказанного схематично представим самоорганизующееся В2В-предприятие распределенной ФГО изображений местности в виде, изображенном на рисунке 1.

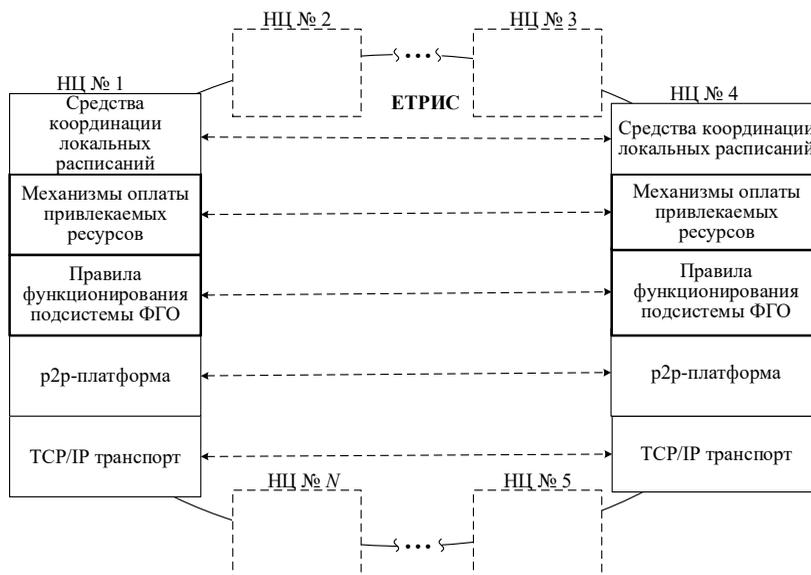


Рис. 1. Схема В2В-предприятия распределенной ФГО

Узлами В2В-предприятия являются подсистемы ФГО каждого из НЦ различной ведомственной принадлежности. Эти подсистемы формируют локальные расписания ФГО изображений при обслуживании заявок, поступающих в соответствующий НЦ. Локальное расписание корректируется при поступлении каждой новой заявки.

Количество узлов в рассматриваемом В2В-предприятии не является постоянным: в произвольные моменты узлы могут присоединяться и выходить из него. Все НЦ, присоединившиеся к предприятию и готовые к совместной обработке потока заявок на предоставление данных ДЗЗ, являются равноправными. Другими словами, будем рассматривать модель открытого В2В-предприятия, функционирующего на основе парных взаимодействий (p2p) [3, 9]. Коммуникации узлов В2В-предприятия обеспечиваются набором оверлейных сетей, составляющих среду взаимодействия НЦ в ЕТРИС (рис. 2). Эта среда формируется с использованием ресурсов НЦ и средств информационно-телекоммуникационной среды ЕТРИС.

Собственно, в узлы В2В-предприятия по территориальному, ведомственному или иному принципу поступают заявки на предоставление данных ДЗЗ. Распределенная ФГО изображений выполняется В2В-предприятием тогда, когда узел сети, в которую поступила заявка, не может ее обслужить с использованием имеющихся ресурсов.

Положим, что процессом поиска исполнителей для фотограмметрической обработки изображений местности в интересах выполнения каждой такой заявки управляет узел, в который заявка поступила. Далее будем называть его планирующим узлом. Узлы, обладающие ресурсами для обслуживания заявки, будем называть потенциальными исполнителями. Наконец, узлы, предоставляющие ресурсы для обслуживания заявок, будем называть узлами-исполнителями.

Пусть рассматриваемое В2В-предприятие включает  $N$  узлов, совокупность которых обозначим  $C = \{C_n\}_{n=1}^N$ , где  $C_n$  –  $n$ -й узел, соответствующий подсистеме ФГО  $n$ -го НЦ. Введем множество графов  $\Theta_i$  ( $\Theta_i \in \Theta$ ), которые могут быть построены при обслуживании  $i$ -й заявки. Любая дуга каждого из этих графов соответствует возможным информационным и экономическим связям между узлами в процессе обслуживания  $i$ -й заявки. Каждая дуга характеризует предоставление планирующему узлу некоторого ресурса одного из узлов предприятия [3].



Рис. 2. Схема взаимодействия узлов B2B-предприятия в процессе распределенной ФГО изображений

В процессе выполнения этих процедур выбирается граф  $\theta_i$  из  $\Theta_i$  с такой структурой, при которой значение целевой функции  $F_n^o(\theta_i)$  планирующего узла в области поиска  $\Xi$ , заданной ограничениями, является максимальным. Тогда с учетом классической постановки задачи управления ресурсами [10] задачу поиска исполнителей заявки сформулируем следующим образом:

$$F_n^o(\theta_i)_{opt} = \max_{F_n^o(\theta_i) \in \Xi} (F_n^o(\theta_i)), \theta_i \in \Theta_i, \quad (1)$$

где  $\Xi$  – область поиска потенциальных исполнителей заявки, заданная ограничениями:  $O(R_n)$  – на ресурсы, требуемые для обслуживания заявки;  $O(C)$  – на состав потенциальных исполнителей заявок;  $O(R_n \times C)$  – на привлечение (предоставление) конкретных ресурсов конкретных узлов В2В-предприятия;  $O(T)$  – на допустимые временные интервалы обслуживания заявки.

Таким образом, область поиска  $\Xi$  представляет собой совокупность таких графов  $\theta$  из  $\Theta_i$ , все центры  $C$  которых обладают ресурсами  $R_n$ , эквивалентными требуемым  $R_i$  для обслуживания заявки, свойства  $c$  всех узлов графа на предоставление/получение ресурсов не противоречивы, эти узлы могут предоставлять ресурсы, требуемые для обслуживания заявки, и эти ресурсы не заняты в слоты времени  $T_{mp}$ , необходимые для своевременного обслуживания заявки.

Тогда область, поиска  $\Xi$  примет вид:

$$\Xi = \cup \theta : \forall C \in \theta : \left( R_n \Leftrightarrow R_i, \cap c \neq \phi, \right. \\ \left. \cap (R_n \times c) \neq \phi, T(R_n) \Leftrightarrow T_{mp} \right), \quad (2)$$

где  $T(R_n)$  – слоты времени ресурсов  $R_n$  центра  $C$ .

То есть для каждой заявки планирующему узлу необходимо найти исполнителей на динамически меняющемся множестве узлов таким образом, чтобы осуществлялась оптимизация его целевой функции в условиях действующих ограничений [11, 12], выраженная в поиске исполнителей заявки, предоставляющих ресурсы, необходимые для обслуживания этой заявки, по минимальной стоимости. Ограничения  $O(R_n)$  являются технологическими, то есть определяющими наличие в узле ресурсов, которые принципиально

позволяют получить результаты ФГО, удовлетворяющие требованиям  $i$ -й заявки [13]. Ограничения  $O(C)$  и  $O(R_n \times C)$  являются организационными, то есть характеризующими соответствие некоторого узла, ресурсы которого планируется привлекать для обслуживания заявки, правилам их привлечения. Под требованиями потребителей к результатам ФГО ( $i$ -й заявки) понимаются требования к срокам предоставления этих результатов, их видам и точностным свойствам, а также другие требования.

Вопросы функционирования ТСП/ІР-транспорта, р2р-платформы и средств координации локальных расписаний узлов в В2В-предприятии рассмотрены в [7, 8], поэтому далее основное внимание уделяется учету основных особенностей ЕТРИС при взаимодействии подсистем ФГО.

В основе механизмов стимулирования ряда НЦ в предоставлении своих ресурсов центрам другой ведомственной или иной принадлежности предполагается использовать процедуры «покупки» (аренды) одной подсистемой ФГО простаивающих ресурсов других подсистем ФГО. Другие приведенные выше особенности ЕТРИС планируется учитывать посредством использования производственных правил функционирования подсистем ФГО. Блоки, регулирующие эти аспекты взаимодействия подсистем ФГО в ЕТРИС, обозначены жирной линией на рисунках 1 и 2.

Некоторые подсистемы ФГО из состава ЕТРИС, имеющие одну и ту же ведомственную принадлежность, в первую очередь будут стремиться к привлечению ресурсов «своего» ведомства для обслуживания поступающих заявок. Группы таких подсистем образуют коалиции в В2В-предприятии. Считается, что у узлов, входящих в коалицию, имеются прямые коммутационные каналы [14]. Назовем эти узлы «соседними».

В процессе обслуживания заявок у некоторого узла В2В-предприятия может сформироваться ряд исполнителей по конкретным видам ФГО, которые хорошо себя зарекомендовали при обслуживании предыдущих заявок. Очевидно, что привлечение ресурсов таких узлов предприятия с позиций рассматриваемого узла будет более предпочтительной по сравнению с остальными. Такие узлы также отнесем к «соседним».

По мере накопления каким-либо узлом опыта сотрудничества в В2В-предприятии те узлы, чьи ресурсы регулярно привлекаются для обслуживания заявок, переводятся в разряд «соседних». При поиске ресурсов, необходимых для обслуживания заявки, сначала запрос посылается «соседним» узлам. Если «соседние» узлы не могут по

каким-либо причинам предоставить эти ресурсы, то их поиск осуществляется уже в масштабе всего предприятия. Взаимодействие отдельно взятого узла с членами коалиций и «соседями» регулируется правилами функционирования этого узла.

**3. Поиск исполнителей заявки на множестве узлов В2В-предприятия.** Определение соответствия узлов В2В-предприятия области поиска  $\Xi$  осуществляется на основе обмена сообщениями между его узлами в процессе составления ими расписаний использования ресурсов [8]. В рамках этого обмена планирующий узел получает сведения о технологических и организационных ограничениях потенциальных исполнителей на участие в совместном распределенном обслуживании заявок, условиях предоставления их ресурсов и тому подобное. С другой стороны, потенциальные исполнители получают информацию о требованиях к выполнению предлагаемых заявок. Эти сообщения, ответы на них и сами ограничения формируются на основе сведений  $M_n^z$  об узле, которые в соответствии с [3] для  $n$ -го узла представим тройкой:

$$M_n^z = \langle R_n^p, \Omega_n, P_n \rangle, \quad (3)$$

где  $R_n^p$  – свойства ресурсов  $R_n$   $n$ -го узла (аппаратных, программных, информационных);  $\Omega_n$  – правила участия узла в обслуживании заявок других узлов предприятия, а также правила привлечения этих узлов для обслуживания собственных заявок;  $P_n$  – условия оплаты привлекаемых (предоставляемых) ресурсов для выполнения ФГО.

Под программными ресурсами НЦ будем понимать ресурсы, обеспечивающие реализацию в нем тех или иных алгоритмов ФГО изображений местности; под информационными – ресурсы НЦ (опорные изображения местности, данные геодезических измерений, цифровые модели рельефа местности и т.п.), используемые в процессе ФГО изображений местности; под аппаратными – ресурсы НЦ (серверы, специализированные вычислители, кластеры обработки данных и т.п.), обеспечивающие реализацию технологических цепочек ФГО.

Так, компонент  $R_n^p$  содержит описание состава имеющихся в распоряжении  $n$ -го узла ресурсов с указанием их свойств. Свойства программных ресурсов отражают: реализованные методы (алгоритмы) ФГО изображений местности, свойства потенциально достигаемых с их использованием результатов, потребные информационные ресурсы и другое. Свойства аппаратных ресурсов отражают их ориентировочную производительность при использовании тех или иных программных

ресурсов и другие сведения. Свойства информационных ресурсов содержат структурированное описание опорных изображений местности, данных геодезических измерений, цифровых моделей рельефа местности и другой информации, имеющейся в этом узле.

На основе  $M_n^z$ , а также сведений, полученных от других узлов В2В-предприятия, планирующий узел для каждой заявки должен выбрать исполнителя, то есть конкретный узел, в котором она будет обслуживаться.

Соответствие свойств потенциального исполнителя заявки технологическим ограничениям определяется по выражению:

$$\Pi^r = \begin{cases} 1, & \text{если } \rho^r(R_n^p, R_{n \text{ треб}}^p) \leq \varepsilon^r; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (4)$$

где  $\rho^r(R_n^p, R_{n \text{ треб}}^p)$  – функция сравнения свойств  $R_n^p$  ресурсов со свойствами  $R_{n \text{ треб}}^p$  ресурсов, требуемых для обслуживания заявки;  $\varepsilon^r$  – пороговое значение.

Отметим, что за основу в функции  $\rho^r(R_n^p, R_{n \text{ треб}}^p)$  взята модель свёртки, содержащая эвристические правила лингвистического типа [15]. Это позволяет использовать в (4) свойства ресурсов, которые нельзя задать количественно, но можно выразить качественно. Кроме того, указанная модель учитывает норму (математическое ожидание) каждого свойства и допустимое отклонение от этой нормы. В общем случае функция  $\rho^r$  может быть сведена к проверке истинности высказывания  $R_n^p \subseteq R_{n \text{ треб}}^p$ .

Компонент  $\Omega_n$  содержит продукционные правила, задающие следующие основные семантические ограничения на решение (1):

- по перечню потенциальных исполнителей заявок, регламентирующие выбор узлов предприятия на основе их организационной принадлежности и выполняемых ими видов ФГО;
- по выработке стратегии выбора потенциальных исполнителей заявок, определяющие разбиение этих исполнителей на страты (коалиции, «соседи» и т.п.) и приоритетность выбора исполнителей каждой страты в зависимости от свойств заявки;
- по приему заявок из других узлов предприятия, определяющие саму возможность обслуживания заявки, поступившей от узла той или иной принадлежности, а также набор операций ФГО, разрешенный для выполнения в интересах этого узла.

Продукционные правила выбраны для формирования компонента  $\Omega_n$ , исходя из того, что они обладают универсальностью, то есть с их помощью можно реализовать любые алгоритмы выбора, поскольку они способны отражать любое процедурное знание [16]. Каждое правило  $b \in B$  представляется в форме «если  $\alpha$ , то  $\beta$ ». То есть если потенциальный исполнитель заявки обладает свойством  $\alpha$ , то с графами, содержащими этого исполнителя в качестве узла, выполняется операция  $\beta$ , которая определяет возможность использования этих графов при решении (1). Набор правил в каждом узле предприятия формируется заранее. Каждое правило из этого набора является обобщением решений различных типовых задач выбора потенциальных исполнителей заявок [17, 18].

Тогда множество  $\hat{\Theta}_i \in \Theta_i$  графов, включающих только потенциальных исполнителей, которые соответствуют правилам  $B$ , можно представить как  $\hat{\Theta}_i \subseteq \Theta_i \times B$ . Поскольку правила  $B$  определяют состав потенциальных исполнителей  $i$ -й заявки с учетом требований  $\Omega^{mp}$ , предъявляемых к их свойствам, то  $\hat{\Theta}_i = (C, \Omega^{mp})$ . С другой стороны, поскольку каждый потенциальный исполнитель  $C_n \in C$  имеет свойства  $\Omega^{cs}$ , то справедливо выражение  $\hat{\Theta}_i = (\{\Omega^{cs}\}, \Omega^{mp})$ .

Множество  $\hat{\Theta}_i$  может быть получено  $m$ -шаговым усечением  $\Theta_i$  посредством последовательного применения правил  $B$ . При этом для каждого правила  $b$  величины  $\{\Omega^{cs}\}$  и  $\Omega^{mp}$  связаны соотношениями:

$$\omega^{mp} = b \left| \omega^{cs} \right|, \quad \omega^{cs} \subseteq \{\Omega^{cs}\} \text{ и } \Omega^{mp} \subseteq \omega^{mp}. \quad (5)$$

То есть если у множества графов узлы обладали свойствами  $\{\Omega^{cs}\}$ , то после применения правила  $b$  посредством усечения этого множества сформировано новое множество графов, узлы которых обладают свойствами  $\Omega^{mp}$ .

Тогда усечение  $\Theta_i$  представим как  $m$ -шаговую цепочку

$$\left( \{\Omega_{01}\} \cap \hat{l}_1, \{\Omega_1\} \right), \dots, \left( \{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j, \{\Omega_j\} \right), \dots, \left( \{\Omega_{0m}\} \cap \hat{l}_m, \{\Omega_m\} \right), \quad (6)$$

такую, что для каждого  $\Theta_j \left( \{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j, \{\Omega_j\} \right)$ ,  $(\Theta_j \in \Theta_i)$  имеет место

$$\{\Omega_j\} = b_j \left| \{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j \right|, \bigcup_{j=1}^m \{\Omega_{0j}\} \subseteq \{\Omega^{ca}\}, \Omega^{mp} \subseteq \{\Omega_m\}, \quad (7)$$

где  $\{\Omega_{0j}\}$  – совокупность свойств потенциальных исполнителей заявки, оцениваемых на  $j$ -м шаге;  $\{\Omega_j\}$  – совокупность свойств потенциальных исполнителей, полученных посредством усечения  $\Theta_i$  на основе правила  $b_j \in B$ ;  $m$  – мощность множества  $B$ ;  $\hat{l}_j$  – ограничения, накладываемые на свойства потенциальных исполнителей динамически возникающими возмущающими воздействиями (изменения свойств потока заявок, состава предприятия, приоритетов обслуживания заявок и т.п.).

Результатом выполнения цепочки (6) являются графы, для которых имеет смысл выражение:

$$\Omega^{mp} \subseteq \{\Omega_m\} = B \left| \bigcup_{j=1}^m (\{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j) \right|. \quad (8)$$

Отметим, что выражения (6) и (8) предполагают использование всех правил из  $B$  при проверке свойств потенциальных исполнителей заявки. Однако часто указанные свойства бывают зависимы. Так, одно свойство может комплексно характеризовать в какой-либо области этого исполнителя, тогда как ряд других свойств лишь детализируют это комплексное свойство. Тогда наиболее целесообразным представляется иерархический подход к использованию правил [19], в соответствии с которым сначала оцениваются свойства верхнего ранга, а затем – нижних рангов, соответствующих отдельным свойствам потенциальных исполнителей заявок. Это позволяет сократить цепочку (6) для случаев, когда какие-либо узлы графа, принадлежащего  $\Theta_i$ , не соответствуют требованиям  $\Omega^{mp}$  за счет исключения таких графов из  $\Theta_i$  на ранних этапах анализа свойств их узлов. Тогда (8) представим в виде:

$$\begin{aligned} \Omega^{mp} \subseteq \{\Omega_m\} = & B_1 \left| \bigcup_{j=1}^{m_1} (\{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j) \right| \cup B_2 \left| \bigcup_{j=m_1+1}^{m_1+m_2} (\{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j) \right| \cup \dots \\ & \dots \cup B_k \left| \bigcup_{j=m_1+m_2+\dots+m_{k-1}+1}^{m_1+m_2+\dots+m_k} (\{\Omega_{0j}\} \cap \hat{l}_j) \right|, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $k$  – количество рангов правил;  $B_1, B_2, \dots, B_k$  – множества правил, отнесенные к соответствующему рангу.

Отметим, что в правилах  $B_1$  осуществляется проверка потенциальных исполнителей на принадлежность их к «соседям» планирующего узла или к коалиции, в состав которой входит планирующий узел. Кроме того, правила  $B \in \Omega_n$  задают стратификацию потенциальных исполнителей, которая может осуществляться как по ведомственному, так и по функциональному признакам. Каждый узел имеет собственное множество правил  $B$ . Как следствие, состав страт у каждого узла предприятия будет индивидуален. В общем случае все предпочтения планирующего узла в выборе потенциальных исполнителей заявки учитываются в (9).

Таким образом, использование ограничений (4) и (9) позволяет осуществить усечение множества потенциальных исполнителей  $C$  заявки и, как следствие, количество рассматриваемых графов из  $\Theta_i$ . В процессе этого усечения определяется порядок взаимодействия НЦ различной принадлежности при обслуживании меняющегося потока заявок.

**4. Механизмы стимулирования НЦ к предоставлению простаивающих ресурсов узлам В2В-предприятия.** Выполнение действий, рассмотренных выше, позволяет сформировать область  $\Xi$  поиска потенциальных исполнителей заявки с учетом имеющихся ограничений. Далее решим задачу (1) посредством поиска исполнителей заявки, предоставляющих ресурсы, необходимые для обслуживания этой заявки, по минимальной стоимости.

Одним из условий повышения эффективности функционирования самоорганизующихся мультиагентных систем является использование механизмов управления, побуждающих агентов к максимальному использованию всех ресурсов. Поэтому достаточно широкую распространенность получили так называемые конкурсные механизмы. Их особенностью является то, что претенденты на ресурсы участвуют в соревновании по получению финансового (или иного) вознаграждения за предоставление своих ресурсов.

Идея любого конкурса заключается в следующем: претенденты упорядочиваются на основании имеющейся о них информации (как объективной, так и сообщаемой самими претендентами), затем победителем (или победителями) объявляется претендент, занявший первое место (или несколько первых мест – зависит от условий конкурса). Одной из реализаций такого конкурса являются рыночные механизмы самоорганизации.

Таким образом, наиболее целесообразным для организации распределенной ФГО в ЕТРИС является применение методов, использующих рыночные механизмы самоорганизации. Кроме того, применение методов данной группы позволяет «заинтересовать» различные НЦ в предоставлении своих ресурсов для обслуживания «сторонних» заявок посредством получения за это некоторой платы. Эта заинтересованность способствует изменению стратегии поведения агентов ряда НЦ с эгоистичной на благонамеренную. Тогда у каждого НЦ стимулы к предоставлению своих ресурсов для выполнения распределенной ФГО количественно измеримы и их можно представить в некотором пространстве параметров (например, в величине оплаты за предоставленные ресурсы).

Далее рассмотрим механизмы стимулирования НЦ к предоставлению своих простаивающих ресурсов центрам другой принадлежности. Их сутью является возможность получения денежного или иного вознаграждения подсистемой ФГО того или иного НЦ за участие в распределенном обслуживании заявки. В рамках реализации этих механизмов осуществляется выбор графа обслуживания заявки (и, как следствие, исполнителей заявки)  $\theta_i \in \hat{\Theta}_i$  посредством проведения аукциона по каждой заявке на множестве узлов предприятия – потенциальных исполнителей [8]. Таким образом, реализуется идея самоорганизации процессов распределенной ФГО в В2В-предприятии. Учитывая различную принадлежность НЦ в ЕТРИС, для выбора исполнителей заявок наиболее подходит следующий тип аукциона [20-23]:

- по форме проведения закрытый, поскольку отдельно взятый потенциальный исполнитель не знает, какую цену за использование аналогичных ресурсов запросили другие участники аукциона;

- по значению цены на ресурсы – дискриминационный, поскольку НЦ одной ведомственной принадлежности могут предоставлять свои ресурсы друг другу на более выгодных условиях, чем центру другого ведомства или организации;

- по определению цены за использование ресурсов – маржинальный (по первой цене), то есть привлекаются ресурсы того НЦ, который попросил за них наименьшую цену.

Планирующий узел один раз посылает запрос на получение цены предоставления требуемых ресурсов от других узлов предприятия и после получения ответов выполняет их анализ.

Заинтересованность потенциальных исполнителей в обслуживании предлагаемой заявки определяется на основе функции прибыли:

$$\pi_{ni} = (P_i - Cm_i) \cdot v_i - \phi_n(\tilde{v}), \quad (10)$$

где  $\pi_{ni}$  – прибыль  $n$ -го узла от выполнения работ по  $i$ -й заявке;  $C_i$  – величина оплаты выполнения работ по  $i$ -й заявке;  $Cm_i$  – себестоимость выполнения работ по  $i$ -й заявке;  $v_i$  – объем работ, который необходимо выполнить по  $i$ -й заявке;  $\varphi_n(\tilde{v})$  – величина возможного штрафа из-за невыполнения других заявок объемом  $\tilde{v}$ , от которых исполнителю требуется отказаться в пользу обслуживания  $i$ -й заявки.

Если величина  $\pi_{ni}$  превышает некоторое положительное пороговое значение, то исполнитель берется за выполнение работ по  $i$ -й заявке. Величина  $C_i$  каждым исполнителем может задаваться декларативно для каждого вида работ либо вычисляться на основе эмпирических знаний об условиях выполнения ФГО другими узлами предприятия (в том числе и стоимостных). Указанные сведения содержатся в элементах множества  $P_n$  модели (3). Элементы этого множества могут быть представлены как отдельными значениями для каждого вида обработки, так и допустимыми диапазонами этих значений. Указанные значения могут меняться в зависимости от сложившейся конъюнктуры, финансовых, ресурсных и других возможностей  $n$ -го узла. Множеством  $P_n$  определяется возможный коммерческий эффект (прибыль)  $n$ -го узла от распределенного выполнения заявок. Следует отметить, что приоритетность обслуживания заявки, кроме прочего, определяется величиной вознаграждения за ее обслуживание, которая определяется на основе значения  $\pi_{ni}$ .

В случае, если  $C_i$  в (10) исчисляется «в не денежном» выражении, то для её определения используется финансовый эквивалент вида:

$$C_i = \hat{C}_i \cdot K_{pn} \cdot K_{on}, \quad (11)$$

где  $\hat{C}_i$  – приведенная величина оплаты, выраженная в денежной форме и характеризующая стоимость «нефинансовой» оплаты использования предоставляемых ресурсов;  $K_{pn}$  – коэффициент, характеризующий предпочтения  $n$ -го узла в типе оплаты ресурсов (денежный, взаимозачет и пр.);  $K_{on}$  – коэффициент, характеризующий ограничения на использование «нефинансовой» оплаты.

Целью проведения аукциона планирующим узлом на множестве узлов В2В-предприятия является одновременно как поиск

исполнителей  $i$ -й заявки, так и минимизация функции затрат на привлечение ресурсов других узлов, то есть:

$$\zeta_i = \min_{\hat{\Theta}_i}(\{\zeta\}_i), \quad (12)$$

где  $\zeta_i$  – величина затрат планирующего узла на привлечение ресурсов исполнителей заявок;  $\{\zeta\}_i$  – значения затрат планирующего узла на привлечение ресурсов исполнителей заявок, каждому из которых поставлен в соответствие граф из  $\hat{\Theta}_i$ .

Перепишем (12) с точки зрения величины прибыли планирующего узла:

$$\pi_i = \max_{\hat{\Theta}_i}(C_i - \{\zeta\}_i - Cm_i). \quad (13)$$

Ограничением в (13) выступает условие  $\pi_i \geq 0$ . Значением  $Cm_i$  представлены собственные затраты планирующего узла на обслуживание  $i$ -й заявки. Затраты на привлечение ресурсов  $\zeta$  могут быть получены на примере функции Кобба – Дугласа [24, 25]:

$$\zeta = C_r \cdot v_r^\alpha \cdot \tau^\beta, \quad (14)$$

где  $C_r$  – коэффициент, характеризующий стоимость использования единицы привлекаемого ресурса  $r$ ;  $\alpha, \beta$  – неотрицательные константы;  $v_r$  – объем (количество) привлекаемого ресурса  $r$ ;  $\tau^\beta$  – параметр, характеризующий длительность использования ресурса.

**5. Составление скоординированного расписания обслуживания заявок.** Ограничения на величину  $\zeta$  по отдельным видам обработки содержатся в элементе  $P_n$  модели (3). Указанные ограничения с течением времени меняются в связи с изменением финансовых и других возможностей отдельно взятых узлов предприятия.

Наиболее предпочтительным для организации распределенной ФГО является такой граф из  $\hat{\Theta}_i$ , у которого  $\zeta_i$  минимально. С использованием выражений (12), (13) и с учетом (14) в планирующем узле осуществляется ранжирование графов  $\hat{\Theta}_i$ . Далее этим узлом из  $\hat{\Theta}_i$  выбирается наиболее предпочтительный (в соответствии с (12)) граф. В случае, если узлам этого графа не удастся осуществить

координацию расписаний использования ресурсов при обслуживании  $i$ -й заявки, то выбирается следующий по предпочтительности граф.

При координации указанных расписаний каждый узел должен учитывать ранее принятые на себя обязательства по обслуживанию других заявок. Каждый узел В2В-предприятия разрабатывает свое расписание с учетом занятости своих ресурсов и координирует его с расписаниями других узлов, вовлеченных в обслуживание этой же заявки [8]. Расписания составляются с учетом ограничений  $O(T)$  на допустимые временные интервалы обслуживания заявки, которые представим в виде:

$$T_i^S \geq T_i^0, \quad T_i^F = T_i^S + \Delta T_i \leq T_i^D, \quad (15)$$

где  $T_i^S$  – момент времени начала обслуживания  $i$ -й заявки;  $T_i^0$  – момент времени ее поступления;  $T_i^F$  – момент времени завершения обслуживания  $i$ -й заявки;  $\Delta T_i$  – ориентировочное время ее обслуживания;  $T_i^D$  – директивный момент времени завершения обслуживания  $T_i^D$ , к которому все работы по этой заявке должны быть выполнены.

В соответствии с [13] формируемое расписание должно обеспечивать минимум штрафа за запаздывание обслуживания заявок. При этом требование минимизации суммарного времени обслуживания заявок не является обязательным, поскольку у каждой заявки задано директивное время завершения ее обслуживания. Тогда целевую функцию составления расписаний представим в виде [26]:

$$\sum_{i=1}^I (w_i \cdot U_i) \rightarrow \min, \quad (16)$$

где  $I$  – количество заявок;  $U_i$  – показатель запаздывания обслуживания  $i$ -ой заявки ( $U_i = 1$ , если завершение обслуживания заявки планируется или происходит позднее директивного времени ее обслуживания, в противном случае  $U_i = 0$ );  $w_i$  – весовой коэффициент, характеризующий относительную важность  $i$ -й заявки.

Построение расписаний с помощью критерия (16) изучено достаточно глубоко, например [26]. С точки зрения организации распределенной ФГО практический интерес представляет определение содержательного смысла коэффициента  $w_i$ . С учетом влияния на его значение величины штрафа  $s_{wi}$  за запаздывание обслуживания заявки

и продолжительности  $T_{ui}$  этого запаздывания выражение для получения  $w_i$  представим в виде:

$$w_i = (T_i^F - T_i^D) \cdot s_{ui} \cdot T_{ui} \cdot k_{ni}, \quad (17)$$

где  $k_{ni}$  – приоритетность  $i$ -й заявки ( $k_{ni} = 1$ , если приоритетность заявки определяется только величиной штрафа).

Приоритетность для отдельных заявок в (17) при ожидании обслуживания может меняться из-за изменения режима функционирования узлов предприятия [27], что может приводить к изменению величины  $w_i$  и необходимости перестроения расписания.

В случае возникновения запаздывания обслуживания заявок узел В2В-предприятия может: отказаться от их обслуживания; обслужить с учетом штрафов (17); дополнительно привлечь для обслуживания ресурсы других узлов.

Предложенный подход к формированию расписаний выполнения распределенной ФГО космических изображений местности в ЕТРИС позволяет найти решение задачи (1), представленное в виде графа:

$$\theta_i = \arg \left( \min_{\theta_i, O(T)} (\{\zeta\}_i) \right). \quad (18)$$

Решение (18) задачи (1) является оптимальным с точки зрения информации о потенциальных исполнителях заявки, которая имела в планирующем узле на момент времени планирования обслуживания заявки в условиях действующих ограничений. С позиций всей сети НЦ данное решение является рациональным, поскольку свойства потока заявок, возможности различных узлов по предоставлению своих ресурсов и условия их предоставления динамически меняются во времени. Как следствие, часть информации о потенциальных исполнителях заявки после получения её планирующим узлом является не актуальной.

Отметим, что после определения исполнителей для каждой заявки планирующий узел не ищет более выгодные предложения ресурсов. Этим обеспечивается снижение частоты переформирования расписаний узлов В2В-предприятия, что позволяет достичь устойчивости процессов самоорганизации обслуживания потока заявок в ЕТРИС на предоставление данных ДЗЗ.

Взаимодействие узлов В2В-предприятия на примере координации их локальных расписаний проиллюстрировано на рисунке 3. Фрагмент протокола взаимодействия узлов В2В-предприятия в части координации локальных расписаний приведен на рисунке 4.

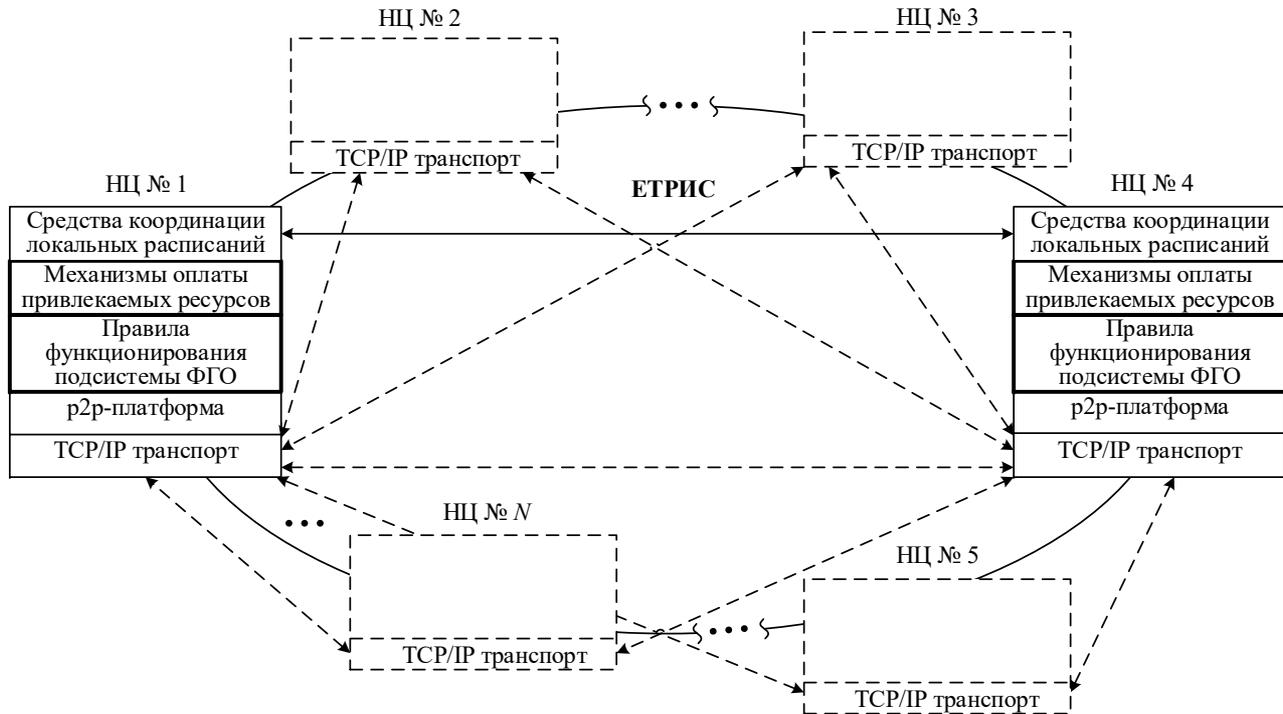


Рис. 3. Пример взаимодействия узлов В2В-предприятия при координации локальных расписаний

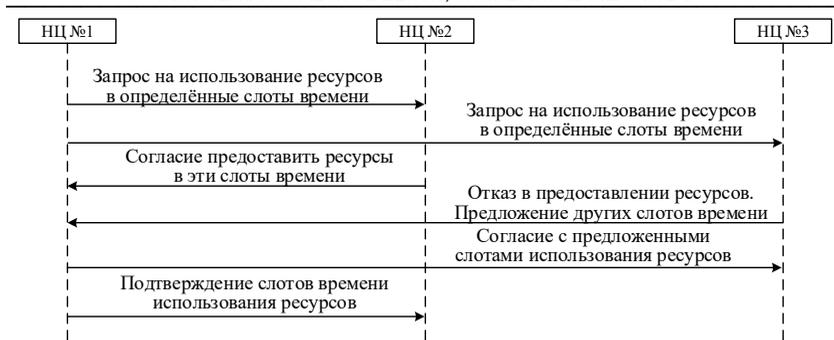


Рис. 4. Фрагмент протокола взаимодействия узлов В2В-предприятия

С точки зрения математического программирования задача составления скоординированных расписаний подсистем ФГО относится к задаче сетевого планирования. В отличие от классической постановки задачи предлагаемый подход к формированию расписаний распределенной ФГО основан на самоорганизации обслуживания заявок в сети НЦ. Координация локальных расписаний в этом случае обеспечивает поддержание в ЕТРИС организационной структуры системы распределенной ФГО.

**6. Заключение.** Предложен подход к динамическому формированию расписаний распределенной ФГО в ЕТРИС, базирующийся на использовании положений концепции В2В -сетей. Он обеспечивает рациональную организацию поиска соисполнителей для обслуживания поступающих заявок на предоставление данных ДЗЗ с учетом ограничений по составу потенциальных исполнителей, привлекаемым ресурсам, которые допустимы временным интервалам обслуживания каждой заявки.

Развитие известной модели самоорганизующегося В2В-предприятия формирует условия для более эффективной организации обслуживания потока заявок в ЕТРИС за счет привлечения незадействованных программных, информационных и аппаратных ресурсов НЦ различной ведомственной принадлежности.

### Литература

1. *Носенко Ю.И., Лошкарев П.А.* Единая территориально-распределенная информационная система дистанционного зондирования Земли – проблемы, решения, перспективы (часть 1) // Геоматика. 2010. № 3. С. 35–43.
2. *Лошкарев П. А. и др.* Развитие ЕТРИС ДЗЗ с применением облачных технологий // Геоматика. 2013. № 4. С. 22–26.
3. *Шуклин И.И., Юценко С.П.* Концептуальная модель системы распределенной фотограмметрической обработки данных дистанционного зондирования Земли из космоса // Телекоммуникации. 2018. № 12. С. 24–35.

4. Бек М.А. Маркетинг В2В: учебное пособие для вузов // М.: Издательский дом ГУ ВШЭ. 2008. 327 с.
5. *Krolkowski R., Kopyś M., Jedruch W.* Self-Organization in Multi-agent systems Based on examples of Modeling economic relationships between agents // *Frontiers in Robotics and AI*. 2016. vol. 3. pp. 41.
6. *Ichinose G., Sayama H.* Invasion of cooperation in scale-free networks: Accumulated versus average payoffs // *Artificial Life*. 2017. vol. 23(1). pp. 25–33.
7. *Городецкий В.И., Карсаев О.В., Самойлов В.В., Серебряков С.В.* Агентская платформа для повсеместных вычислений // *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2008. № 4. С. 51–69.
8. *Городецкий В.И.* Многоагентная самоорганизация в b2b сетях // *Материалы XII Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ-2014)*. 2014. С. 8954–8966.
9. *Foerster J., Assael I.A., De Freitas N., Whiteson S.* Learning to communicate with deep multi-agent reinforcement learning // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2016. pp. 2137–2145.
10. *Ризванов Д.А., Юсунова Н.И.* Интеллектуальная поддержка принятия решений при управлении ресурсами сложных систем на основе многоагентного подхода // *Онтология проектирования*. 2015. Т. 5. №3(17). С. 297–312.
11. *Adami C., Schossau J., Hintze A.* Evolutionary game theory using agent-based methods // *Physics of Life Reviews*. 2016. vol. 19. pp. 1–26.
12. *Hegselmann R. Thomas C. Sakoda S., Sakoda J.* The intellectual, technical, and social history of a model // *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*. 2017. vol. 20(3). 15 p.
13. *Шужкин И.И., Ющенко С.П.* Формализация задачи распределённой фотограмметрической обработки изображений местности в сети наземных центров приёма данных дистанционного зондирования Земли из космоса // *Телекоммуникации*. 2018. № 6. С. 36–44.
14. *Lowe R. et al.* Multi-agent actorcritic for mixed cooperative-competitive environments // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017. pp. 6379–6390.
15. *Алферов В.И. и др.* Модели и механизмы управления в самоорганизующихся системах: Монография // *Научная книга*. 2008. 300 с.
16. *Павлов С.Н.* Системы искусственного интеллекта // *Эль Контент*. 2011. Т. 1. 176 с.
17. *Jaques N. et al.* Social influence as intrinsic motivation for multi-agent deep reinforcement learning // *International Conference on Machine Learning*. 2019. pp. 3040–3049.
18. *Atmanspacher H.* On Macrostates in Complex Multi-Scale Systems // *Entropy*. 2016. vol. 18. no. 12. 426 p.
19. *Воронин А.Н.* Метод многокритериальной оценки и оптимизации иерархических систем // *Кибернетика и системный анализ*. 2007. № 3. С. 84–92.
20. *Аюев Б.И., Ерохин П.М., Паниковская Т.Ю.* Применение механизма аукциона для моделирования рынка электроэнергии // *Известия Томского политехнического университета*. 2005. Т. 308. № 5. С. 176–178.
21. *Van Der Laan G., Yang Z.* An Ascending Multi-Item Auction with Financially Constrained Bidders // *Journal of Mechanism and Institution Design*. 2016. № 1. pp. 107–147.
22. *Yuan Q. et al.* Descending auction model using marl considering the consumer market // *EPiC Series in Computing*. 2019. vol. 63. pp. 150–159.
23. *Einav L., Farronato C., Levin J., Sundaresan N.* Auctions versus Posted Prices in Online Markets // *Journal of Political Economy*. 2018. vol. 126. no. 1. pp. 178–215.
24. *Ломкова Е.Н., Энов А.А.* Экономико-математические модели управления производством (теоретические аспекты) // *РПК Политехник*. 2005. 67 с.

25. *Stigum B.P.* Econometrics in a formal science of economics // MIT Press. 1990. pp. 392.
26. *Лазарев А.А., Гафаров Е.Р.* Теория расписаний. Задачи и алгоритмы. Учеб. Пособие // М.: Изд-во МГУ. 2011. 222 с.
27. *Зеленцов В.А., Потрясаев С.А.* Архитектура и примеры реализации информационной платформы для создания и предоставления тематических сервисов с использованием данных дистанционного зондирования Земли // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 6(55). С. 86–113.

**Карсаев Олег Владиславович** – канд. техн. наук, старший научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургского института информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: искусственный интеллект, логистика, многоагентные системы, планирование. Число научных публикаций – 106. [karsaev@ips-logistic.com](mailto:karsaev@ips-logistic.com); 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7-812-597-37-14.

**Шуклин Игорь Игоревич** – канд. техн. наук, ведущий научный сотрудник, научно-исследовательский испытательный центр (г. Курск), Федеральное государственное унитарное предприятия «18 Центральный научно-исследовательский институт» Министерства обороны Российской Федерации. Область научных интересов: системы фотограмметрической обработки изображений, распределённые вычисления, многоагентные системы. Число научных публикаций – 63. [kraft148@yandex.ru](mailto:kraft148@yandex.ru); ул. Блинова, 23, 305004, Курск, Россия; р.т.: +7(4712) 58-80-90.

**Ющенко Сергей Петрович** – д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник, научно-исследовательский испытательный центра (г. Курск), Федеральное государственное унитарное предприятия «18 Центральный научно-исследовательский институт» Министерства обороны Российской Федерации. Область научных интересов: обработка и анализ изображений, системы информационной поддержки управленческих решений, многоагентные системы. Число научных публикаций – 200. [serg.u132@yandex.ru](mailto:serg.u132@yandex.ru); ул. Блинова, 23, 305004, Курск, Россия; р.т.: +7(4712) 58-80-90.

O. KARSAEV., I. SHUKLIN, S. YUSHCHENKO  
**SELF-ORGANIZING B2B ENTERPRISE OF DISTRIBUTED  
PHOTOGRAMMETRIC PROCESSING OF TERRAIN IMAGES IN  
ETRIS**

*Karsaev O., Shuklin I., Yushchenko S. Self-Organizing B2B Enterprise of Distributed Photogrammetric Processing of Terrain Images in ETRIS.*

**Abstract.** An approach to the dynamic formation (adjustment) of schedules for distributed photogrammetric image processing in a network of ground centers included in the United geographically distributed information system for receiving and processing Earth remote sensing data from space is considered. Having the fullest satisfaction of requirements of consumers to the satellite images of necessary areas, the approach provides the formation of self-organizing B2B enterprises in the specified network providing information, software and hardware resources of the ground-based facilities of various departmental and other accessories for photogrammetric processing of any received images of the area from the the United geographically distributed information system. It is shown, that a search in B2B enterprise nodes and borrowing the required resources will allow ground centers to flexibly scale physical and virtual means of photogrammetric processing of Earth remote sensing data, quickly form their local structural and functional organizations depending on the current properties of the consumer requests flow for receiving Earth remote sensing data in the United geographically distributed information system, characteristics of the flow of terrain survey materials from orbital monitoring tools, and also take into account the visual and measuring properties of images of the area subject to photogrammetric processing. A method for truncating the set of potential performers of the application in accordance with the existing semantic and other restrictions on the composition of the desired set of performers is proposed. Also mechanisms to encourage ground centers to provide idle resources to B2B enterprise nodes are proposed. They are based on the possibility of receiving monetary or other remuneration from a ground center for participating in distributed application servicing. The development of a well-known model of a self-organizing B2B enterprise creates conditions for a more efficient organization of servicing the flow of applications in the United geographically distributed information system by attracting unused software, information and hardware resources of ground centers of various departmental affiliations.

**Keywords:** Earth Remote Sensing Data, Photogrammetric Processing, B2B-Enterprise.

**Karsaev Oleg** – Ph.D., Senior Researcher, Laboratory of Information Technologies in System Analysis and Modeling, St. Petersburg Institute for informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: artificial intelligent, logistics, agent based systems, planning and scheduling. The number of publications – 106. [karsaev@ips-logic.com](mailto:karsaev@ips-logic.com); 39, 14th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7-812-597-37-14.

**Shuklin Igor** – Ph.D., Leding Researcher, Research Test Center (Kursk), Federal State Unitary Enterprise "18 Central Research Institute" of the Ministry of Defense of the Russian Federation. Research interests: distributed data processing systems, multi-agent systems. The number of publications – 63. [kraft148@yandex.ru](mailto:kraft148@yandex.ru); 23, Blinov str., 305004, Kursk, Russia; office phone: +7(4712) 58-80-90.

**Yushchenko Sergey** – Ph.D., Dr.Sci., Professor, Chief Researcher, Research Test Center (Kursk), Federal State Unitary Enterprise "18 Central Research Institute" of the Ministry of Defense of the Russian Federation. Research interests: stributed data processing systems, multi-agent systems. The number of publications – 200. [serg.u132@yandex.ru](mailto:serg.u132@yandex.ru); 23, Blinova str., 305004, Kursk, Russia; office phone: +7(4712) 58-80-90.

**References**

1. Nosenko Ju.I., Loshkarev P.A. [Unified geographically distributed information system for remote sensing of the Earth – problems, solutions, and prospects]. *Geomatika – Geomatic*. 2010. vol. 3. pp. 35–42. (In Russ.).
2. Loshkarev P.A. et al. [Development of ETRIS remote sensing using cloud technologies]. *Geomatika – Geomatic*. 2013. vol. 4. pp. 22–26. (In Russ.).
3. Shuklin I.I., Jushhenko S.P. [Conceptual model of a distributed photogrammetric data processing system for remote sensing of the Earth from space]. *Telekommunikacii – Telecommunications*. 2018. vol. 12. pp. 24–35. (In Russ.).
4. Bek M.A. *Marketing V2V: uchebnoe posobie dlya vuzov* [B2B marketing: studies. Handbook for universities]. M.: Izdatelskiy dom GU VSHE. 2008. 327 p. (In Russ.).
5. Krolikowski R., Kopyts M., Jedruch W. Self-Organization in Multi-agent systems Based on examples of Modeling economic relationships between agents. *Frontiers in Robotics and AI*. 2016. vol. 3. pp. 41.
6. Ichinose G., Sayama H. Invasion of cooperation in scale-free networks: Accumulated versus average payoffs. *Artificial Life*. 2017. vol. 23(1). pp. 25–33.
7. Gorodeckij V.I., Karsaev O.V., Samojlov V.V., Serebrjakov S.V. [Agent platform for ubiquitous computing]. *Informacionnye tehnologii i vychislitel'nye sistemy – Information technologies and computer systems*. 2008. vol. 4. pp. 51–69. (In Russ.).
8. Gorodeckij V.I. [Multi-agent self-organization in b2b networks]. *Materialy XII Vserossijskogo soveshchaniya po problemam upravleniya (VSPU-2014)* [Materials of the XII all-Russian meeting on management problems (VSPU-2014)]. 2014. pp. 8954–8966. (In Russ.).
9. Foerster J., Assael I.A., De Freitas N., Whiteson S. Learning to communicate with deep multi-agent reinforcement learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2016. pp. 2137–2145.
10. Rizvanov D.A., Jusupova N.I. [Intelligent decision support for managing resources of complex systems based on a multi-agent approach]. *Ontologija proektirovanija – Design ontology*. 2015. Issue 5. vol. 3(17). pp. 297–312. (In Russ.).
11. Adami C., Schossau J., Hintze A. Evolutionary game theory using agent-based methods. *Physics of Life Reviews*. 2016. vol. 19. pp. 1–26.
12. Hegselmann R. Thomas C. Sakoda S., Sakoda J. The intellectual, technical, and social history of a model. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*. 2017. vol. 20(3). 15 p.
13. Shuklin I.I., Jushhenko S.P. [Formalization of the problem of distributed photogrammetric processing of terrain images in the network of ground centers for receiving earth remote sensing data from space]. *Telekommunikacii – Telecommunications*. 2018. vol. 6. pp. 36–44. (In Russ.).
14. Lowe R. et al. Multi-agent actor-critic for mixed cooperative-competitive environments. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2017. pp. 6379–6390.
15. Alferov V.I. et al. *Modeli i mehanizmy upravleniya v samoorganizuyushchisya sistemah: Monografiya* [Models and control mechanisms in self-organizing systems: Monograph]. Nauchnaja kniga. 2008. 300 p. (In Russ.).
16. Pavlov S.N. *Sistemy iskusstvennogo intellekta* [Artificial intelligence systems: studies. stipend]. El' Kontent. 2011. Issue 1. 176 p. (In Russ.).
17. Jaques N. et al. Social influence as intrinsic motivation for multi-agent deep reinforcement learning. International Conference on Machine Learning. 2019. pp. 3040–3049.
18. Atmanspacher H. On Macrostates in Complex Multi-Scale Systems. *Entropy*. 2016. vol. 18. no. 12. 426 p.
19. Voronin A.N. [Method of multi-criteria evaluation and optimization of hierarchical systems]. *Kibernetika i sistemnyj analiz – Cybernetics and system analysis*. 2007. vol. 3. pp. 84–92. (In Russ.).

20. Ayuev B.I., Erohin P.M., Panikovskaja T.Ju. [Application of the auction mechanism for modeling the electricity market]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta – Proceedings of Tomsk Polytechnic University*. 2005. Issue 308. vol. 5. pp. 176–178. (In Russ.).
21. Van Der Laan G., Yang Z. An Ascending Multi-Item Auction with Financially Constrained Bidders. *Journal of Mechanism and Institution Design*. 2016. № 1. pp. 107–147.
22. Yuan Q. et al. Descending auction model using mari considering the consumer market. *EPiC Series in Computing*. 2019. vol. 63. pp. 150–159.
23. Einav L., Farronato C., Levin J., Sundaresan N. Auctions versus Posted Prices in Online Markets. *Journal of Political Economy*. 2018. vol. 126. no. 1. pp. 178–215.
24. Lomkova E.N., Epov A.A. *Ekonomiko-matematicheskie modeli upravleniya proizvodstvom (teoreticheskie aspekty)* [Economic and mathematical models of production management (theoretical aspects)]. RPK Politehnik. 2005. 67 p.
25. Stigum B.P. *Econometrics in a formal science of economics*. MIT Press. 1990. pp. 392.
26. Lazarev A.A., Gafarov E.R. *Teorija raspisanij. Zadachi i algoritmy: Ucheb. Posobie* [The scheduling theory. Problems and algorithms: Handbook]. M.: Izd-vo MGU. 2011. 222 p. (In Russ.).
27. Zelencov V.A., Potrjasaev S.A. [Architecture and implementation examples of an information platform for creating and providing thematic services using earth remote sensing data]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 6(55). pp. 86–113. (In Russ.).

В.Р. СОБОЛЬ, Р.О. ТОРИШНЫЙ  
**ПРИМЕНЕНИЕ ГЛАДКОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ  
ВЕРОЯТНОСТИ И КВАНТИЛИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ  
СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ**

*Соболь В.Р., Торишный Р.О.* Применение гладкой аппроксимации функций вероятности и квантили при решении задач стохастического программирования.

**Аннотация.** Исследуется один из возможных вариантов гладкой аппроксимации вероятностных критериальных функций в задачах стохастического программирования, позволяющий получить оценки градиента функции вероятности и функции квантили в форме объемного интеграла. Исследование проведено в приложении к задачам максимизации функции вероятности и минимизации функции квантили для функционала потерь, зависящего от вектора управления и одномерной абсолютно непрерывной случайной величины.

Основная идея аппроксимации – замена разрывной функции Хевисайда в интегральном представлении функции вероятности на гладкую функцию, обладающую такими свойствами, как непрерывность, гладкость, а также имеющую легко вычисляемые производные. Примером такой функции является функция распределения случайной величины, распределенной по логистическому закону с нулевым средним и конечной дисперсией – сигмоида. Величина, обратно пропорциональная корню из дисперсии, при этом является параметром, который обеспечивает близость исходной функции и ее аппроксимации. Такая замена позволяет получить гладкое приближение функции вероятности, для которого легко могут быть найдены производные по вектору управления и иным параметрам задачи.

Основным результатом статьи являются полученные выражения для аппроксимации производных функции вероятности по вектору управления и по допустимому уровню потерь, а также выражения для аппроксимации градиента функции квантили в форме объемных интегралов. Доказана сходимость аппроксимации функции вероятности, полученной при замене функции Хевисайда на сигмоидальную функцию, к исходной функции вероятности, и получена оценка погрешности такой аппроксимации. Также доказана сходимость аппроксимации производных функции вероятности к истинным производным при выполнении ряда условий на функционал потерь.

Рассмотрены примеры, демонстрирующие возможность применения предложенных оценок к решению задач стохастического программирования с критериальными функциями в форме функции вероятности и функции квантили, в том числе в случае многомерной случайной величины.

**Ключевые слова:** стохастическое программирование, вероятностный критерий, квантильный критерий, аппроксимация, численные методы, сигмоидальная функция

**1. Введение.** В прикладных задачах управления и оптимизации нередко возникают проблемы, требующие принятия решений в условиях неопределенности. Существуют различные подходы ее учета, основывающиеся на специфике исследования. В самом простом случае неопределенность учитывают как реализацию какого-то исхода, рассматривая только результаты эксперимента или наблюдения без применения каких-либо теоретических моделей; это видится единственно верным вариантом, если

природа неопределенности не может быть установлена. Таким случаем учета неопределенности является, например, наблюдение некоторых случайных искажений в генетических данных, описанных в [1]. Во многих других задачах используются различные теоретические аппараты учета специфических неопределенностей, причем достаточно широко распространен принцип учета неопределенности с использованием аппаратов нечетких множеств или его производных. Например, в [2] автором предлагается подход к решению задачи оптимизации ресурсов в мелкосерийном производственном цикле с помощью нечеткой логики, описывающей неопределенности стохастической природы. В [3] апробируется модель поддержки принятия решений о выборе портфеля проектов в рамках стратегического развития университета, где степени желанности изменений действующих лиц задаются нечеткими правилами вывода, и ограничения модели также являются нечеткими. В [4] представлена идея перехода к нечетким критериям в конкретной задаче анализа и оптимизации параметров приемников ГНСС, а в [5] делается упор на альтернативные меры исчисления истинности и на конструкции более сложные, нежели классическая вероятность.

Одним из основных подходов к учету неопределенности является подход на основе аппарата теории вероятностей. Это порождает задачи стохастического программирования, представляющие большую сложность в сравнении с обычными оптимизационными задачами. Наиболее сложные и интересные из них — задачи с вероятностными критериями оптимизации, например, задачи, связанные с обеспечением приемлемого уровня надежности или минимального уровня потерь при фиксированном уровне надежности. В монографии [6] приведено большое количество прикладных задач такого типа и описаны способы их решения.

Необходимо отметить, что в последнее время ведутся исследования задач стохастического программирования, критерии которых сложнее обычной функции вероятности или квантили, и при некоторых условиях такие задачи могут быть решены. Например, в задачах, в которых критериальная функция представляет собой сложный нелинейный функционал риска, решение может быть найдено с помощью статистических оценок [7]. Также для некоторых задач может быть применима теория о представлении функции риска как комбинации ее предельной и условной форм [8], и в таких случаях решение задачи немного упрощается. В настоящей работе будут рассматриваться классические задачи стохастической оптимизации, критериальной функцией в которых выступает либо функция вероятности, либо функция квантили.

В настоящее время разработано большое количество алгоритмов решения конкретных задач стохастического программирования. Большая часть исследований направлена на сведение таких задач к более простым. Например, в работе [9] разработаны алгоритмы сведения задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования; к такому же типу задач возможно свести и двухшаговую задачу стохастического программирования при определенных условиях [10]. Также были разработаны алгоритмы решения двухэтапной линейной задачи стохастического программирования путем выборочных аппроксимаций [11] и более общие алгоритмы решения, основанные на аппроксимациях, например в задаче хеджирования [12].

В перечисленных выше и других работах рассматриваются различные постановки прикладных задач стохастической оптимизации в разнообразных областях, например задача оптимального инвестирования, задача оптимального управления спутниками Земли, задача оптимизации площади взлетно-посадочной полосы, задача об оптимальном проектировании систем водоснабжения и другие, что подчеркивает актуальность данной тематики.

Одним из важных вопросов в области решения задач стохастического программирования является нахождение значения градиента критериальной вероятностной функции. Решение такого вопроса дает возможность использовать для любой задачи с вероятностным критерием классические методы оптимизации, хоть и с некоторыми оговорками. Впервые выражение градиента функции вероятности в форме поверхностного интеграла в смысле Римана было получено в [13]. Далее, в [14] приводится выражение градиента функции вероятности в форме интеграла Лебега по поверхности. Эта поверхность является границей области реализаций случайного вектора и потому ее нахождение в явном виде представляет некоторую трудность. В [15] было показано, что в некоторых случаях поверхностный интеграл в формуле для градиента функции вероятности может быть преобразован в поверхностный интеграл для векторного поля. Применяя формулу Гаусса-Остроградского, можно свести этот интеграл к объемному, но только для некоторых частных случаев. В задачах, где такое сведение невозможно, автором [16] было доказано, что градиент функции вероятности возможно представить в виде суммы интегралов по поверхности и по объему. В любом случае полученные представления градиента функции вероятности представляют собой поверхностные интегралы, вычисление которых связано с различного вида сложностями, а представления или хотя бы оценки градиента функции вероятности в форме объемных интегралов до настоящего времени получены не были.

Более поздние работы, сопряженные с этой темой, предлагают некоторую аппроксимацию градиента функции вероятности или оценку его значения. Например, в [17] для задачи линейного программирования с вероятностным ограничением получены нижние оценки нормы градиента функции вероятности и проведен анализ зависимости оптимального значения критерия относительно распределения вектора случайных параметров, а в [18] получены верхние оценки для субдифференциалов Кларка и Мордуховича. Стоит отметить, что обе эти работы посвящены случаю гауссовского распределения параметров. Несколько другой подход, а именно использование слабых производных и сэмплирования, позволили оценить производную функции вероятности [19]. В [20] получены аппроксимации квантили и производных плотности распределения при помощи дополнения рядов Тейлора для нормального, экспоненциального и хи-квадрат распределений. Механизмы приближенного решения дифференциальных уравнений и нахождения значений градиента для распределения Вейбулла и их применение в сфере оценки радиационных данных было приведено в [21]. Наконец, в случае нормального распределения параметров с малой дисперсией авторами [22] предложены асимптотические формулы для первой и второй производных функции вероятности. Значения производных при этом оцениваются при помощи методов Монте-Карло. Результаты, полученные в данном блоке работ, решают задачу аппроксимации градиента вероятностной функции, но ставят дополнительные ограничения на распределение случайной величины либо привязывают качество аппроксимации к другим случайным механизмам.

Также необходимо отметить, что в последнее время интерес представляет некоторое обобщение классической функции вероятности, а именно буферная функция вероятности (англ. *buffered probability of exceedance*, *bPOE*). Эта конструкция, описанная вместе со своими свойствами в [23], по сути, представляет собой модификацию функции вероятности с некоторым так называемым «буфером безопасности» как по уровню предполагаемых потерь, так и по значению вероятности. Для вышеуказанного обобщения в [24] были найдены формулы для дифференциалов и субдифференциалов, но эти формулы неприменимы к классической функции вероятности.

В настоящей статье исследуется другой подход к аппроксимации вероятностных критериальных функций и их производных в случае случайной величины с абсолютно непрерывным распределением и непрерывной функции потерь. Основной идеей является получение аппроксимации критериальной функции вместе с ее производными через аппроксимацию

индикаторной функции. Рассматриваемая аппроксимация универсальна для критериальной функции любого вида и в общем случае не представляет вычислительной сложности, так как производные критериальных функций представляются в виде объемных интегралов. Таким образом, представленный алгоритм аппроксимации позволит унифицировать процесс решения задачи, а также использовать широко известные методы оптимизации первого порядка.

## 2. Постановка задачи и проблема вычисления градиента.

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — полное вероятностное пространство, где  $\Omega \subset \mathbb{R}$  — некоторое замкнутое множество. Пусть  $X$  — абсолютно непрерывная случайная величина, заданная на этом пространстве и имеющая плотность распределения  $f(x)$ . Пусть также задана функция потерь  $\Phi(u, X) : U \times \Omega \rightarrow (-\infty; +\infty)$ , где  $U \subset \mathbb{R}^m$  — непустое множество допустимых стратегий  $u$ . Также пусть задан произвольный максимально допустимый уровень потерь  $\varphi$ .

Критериальной функцией является функция вероятности

$$P_\varphi(u) \triangleq \mathbb{P} \{x : \Phi(u, x) \leq \varphi\},$$

а сама задача представляет собой максимизацию этой функции:

$$P_\varphi(u) \rightarrow \max_u. \quad (1)$$

Существует также альтернативная постановка, когда в качестве критериальной выбрана функция квантили

$$\varphi_\alpha(u) \triangleq \min \{\varphi : P_\varphi(u) \geq \alpha\},$$

а задача представляет собой минимизацию функции квантили для любого фиксированного уровня  $\alpha \in (0; 1)$ :

$$\varphi_\alpha(u) \rightarrow \min_u. \quad (2)$$

Такие постановки описывают одношаговую модель принятия решения в условиях неопределенности, моделируемой случайной величиной  $X$ . При этом само принятие решения, то есть выбор стратегии управления  $u$ , производится априори до реализации случайной величины, опираясь исключительно на знание закона распределения случайного вектора. Стратегия при этом представляется в виде вектора, компоненты которого являются вещественными числами. Стратегия выбирается исходя

из условия минимума (или максимума, в зависимости от формулировки) критерия оптимизации.

Также отметим, что в любой из постановок задач могут быть дополнительные ограничения, но так как к вероятностным ограничениям также применима аппроксимация, описанная далее, а нестохастические ограничения сужают лишь рассматриваемые области управления, и в обоих случаях структура целевой функции от ограничений не зависит, на данном шаге рассмотрения задачи ограничения мы опускаем.

Перейдем к сути проблемы вычисления градиента функции вероятности. Согласно [25], функция вероятности может быть представлена в виде:

$$P_{\varphi}(u) = \mathbb{P} \{X : \Phi(u, X) \leq \varphi\} = \mathbb{M} [I_{\varphi}(u, X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\varphi}(u, X) f(x) dx,$$

где

$$I_{\varphi}(u, X) = \begin{cases} 1, & \Phi(u, X) \leq \varphi, \\ 0, & \Phi(u, X) > \varphi. \end{cases}$$

Известно, что аналитическим представлением индикаторной функции является функция Хевисайда:

$$\Theta(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Таким образом, функция вероятности может быть записана как:

$$P_{\varphi}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx. \quad (3)$$

Правая часть выражения (3) при принятых условиях может быть дифференцируема. В результате дифференцирования подынтегрального выражения появится дельта-функция Дирака. Эта обобщенная функция ввиду своей природы не может быть использована в дальнейших аналитических преобразованиях, поэтому логичным видится замена функции Хевисайда в исходном определении функции вероятности на аппроксимирующую функцию, обладающую некоторыми свойствами:

– близость (сходимость) аппроксимирующей функции к функции Хевисайда, что значит стремление к нулю ошибки аппроксимации;

- непрерывность аппроксимирующей функции вместе с ее производными;
- близость производной аппроксимирующей функции к производной функции Хевисайда;
- близость аппроксимации функции вероятности к оригинальной функции, что значит стремление к нулю ошибки аппроксимации функции вероятности при стремлении к нулю ошибки аппроксимации функции Хевисайда;
- близость аппроксимации производной функции вероятности к производной оригинальной функции;
- выполнение этих же свойств для аппроксимации квантильной функции как критериальной функции.

**3. Сигмоидальная функция и функция вероятности. Погрешность аппроксимации.** В основе аппроксимации лежит замена функции Хевисайда в уравнении (3) на сигмоидальную функцию:

$$\Theta(\varphi - \Phi(u, x)) \approx S_{\theta}(\varphi - \Phi(u, x)) = \frac{1}{1 + e^{-\theta(\varphi - \Phi(u, x))}}, \quad (4)$$

где  $\theta$  — большое положительное число.

График сигмоидальной функции с параметром  $\theta = 5$  представлен на рисунке 1. Сигмоидальная функция обладает свойствами непрерывности и гладкости, а параметр  $\theta$  влияет на степень кривизны функции в окрестности нуля: чем выше параметр, тем меньше отрезок перехода от нуля к единице и тем круче график функции.

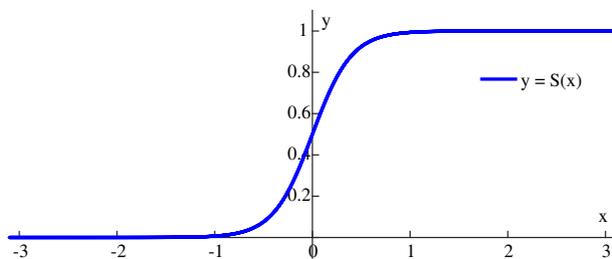


Рис. 1. Сигмоидальная функция

Рассмотрим функции Хевисайда и сигмоиды при различных значениях  $x$  случайной величины  $X$ .

1) Пусть  $x^* \in \Omega^+$ ,  $\Omega^+ = \{x \mid \Phi(u, x) > \varphi\}$ . Тогда

$$\Theta(\varphi - \Phi(u, x^*)) = 1,$$

$$S_{\theta}(\varphi - \Phi(u, x^*)) = \frac{1}{1 + e^{-\theta(\varphi - \Phi(u, x^*))}} \rightarrow 1 \text{ при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Отсюда следует поточечная сходимость функции сигмоиды к функции Хевисайда при  $\theta \rightarrow +\infty$ , что влечет сходимость почти наверное на данном промежутке.

2) Пусть  $x^* \in \Omega^-$ ,  $\Omega^- = \{x \mid \Phi(u, x) < \varphi\}$ . Тогда по аналогии

$$\Theta(\varphi - \Phi(u, x^*)) = 0,$$

$$S_{\theta}(\varphi - \Phi(u, x^*)) = \frac{1}{1 + e^{-\theta(\varphi - \Phi(u, x^*))}} \rightarrow 0 \text{ при } \theta \rightarrow +\infty,$$

что влечет сходимость почти наверное на данном промежутке.

3) Пусть  $x^0 \in \Omega^0$ ,  $\Omega^0 = \{x \mid \Phi(u, x) = \varphi\}$ . Тогда

$$\Theta(\varphi - \Phi(u, x^0)) = 1, \quad S_{\theta}(\varphi - \Phi(u, x^0)) = \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Наложим дополнительное ограничение на функцию  $\Phi(u, x)$ : пусть теперь  $\Phi(u, x)$  является строго кусочно-монотонной функцией по  $x$  (в дополнение к ее непрерывности). Это означает, что не существует непустого интервала, на котором функция  $\Phi(u, x)$  постоянна, то есть заданный уровень  $\varphi$  пересекается по множеству отделенных друг от друга точек. Тогда множество  $\Omega^0$  — дискретное множество, состоящее из не более чем счетного числа точек. Учитывая непрерывность исходной пространственной меры  $\mathbb{P}$  и пространства  $\Omega$ , получим, что при условии на строгую кусочную монотонность  $\Phi(u, x)$  по  $x$  верно:

$$\mathbb{P}\{\Omega^0\} = 0.$$

Это означает, что при дополнительном условии равенства (5) выполняются на множестве  $\Omega^0$  меры нуль, то есть имеет место сходимость почти наверное на всей области  $\Omega$ .

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 1.* Пусть  $X$  — абсолютно непрерывная случайная величина на полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Пусть задана непрерывная строго кусочно-монотонная функция потерь  $\Phi(u, X) : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $U \subset \mathbb{R}^m$  — непустое множество допустимых стратегий  $u$ . Также пусть задан уровень потерь  $\varphi$ . Тогда верно

$$S_{\theta}(\varphi - \Phi(u, X)) \xrightarrow{\text{п.н.}} \Theta(\varphi - \Phi(u, X)) \text{ при } \theta \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

где  $S_\theta(\cdot)$  — сигмоидальная функция параметра  $\theta$ ,  $\Theta(\cdot)$  — функция Хевисайда.

Теперь рассмотрим функцию вероятности

$$P_\varphi(u) = \mathbb{M} [\Theta(\varphi - \Phi(u, x))] = \int_{-\infty}^{+\infty} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx \quad (7)$$

и ее аппроксимацию

$$P_\varphi^\theta(u) = \mathbb{M} [S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx. \quad (8)$$

Для краткости дальнейших выкладок сделаем замену обозначений, пусть

$$y = \varphi - \Phi(u, x). \quad (9)$$

Эта замена не подразумевает перехода к новой переменной, а служит только для уменьшения записей. Все отличные от данного аргументы функций Хевисайда и сигмоиды будут указываться непосредственно.

Принимая во внимание то, что  $S_\theta(y) \leq 1$  при любых значения  $\theta$  и аргументов, а также учитывая (6), по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим

$$\mathbb{M} [|S_\theta(y) - \Theta(y)|] \rightarrow 0 \text{ при } \theta \rightarrow +\infty,$$

что эквивалентно

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Theta(y) - S_\theta(y)| f(x) dx \rightarrow 0 \text{ при } \theta \rightarrow +\infty. \quad (10)$$

Так как модуль разности интегралов не превосходит интеграла модуля разности, то

$$|P_\varphi(u) - P_\varphi^\theta(u)| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |\Theta(y) - S_\theta(y)| f(x) dx. \quad (11)$$

Далее, из (10) и (11) получаем, что

$$|P_\varphi(u) - P_\varphi^\theta(u)| \rightarrow 0 \text{ при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Таким образом, доказано следующее утверждение.

*Утверждение 2.* Пусть  $X$  — абсолютно непрерывная случайная величина на полном вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Пусть задана непрерывная строго кусочно-монотонная функция потерь  $\Phi(u, X) : U \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $U \subset \mathbb{R}^m$  — непустое множество допустимых стратегий  $u$  и задан уровень потерь  $\varphi$ . Пусть также выражениями (7) и (8) заданы функции  $P_\varphi^\theta(u)$  и  $P_\varphi(u)$ . Тогда верно

$$P_\varphi^\theta(u) \rightarrow P_\varphi(u) \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Теперь получим выражение для верхней оценки погрешности аппроксимации. Для этого рассмотрим подробнее подынтегральную функцию (11). Множитель  $f(x)$  — непрерывная положительная ограниченная функция, не влияющая на знаки неравенств или значения другого сомножителя. Поэтому основная содержательная часть состава погрешности зависит от модуля разности функций Хевисайда и сигмоиды. Таким образом, далее будет рассматриваться функция  $g(y) = |\Theta(y) - S_\theta(y)|$ .

Необходимо сразу уточнить, что значение функции Хевисайда в нуле доопределяется единицей, то есть  $\Theta(0) = 1$ . Это сделано специально для непрерывности и симметричности функции  $g(y)$ .

Разобьем пространство  $\mathbb{R}$  аргумента  $x$  на четыре непересекающихся области:

$$\chi_1^+ = \{x : 0 \leq \varphi - \Phi(u, x) < 1\}, \quad (12)$$

$$\chi_1^- = \{x : -1 < \varphi - \Phi(u, x) < 0\}, \quad (13)$$

$$\chi_2^+ = \{x : \varphi - \Phi(u, x) \geq 1\}, \quad (14)$$

$$\chi_2^- = \{x : \varphi - \Phi(u, x) \leq -1\}. \quad (15)$$

Учитывая замену (9), эти области отвечают разбиению пространства  $\mathbb{R}$  аргумента  $y$  функции  $g(y)$ , то есть например, область  $\chi_1^+$  эквивалентна области

$$\chi_1^+ = \{y : 0 \leq y < 1\}.$$

Аналогичные размышления относительно разбиения справедливы и для областей из (13), (14), (15).

Отметим, что ввиду непрерывности  $\Phi(u, x)$  данные области представляют собой объединение непересекающихся интервалов и не более

чем счетного числа точек. С учетом этого факта введем обозначение:

$$\int_{\chi} (\cdot) dx = \sum_{j=1}^n \int_{x_j}^{x_{j+1}} (\cdot) dx, \quad (16)$$

где

$$\chi = \bigcup_{j=1}^n (x_j, x_{j+1}),$$

$$\forall j = \overline{1, n}, \forall k = \overline{1, n}, j \neq k : (x_j, x_{j+1}) \cap (x_k, x_{k+1}) = \emptyset.$$

Это означает, что в обозначении (16) «интеграл по области»  $\chi$  представляет собой сумму интегралов по конечным не пересекающимся интервалам, составляющим эту область. Поскольку интеграл аддитивен, а все выкладки далее применимы сразу к любому элементу из любого интервала фиксированной области, то выкладки справедливы для суммы всех интегралов по всем областям, для которой и введено обозначение (16).

Перейдем к рассмотрению областей.

1) Рассмотрим область  $\chi_2^+$ , эквивалентную области, задаваемой условием  $y \geq 1$  для аргумента  $y$ . Функция Хевисайда на этой области равна единице. Тогда

$$g(y) = |1 - S_\theta(y)| = 1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta \cdot y}}. \quad (17)$$

Из условия задания области следует цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} y &\geq 1, \\ 1 + e^{-\theta y} &\leq 1 + e^{-\theta}, \\ 1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta y}} &\leq 1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta}}. \end{aligned}$$

Таким образом, на области  $\chi_2^+$  выполняется неравенство:

$$g(y) \leq 1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta}}.$$

Из свойств интеграла и положительности подынтегральной функции следует:

$$\int_{\chi_2^+} g(y)f(x)dx \leq \int_{\chi_2^+} \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta}}\right) f(x)dx.$$

2) Рассмотрим область  $\chi_2^-$ , эквивалентную области, которая задается условием  $y \leq -1$  для аргумента  $y$ . Функция Хэвисайда на этой области равна нулю. Тогда

$$g(y) = |0 - S_\theta(y)| = S_\theta(y) = \frac{1}{1 + e^{-\theta \cdot y}}$$

Аналогично цепочке неравенств для предыдущей области разбиения, из неравенства условия:

$$y \leq -1$$

получаем неравенство:

$$\frac{1}{1 + e^{-\theta y}} \leq \frac{1}{1 + e^\theta}.$$

Аналогично предыдущей области далее получаем:

$$\int_{\chi_2^-} g(y)f(x)dx \leq \int_{\chi_2^-} \left(\frac{1}{1 + e^\theta}\right) f(x)dx.$$

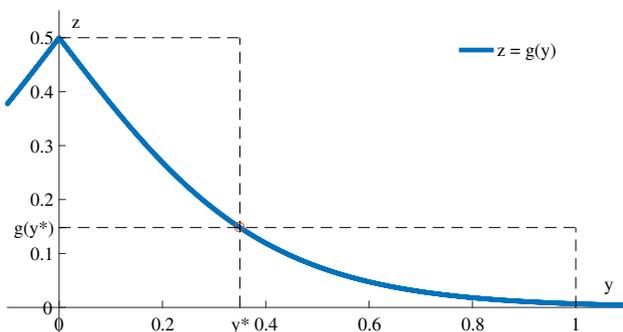
3) Рассмотрим область  $\chi_1^+$ , эквивалентную области, которая задается условием  $0 \leq y < 1$  для аргумента  $y$ . Нетрудно убедиться, что функция  $g(y)$  является убывающей по  $y$ .

Возьмем произвольную точку  $y^* \in (0, 1)$ . Исходя из непрерывности и убывания  $g(y)$  следуют неравенства:

$$\forall y \in (0, y^*) : g(y) \leq \frac{1}{2}, \tag{18}$$

$$\forall y \in (y^*, 1) : g(y) \leq g(y^*). \tag{19}$$

Графическая иллюстрация полученных неравенств представлена на рисунке 2.


 Рис. 2. График функции  $g(y)$  для  $0 \leq y < 1$ 

Разобьем интеграл функции вероятности на сумму двух интегралов:

$$\int_{\chi_1^+} g(y)f(x)dx = \int_{\chi_1^{++}} g(y)f(x)dx + \int_{\chi_1^{+-}} g(y)f(x)dx, \quad (20)$$

где

$$\chi_1^{++} = \{x : y^* < \varphi - \Phi(u, x) < 1\}, \quad (21)$$

$$\chi_1^{+-} = \{x : 0 < \varphi - \Phi(u, x) < y^*\}. \quad (22)$$

Таким образом, области (21) и (22) сопоставимы с ограничениями на  $y$  из (18) и (19). Следовательно,

$$\int_{\chi_1^{++}} g(y)f(x)dx \leq \int_{\chi_1^{++}} g(y^*)f(x)dx, \quad (23)$$

$$\int_{\chi_1^{++}} g(y^*)f(x)dx = \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta \cdot y^*}}\right) \int_{\chi_1^{++}} f(x)dx,$$

$$\int_{\chi_1^{+-}} g(y)f(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_{\chi_1^{+-}} f(x)dx. \quad (24)$$

Так как неравенства выше действуют для любых  $y^* \in (0, 1)$ , возьмем в качестве  $y^*$  определенные значения, представляющие собой после-

довательность, зависящую от  $\theta$ , причем

$$y_{\theta}^* = \frac{1}{\sqrt{\theta}}. \quad (25)$$

Тогда из (23) следует:

$$\int_{\chi_1^{++}} g(y)f(x)dx \leq \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\theta}}}\right) \int_{\chi_1^{++}} f(x)dx.$$

4) Рассмотрим область  $\chi_1^-$ , эквивалентную области, которая задается условием  $-1 < y \leq 0$  для аргумента  $y$ . Ввиду симметричности функции  $g(y)$ , все рассуждения для области  $\chi_1^+$  переносятся на текущую область симметричным образом с некоторыми отличиями.

Так же как и в предыдущем случае оценивается каждый из интегралов, получаемый при разбиении области  $\chi_1^-$  на две подобласти  $\chi_1^{-+}$  и  $\chi_1^{--}$  точкой  $y^*$ , то есть

$$\chi_1^{-+} = \{x : y^* < \varphi - \Phi(u, x) < 0\},$$

$$\chi_1^{--} = \{x : -1 < \varphi - \Phi(u, x) < y^*\},$$

но в качестве  $y^*$  берется точка

$$y_{\theta}^* = -\frac{1}{\sqrt{\theta}}.$$

Аналогично предыдущему случаю ищем верхнюю оценку для интегралов, получаем

$$\int_{\chi_1^{--}} g(y)f(x)dx \leq \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{\theta}}}\right) \int_{\chi_1^{--}} f(x)dx, \quad (26)$$

$$\int_{\chi_1^{-+}} g(y)f(x)dx \leq \frac{1}{2} \int_{\chi_1^{-+}} f(x)dx. \quad (27)$$

В итоге после рассмотрения всех четырех областей получаем следующее утверждение.

*Утверждение 3.* Пусть условия аналогичны таковым в Утверждении 2. Тогда верхняя оценка погрешности аппроксимации функции

вероятности может быть найдена по формуле:

$$\begin{aligned}
 |P_\varphi(u) - P_\varphi^\theta(u)| \leq & \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\theta}}\right) \int_{x_2^+} f(x)dx + \left(\frac{1}{1 + e^\theta}\right) \int_{x_2^-} f(x)dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_1^{+-}} f(x)dx + \left(1 - \frac{1}{1 + e^{-\sqrt{\theta}}}\right) \int_{x_1^{++}} f(x)dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{x_1^{-+}} f(x)dx + \left(\frac{1}{1 + e^{\sqrt{\theta}}}\right) \int_{x_1^{--}} f(x)dx,
 \end{aligned} \quad (28)$$

где области  $x_2^+$ ,  $x_2^-$ ,  $x_1^{+-}$ ,  $x_1^{++}$ ,  $x_1^{-+}$ ,  $x_1^{--}$  задаются соответствующими уравнениями.

#### 4. Производные функции вероятности и ее аппроксимации.

Далее для удобства и краткости выкладок переобозначим  $u$  как одну из компонент  $u_i$  многомерного управления  $u = [u_1, u_2, \dots, u_m]^T$ . Таким образом, полученные далее формулы будут справедливы для каждой из компонент вектора управления.

Для дальнейших выкладок необходимо показать некоторые свойства дельта-функции Дирака и производной сигмоидальной функции. Дельта-функция Дирака — обобщенная функция, определяемая следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \delta(x) &= 0, \quad x \neq 0, \\
 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx &= 1.
 \end{aligned}$$

Известно, что дельта-функция Дирака может быть представлена как предел бесконечной последовательности обычных функций, площадь под кривыми которых равна единице, а значения функций вне точки  $x = 0$  стремятся к нулю. Также для дельта-функции выполняется свойство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - y_0)g(y)dy = g(y_0), \quad (29)$$

где  $y_0$  есть ноль аргумента дельта-функции.

Производная сигмоидальной функции:

$$\frac{\partial S_{\theta}(y)}{\partial y} = \left( \frac{1}{1 + e^{-\theta y}} \right)' = \theta \cdot S_{\theta}(y) \cdot (1 - S_{\theta}(y)).$$

График функции  $g(y) = \theta \cdot S_{\theta}(y) \cdot (1 - S_{\theta}(y))$  представлен на рисунке 3 (параметр  $\theta = 5$ ).

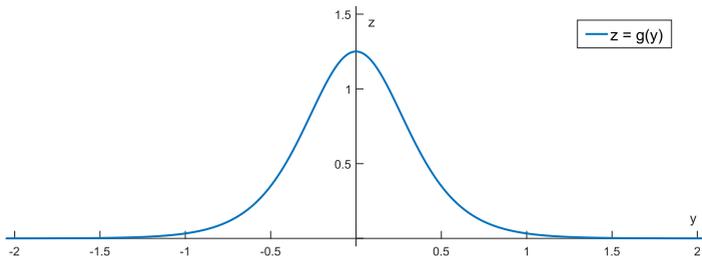


Рис. 3. Производная сигмоидальной функции

При рассмотрении производных сигмоиды при различных  $\theta$  в качестве элементов последовательности, то есть рассмотрении  $\{(S_{\theta}(y))'\}_{\theta=1}^{\infty}$ , выполняется:

$$(S_{\theta}(y))' \Big|_{y=0} = \theta \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\theta}{4} \rightarrow +\infty \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty.$$

Также справедливо

$$(S_{\theta}(y))' \Big|_{y \neq 0} = \theta \cdot S_{\theta}(y) \cdot (1 - S_{\theta}(y)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (S_{\theta}(y))' dy = S_{\theta}(y) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

*Утверждение 4.* Последовательность производных сигмоидальных функций сходится к дельта-функции Дирака при стремлении параметра сигмоидальной функции к бесконечности, или

$$\lim_{\theta \rightarrow +\infty} (S_{\theta}(y))' = \delta(y). \quad (30)$$

Таким образом, на последовательность производных сигмоидальной функции в пределе распространяются свойства дельта-функции, в частности свойство (29). Это также фактически означает, что на любом отрезке  $[a, b]$ , не включающем в себя  $y_0$ , интеграл произведения производной сигмоидальной функции и другой функции стремится к нулю.

Перейдем к вопросу о сходимости производной аппроксимированной функции вероятности к производной исходной функции вероятности. Для начала найдем производную исходной функции вероятности по  $u$ . Для этого воспользуемся тем, что  $\Phi(u, x)$  является гладкой кусочно-монотонной по  $x$  функцией. Это позволяет представить выражение для  $P_\varphi$  в виде суммы интегралов особого вида:

$$P_\varphi(u) = \sum_i \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx, \quad (31)$$

где  $x_i^-(u)$  и  $x_i^+(u)$  – границы  $i$ -го промежутка монотонности функции  $\Phi(u, x)$  при заданном управлении  $u$ . Эти точки определяются как точки перегибов и локальных экстремумов функции  $\Phi(u, x)$  при заданном  $u$ , то есть являются решениями уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} \Phi(u, x) = 0. \quad (32)$$

В случае линейной по  $x$  функции потерь, промежутки монотонности совпадает со всей областью определения функции потерь по второму аргументу. Уравнение (32) задает неявную функцию, а значит, по теореме о неявной функции возможно найти производную границы интервала монотонности по  $u$ . Эта производная будет задаваться выражением:

$$\frac{\partial x^*}{\partial u} = - \frac{\Phi''_{ux}(u, x^*)}{\Phi''_{xx}(u, x^*)}, \quad (33)$$

где  $x^*$  – решение уравнения (32).

Воспользуемся представлением (31) и запишем производную  $P_\varphi(u)$ :

$$\frac{\partial}{\partial u} P_\varphi(u) = \sum_i \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx. \quad (34)$$

На каждом из промежутков монотонности возможен один из четырех вариантов:

$$1) \min_{x \in [x_i^-(u); x_i^+(u)]} \Phi(u, x) \geq \varphi.$$

В этом случае интеграл

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = 0,$$

и его производная на отрезке:

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = 0. \quad (35)$$

$$2) \max_{x \in [x_i^-(u); x_i^+(u)]} \Phi(u, x) \leq \varphi.$$

В этом случае

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x) dx.$$

Производная интеграла по  $u$ , согласно формуле Лейбница, равна

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x) dx &= f(x_i^+(u)) \frac{dx_i^+(u)}{du} - f(x_i^-(u)) \frac{dx_i^-(u)}{du} = \\ &= f(x_i^-(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^-(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^-(u))} - f(x_i^+(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^+(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^+(u))}. \end{aligned} \quad (36)$$

$$3) \Phi(u, x_i^-(u)) \leq \varphi \leq \Phi(u, x_i^+(u)).$$

В этом случае

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x) dx,$$

где  $x_i^*(u)$  – корень уравнения  $\Phi(u, x) = \varphi$  на отрезке  $[x_i^-(u); x_i^+(u)]$  при заданном  $u$ , причем единственный. Производная этого интеграла по  $u$  равна:

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^*(u)} f(x) dx = f(x_i^*(u)) \frac{dx_i^*(u)}{du} - f(x_i^-(u)) \frac{dx_i^-(u)}{du}. \quad (37)$$

Производная  $x_i^*(u)$  по  $u$  определяется также с помощью теоремы о неявной функции и равна:

$$\frac{dx_i^*(u)}{du} = - \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))}. \quad (38)$$

Следовательно,

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = f(x_i^-(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^-(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^-(u))} - f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))}. \quad (39)$$

$$4) \Phi(u, x_i^-(u)) \geq \varphi \geq \Phi(u, x_i^+(u)).$$

В этом случае

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx = \int_{x_i^*(u)}^{x_i^+(u)} f(x) dx, \quad (40)$$

где  $x_i^*(u)$  – также корень уравнения  $\Phi(u, x) = \varphi$  на отрезке  $[x_i^-(u); x_i^+(u)]$  при заданном  $u$ , причем единственный. Производная этого интеграла по

$u$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^*(u)}^{x_i^+(u)} f(x) dx &= f(x_i^+(u)) \frac{dx_i^+(u)}{du} - f(x_i^*(u)) \frac{dx_i^*(u)}{du} = \\ &= f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))} - f(x_i^+(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^+(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^+(u))}. \end{aligned} \quad (41)$$

Таким образом, производная функции вероятности по  $u$  определена на всем множестве значений  $x$ .

Проведем аналогичные выкладки для аппроксимации функции вероятности. Рассматриваемая производная определяется аналогично выкладкам для исходной функции и в итоге получаем аналог формулы (34):

$$\frac{\partial}{\partial u} P_\varphi^\theta(u) = \sum_i \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx. \quad (42)$$

Рассмотрим аналогичные исходной функции вероятности промежутки монотонности.

$$1) \quad \min_{x \in [x_i^-(u); x_i^+(u)]} \Phi(u, x) \geq \varphi.$$

В этом случае при росте  $\theta$  интеграл стремится к нулю, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \quad (43)$$

что сопоставимо с результатом (35).

$$2) \quad \max_{x \in [x_i^-(u); x_i^+(u)]} \Phi(u, x) \leq \varphi.$$

В этом случае производная интеграла по  $u$  равна:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))f(x)dx = \\ = S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^+))f(x_i^+(u))\frac{dx_i^+(u)}{du} - S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^-))f(x_i^-(u))\frac{dx_i^-(u)}{du} - \\ - \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x)S'_\theta(\varphi - \Phi(u, x))\Phi'_u(u, x)dx. \quad (44) \end{aligned}$$

Значения множителей  $S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^+))$  и  $S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^-))$  стремятся к единице, а последнее слагаемое, согласно свойствам производной сигмоиды, стремится к нулю при  $\theta \rightarrow +\infty$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))f(x)dx \rightarrow f(x_i^-(u))\frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^-(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^-(u))} - \\ - f(x_i^+(u))\frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^+(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^+(u))} \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

или, сопоставляя полученное выражение и (36), получим:

$$\frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))f(x)dx \rightarrow \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} \Theta(\varphi - \Phi(u, x))f(x)dx. \quad (45)$$

$$3) \Phi(u, x_i^-(u)) \leq \varphi \leq \Phi(u, x_i^+(u)).$$

В этом случае существует  $x_i^*(u)$  – корень уравнения  $\Phi(u, x) = \varphi$  на отрезке  $[x_i^-(u); x_i^+(u)]$  при заданном  $u$ , причем единственный. Производная интеграла по  $u$  определяется согласно формуле (44), и на этом промежутке монотонности выполняются следующие соотношения:

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^+)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \quad (46)$$

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^-)) \rightarrow 1 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty. \quad (47)$$

В последнем слагаемом (44), а именно интеграле, сделаем замену переменных

$$t = \Phi(u, x), \quad dt = \Phi'_x(u, x)dx, \quad (48)$$

получаем:

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x)S'_\theta(\varphi - \Phi(u, x))\Phi'_u(u, x)dx = \int_{t^-}^{t^+} f(x(t))S'_\theta(\varphi - t) \frac{\Phi'_u(u, x(t))}{\Phi'_x(u, x(t))} dt,$$

где  $t^- = t(x_i^-(u))$ ,  $t^+ = t(x_i^+(u))$ . Исходя из свойств производной сигмоиды, значение этого интеграла стремится к значению подынтегральной функции в точке  $t = \varphi$ , которая по определению эквивалентна точке  $x = x_i^*(u)$ . Таким образом, верно

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x)S'_\theta(\varphi - \Phi(u, x))\Phi'_u(u, x)dx \rightarrow f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))}. \quad (49)$$

Рассматривая поведение (44) с учетом (46), (47), (49), получим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))f(x)dx &\rightarrow f(x_i^-(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^-(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^-(u))} - \\ &- f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))} \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

а отсюда следует выполнение соотношения (45) для этого промежутка монотонности.

$$4) \Phi(u, x_i^-(u)) \geq \varphi \geq \Phi(u, x_i^+(u)).$$

Действуем по аналогии с прошлым случаем; получаем, что существует единственный корень  $x_i^*(u)$  уравнения  $\Phi(u, x) = \varphi$  на данном отрезке монотонности, производная определяется по формуле (44) и что верны выражения:

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^+)) \rightarrow 1 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty,$$

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, x_i^-)) \rightarrow 0 \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty.$$

В интегральном слагаемом предполагается замена (48), и по свойству производной сигмоиды получаем:

$$\int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} f(x) S'_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) \Phi'_u(u, x) dx \rightarrow f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))}. \quad (50)$$

В итоге, собрав все соотношения, получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \int_{x_i^-(u)}^{x_i^+(u)} S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) f(x) dx &\rightarrow -f(x_i^+(u)) \frac{\Phi''_{ux}(u, x_i^+(u))}{\Phi''_{xx}(u, x_i^+(u))} + \\ &+ f(x_i^*(u)) \frac{\Phi'_u(u, x_i^*(u))}{\Phi'_x(u, x_i^*(u))} \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

а отсюда следует выполнение соотношения (45) для этого промежутка монотонности.

Таким образом, рассмотрев все промежутки монотонности, было доказано следующее утверждение.

*Утверждение 5.* Пусть условия аналогичны таковым в Утверждении 2, тогда последовательность частных производных по управлению аппроксимированной вероятностной функции стремится к частной производной по управлению исходной вероятностной функции, т.е.

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u} \rightarrow \frac{\partial P_\varphi(u)}{\partial u} \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty. \quad (51)$$

Для получения удобной формулы производной аппроксимации вероятностной функции рассмотрим математическое ожидание:

$$\mathbb{M} [G(u_0, u_1, x)] = \mathbb{M} \left[ \frac{S_\theta(\varphi - \Phi(u_1, x)) - S_\theta(\varphi - \Phi(u_0, x))}{u_1 - u_0} \right], \quad (52)$$

где  $u_1 = u_0 + \Delta u$ ,  $\Delta u > 0$ , и представление сигмоидальной функции

$$S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) = \int_{-\infty}^u h(\beta, x) d\beta,$$

где

$$h(\beta, x) = \theta S_\theta(\varphi - \Phi(\beta, x)) (1 - S_\theta(\varphi - \Phi(\beta, x))) (-\Phi'_\beta(\beta, x)).$$

Тогда из (52) следует:

$$\mathbb{M} [G(u_0, u_1, x)] = \mathbb{M} \left[ \frac{1}{u_1 - u_0} \int_{u_0}^{u_1} h(\beta, x) d\beta \right]. \quad (53)$$

Используя свойства индикаторной функции, свойства интегралов и теорему Фубини, доказывается равномерная интегрируемость семейства функций  $\{G(u_0, u_1, x) : u_1 > u_0, u_0 \in U, u_1 \in U\}$ . Из этого следует, что

$$\frac{\partial}{\partial u} \mathbb{M} \int_{-\infty}^u h(\beta, x) d\beta = \mathbb{M} h(\beta, x).$$

Переходя к принятым ранее обозначениям, получим:

$$\frac{\partial}{\partial u} P_\varphi^\theta(u) = \mathbb{M}[\theta S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) (1 - S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))) (-\Phi'_u(u, x))],$$

или, в конечном виде:

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial u} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta S_\theta(y(u, x)) (S_\theta(y(u, x)) - 1) \Phi'_u(u, x) f(x) dx, \quad (54)$$

где  $y(u, x) = \varphi - \Phi(u, x)$ .

Данную формулу можно использовать при решении задачи (1) с помощью методов оптимизации первого порядка.

По аналогии с формулой (54) вычисляется производная аппроксимации функции вероятности по параметру  $\varphi$ :

$$\frac{\partial P_\varphi^\theta(u)}{\partial \varphi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta S_\theta(\varphi - \Phi(u, x)) (1 - S_\theta(\varphi - \Phi(u, x))) f(x) dx, \quad (55)$$

Так как все свойства, соотношения дельта-функции Дирака и рассуждения переносятся на случай производной по параметру  $\varphi$  без изменений, то при помощи рассуждений, аналогичных таковым при получении

(51), справедливо следующее:

$$\frac{\partial P_{\varphi}^{\theta}(u)}{\partial \varphi} \rightarrow \frac{\partial P_{\varphi}(u)}{\partial \varphi} \quad \text{при } \theta \rightarrow +\infty. \quad (56)$$

Данное соотношение необходимо для получения выражения для производной функции квантили.

**5. Квантильный критерий. Аппроксимация.** Согласно одномерному аналогу формулы представления градиента функции квантили из [6], справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial u} \varphi_{\alpha}(u) = - \frac{\frac{\partial}{\partial u} P_{\varphi}(u) \Big|_{\varphi=\varphi_{\alpha}(u)}}{\frac{\partial}{\partial \varphi} P_{\varphi}(u) \Big|_{\varphi=\varphi_{\alpha}(u)}}. \quad (57)$$

Подставив в (57) выражения (54) и (55), получим выражение для аппроксимации производной квантили по управлению:

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}^{\theta}(u)}{\partial u} \approx \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta}(y(u, x)) (1 - S_{\theta}(y(u, x))) \Phi'_u(u, x) f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} S_{\theta}(y(u, x)) (1 - S_{\theta}(y(u, x))) f(x) dx}, \quad (58)$$

где  $y(u, x) = \varphi_{\alpha}(u) - \Phi(u, x)$ .

Данное выражение может быть использовано при решении задачи (2) методами оптимизации первого порядка.

Согласно определению квантили и функции распределения, справедливо равенство:

$$F_X(\varphi_{\alpha}) = \alpha,$$

где  $\varphi_{\alpha}$  — квантиль уровня  $\alpha$  случайной величины  $X$  с функцией распределения  $F_X(x)$  и плотностью  $f_X(x)$ . Продифференцируем равенство по  $\alpha$  в обеих частях, получим:

$$f_X(\varphi_{\alpha}) \cdot \frac{d\varphi_{\alpha}}{d\alpha} = 1,$$

или

$$\frac{d\varphi_{\alpha}}{d\alpha} = \frac{1}{f_X(\varphi_{\alpha})}.$$

Учитывая выражение (55), получим уравнение аппроксимации производной квантили по уровню для нашего случая

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}^{\theta}(u)}{\partial \alpha} = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta S_{\theta}(y(u, x)) (1 - S_{\theta}(y(u, x))) f(x) dx}, \quad (59)$$

где  $y(u, x) = \varphi_{\alpha}(u) - \Phi(u, x)$ .

Таким образом, оценив или определив значение квантили для заданных  $u$  и  $\alpha$ , можно вычислить квантиль определенного уровня и использовать градиентные методы оптимизации для решения исходной задачи в квантильной постановке.

Доказательство сходимости аппроксимации квантили и ее производных к исходным функциям выходит за рамки настоящей статьи и будет исследовано в дальнейших работах.

**6. Примеры применения.** В этом разделе приведены 3 примера применения полученных оценок градиента к решению задач стохастического программирования. Первый пример показывает, что полученное с помощью градиентного спуска решение соответствует точному, которое может быть найдено аналитически. Второй пример показывает возможность применения оценок градиента для решения задачи с двумерным случайным вектором, хотя вопрос точности и сходимости оценок в случае многомерного распределения остается предметом дальнейшего исследования. Третий пример показывает возможность применения оценок в прикладной задаче: задаче минимизации площади взлетно-посадочной полосы при ограничении на вероятность успешной посадки.

*Пример 1.* Пусть функция потерь задана следующим образом:

$$\Phi(u, X) = u_0^2 + (u_1 - 1)^2 \cdot X + X,$$

где  $[u_0, u_1]^T \in [-a, a] \times [-a, a]$ ,  $a > 1$ , а случайная величина  $X$  имеет равномерное распределение на  $[1, 3]$ :

$$X \sim \mathbb{U}[1, 3].$$

Зафиксируем уровень  $\alpha = 0.75$  и рассмотрим задачу оптимизации квантили:

$$\varphi_{0.75}(u) \rightarrow \min_u.$$

Нетрудно заметить, что при таких ограничениях на управление и соответствующей целевой функции минимум квантили достигается при

управлении

$$u_{opt} = [0, 1]^T,$$

а само значение квантили в этой точке равно:

$$\varphi_{0.75}(u_{opt}) = 2.5.$$

Решать задачу будем методом градиентного спуска с фиксированным шагом. Для начала зададим начальную точку  $u_0$  и найдем значение квантили в этой точке. В этой задаче значение можно вычислить непосредственно; в более сложных задачах подразумевается оценка начального приближения, например методом Монте-Карло. Итак, пусть

$$u_0 = [1, 0]^T, \quad \varphi_{0.75}(u_0) = 6.$$

Градиент квантили, являющийся основой алгоритма, вычисляется на каждом шаге в соответствии с формулой (58). Интегралы вычисляются приближенно при помощи известных численных методов. Зададим величину шага алгоритма  $h = 0.001$ , параметр остановки алгоритма  $\varepsilon = 0.00001$  и параметр сигмоидальной функции  $\theta = 20$ . Алгоритм был реализован при помощи пакетов *scipy* и *numpy* языка Python.

В результате работы алгоритма было получено следующее решение:

$$u_{opt}^{\theta} = [0.0019, 1.0000]^T, \quad \varphi_{0.75}(u_{opt}^{\theta}) = 2.4982.$$

Количество итераций при этом составило около 2600, что является неплохим показателем скорости сходимости, учитывая шаг алгоритма. Точность аппроксимации может быть увеличена за счет изменения параметров  $h$  и  $\varepsilon$  алгоритма, а также за счет увеличения параметра  $\theta$ .

*Пример 2.* Обобщение на случайный вектор произвольной размерности  $X$ . Пусть функция потерь задана следующим образом:

$$\Phi(u, X) = u_0^2 + (u_1 - 1)^2 \cdot X_1 + (u_2 - 1)^2 \cdot X_2 + X_1 + X_2,$$

где  $[u_0, u_1, u_2]^T \in [-a, a] \times [-a, a] \times [-a, a]$ ,  $a > 1$ , а случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  независимы и имеют распределения:

$$X_1 \sim \mathbb{U}[1, 3], \quad X_2 \sim \mathbb{U}[1, 3].$$

То есть по сути задана случайная величина  $X = [X_1, X_2]$ . Рассматривать будем задачу, аналогичную таковой в предыдущем примере — оптимизация по квантильному критерию с уровнем  $\alpha = 0.75$ . По аналогии

точка оптимума и значение в этой точке находятся непосредственно:

$$u_{opt} = [0, 1, 1]^T, \quad \varphi_{0.75}(u_{opt}) = 4.5.$$

Алгоритм решения остается неизменным, с тем лишь отличием, что в аналоге (58) для текущего случая будут вычисляться двойные интегралы по каждому из возможных значений  $X_1$  и  $X_2$ , а совместная плотность распределения  $f_X(x_1, x_2)$ , входящая в вычисляемые выражения, ввиду независимости величин будет равна:

$$f_X(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & (x_1, x_2) \in [1, 3] \times [1, 3], \\ 0, & (x_1, x_2) \notin [1, 3] \times [1, 3]. \end{cases}$$

Для выбранной начальной точки  $u_0$  квантиль оценим непосредственно:

$$u_0 = [1, 0, 0]^T, \quad \varphi_{0.75}(u_0) = 10.$$

Параметры алгоритма и сигмоиды оставим аналогичные предыдущему примеру.

В результате работы алгоритма было получено следующее решение:

$$u_{opt}^\theta = [0.009, 0.998, 0.998]^T, \quad \varphi_{0.75}(u_{opt}^\theta) = 4.509.$$

Количество итераций составляло порядка 12000. Как и в предыдущем случае, лучшей точности можно добиться, управляя параметрами алгоритма и сигмоидальной функции.

*Пример 3. Задача оптимизации площади взлетно-посадочной полосы.* Проблема оптимизации площади взлетно-посадочной полосы (ВПП) связана с двумя факторами:

- действием порывов ветра при посадке, что влияет на точку касания летательным аппаратом (ЛА) полотна, поэтому с точки зрения безопасности посадки полотно ВПП должно быть максимально обширным;
- дороговизной покрытия квадратного метра полотна ВПП, поэтому с этой точки зрения площадь ВПП должна быть минимально возможной.

В результате учета этих двух факторов и возникает задача оптимизации площади взлетно-посадочной полосы: найти минимально возможную площадь ВПП, при которой гарантируется некий установленный уровень безопасности при посадке ЛА. Суть задачи сводится в поиске оптимальных длины и ширины полотна взлетно-посадочной полосы, при

которых выполняются вероятностные ограничения по безопасности, то есть превышает заданную вероятность успешной посадки.

Пусть  $O$  — расчетная точка касания самолетом ВПП;  $l_0$  — номинальная длина пробега ЛА до полной остановки при отсутствии внешних возмущений;  $z_0$  — половина расстояния между посадочными шасси. Учет требований надежности осуществляется путем введения величин:  $l_1$  — запас по длине ВПП на случай недолета до точки  $O$ ;  $l_2$  — запас по длине ВПП на случай перелета;  $z_1$  — половина ширины ВПП. Все описанные величины представлены на рисунке 4.

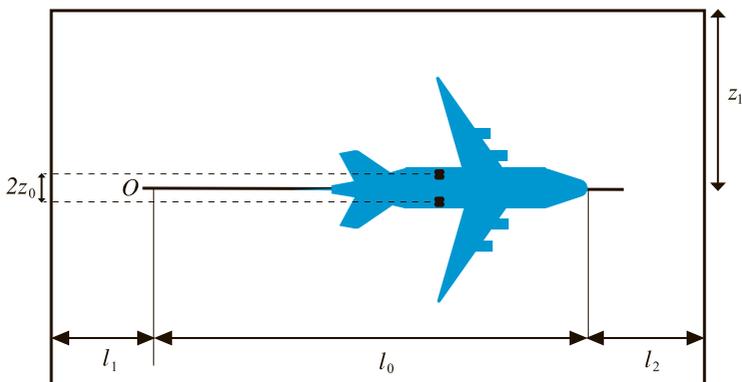


Рис. 4. Параметры ВПП и ЛА при посадке

Площадь ВПП определяется выражением:

$$S(l_1, l_2, z_1) = 2z_1(l_0 + l_1 + l_2).$$

На параметры из физического смысла задачи накладываются ограничения:

$$l_1 \geq 0, \quad l_2 \geq 0, \quad z_1 \geq z_0. \quad (60)$$

В целях упрощения модели предполагаем, что  $z_0 = 0$ .

Пусть  $X$  и  $Z$  — случайные отклонения от точки касания  $O$  вдоль осей  $Ox$  и  $Oy$  соответственно. Эти отклонения связаны с компонентами  $W_x$  и  $W_y$  соотношениями:

$$X = a_{11}W_x + a_{12}|W_z|, \quad Z = a_{22}W_z,$$

где  $a_{11}, a_{12}, a_{22}$  — известные коэффициенты. Предположим, что  $W_x$  и  $W_z$  — независимые нормально распределенные случайные величины с

известными параметрами:

$$W_x \sim \mathbb{N}(m_x, \sigma_x^2), \quad W_z \sim \mathbb{N}(m_z, \sigma_z^2).$$

Посадка считается успешной, если

$$-l_1 \leq X \leq l_2, \quad |Z| \leq z_1.$$

Таким образом, требование по безопасности посадки можно сформулировать как

$$\mathbb{P}\{-l_1 \leq X \leq l_2, |Z| \leq z_1\} \geq \alpha, \quad (61)$$

где  $\alpha$  — доверительная вероятность, отражающая заданный уровень надежности.

Таким образом, задача оптимизации описывается как:

$$S(l_1, l_2, z_1) \rightarrow \min_{l_1, l_2, z_1} \quad (62)$$

при ограничениях (60), (61).

В книге [6] авторами приведена задача, эквивалентная задаче (62), но в постановке квантильной оптимизации, и при помощи аналитического алгоритма на основе доверительного метода определено оптимальное решение для различных значений параметра  $a_{12}$ . В частности, при  $a_{12} = 0$  приближенное оптимальное решение задачи выглядит как:

$$l_1 = l_2 = k_2, \quad z_1 = \frac{\gamma}{2}, \quad (63)$$

где

$$k_2 = |a_{11}| \sigma_x r_\alpha, \quad \gamma = 2|a_{22}| \sigma_z r_\alpha, \quad r_\alpha = \sqrt{-2 \ln(1 - \alpha)}.$$

Авторами [6] также отмечено, что использование метода Монте-Карло или прямого метода оценки уровня квантили связано с огромными вычислительными затратами, а получение точного решения невозможно в силу зависимости выпуклости целевой функции от ее случайных компонент.

Исходные параметры задачи были заданы следующим образом:

$$\alpha = 0.95, \quad l_0 = 150, \quad a_{11} = -2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = 1,$$

$$m_x = m_z = 0, \quad \sigma_x = \sigma_z = 3.$$

При таких значениях параметров, согласно (63), приближенное оптимальное решение равно:

$$l_1^* = l_2^* = 14.687, \quad z_1^* = 7.343, \quad S(l_1^*, l_2^*, z_1^*) = 1900.034.$$

Решение задачи (62) при ограничениях (60), (61) определяется при помощи метода доверительных областей (*trust-region*), где градиент вероятностного ограничения вычисляется в соответствии с формулой (54). Ввиду независимости полученных величин  $X$  и  $Z$ , их совместная плотность является произведением плотностей каждой из компонент с поправкой на коэффициенты  $a_{11}$  и  $a_{22}$ . Параметры алгоритма были заданы следующим образом: минимально допускаемые значения для градиента и радиуса доверительной области равны значению параметра остановки алгоритма  $\varepsilon = 0.0001$ , параметр сигмоидальной функции  $\theta = 10$ . Значение объемных интегралов определяется численно с точностью  $\varepsilon_{int} = 0.0001$ . Первоначальной точкой алгоритма была выбрана точка, эквивалентная значению переменных

$$l_1^0 = 19.163, \quad l_2^0 = 9.581 \quad z_1^0 = 32.186, \quad S(l_1^0, l_2^0, z_1^0) = 8287.491.$$

В результате работы алгоритма было получено следующее решение:

$$l_1^\theta = l_2^\theta = 16.896, \quad z_1^\theta = 7.946, \quad S(l_1^\theta, l_2^\theta, z_1^\theta) = 2126.235.$$

Число итераций алгоритма составило порядка 900. Лучшей точности можно добиться, управляя параметрами алгоритма и сигмоидальной функции.

На основе примеров 2 и 3 можно высказать предположение, что верны обобщения полученных формул на случай многомерности исходной случайной величины  $X$ . Однако эта тема требует более основательного исследования и выходит за рамки данной статьи.

Также стоит отметить, что многие схожие с рассмотренной в примере 3 задачи могут решаться с помощью описанных алгоритмов аппроксимации. В первую очередь это задачи, сводимые к задачам квантильной или вероятностной оптимизации или заданные с вероятностными ограничениями, такие как проектирование системы водоснабжения, формирование портфеля ценных бумаг, планирование бюджета госпиталя и другие, для которых проблематично найти аналитическое решение или методы нахождения приближенного решения связаны с вычислительными трудностями.

**7. Заключение.** Основным объектом исследования является алгоритм аппроксимации вероятностных критериальных функций в задачах стохастического программирования. Научная новизна результатов заключается в получении новых выражений для оценки функции вероятности, ее производных и производных функции квантили, а также получение выражения для оценки погрешности функции вероятности в форме объемных интегралов.

Полученные в статье оценки могут быть использованы при решении задач стохастического программирования при помощи численных методов оптимизации первого порядка, особенно в случаях, когда другие методы могут быть не применимы. Основным преимуществом такого способа решения является относительная вычислительная простота по сравнению, например, с доверительным методом, широко применяющимся при решении задач стохастического программирования. Вычисление градиента функции вероятности указанным способом также является менее трудоемким по сравнению с вычислением градиента в форме поверхностного интеграла.

Перспективным видится дальнейшее развитие идей, изложенных в настоящей статье. Предполагается доказательство сходимости аппроксимации функции квантили и ее производной. Также предполагается улучшение верхней оценки погрешности аппроксимации функции вероятности и оценка погрешности аппроксимации квантили. Дополнительно планируется рассмотрение условий, накладываемых на целевую функцию, и разработка алгоритма решения задач с вероятностными ограничениями. Наконец, наиболее масштабным и актуальным видится исследование, посвященное обобщению данного вида аппроксимации на случай многомерных случайных величин.

### Литература

1. *Marchisio M.A.* Stochastic Modeling // Introduction to Synthetic Biology. 2018. pp. 39–52.
2. *Алешкин Н.А., Алешкин А.П., Карпова И.Р.* Модель оптимизации ресурсов в мало-серийном производственном цикле при использовании нечеткой логики // Вопросы радиоэлектроники. 2018. № 9. С. 84–90.
3. *Мазелис Л.С., Солодухин К.С., Чен А.Я.* Нечеткие модели оптимизации портфеля проектов университета с учетом влияния на характеристики отношений со стейкхолдерами // Университетское управление: практика и анализ. 2017. Т. 21. № 5(111). С. 51–63.
4. *Бабуров В.И., Ивацевич Н.В., Олянюк П.В., Саута О.И.* Нечеткие критерии и понятия в задаче выбора приемника ГНСС для навигационно-пилотажного комплекса // Труды СПИИРАН. 2012. Вып. 23. С. 357–368.
5. *Фильченков А.А.* Меры истинности и вероятностные графические модели для представления знаний с неопределенностью // Труды СПИИРАН. 2012. Вып. 23. С. 254–295.

6. Кибзун А.И., Кан Ю.С. Задачи стохастического программирования с вероятностными критериями // М.: Физматлит. 2009. 372 с.
7. Dentcheva D., Penev S., Ruszczyński. A. Statistical estimation of composite risk functionals and risk optimization problems // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 2017. vol. 69. no 4. pp. 737–760.
8. Dentcheva D., Ruszczyński. A. Risk forms: representation, disintegration, and application to partially observable two-stage systems // Mathematical Programming. 2019. pp. 1–21.
9. Кибзун А.И., Наумов А.В., Норкин В.И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования // Автоматика и телемеханика. 2013. № 6. С. 66–86.
10. Кибзун А.И., Игнатов А.Н. Сведение двухшаговой задачи стохастического оптимального управления с билинейной моделью к задаче смешанного целочисленного линейного программирования // Автоматика и телемеханика. 2016. № 12. С. 89–111.
11. Иванов С.В., Кибзун А.И. Выборочная аппроксимация двухэтапной задачи стохастического линейного программирования с квантильным критерием // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2017. Т. 23. № 3. С. 134–143.
12. Кибзун А.И., Соболев В.Р. Двухшаговая задача хеджирования европейского коллопциона при случайной длительности транзакций // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2015. Т. 21. № 3. С. 164–174.
13. Райк Э. Дифференцируемость по параметру функции вероятности и стохастический псевдоградиентный метод для ее оптимизации // Известия Академии наук Эстонской ССР: физика, математика. 1975. № 1. С. 3–8.
14. Кибзун А.И., Третьяков Г.Л. Дифференцируемость функции вероятности. // Доклады Академии наук. 1997. № 2. С. 159–161.
15. Uryasev S.. Derivatives of probability functions and some applications. // Annals of Operations Research. 1995, Vol. 56. № 1. pp. 287–311.
16. Uryasev S.. Derivatives of probability functions and integrals over sets given by inequalities. // Journal of Computational and Applied Mathematics. 1994. vol. 56. no. 1. pp. 197–223.
17. Henrion R. Gradient estimates for Gaussian distribution functions: application to probabilistically constrained optimization problems // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2012. vol. 2. no. 4. pp. 655–668.
18. van Ackooij W., Henrion R. (Sub-)Gradient Formulae for Probability Functions of Random Inequality Systems under Gaussian Distribution // SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2017. vol. 5. no. 1. pp. 63–87.
19. Pflug G.C., Weisshaupt H. Probability gradient estimation by set-valued calculus and applications in network design // SIAM Journal on Optimization. 2005. vol. 15. pp. 898–914.
20. Yu C., Zelterman D. A general approximation to quantiles. // Communications in Statistics-Theory and Methods. 2017. vol. 46(19). pp. 9834–9841.
21. Okagbue H.I., Adamu M.O., Anake T.A. Ordinary Differential Equations of the Probability Functions of the Weibull Distribution and their Application in Ecology. // International Journal of Engineering and Future Technology. 2018. vol. 15. pp. 57–78.
22. Garniera J., Omraneb A., Rouchdyc Y. Asymptotic formulas for the derivatives of probability functions and their Monte Carlo estimations // European Journal of Operational Research. 2009. vol. 198. no. 3. pp. 848–858.
23. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered Probability of Exceedance: Mathematical Properties and Optimization // SIAM Journal on Optimization. 2018. vol. 28. no. 2. pp. 1077–1103.
24. Zhang T., Uryasev S., Guan Y. Derivatives and subderivatives of buffered probability of exceedance // Operations Research Letters. 2019. vol. 47. no. 2. pp 130–132.

25. *Ширяев А.Н.* Вероятность // М.:Наука. 2007. 552 с.

**Соболь Виталий Романович** — канд. физ.-мат. наук, ассистент, кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ). Область научных интересов: математическая статистика, теория вероятности, математическое моделирование экономических процессов, стохастическое программирование. Число научных публикаций — 12. vitsobol@mail.ru; Волоколамское ш., 4, 125993, Москва, Российская Федерация; р.т.: +7 499 158-48-74.

**Торишний Роман Олегович** — аспирант, кафедра теории вероятностей и компьютерного моделирования, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (МАИ). Область научных интересов: математическая статистика, теория вероятности, математическое моделирование, искусственный интеллект. Число научных публикаций — 5. Agenas-26@yandex.ru; Волоколамское ш., 4, 125993, Москва, Российская Федерация; р.т.: +7 968 622-32-39.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена в соответствии с государственным заданием № 9.7555.2017/БЧ.

V.R. SOBOL, R.O. TORISHNYI  
**APPLICATION OF SMOOTH APPROXIMATION OF  
PROBABILITY FUNCTION AND QUANTILE FUNCTION IN  
SOLVING STOCHASTIC PROGRAMMING PROBLEMS**

---

*Sobol V.R., Torishnyi R.O. Application of smooth approximation of probability function and quantile function in solving stochastic programming problems.*

**Abstract.** One of the possible variants of smooth approximation of probability criteria in stochastic programming problems allowing to obtain estimates of the probability function gradient and the quantile function gradient in the form of a volume integral is considered. The research is applied to problems of probability function maximization and quantile function minimization for the loss functional depending on the control vector and one-dimensional absolutely continuous random variable.

The main idea of the approximation is to replace the discontinuous Heaviside function in the integral representation of the probability function with a smooth function having such properties as continuity, smoothness, and easily computable derivatives. An example of such function is the distribution function of a random variable distributed according to the logistic law with zero mean and finite dispersion, which is a sigmoid. The value inversely proportional to the root of the variance is a parameter that provides the proximity of the original function and its approximation. This replacement allows to obtain a smooth approximation of the probability function, and for this approximation derivatives by the control vector and by other parameters of the problem can be easily found.

The main result of the article is the obtained expressions for approximation of the probability function derivatives by the control vector and by the acceptable loss level, as well as expressions for approximation of the quantile function gradient in the form of volume integrals. The article proves the convergence of the probability function approximation obtained by replacing the Heaviside function with the sigmoidal function to the original probability function, and the error estimate of such approximation is obtained. The convergence of the approximation of probability function derivatives to the true derivatives under a number of conditions on the loss functional is also proved.

Examples are considered to demonstrate the possibility of applying the proposed estimates to the solution of stochastic programming problems with criteria in the form of a probability function and a quantile function, including the case of a multidimensional random variable.

**Keywords:** stochastic programming, probability criteria, quantile criteria, approximation, numerical methods, sigmoidal function.

---

**Sobol Vitaliy** — Ph.D., Research Officer, Department of Probability Theory and Computer Modelling, Moscow Aviation Institute (National Research University). Research interests: mathematical statistics, probability theory, mathematical modeling of economic processes, stochastic programming. The number of publications — 12. vitsobol@mail.ru; 4, Volokolamskoe sh., 125993, Moscow, Russia; office phone: +7 499 158-48-74

**Torishnyi Roman** — Ph.D. Student, Department of Probability Theory and Computer Modelling, Moscow Aviation Institute (National Research University). Research interests: mathematical statistics, probability theory, mathematical modeling, artificial intelligence. The number of publications — 5. Arenas-26@yandex.ru; 4, Volokolamskoe sh., 125993, Moscow, Russia; office phone: +7 968 622-32-39.

**Acknowledgements.** This work was supported by the state task no. 9.7555.2017/ВCh.

## References

1. Marchisio M.A. Stochastic Modeling // Introduction to Synthetic Biology. 2018. pp. 39–52.
2. Aleshkin N.A., Aleshkin A.P., Karpova I.R. [The model of optimizing resources in a limited-edition production cycle based on the application of fuzzy logic]. *Voprosy radioelektroniki — Issues of radio electronics*. 2018. № 9. pp. 84–90. (In Russ.)
3. Mazelis L.S., Soloduhin K.S., Chen A.Ja. [Fuzzy models for optimizing a university's project portfolio inclusive of characteristics of relationships with stakeholders]. *Universitetskoe upravlenie: praktika i analiz. — University Management: Practice and Analysis*. 2017. Issue 21. vol. 5(111). pp. 51–63. (In Russ.)
4. Baburov V.I., Ivancevich N.V., Oljanjuk P.V., Sauta O.I. [Fuzzy criteria and concepts in the problem of GNSS receiver selection for navigation and flight complex]. *Trudy SPIIRAN — SPIIRAS Proceedings*. 2012. vol. 23. pp. 357–368. (In Russ.)
5. Fil'chenkov A.A. [Truth measures and probabilistic graphical models of representation of data with uncertainty]. *Trudy SPIIRAN — SPIIRAS Proceedings*. 2012. vol. 23. pp. 254–295. (In Russ.)
6. Kibzun A.I., Kan Ju.S. Zadachi stohasticheskogo programmirovaniya s verojatnostnymi kriterijami [Stochastic programming problems with probabilistic criteria]. M.: Fizmatlit. 2009. 372 p. (In Russ.)
7. Dentcheva D., Penev S., Ruszczyński A. Statistical estimation of composite risk functionals and risk optimization problems. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*. 2017. vol. 69. no. 4. pp. 737–760.
8. Dentcheva D., Ruszczyński A. Risk forms: representation, disintegration, and application to partially observable two-stage systems. *Mathematical Programming*. 2019. pp. 1–21.
9. Kibzun A.I., Naumov A.V., Norkin V.I. [On reducing a quantile optimization problem with discrete distribution to a mixed integer programming problem]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*. 2013. vol. 6. pp. 66–86. (In Russ.)
10. Kibzun A.I., Ignatov A.N. [Reduction of the two-step problem of stochastic optimal control with bilinear model to the problem of mixed integer linear programming]. *Avtomatika i telemekhanika — Automation and Remote Control*. 2016. vol. 12. pp. 89–111. (In Russ.)
11. Ivanov S.V., Kibzun A.I. [Sample Average Approximation in a Two-Stage Stochastic Linear Program with Quantile Criterion]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2017. Issue 23. no. 3. pp. 134–143. (In Russ.)
12. Kibzun A.I., Sobol' V.R. [A two-step problem of hedging a European call option under a random duration of transactions]. *Trudy Instituta matematiki i mekhaniki UrO RAN — Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2015. Issue 21. no. 3. pp. 164–174. (In Russ.)
13. Rajk Je. [Differentiability by parameter of the probability function and stochastic pseudo-gradient method for its optimization]. *Izvestiya Akademii nauk Estonskoj SSR: fizika, matematika — Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Physics, Mathematics*. 1975. vol. 1. pp. 3–8. (In Russ.)
14. Kibzun A.I., Tret'jakov G.L. [Differentiability of the probability function]. *Doklady Akademii nauk — Doklady Mathematics*. 1997. vol. 2. pp. 159–161. (In Russ.)
15. Uryasev S. Derivatives of probability functions and some applications. *Annals of Operations Research*. 1995. vol. 56. no. 1. pp. 287–311.
16. Uryasev S. Derivatives of probability functions and integrals over sets given by inequalities. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 1994. vol. 56. no. 1. pp. 197–223.
- 216 Труды СПИИРАН. 2020. Том 19 № 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)  
www.proceedings.spiiras.nw.ru

17. Henrion R. Gradient estimates for Gaussian distribution functions: application to probabilistically constrained optimization problems. *Numerical Algebra, Control and Optimization*. 2012. vol. 2. no. 4. pp. 655–668.
18. van Ackooij W., Henrion R. (Sub-)Gradient Formulae for Probability Functions of Random Inequality Systems under Gaussian Distribution. *SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification*. 2017. vol. 5. no. 3. pp. 63–87.
19. Pflug G.C., Weisshaupt H. Probability gradient estimation by set-valued calculus and applications in network design. *SIAM Journal on Optimization*. 2005. vol. 15. no. 3. pp. 898–914.
20. Yu C., Zelterman D. A general approximation to quantiles. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 2017. vol. 46(19). pp. 9834–9841.
21. Okagbue H.I., Adamu M.O., Anake T.A. Ordinary Differential Equations of the Probability Functions of the Weibull Distribution and their Application in Ecology. *International Journal of Engineering and Future Technology*. 2018. vol. 15. pp. 57–78.
22. Garniera J., Omraneb A., Rouchdyc Y.. Asymptotic formulas for the derivatives of probability functions and their Monte Carlo estimations *European Journal of Operational Research*. 2009. vol. 198. no. 3. pp. 848–858.
23. Mafusalov A., Uryasev S. Buffered Probability of Exceedance: Mathematical Properties and Optimization *SIAM Journal on Optimization*. 2018. vol. 28. no. 2. pp. 1077–1103.
24. Zhang T., Uryasev S., Guan Y. Derivatives and subderivatives of buffered probability of exceedance. *Operations Research Letters*. 2019. vol. 47. no. 2. pp. 130–132.
25. Shiryaev A. N. *Verojatnost' [Probability]*. M.:Nauka. 2007. 552 p. (In Russ.)

Д.В. ЕФАНОВ, В.В. ХОРОШЕВ  
**МЕТОД УПОРЯДОЧЕНИЯ ПРОЦЕДУР РАЗБИЕНИЯ  
СОСТОЯНИЙ ПРОЦЕДУРАМИ С ДВУМЯ И ТРЕМЯ  
ИСХОДАМИ С УЧЕТОМ ИХ СТОИМОСТИ И ВЕСОВ  
СОСТОЯНИЙ**

*Ефанов Д.В., Хорошев В.В. Метод упорядочения процедур разбиения состояний процедурами с двумя и тремя исходами с учетом их стоимости и весов состояний.*

**Аннотация.** Описывается метод упорядочения процедур разбиения состояний процедурами с двумя и тремя исходами. При этом использованы терминология и методы теории вопросников, а сама последовательность процедур разбиения определена как неоднородный вопросник с вопросами, имеющими два и три варианта ответа. Этот класс вопросников является особым и выделен авторами в класс бинарно-тернарных и интересен тем, что это наиболее простой класс неоднородных вопросников. Кроме того, увеличение числа ответов какого-либо вопроса на практике также может дать выигрыш в параметрах вопросников, в том числе в показателе его эффективности – средней цене обхода. Отмечается, что использование бинарно-тернарных вопросников на практике позволяет уменьшить среднее время идентификации событий по вопроснику, что крайне важно в тех приложениях вопросников, в которых имеется ограничение на время идентификации событий, например в системах критического применения. Приводится метод оптимизации бинарно-тернарных вопросников, основанный на поиске наиболее предпочтительных вопросов для каждого подмножества идентифицируемых событий. Выбор предпочтительных вопросов основан на установлении отношений сравнения между ними. Описаны все возможные виды сравнимости двух вопросов с двумя ответами, двух вопросов с тремя ответами, а также вопроса с двумя ответами и вопроса с тремя ответами. Приведен пример получения математического выражения для функции, характеризующей предпочтительность вопросов друг перед другом, а также обобщенная формула выбора наиболее предпочтительного вопроса для любых неоднородных вопросников. Сформулирован алгоритм метода упорядочения вопросов, который позволяет за полиномиальное время построить бинарно-тернарный вопросник с наименьшей ценой обхода. Приведен пример оптимизации бинарно-тернарного вопросника по представленному методу.

**Ключевые слова:** техническое диагностирование; поиск неисправности; вопросник; бинарно-тернарный вопросник; оптимизация; отношения сравнения между вопросами; сравнимые вопросы.

**1. Введение.** До сих пор во многих областях науки и техники велика доля участия человека в процессе эксплуатации систем и устройств управления. Примером тому является транспортная отрасль, где выполняемые диспетчерами, водителями и оперативным персоналом функции крайне сложно поддаются автоматизации [1-5]. В этой связи важнейшее значение имеет своевременное принятие решений человеком, что особенно проявляется при возникновении нештатных ситуаций в процессе управления (например, наличие конфликтов при управлении, возникновение неисправностей компонентов, реализация

запланированных технологических окон (простоев производства для проведения работ по обслуживанию и т.д.). Для повышения эффективности процессов эксплуатации устройства и системы управления снабжаются диагностическим обеспечением, которое способно автоматически измерять ответственные параметры узлов и компонентов, выводить полученную информацию пользователям, а также проводить оценку получаемых данных, то есть осуществлять мониторинг состояния. Использование автоматических систем диагностирования и мониторинга позволяет, в том числе повысить отказоустойчивость систем управления за счет выявления развивающихся дефектов на стадиях предотказных (докритических) состояний [6]. Своевременная реакция оперативного персонала на такие состояния устройств автоматизации дает возможность предотвратить отказ и нарушения в технологических процессах управления. А в тех случаях, когда отказа избежать не удастся, использование системы мониторинга позволяет сократить время на поиск и восстановительные работы.

Использование автоматических систем диагностирования и мониторинга крайне важно в таких областях, где останов технологического процесса невозможен (системы критического действия) или крайне негативно сказывается на экономических составляющих. К таковым, например, относятся водный транспорт, авиация, железнодорожный комплекс и так далее. По этой причине развитие систем диагностирования и мониторинга таких объектов приобретает наивысший приоритет. Они становятся не просто средством обработки данных путем сравнения с установленными пороговыми предельными значениями, как в большинстве современных автоматизированных систем управления, но средствами мониторинга, снабженными инструментами машинного анализа и поддержки принятия решений техническим персоналом по использованию объектов диагностирования по назначению и выбору способов их технического обслуживания [6].

Важным вопросом в развитии технических средств диагностирования и мониторинга является создание подсистем поддержки принятия решений, которые на основании исторических данных (времени и условий эксплуатации, дат и времен обслуживания и ремонтов, имеющихся детальных статистических данных использования и прочих данных) и измеряемых в режиме реального времени данных об ответственных параметрах устройств могут давать подсказки обслуживающему персоналу. В настоящее время указанная задача во многих отраслях решается на основе экспертного анализа обслуживающим персоналом, который порой затрачивает значительное время на решение задачи идентификации тех или иных диагностических событий [6]. В этой связи полезными

могут оказаться развитые во второй половине XX – начале XXI столетия методы технической диагностики, и в том числе известной теории вопросников (теории, в которой основным объектом является вопросник, образованный некоторым множеством вопросов или процедур, которые позволяют разделить полное множество событий на одноэлементные подмножества; можно сказать, что вопросник – это последовательность процедур разбиения исходного множества событий на одноэлементные подмножества) [7-17] для автоматического построения условных алгоритмов поиска неисправностей в программных средствах систем технического диагностирования и мониторинга.

Так как для систем критического действия важнейшим фактором является время диагностирования [18, 19], то возникает задача поиска такой последовательности проверок (вопросов) (или, другими словами, построения алгоритма диагностирования), которая даст положительный результат за время, не превосходящее установленное для данной процедуры. Не всегда это возможно сделать при использовании вопросов с числом ответов, равным двум. Уменьшить время можно за счет использования вопросов с числом ответов, большим или равным трем. Обратим внимание читателя на особенный класс вопросников – вопросники, число ответов на каждый из вопросов, в которых может быть равным только двум и трем. Это наиболее простые неоднородные (в смысле числа ответов на вопросы) вопросники, которые могут использоваться на практике. В данной работе приводится описание *метода упорядочения вопросов*, позволяющего за полиномиальное время строить вопросник, который дает наименьшее среднее время идентификации событий (в технической диагностике – поиска неисправности) [11]. Использование данного метода на практике при обработке данных, поступающих в реальном масштабе времени, может оказаться гораздо эффективнее тех методов, которые обладают большой трудоемкостью построения алгоритмов диагностирования [20-30]. Так как достижение автоматическими средствами мониторинга высокой полноты и глубины диагностирования на практике не всегда возможно, то при большом числе операций использование таких методов будет приводить к задержкам в выдаче рекомендаций для поиска неисправностей.

**2. Вопросники, образованные вопросами с двумя и тремя ответами.** Говорить о вопросниках с вопросами, имеющими по два и три ответа, целесообразно в том случае, если результаты измерений значений позволяют в один и тот же момент времени идентифицировать два или три события (или подмножества ответов). Например, измеренное значение какого-либо параметра  $S$  может дать ответ на вопрос  $S \in S_q$  или

$S \in S_b$ , или  $S \in S_c$ , где  $S_a, S_b, S_c$  – множества значений, соответствующих событиям  $a, b$  и  $c$  (в диагностике – состояниям объекта диагностирования). Примеры таких вопросов из области железнодорожной автоматики представлены в [31, 32]. Наличие вопросов, дающих сразу три варианта ответов, позволяет на практике сократить число измерительных процедур, что влияет и на среднее время идентификации событий. Поэтому класс вопросников с вопросами, имеющими по два и три ответа, является крайне важным.

*Определение 1.* Вопросник, который включает только вопросы с двумя и тремя ответами и в котором имеется по крайней мере один вопрос с двумя и один вопрос с тремя ответами, назовем бинарно-тернарным вопросником.

Обозначим далее бинарно-тернарный вопросник как *BTQ* (*binary-ternary questionnaire*).

Вернемся к теории вопросников и напомним читателю основные ее понятия [7, 10].

Вопросник – это совокупность множества идентифицируемых событий  $S = \{s_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , и множества  $\Pi = \{\pi_j\}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , необходимых для разделения множества событий вопросов (иными словами, модель вопросника можно представить двойкой множеств  $\langle S, \Pi \rangle$ ). Если вопросы таковы, что позволяют разделить исходное множество событий на одноэлементные подмножества, то говорят, что решается задача полной идентификации, в противном случае решается задача неполной идентификации. При решении задачи идентификации учитывают такие параметры, как «важность» идентифицируемого события и «стоимость» постановки каждого вопроса. Показателем «важности» в технической диагностике может являться вероятность возникновения дефекта, а показателем «стоимости» проверки – затраты на ее реализацию (например, время ее проведения или трудоемкость). Таким образом, задача идентификации событий может быть решена различными способами с различными затратами (ценой), что определяется последовательностью постановки вопросов. Центральной задачей теории вопросников является задача оптимизации вопросника по критерию минимума средней цены идентификации события.

Для каждого события в вопроснике задается значение весового коэффициента  $\omega(s_i)$ ,  $s_i \in S$ , а для каждого вопроса фиксируется цена  $c(\pi_j)$  и весовой коэффициент  $\omega(\pi_j)$ ,  $\pi_j \in \Pi$ . Весовой коэффициент каждого вопроса складывается из суммы весовых коэффициентов событий, входящих в подмножества его ответов. При этом весовой коэффициент вопроса зависит от последовательности его постановки.

Часто весовые коэффициенты нормируют (тем самым внося относительную важность ответа на вопрос) и принимают за вероятность идентифицируемых событий:

$$p(s_i) = \frac{\omega(s_i)}{\sum_{i=1}^m \omega(s_i)}. \quad (1)$$

При этом справедливо равенство:

$$\sum_{i=1}^m p(s_i) = 1. \quad (2)$$

Число ответов на каждый вопрос называют его основанием и обозначают как  $\alpha(\pi_j)$ . Если основания всех вопросов одинаковые, то вопросник является однородным (гомогенным). Вопросники, для которых  $\forall \pi_j \in \Pi, \alpha(\pi_j) = 2$ , называются бинарными вопросниками, или однородными вопросниками с основаниями вопросов  $\alpha(\pi_j) = 2$  (их также называют дихотомичными [10]). Отдельно рассматривают однородные вопросники с основаниями всех вопросов  $\alpha(\pi_j) > 2$ , например вопросники с вопросами, имеющими основания всех вопросов  $\alpha(\pi_j) = 3$ . Вопросники с вопросами с различающимися основаниями, называются неоднородными (гетерогенными).

На рисунке 1 приведена расширенная классификация вопросников по признаку оснований вопросов.

В зависимости от соотношений между ценами вопросов и весами идентифицируемых событий выделяют также особые классы вопросников: с равноценными и неравноценными вопросами, а также с равновесными и неравновесными событиями [10]. Могут также быть выделены такие типы вопросников для конкретных случаев (например, в технической диагностике – для устройств и систем автоматизации), которые обладают динамическими характеристиками, другими словами, переменными во времени (в зависимости от режима функционирования объекта) значениями цен и оснований вопросов, а также весов событий [11, 33]. Такие вопросники условимся называть *динамическими вопросниками*.

Вернемся к рассмотрению *ВТQ*. Далее при описаниях и в формулах каждому ответу вопроса будем присваивать идентификатор, например, для вопроса с двумя ответами это 1 и 0, для вопроса с тремя ответами – 2, 1 и 0.



Рис. 1. Классификация вопросников по признаку оснований

Для каждого конкретного вопросника может быть определена средняя стоимость идентификации множества событий  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ , называемая *ценой обхода* вопросника:

$$C = \sum_{j=1}^n p(\pi_j) c(\pi_j). \quad (3)$$

Различные вопросники могут иметь различное значение цены обхода. Вопросник для заданных множеств идентифицируемых событий и вопросов, характеризующийся минимальной ценой обхода, называется *оптимальным*.

*BTQ* являются простейшими неоднородными вопросниками, поэтому для них могут быть напрямую использованы известные точные методы оптимизации (например, ветвей и границ и динамического программирования [7, 10]) или же адаптированы и использованы известные методы оптимизации вопросников, включающие только вопросы с двумя ответами, которые позволяют получать оптимальный или близкий к оптимальному вопросник за полиномиальное время [11].

*Постановка задачи.* Адаптируем метод построения вопросника на основе выбора на каждом этапе разбиения наиболее предпочтительного вопроса, ранее применяемый только при оптимизации вопросников с вопросами, которые имеют по два ответа, к оптимизации неоднородных вопросников с двумя и тремя ответами.

### **3. Метод построения вопросника на основе выбора наиболее предпочтительных вопросов на каждом этапе разбиения.**

**3.1. Сравнимость вопросов в бинарно-тернарном вопроснике.** В *BTQ* встречаются только вопросы с двумя и тремя ответами, которые разбивают исходное множество идентифицируемых событий на два и три подмножества ответов, такие что:

$$S = S_{\pi_1}^0 \cup S_{\pi_1}^1 = S_{\pi_2}^0 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2.$$

Если вопрос с двумя ответами задается на неполном множестве идентифицируемых событий, то проверка может оказаться либо эффективной, либо неэффективной (под эффективной проверкой подразумевается результативность деления; к эффективности можно отнести меру разбиения). В первом случае нулевому и единичному ответам будут соответствовать непустые множества событий. Во втором случае все события будут полностью включены в подмножества одного из ответов на вопрос. При постановке вопроса с тремя ответами рассуждения аналогичны, только возможны разбиения на три, два и одно подмножества. Первый вариант сохранит основание вопроса, второй приведет к его уменьшению и третий будет соответствовать неэффективной постановке вопроса (постановка вопроса не даст нового разбиения и смысла иметь не будет). Таким образом, в процессе постановки вопроса с тремя ответами на неполном множестве событий основание вопроса может уменьшиться, а какому-либо из ответов будет соответствовать пустое множество событий.

*Определение 2.* Назовем два вопроса сравнимыми, если подмножество какого-либо ответа одного из них является собственным подмножеством какого-либо ответа на другой вопрос.

Обратимся к рассмотрению вариантов сравнимости для двух вопросов с двумя ответами – вопросов  $\pi_1$  и  $\pi_2$ .

Если бы оба подмножества ответов на вопрос  $\pi_1$  на каком-либо подмножестве идентифицируемых событий были равны обоим подмножествам ответов на вопрос  $\pi_2$ , то это были бы два идентичных по результатам (но не по формулировкам) вопроса. Случай, при котором подмножество ответов на один из вопросов совпадает с одним подмножеством ответов на второй вопрос, также отпадает. Положим, например,

что  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0$ , тогда:  $S_{\pi_1}^1 = S \setminus S_{\pi_1}^0$  и  $S_{\pi_2}^1 = S \setminus S_{\pi_2}^0$ . Но так как  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0$ , имеем, что  $S_{\pi_1}^1 = S_{\pi_2}^1$ . Другими словами, оба вопроса дают идентичные разбиения какого-либо из подмножеств идентифицируемых событий. Остается два варианта отношений сравнения между вопросами с двумя ответами:

$$1) S_{\pi_1}^0 \subset S_{\pi_2}^0, S_{\pi_1}^1 \supset S_{\pi_2}^1;$$

$$2) S_{\pi_1}^0 \supset S_{\pi_2}^0, S_{\pi_1}^1 \subset S_{\pi_2}^1.$$

Однако, так как вопросы равнозначны, замена  $\pi_1$  на  $\pi_2$  и наоборот в первом выражении даст второе выражение. То же касается и замен во втором выражении.

Таким образом, первый и второй случаи сравнимости идентичны с точностью до сравнения двух (не важно каких) бинарных вопросов [11].

*Утверждение 1.* Для вопросов с двумя ответами существует один вариант сравнимости.

В таблице 1 приведен единственный вариант сравнимости для вопросов с двумя ответами.

Таблица 1. Варианты сравнимости для вопросов с двумя ответами

Тип	Линейная диаграмма	Пример
1		$\pi_1 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4, s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1\}, \{s_2, s_3, s_4, s_5, s_6\}$

Рассмотрим варианты сравнимости для случая использования вопроса  $\pi_1$  с двумя ответами и вопроса  $\pi_2$  с тремя ответами.

Пусть подмножество одного из ответов на вопрос  $\pi_1$  совпадает с подмножеством какого-либо из ответов на вопрос  $\pi_2$ , например  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0$ . В этом случае получаем:  $S_{\pi_1}^1 = S \setminus S_{\pi_1}^0$  и  $(S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2) = S \setminus S_{\pi_2}^0$ .

Но так как  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0$ , получаем  $S_{\pi_1}^1 = (S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2)$ .

Другие случаи сравнимости для рассматриваемых вопросов  $\pi_1$  и  $\pi_2$  определяются тем, что совпадающих подмножеств ответов на различные вопросы нет. Пусть  $S_{\pi_1}^0 \subset S_{\pi_2}^0$ , что равносильно тому, что

$S_{\pi_2}^0 = S_{\pi_1}^0 \cup S^*$ , где  $S^* \subset S_{\pi_1}^1$  – некоторое подмножество ответов на вопрос  $\pi_1$ , дополняющего подмножество  $S_{\pi_1}^0$  до подмножества  $S_{\pi_2}^0$ . Учитывая соотношения  $S_{\pi_1}^1 = S \setminus S_{\pi_1}^0$  и  $(S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2) = S \setminus S_{\pi_2}^0$ , получаем, что  $S_{\pi_1}^1 = (S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2) \cup S^*$ . Пусть  $S_{\pi_1}^0 \supset S_{\pi_2}^0$ . Тогда  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^1 \cup S^*$ , где  $S^* \subset S \setminus S_{\pi_2}^0$  – некоторое подмножество ответов на вопрос  $\pi_2$ , дополняющего подмножество ответа  $S_{\pi_2}^0$  до подмножества  $S_{\pi_1}^0$ . Кроме того,  $S_{\pi_1}^1 \subset S \setminus S_{\pi_2}^0$ ,  $S \setminus S_{\pi_2}^0 = (S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2)$ . В этом случае возможны два варианта сравнимости. Первый вариант заключается в том, что выполняется соотношение  $S_{\pi_2}^1 \subset S^*$  либо  $S_{\pi_2}^2 \subset S^*$  и, соответственно,  $S_{\pi_1}^1 \subset S_{\pi_2}^2$  либо  $S_{\pi_1}^1 \subset S_{\pi_2}^1$ . Следует отметить, что данный случай сравнимости ввиду равнозначности ответов на вопросы идентичен рассмотренному выше варианту с условием  $S_{\pi_1}^0 \subset S_{\pi_2}^0$ . Второй вариант заключается в том, что выполняется соотношение  $S_{\pi_2}^1 \supset S^*$  либо  $S_{\pi_2}^2 \supset S^*$  и, соответственно,  $S_{\pi_1}^1 \supset S_{\pi_2}^2$  либо  $S_{\pi_1}^1 \supset S_{\pi_2}^1$ .

Исходя из рассмотренных выше вариантов сравнимости для вопросов с двумя и тремя ответами можно заключить следующее.

*Утверждение 2.* Для вопросов с двумя и тремя ответами существует три варианта сравнимости.

В таблице 2 приведены все случаи сравнимости для вопросов с двумя и тремя ответами.

Аналогично рассматриваются варианты сравнимости для двух вопросов с тремя ответами (таблица 3).

При варианте равенства двух подмножеств ответов на оба вопроса, например  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0$ , случай становится аналогичным рассмотрению двух вопросов с двумя ответами. Здесь возможны две сравнимости: либо  $S_{\pi_1}^1 \supset S_{\pi_2}^1$  и  $S_{\pi_1}^2 \subset S_{\pi_2}^2$ , либо наоборот.

Возможен также вариант сравнимости вопросов, при котором выполняются соотношения:  $S_{\pi_1}^0 = S_{\pi_2}^0 \cup S_{\pi_2}^1$  и  $S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^2 = S_{\pi_2}^2$ . Другими словами, одно из подмножеств ответов на первый вопрос полностью состоит из каких-либо двух подмножеств ответов на второй вопрос и наоборот.

Таблица 2. Варианты сравнимости вопросов с двумя и тремя ответами

Тип	Линейная диаграмма	Пример
1		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5\}, \{s_6\}$
2		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{s_5\}, \{s_6\}$
3		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4, s_5\}, \{s_6\}$

Если все три подмножества ответов на каждый из вопросов различны, то можно выделить три случая сравнимости, характеризуемые следующими условиями:

- 1)  $S_{\pi_1}^0 \supset (S_{\pi_2}^0 \cup S_{\pi_2}^1)$  и  $(S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^2) \subset S_{\pi_2}^2$ ;
- 2)  $S_{\pi_1}^0 \supset S_{\pi_2}^0$ ,  $S_{\pi_1}^1 \subset S_{\pi_2}^1$  и  $S_{\pi_1}^2 \supset S_{\pi_2}^2$ ;
- 3)  $S_{\pi_1}^0 \supset S_{\pi_2}^0$ ,  $S_{\pi_1}^2 \subset S_{\pi_2}^2$ ,  $S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_2}^1 = S^*$ ;  $S_{\pi_1}^1 \subset S^*$ ,  $S_{\pi_2}^1 \subset S^*$ .

Таблица 3. Варианты сравнимости для вопросов с тремя ответами

Тип	Линейная диаграмма	Пример
1		$\pi_1 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4, s_5\}, \{s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}, \{s_5, s_6\}$
2		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4, s_5\}, \{s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$
3		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}, \{s_5\}, \{s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2\}, \{s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$
4		$\pi_1 = \{s_1, s_2, s_3\}, \{s_4\}, \{s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4, s_5\}, \{s_6\}$
5		$\pi_1 = \{s_1, s_2\}, \{s_3, s_4\}, \{s_5, s_6\}$ $\pi_2 = \{s_1\}, \{s_2, s_3\}, \{s_4, s_5, s_6\}$

Анализ показывает, что других случаев отношений сравнимости для двух вопросов с тремя ответами не существует.

*Утверждение 3.* Для вопросов с тремя ответами существует пять вариантов сравнимости.

Наличие установленных видов сравнимости вопросов позволяет перейти к выбору наиболее предпочтительного вопроса из сравниваемых.

**3.2. Предпочтения вопросов в бинарно-тернарном вопросе.** Среди сравнимых между собой вопросов может быть выбран такой вопрос, который будет более предпочтительным перед другим.

*Определение 3.* Вопрос  $\pi_1$  является предпочтительнее вопроса  $\pi_2$  ( $\pi_1 \succ \pi_2$ ), если при постановке первым вопроса  $\pi_1$ , а вторым вопроса  $\pi_2$ , цена обхода полученного вопросника будет меньше, чем в противоположном случае.

Путем рассмотрения каждого из приведенных выше случаев вариантов сравнимости вопросов (см. таблицы 1-3) нетрудно установить общие закономерности, присущие сравниваемым вопросам, а также вывести выражение, которое определяет функцию предпочтения.

*Определение 4.* Функцией предпочтения для двух вопросов  $\pi_1$  и  $\pi_2$  называется такая функция  $\Phi(\pi_1, \pi_2)$ , величина которой показывает, какой из вопросов более предпочтительный.

В [11] выведено выражение для функции предпочтения при рассмотрении только вопросов с двумя ответами, а в [34] – только вопросов с тремя ответами. Для примера выведем выражение для функции предпочтения при сравнении двух вопросов с двумя и тремя ответами. Приведем выкладки, положим, для второго случая из таблицы 2. Два вопроса  $\pi_1$  и  $\pi_2$  разбивают исходное множество событий на следующие подмножества:

$$\begin{aligned}\pi_1 : S_{\pi_1}^0 \cup S_{\pi_1}^1 &= S; \\ \pi_2 : S_{\pi_2}^0 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_2}^2 &= S.\end{aligned}$$

Существует два варианта построения вопросника: сначала задается вопрос  $\pi_1$ , а затем –  $\pi_2$  (рис. 2а) или наоборот (рис. 2б). Соответственно, вопросники  $Q(\pi_1\pi_2)$  и  $Q(\pi_2\pi_1)$ . Определим цены обхода вопросников в каждом из представленных случаев.

С учетом (3) цена обхода вопросника  $Q(\pi_1\pi_2)$  записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned}C_{Q(\pi_1\pi_2)} &= 1 \cdot c(\pi_1) + c(S_{\pi_2}^2) + c(S_{\pi_2}^1) + c(S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0) + \\ &+ c(S_{\pi_1}^0) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^2 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0)} p_j.\end{aligned}\quad (4)$$

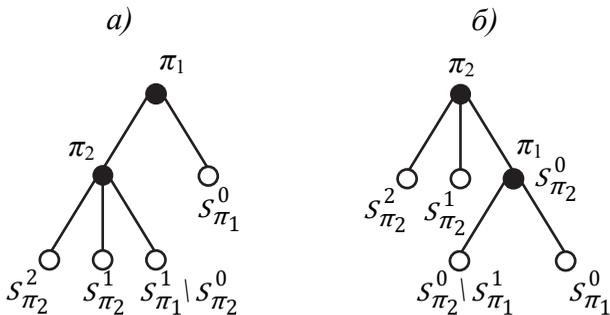


Рис. 2. Варианты последовательности вопросов

Здесь и далее в формулах цена разбиения конкретного подмножества событий обозначена как  $c(S_{\pi_j}^k)$ ,  $k \in \{0,1,2\}$ ,  $j \in \{1,2,\dots,n\}$ .

Аналогично (4) записывается выражение для цены обхода вопросника  $Q(\pi_2\pi_1)$ :

$$C_{Q(\pi_2\pi_1)} = 1 \cdot c(\pi_2) + c(S_{\pi_2}^2) + c(S_{\pi_2}^1) + c(S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1) + c(S_{\pi_1}^0) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^0)} p_j. \quad (5)$$

Далее определим разницу цен обхода вопросников  $Q(\pi_2\pi_1)$  и  $Q(\pi_1\pi_2)$ :

$$\begin{aligned} \Delta C &= C_{Q(\pi_2\pi_1)} - C_{Q(\pi_1\pi_2)} = \\ &= \left( c(\pi_2) + c(S_{\pi_2}^2) + c(S_{\pi_2}^1) + c(S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1) + c(S_{\pi_1}^0) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^0)} p_j \right) - \\ &- \left( c(\pi_1) + c(S_{\pi_2}^2) + c(S_{\pi_2}^1) + c(S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0) + c(S_{\pi_1}^0) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^2 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0)} p_j \right) = \\ &= c(\pi_2) - c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^0)} p_j - c(\pi_1) - c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^2 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0)} p_j. \end{aligned} \quad (6)$$

При условии  $\Delta C < 0$  вопрос  $\pi_2$  будет предпочтительнее вопроса  $\pi_1$ . Это условие может быть записано в виде:

$$c(\pi_2) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^0)} p_j < c(\pi_1) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^2 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0)} p_j. \quad (7)$$

Учитывая неравенство (7), введем в рассмотрение выражение, описывающее функцию предпочтения:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = \frac{c(\pi_2) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^0 \setminus S_{\pi_1}^1 \cup S_{\pi_1}^0)} p_j}{c(\pi_1) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2}^2 \cup S_{\pi_2}^1 \cup S_{\pi_1}^1 \setminus S_{\pi_2}^0)} p_j}. \quad (8)$$

Если  $\Phi(\pi_1, \pi_2) < 1$ , то вопрос  $\pi_1$  предпочтительнее вопроса  $\pi_2$ , если  $\Phi(\pi_1, \pi_2) > 1$ , то наоборот; при  $\Phi(\pi_1, \pi_2) = 1$  вопросы  $\pi_1$  и  $\pi_2$  равнозначны.

Нетрудно подобные вычисления проделать и для всех введенных ранее отношений сравнимости вопросов в *BTQ*.

Анализируя выражения, которые описывают функции предпочтения для различных вариантов сравнимости двух вопросов  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , можно прийти к выводу, что они все имеют одинаковую форму.

*Утверждение 4.* Обобщенная функция предпочтения  $\Phi(\pi_1, \pi_2)$  для вопросов с различными основаниями  $\alpha \in \{2; 3; \dots, (n-1)\}$ , использующихся для идентификации множества событий  $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ , определяется по формуле:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = \frac{c(\pi_1) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in (S_{\pi_1} \setminus S_{\pi_2})} p_j}{c(\pi_2) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in (S_{\pi_2} \setminus S_{\pi_1})} p_j}, \quad (9)$$

где  $p_j$  – нормированные весовые коэффициенты тех событий, которые входят в подмножества  $S_{\pi_1} \setminus S_{\pi_2}$  и  $S_{\pi_2} \setminus S_{\pi_1}$ .

Формула (9) является универсальной и позволяет работать не только с вопросами в *BTQ*, но и с вопросами с большими основаниями.

Выбор наиболее предпочтительного вопроса для множества, состоящего из более чем двух вопросов, осуществляется путем разбиения

их на  $C_n^2$  пар сравнимых вопросов и построения графа предпочтений по методике, изложенной в [11]. Последующий анализ графа предпочтения с учетом его особенностей дает возможность выбора наиболее предпочтительного вопроса. Также задача может быть решена путем использования матриц парных сравнений [35].

### **3.3. Алгоритм построения вопросника на основе выбора наиболее предпочтительного вопроса на каждом этапе разбиений.**

*Алгоритм оптимизации ВТО содержит следующие шаги:*

1. Осуществляется попарное сравнение вопросов.
2. Определяется, возможно ли установление отношений между всеми вопросами? Если нет, то выбирается другой метод оптимизации, если да – осуществляется переход к следующему пункту алгоритма.
3. Формируются пары вопросов.
4. Для каждой пары определяется функция предпочтения  $\Phi(\pi_1, \pi_2)$  и устанавливается наиболее предпочтительный вопрос.
5. Осуществляется построение графа сравнений, а затем преобразование его в граф предпочтений [36].
6. Анализируется граф предпочтений и выбирается наиболее предпочтительный вопрос.
7. Осуществляется постановка выбранного вопроса и разбиение исходного множества событий на подмножества.
8. Полученные подмножества идентифицируемых событий анализируются и определяются те вопросы, которые на данных подмножествах имеют только один вариант ответа. Они не несут смысла на данном подмножестве и исключаются из рассмотрения.
9. Проверяется, все ли идентифицируемые события разделены. Если нет, то повторяются шаги 3-8 для каждого из подмножеств неразделенных событий. Если да, то искомый вопросник построен.
10. Конец алгоритма.

Основные шаги данного алгоритма связаны с определением сравнимости каждой пары вопросов, вычислением значения функции предпочтения  $\Phi(\pi_1, \pi_2)$  для каждой пары вопросов  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , построением графа предпочтения и выбором наиболее предпочтительного вопроса. Эти процедуры прodelываются последовательно от разделения полного множества событий до разделения каждого из получаемых подмножеств.

### **4. Пример оптимизации неоднородного вопросника, имеющего вопросы с двумя и тремя ответами.** Рассмотрим следующую задачу.

Пусть имеется множество вопросов  $\Pi = \{\pi_1 \div \pi_6\}$ , предназначенное для разделения следующего множества событий:  $S = \{s_1 \div s_9\}$ . Исходные данные, включая значения весовых коэффициентов идентифицируемых событий и цены вопросов, приведены в матричной форме в таблице 4. Построим оптимальный вопросник описанным выше методом.

Таблица 4. Анкета для исходного вопросника

$\pi_j$	$c(\pi_j)$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$	$s_5$	$s_6$	$s_7$	$s_8$	$s_9$
$\pi_1$	2	0	0	0	0	1	2	2	2	2
$\pi_2$	3	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$\pi_3$	4	0	0	1	1	1	1	1	2	2
$\pi_4$	5	0	1	1	1	1	1	1	1	2
$\pi_5$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1
$\pi_6$	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1
$p(s_i)$		0,01	0,01	0,05	0,2	0,4	0,3	0,01	0,01	0,01

Следуя алгоритму оптимизации, построим граф сравнений (рис. 3).

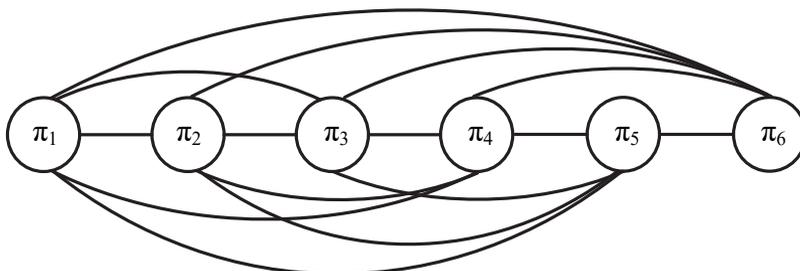


Рис. 3. Граф сравнений

Для каждой пары вопросов определим значение функции предпочтения:

$$\Phi(\pi_1, \pi_2) = \frac{c(\pi_1) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in \left( \begin{smallmatrix} s^0 \\ \pi_1 \cup s^2 \\ \pi_2 \end{smallmatrix} \right)} p_j}{c(\pi_2) + c(\pi_1) \sum_{p_j \in \left( \begin{smallmatrix} s^1 \\ \pi_2 \end{smallmatrix} \right)} p_j} = \frac{2 + 3 \cdot 0,60}{3 + 2 \cdot 0,90} = 0,79;$$

$$\Phi(\pi_1, \pi_3) = 0,74; \quad \Phi(\pi_1, \pi_4) = 0,72; \quad \Phi(\pi_1, \pi_5) = 0,90; \quad \Phi(\pi_1, \pi_6) = 0,79;$$

$$\Phi(\pi_2, \pi_3) = 0,49; \quad \Phi(\pi_2, \pi_4) = 0,44; \quad \Phi(\pi_2, \pi_5) = 0,79; \quad \Phi(\pi_2, \pi_6) = 0,76;$$

$$\Phi(\pi_3, \pi_4) = 0,98; \quad \Phi(\pi_3, \pi_5) = 0,99; \quad \Phi(\pi_3, \pi_6) = 0,99;$$

$$\Phi(\pi_4, \pi_5) = 0,99; \quad \Phi(\pi_4, \pi_6) = 0,99; \quad \Phi(\pi_5, \pi_6) = 0,98.$$

Так как значение  $\Phi(\pi_1, \pi_2) < 1$ , вопрос  $\pi_1$  предпочтительнее вопроса  $\pi_2$ :  $\pi_1 \succ \pi_2$ .

Анализируя полученные выражения для функций предпочтения, заключаем:

$$\begin{aligned} \pi_1 \succ \pi_3, \pi_1 \succ \pi_4, \pi_1 \succ \pi_5, \pi_1 \succ \pi_6, \\ \pi_2 \succ \pi_3, \pi_2 \succ \pi_4, \pi_2 \succ \pi_5, \pi_2 \succ \pi_6, \\ \pi_3 \succ \pi_4, \pi_3 \succ \pi_5, \pi_3 \succ \pi_6, \\ \pi_4 \succ \pi_5, \pi_4 \succ \pi_6, \pi_5 \succ \pi_6. \end{aligned}$$

Изобразим граф предпочтений для полученного случая (рис. 4). Дуги в графе указывают на сравнение вопросов попарно: дуга заходит в вершину вопроса  $\pi_i$ , являющегося предпочтительнее вопроса  $\pi_j$ . Из графа предпочтений следует, что в качестве корневого вопроса целесообразно выбрать вопрос  $\pi_1$ .

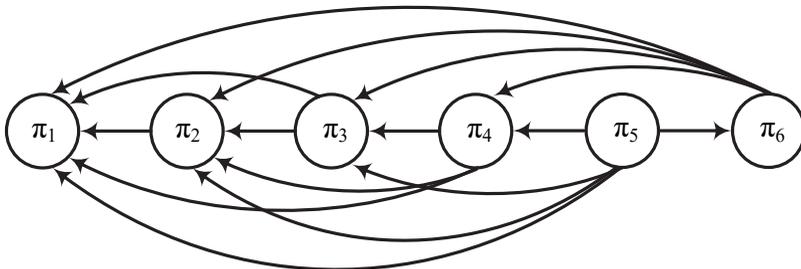


Рис. 4. Граф предпочтений

Произведем первое разбиение исходного множества событий (рис. 5).

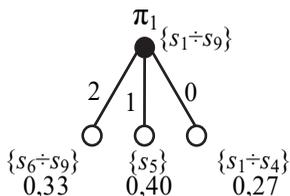


Рис. 5. Разбиение исходного множества событий на подмножества выбранным в качестве корневого вопросом

Далее рассмотрим каждое из полученных подмножеств с мощностями не менее 2:  $\{s_1 \div s_4\}$  и  $\{s_6 \div s_9\}$ . Определим наиболее предпочтительный вопрос для каждого из них.

На подмножестве  $\{s_6 \div s_9\}$  имеет смысл задавать вопросы  $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_6$ . Вопрос  $\pi_5$  нет смысла задавать, так как он не дает разбиений на рассматриваемом подмножестве событий. Анализируя данное подмножество, можно установить, что вопросы  $\pi_2$  и  $\pi_6$  являются эквивалентными в смысле разбиений выбранного подмножества событий (но не в формулировках) и имеют одинаковые подмножества, соответствующие их ответам. Выгоднее будет выбрать вопрос с наименьшей ценой.

Функции предпочтения вопросов на подмножестве  $\{s_6 \div s_9\}$  имеют следующие значения:

$$\Phi(\pi_2, \pi_3) = \frac{c(\pi_2) + c(\pi_3) \sum_{p_j \in S^2_{\pi_2}} p_j}{c(\pi_3) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in S^1_{\pi_3}} p_j} = \frac{3 + 4 \cdot 0,03}{4 + 3 \cdot 0,31} = 0,63;$$

$$\Phi(\pi_2, \pi_4) = 0,53; \quad \Phi(\pi_2, \pi_6) = 3; \quad \Phi(\pi_3, \pi_4) = 0,64;$$

$$\Phi(\pi_3, \pi_6) = 3,57; \quad \Phi(\pi_4, \pi_6) = 3,57.$$

Закключаем следующее:

$$\pi_2 \succ \pi_3, \quad \pi_2 \succ \pi_4, \quad \pi_6 \succ \pi_2, \quad \pi_3 \succ \pi_4, \quad \pi_6 \succ \pi_3, \quad \pi_6 \succ \pi_4.$$

Граф предпочтений для данного подмножества событий и подмножества вопросов представлен на рисунке 6. Из графа предпочтений видно, что наиболее предпочтительным является вопрос  $\pi_6$ .

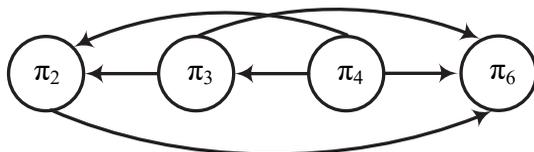


Рис. 6. Граф предпочтений для подмножества вопросов  $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_6$

На подмножестве  $\{s_1 \div s_4\}$  смысл имеют вопросы  $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$ . Вопрос  $\pi_6$  смысла не имеет. Анализируя данное подмножество, устанавливаем, что вопросы  $\pi_2$  и  $\pi_5$  являются эквивалентными. Соответственно, выгоднее будет задавать следующий вопрос с меньшей ценой. Функции предпочтения вопросов на подмножестве  $\{s_1 \div s_4\}$  для оставшихся вопросов такие:

$$\Phi(\pi_2, \pi_3) = \frac{c(\pi_2) + c(\pi_3) \sum_{p_j \in S^0_{\pi_2}} p_j}{c(\pi_3) + c(\pi_2) \sum_{p_j \in S^1_{\pi_3}} p_j} = \frac{3 + 4 \cdot 0,07}{4 + 3 \cdot 0,25} = 0,69;$$

$$\Phi(\pi_2, \pi_4) = 0,58; \quad \Phi(\pi_2, \pi_5) = 3; \quad \Phi(\pi_3, \pi_4) = 0,67;$$

$$\Phi(\pi_3, \pi_5) = 3,125; \quad \Phi(\pi_4, \pi_5) = 3,6.$$

Имеем:  $\pi_2 \succ \pi_3, \pi_2 \succ \pi_4, \pi_5 \succ \pi_2, \pi_3 \succ \pi_4, \pi_5 \succ \pi_3, \pi_5 \succ \pi_4$ .

Граф предпочтений для рассматриваемых вопросов изображен на рисунке 7. Путем анализа графа предпочтений получаем, что наиболее предпочтительным является вопрос  $\pi_5$ .

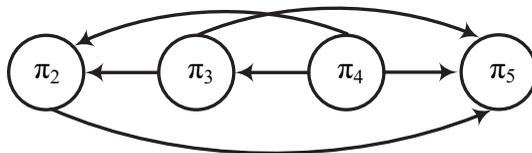


Рис. 7. Граф предпочтений для подмножества вопросов  $\pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5$

Рассматривая подмножества  $\{s_1 \div s_3\}$  и  $\{s_7 \div s_9\}$ , отмечаем, что они разбиваются вопросами  $\pi_3$  или  $\pi_4$ . В обоих случаях предпочтительнее оказывается вопрос  $\pi_3$ . Полученные двухэлементные подмножества на следующем этапе разбиваются единственным оставшимся вопросом  $\pi_4$ . Результат оптимизации представлен на рисунке 8.

Цена обхода оптимального вопросника равна:

$$C = \sum_{j=1}^n p(\pi_j) c(\pi_j) = 2 \cdot 1,00 + 1 \cdot 0,27 + 1 \cdot 0,33 + 4 \cdot 0,07 + 4 \cdot 0,03 + 5 \cdot 0,02 + 5 \cdot 0,02 = 3,2.$$

Аналогичный результат дают и другие методы оптимизации, например метод динамического программирования (сами выкладки здесь не приводятся). При этом, однако, точные методы оптимизации имеют экспоненциальную сложность, что увеличивает время, затрачиваемое на оптимизацию, по сравнению со временем оптимизации при использовании метода выбора наиболее предпочтительного вопроса на каждом этапе разбиения исходного множества событий [11].

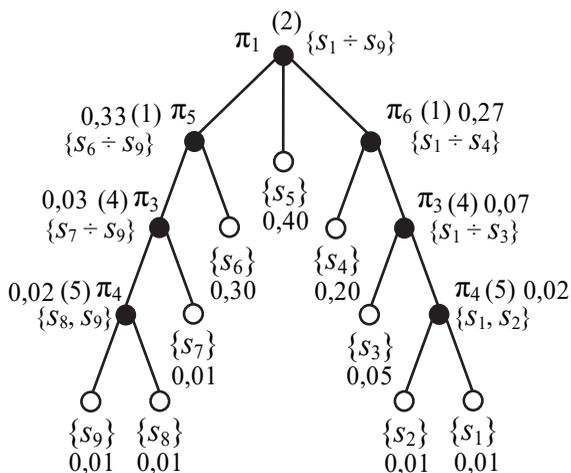


Рис. 8. Оптимальный вопросник

Следует отметить, что в данной работе не оценивалась трудоемкость алгоритма построения вопросника, так как верхней оценкой трудоемкости служит оценка трудоемкости применения данного метода к упорядочению процедур разбиения вопросами с двумя ответами, данная в [11]. Оптимальная последовательность получается за полиномиальное время.

**5. Заключение.** Бинарно-тернарные вопросники – это тот класс неоднородных вопросников, который естественно возникает при решении задач построения алгоритмов дискретного поиска и разбиения событий на подмножества с вопросами, имеющими два и три ответа. Если на исходном множестве вопросов какой-либо вопрос с тремя ответами всегда дает эти три варианта ответов, то на подмножестве событий он может давать как два, так и три ответа (а также давать всего один вариант ответа, т. е. не иметь смысла при постановке на данном подмножестве событий). Данный класс вопросников интересен еще и тем, что при его использовании возможно сокращение среднего времени идентифи-

кации событий, что крайне важно при условии его ограничения в реальных приложениях (в системах критического применения, например в области управления движением на железнодорожном транспорте [37]).

Представленный в статье метод оптимизации вопросников, имеющих только вопросы с двумя и с тремя ответами, позволяет строить вопросники с наименьшей ценой обхода с полиномиальной зависимостью от объема входных данных. Это обстоятельство позволяет на практике применять данный метод не только единожды для зафиксированного распределения вероятностей идентифицируемых событий, но и строить так называемые *динамические вопросники* – такие вопросники, для которых возможны изменения параметров цен, весов и оснований вопросов во времени в зависимости от структуры объекта и режимов использования. Подобные вопросники могут эффективно применяться при синтезе систем поддержки принятия решений обслуживающим персоналом в действующих подсистемах диагностирования и мониторинга управляющих систем.

Адаптированный для использования с вопросниками, включающими в себя вопросы с двумя и тремя ответами, метод упорядочения вопросов может применяться и для оптимизации как однородных, так и неоднородных вопросников. Ограничением при этом является только возможность установления вариантов сравнимости вопросов, число которых возрастает при увеличении числа ответов на рассматриваемые вопросы.

Дальнейшие исследования в предметной области данной работы связаны с изучением особенностей оптимизации вопросников с распространением представленного метода на другие виды неоднородных вопросников, а также на использование его при оптимизации вопросников с переменными параметрами. Кроме того, интересными являются практические приложения вопросников в области систем автоматизации и управления как на транспорте, так и в промышленности (развитие прикладной теории вопросников).

Авторы выражают благодарность сотрудникам лаборатории технической диагностики и отказоустойчивости Института проблем управления им. В. А. Трапезникова Российской академии наук Павлу Павловичу Пархоменко (доктору технических наук, члену-корреспонденту Российской академии наук, главному научному сотруднику) и Галине Петровне Аксёновой (старшему научному сотруднику) за обсуждение полученных результатов и полезные советы.

### Литература

1. *Pan D., Zheng Y., Zhang C.* On Intelligent Automatic Train Control of Railway Moving Automatic Block Systems Based on Multi-Agent Systems // Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. 2010. pp. 4471–4476.
2. *Hahanov V.* Cyber Physical Computing for IoT-driven Services // Springer. 2018. 279 p.

3. *Sedykh D., Gordon M., Zuyev D., Skorokhodov A.* Analysis of the Amplitude and Phase-Manipulated Signals of Automation Devices via Bluetooth Technology // Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2018. pp. 703–710.
4. *Heidmann L.* Smart Point Machines: Paving the Way for Predictive Maintenance // Signal+Draht. 2018. vol. 110. pp. 70–75.
5. *Arend L., Pott L., Hoffmann N., Schanck R.* ETCS Level 2 without GSM-R // Signal+Draht. 2018. vol. 110. pp. 18–28.
6. *Ефанов Д.В.* Функциональный контроль и мониторинг устройств железнодорожной автоматики и телемеханики // СПб.: ФГБОУ ВО ПГУПС. 2016. 171 с.
7. *Пархоменко П.П.* Теория вопросников (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1970. № 4. С. 140–159.
8. *Duncan G.* Heterogeneous Questionnaire Theory // SIAM Journal on Applied Mathematics. 1974. vol. 27. no. 1. pp. 59–71.
9. *Picard C.F.* Graphs and Questionnaires // Elsevier. 1980. 431 p.
10. *Пархоменко П.П., Согомонян Е.С.* Основы технической диагностики (оптимизация алгоритмов диагностирования, аппаратурные средства) // М.: Энергоатомиздат. 1981. 320 с.
11. *Аржененко А.Ю., Чугаев Б.Н.* Оптимальные бинарные вопросники // М.: Энергоатомиздат. 1989. 128 с.
12. *Аржененко А.Ю., Бондаренко А.В.* Оптимизация бинарных вопросников методом толерантной замены // Электронное моделирование. 1990. № 3. С. 53–57.
13. *Аржененко А.Ю., Бондаренко А.В.* Алгоритм выбора оптимальной структуры неизбыточного компактного вопросника // Автоматика и телемеханика. 1991. № 5. С. 163–169.
14. *Пархоменко П.П.* Вопросники и организационные иерархии // Автоматика и телемеханика. 2010. № 6. С. 163–174.
15. *Аржененко А.Ю., Вестяк В.А.* Модификация метода толерантных перестановок в почти равномерных компактных анкетах // Автоматика и телемеханика. 2012. № 7. С. 109–118.
16. *Аржененко А.Ю., Вестяк В.А.* Дискретный поиск. Теория вопросников // М.: МАИ. 2012. 159 с.
17. *Чугаев Б.Н., Аржененко А.Ю.* Оптимальная идентификация случайных событий // Статистика и экономика. 2013. № 2. С. 188–190.
18. *Gerasimenko K., Hahanov V., Bani Amer T., Pryimac A.* Method for Functional Testing Critical Control Systems // Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2015. pp. 149–153.
19. *Drozdz A. et al.* Objects and Methods of On-Line Testing: Main Requirements and Perspectives of Development // Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016). 2016. pp. 72–76.
20. *Ubar R.* Test Synthesis with Alternative Graphs // IEEE Design & Test of Computers. 1996. vol. 13. no. 1. pp. 48–57.
21. *Копкин Е.В., Чукуров В.А., Алейник В.В., Лазутин О.Г.* Алгоритм построения гибкой программы диагностирования технического объекта по критерию ценности получаемой информации // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 4(41). С. 106–130.
22. *Palanichamy M., Mohammad A., Larsen B.B., Hahanov V.* Selective Algorithms for Built-In Self-Test and Self-Diagnosis in Embedded SRAMS // Journal of Low Power Electronics. 2015. vol. 11. no. 4. pp. 541–551.
23. *Сеньченков В.И., Моторин В.М., Грушковский П.А.* Построение оптимальных алгоритмов диагностирования с ограничениями методом динамического программирования // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 10. С. 783–791.
24. *Сеньченков В.И.* Математический аппарат диагностирования сложных технических систем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2016. Т. 59. № 7. С. 547–557.

25. *Hahanov V. et al.* Quantum sequencer for the minimal test synthesis of black-box functionality // Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 445–450.
26. *Lu B. et al.* An Novel Testing Sequence Optimization Method under Dynamic Environments // 2018 10th International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS). 2018. pp. 479–483.
27. *Huang X., Wang X., Tian Y.* Research on Transformer Fault Diagnosis Method based on GWO Optimized Hybrid Kernel Extreme Learning Machine // 2018 Condition Monitoring and Diagnosis (CMD). 2018. pp. 1–5.
28. *Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов: монография // М.: РАН. 2018. 314 с.
29. *Сеньченков В.И., Абсалямов Д.Р., Авсюкевич Д.А.* Задание множества диагностических параметров системы на основе теории функциональных пространств // Труды СПИИРАН. 2019. Т. 18. no. 4. С. 949–975.
30. *Сапожников В.В., Сапожников В.В., Ефанов Д.В.* Основы теории надежности и технической диагностики // Спб.: «Лань». 2019. 588 с.
31. *Сапожников В.В., Ефанов Д.В., Павлов А.Н.* Теория вопросников и поиск неисправностей в УКСПС // Автоматика, связь, информатика. 2012. № 1. С. 30–33.
32. *Efanov D.V., Khoroshev V.V., Osadchy G.V., Belyi A.A.* Optimization of Conditional Diagnostics Algorithms for Railway Electric Switch Mechanism Using the Theory of Questionnaires with Failure Statistics // Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 237–245.
33. *Аржененко А.Ю., Казакова О.Г., Неясов В.А.* Оптимизация бинарных вопросников, содержащих вопросы с переменной ценой // Автоматика и телемеханика. 1989. № 6. С. 139–149.
34. *Efanov D.V., Khoroshev V.V.* Ternary Questionnaires // Proceedings of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019). 2019. pp. 289–300.
35. *Микони С.В.* Теория принятия управленческих решений // СПб.: Лань. 2015. 448 с.
36. *Аржененко А.Ю., Казакова О.Г., Чугаев Б.Н.* Оптимизация бинарных вопросников // Автоматика и телемеханика. 1985. № 11. С. 138–144.
37. *Theeg G., Vlasenko S.* Railway Signalling & Interlocking // International Compendium. 2009. 448 p.

**Ефанов Дмитрий Викторович** – д-р техн. наук, доцент, профессор, кафедра автоматике, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте, Российский университет транспорта (МИИТ); руководитель направления, направление комплексных систем управления, ООО «ЛокоТех-Сигнал». Область научных интересов: дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций – 300. TrES-4b@yandex.ru; ул. Образцова, 9/9, 127994, Москва, Россия; р.т.: +7 (911) 709-2164.

**Хорошев Валерий Вячеславович** – ассистент, кафедра автоматике, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте, Российский университет транспорта (МИИТ); инженер-технолог систем мониторинга, ООО «ЛокоТех-Сигнал». Область научных интересов: дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций – 20. hvv91@icloud.com; ул. Образцова, 9/9, 127994, Москва, Россия; р.т.: +7 (999) 214-3635.

D. EFANOV, V. KHOROSHEV

**METHOD FOR ORDERING PROCEDURES OF DIVIDING STATES BY PROCEDURES WITH TWO AND THREE RESULTS TAKING INTO ACCOUNT THEIR COST AND WEIGHT OF STATES**

*Efanov D., Khoroshev V. Method for Ordering Procedures of Dividing States by Procedures with Two and Three Results Taking into Account their Cost and Weight of States.*

**Abstracts.** A method for streamlining state partitioning procedures with two and three outcomes is considered. A terminology and methods of the questionnaire theory were used, and the sequence of partitioning procedures itself was defined as a heterogeneous questionnaire with questions having two or three answers. This class of questionnaires is special and is defined by the authors as a class of binary-ternary questionnaires. This is the simplest class of heterogeneous questionnaires. An increase in number of answers to a question in practice can give an advantage in parameters of the questionnaires, including in the indicator of its effectiveness – the average implementation cost. It is noted that the use of binary-ternary questionnaires in practice can reduce the average time for identifying events on a questionnaire, which is extremely important in those applications of questionnaires in which there is a time limit for identifying events, for example, in critical application systems. A method for optimizing binary-ternary questionnaires is presented, based on the search for the most preferred questions for each subset of identifiable events. The choice of preferred questions is based on establishing a comparison relationship between them. The article describes all possible types of comparison relations between two questions with two answers, two questions with three answers, and also between a question with two answers and a question with three answers. An example of obtaining a mathematical expression for a function that characterizes the preference of questions over each other, as well as a generalized formula for choosing the most preferred question for any heterogeneous questionnaires is given. An algorithm has been formed for the method of ordering questions, which allows one to construct a binary-ternary questionnaire with the lowest implementation cost in polynomial time. An example of a binary-ternary questionnaire optimization by the presented method is given.

**Keywords:** Technical Diagnostics; Fault Location; Questionnaire; Binary-Ternary Questionnaire; Optimization; Comparison Relationships between Questions; Comparable Questions.

**Efanov Dmitry** – Dr.Sci., Associate Professor, Professor, Department of Automation, Remote Control and Communication on Railway Transport, Russian University of Transport; Head of the Direction, Direction of Integrated Control Systems Division, «LocoTech-Signal» LLC. Research interests: discrete mathematics, reliability and technical diagnostics of discrete devices. The number of publications – 300. TrES-4b@yandex.ru; 9/9, Obraztsova str., 127994, Moscow, Russia; office phone: +7 (911) 709-2164.

**Khoroshev Valerii** – Assistant, Department of Automation, Remote Control and Communication on Railway Transport, Russian University of Transport; process engineer of monitoring systems, «LocoTech-Signal» LLC. Research interests: discrete mathematics, reliability and technical diagnostics of discrete devices. The number of publications – 20. hvv91@icloud.com; 9, Obraztsova str., 127994, Moscow, Russia; office phone: +7 (999) 214-3635.

**References**

1. Pan D., Zheng Y., Zhang C. On Intelligent Automatic Train Control of Railway Moving Automatic Block Systems Based on Multi-Agent Systems. Proceedings of the 29th Chinese Control Conference. 2010. pp. 4471–4476.
2. Hahanov V. Cyber Physical Computing for IoT-driven Services. Springer. 2018. 279 p.

3. Sedykh D., Gordon M., Zuyev D., Skorokhodov A. Analysis of the Amplitude and Phase-Manipulated Signals of Automation Devices via Bluetooth Technology. Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2018. pp. 703–710.
4. Heidmann L. Smart Point Machines: Paving the Way for Predictive Maintenance. *Signal+Draht*. 2018. vol. 110. pp. 70–75.
5. Arend L., Pott L., Hoffmann N., Schanck R. ETCS Level 2 without GSM-R. *Signal+Draht*. 2018. vol. 110. pp. 18–28.
6. Efanov D.V. *Funkcionalnyj kontrol i monitoring ustrojstv zheleznodorozhnoj avtomatiki i telemehaniki* [Functional control and monitoring of railway automation and telemechanics devices]. SPb.: FGBOU VO PGUPS. 2016. 171 p. (In Russ.).
7. Parhomenko P.P. [Questionnaire theory (review)]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and remote control*. 1970. vol. 4. С. 140–159.
8. Duncan G. Heterogeneous Questionnaire Theory. *SIAM Journal on Applied Mathematics*. 1974. vol. 27. no. 1. pp. 59–71.
9. Picard C.F. *Graphs and Questionnaires*. Elsevier. 1980. 431 p.
10. Parhomenko P.P., Sogomonyan E.S. *Osnovy tekhnicheskoy diagnostiki (optimizaciya algoritmov diagnostirovaniya apparaturnye sredstva)* [Fundamentals of technical diagnostics (optimization of diagnostic algorithms, hardware)]. M.: Energoatomizdat. 1981. 320 p. (In Russ.).
11. Arzhenenko A.Yu., Chugaev B.N. *Optimalnye binarnye voprosniki* [Optimal Binary Questionnaires]. M.: Energoatomizdat. 1989. 128 p. (In Russ.).
12. Arzhenenko A.Yu., Bondarenko A.V. [Optimization of binary questionnaires by tolerant replacement method]. *Elektronnoe modelirovanie – Engineering Simulation*. 1990. vol. 3. pp. 53–57. (In Russ.).
13. Arzhenenko A.Yu., Bondarenko A.V. [Algorithm for choosing the optimal structure of a redundant compact questionnaire]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and remote control*. 1991. vol. 5. pp. 163–169. (In Russ.).
14. Parhomenko P.P. [Questionnaires and organizational hierarchies]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and remote control*. 2010. vol. 6. pp. 163–174. (In Russ.).
15. Arzhenenko A.Yu., Vestyak V.A. [Modification of the method of tolerant permutations in almost uniform compact profiles]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and remote control*. 2012. vol. 7. pp. 109–118. (In Russ.).
16. Arzhenenko A.Yu., Vestyak V.A. *Diskretnyj poisk. Teoriya voprosnikov* [Discrete search. Questionnaire theory.]. M.: MAI. 2012. 159 p. (In Russ.).
17. Chugaev B.N., Arzhenenko A.Yu. [Optimal identification of random events]. *Statistika i ekonomika – Statistics and Economics*. 2013. vol. 2. pp. 188–190. (In Russ.).
18. Gerasimenko K., Hahanov V., Bani Amer T., Pryimak A. Method for Functional Testing Critical Control Systems. Proceedings of IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS). 2015. pp. 149–153.
19. Drozd A. et al. Objects and Methods of On-Line Testing: Main Requirements and Perspectives of Development. Proceedings of 14th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2016). 2016. pp. 72–76.
20. Ubar R. Test Synthesis with Alternative Graphs. *IEEE Design & Test of Computers*. 1996. vol. 13. no. 1. pp. 48–57.
21. Kopkin E.V., Chikurov V.A., Aleynik V.V., Lazutin O.G. [Algorithm for Constructing a Flexible Program for Technical Object Diagnosing on the Criterion of Received Information Value]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2015. vol. 4(41). pp. 106–130. (In Russ.).
22. Palanichamy M., Mohammad A., Larsen B.B., Hahanov V. Selective Algorithms for Built-In Self-Test and Self-Diagnosis in Embedded SRAMS. *Journal of Low Power Electronics*. 2015. vol. 11. no. 4. pp. 541–551.

23. Senchenkov V.I. Motorin V.M. Grushkovskij P.A. [The construction of optimal diagnostic algorithms with restrictions by the method of dynamic programming]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2015. Issue 58. vol. 10. pp. 783–791. (In Russ.).
24. Senchenkov V.I. *Matematicheskij apparat diagnostirovaniya slozhnyh tekhnicheskikh sistem* [Mathematical apparatus for diagnosing complex technical systems]. *Izvestiya vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2016. Issue 59. vol. 7. pp. 547–557. (In Russ.).
25. Hahanov V. et al. Quantum sequencer for the minimal test synthesis of black-box functionality. Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 445–450.
26. Lu B. et al. An Novel Testing Sequence Optimization Method under Dynamic Environments. 2018 10th International Conference on Communications, Circuits and Systems (ICCCAS). 2018. pp. 479–483.
27. Huang X., Wang X., Tian Y. Research on Transformer Fault Diagnosis Method based on GWO Optimized Hybrid Kernel Extreme Learning Machine. 2018 Condition Monitoring and Diagnosis (CMD). 2018. pp. 1–5.
28. Mikoni S.V., Sokolov B.V., Yusupov R.M. *Kvalimetriya modeley i polimodelnyh kompleksov: monografiya* [Qualimetry of models and polymodel complexes: monograph]. M. RAN. 314p. (In Russ.).
29. Senchenkov V.I. Absalyamov D.R. Avsyukevich D.A. [The task of the set of diagnostic parameters of the system based on the theory of functional spaces]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings* 2019. Issue 18. vol. 4. pp. 949–975. (In Russ.).
30. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Osnovy teorii nadezhnosti i tekhnicheskoy diagnostiki* [Fundamentals of the theory of reliability and technical diagnostics]. Spb: «Lan'». 2019. 588 p.
31. Sapozhnikov V.I., Efanov D.V., Pavlov A.N. [Questionnaire Theory and Troubleshooting at UKPSS]. *Avtomatika, svyaz', informatika – Automation, communication and informatics*. 2012. vol. 1. pp. 30–33. (In Russ.).
32. Efanov D.V., Khoroshev V.V., Osadchy G.V., Belyi A.A. Optimization of Conditional Diagnostics Algorithms for Railway Electric Switch Mechanism Using the Theory of Questionnaires with Failure Statistics. Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 237–245.
33. Arzhenenko A.Yu., Kazakova O.G., Neyasov V.A. [Optimization of binary questionnaires containing variable price questions]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and remote control*. 1989. vol. 6. pp. 139–149. (In Russ.).
34. Efanov D.V., Khoroshev V.V. Ternary Questionnaires. Proceedings of 17th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2019). 2019. pp. 289–300.
35. Mikoni S.V. *Teoriya prinyatiya upravlencheskih resheniy* [Theory of Managerial Decision Making]. SPb.: Lan'. 2015. 448 p.
36. Arzhenenko A.Yu., Kazakova O.G., Chugaev B.N. *Optimizatsiya binarnykh voprosnikov* [Binary Questionnaire Optimization]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and remote control*. 1985. vol. 11. pp. 138–144. (In Russ.).
37. Theeg G., Vlasenko S. Railway Signalling & Interlocking. International Compendium. 2009. 448 p.

---

Signed to print 28.01.2020

Printed in Publishing center GUAP, 67, B. Morskaya, St. Petersburg, 190000, Russia

---

The journal is registered in Russian Federal Agency for Communications  
and Mass-Media Supervision, certificate ПИ № ФС77-41695 dated August 19, 2010 г.  
Subscription Index П5513, Russian Post Catalog

---

Подписано к печати 28.01.2020. Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 13,48. Заказ № 36.

Тираж 150 экз., цена свободная.

Отпечатано в Редакционно-издательском центре ГУАП, 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская, д. 67

---

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи  
и массовых коммуникаций,  
свидетельство ПИ № ФС77-41695 от 19 августа 2010 г.

Подписной индекс П5513 по каталогу «Почта России»

## РУКОВОДСТВО ДЛЯ АВТОРОВ

Взаимодействие автора с редакцией осуществляется через личный кабинет на сайте журнала «Труды СПИИРАН» <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru>. При регистрации авторам рекомендуется заполнить все предложенные поля данных.

Подготовка статьи ведется с помощью текстовых редакторов MS Word 2007 и выше. Объем основного текста – от 20 до 30 страниц включительно. Формат страницы документа – А5 (148 мм ширина, 210 мм высота); ориентация – портретная; все поля – 20 мм. Верхний и нижний колонтитулы страницы – пустые. Основной шрифт документа – Times New Roman, основной кегль (размер) шрифта – 10 pt. Переносы разрешены. Абзацный отступ устанавливается размером в 10 мм. Межстрочный интервал – одинарный. Номера страниц не проставляются.

В основную часть допускается помещать рисунки, таблицы, листинги и формулы. Правила их оформления подробно рассмотрены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов».

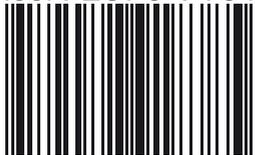
### AUTHOR GUIDELINES

Interaction between each potential author and the Editorial board is realized through the personal account on the website of the journal "SPIIRAS Proceedings" <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru>. At the registration the authors are requested to fill out all data fields in the proposed form.

The submissions should be prepared using MS Word 2007 text editor or higher versions, at that, only manuscripts in \*.docx format will be considered. The text of the paper in the main part of it should be from 20 – 30 pages of A5 size that is 210 X 148 mm; orientation – portrait; all margins – 20 mm. The font of the main paper text is Times New Roman of 10 pt font size. The pages' headers and footers should be empty; indentation – 10 mm; line spacing – single; pages are not numbered; hyphenations are allowed.

Certain figures, tables, listings and formulas are allowed in the main section, and their typography is considered by the paper template in more detail in journal web.

ISSN 2078-9181



9 772078 918785 >

