

ISSN 2078-9181

DOI 10.15622/sp.51

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
Отделение нанотехнологий и информационных технологий

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ  
ИНСТИТУТ ИНФОРМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ РАН

# ТРУДЫ СПИИРАН

proceedings.spiras.nw.ru



ВЫПУСК 2(51)



Санкт-Петербург  
2017

18+

# SPIIRAS PROCEEDINGS

Issue № 2(51), 2017

Scientific, educational, and interdisciplinary journal primarily specialized  
in computer science, automation, and applied mathematics

Trudy SPIIRAN ♦ Founded in 2002 ♦ Труды СПИИРАН

---

## Founder and Publisher

St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences

---

## Editor-in-Chief

R. M. Yusupov, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, St. Petersburg, Russia

---

## Editorial Board Members

<b>A. A. Ashimov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
<b>S. N. Baranov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>N. P. Veselkin</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>V. I. Gorodetski</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>O. Yu. Gusikhin</b> ,	Ph. D., Dearborn, USA
<b>V. Delic</b> ,	Prof., Dr. Sci., Novi Sad, Serbia
<b>A. Dolgui</b> ,	Prof., Dr. Habil., St. Etienne, France
<b>M. Zelezny</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., Plzen, Czech Republic
<b>I. A. Kalyaev</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Taganrog, Russia
<b>D. A. Ivanov</b> ,	Prof., Dr. Habil., Berlin, Germany
<b>G. A. Leonov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>K. P. Markov</b> ,	Assoc. Prof., Ph.D., Aizu, Japan
<b>Yu. A. Merkurjev</b> ,	Prof., Dr. Habil., Academician of the Latvian Academy of Sciences, Riga, Latvia
<b>R. V. Meshcheryakov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Tomsk, Russia
<b>N. A. Moldovian</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. E. Pavlovskiy</b> ,	Prof., Dr. Sci., Moscow, Russia
<b>A. A. Petrovsky</b> ,	Prof., Dr. Sci., Minsk, Belarus
<b>V. A. Putilov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Apatity, Russia
<b>V. K. Pshikhopov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Taganrog, Russia
<b>A. L. Ronzhin</b>	(Deputy Editor-in-Chief), Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>A. I. Rudskoi</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>V. Sgurev</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of the Bulgarian academy of sciences, Sofia, Bulgaria
<b>V. Skormin</b> ,	Prof., Ph.D., Binghamton, USA
<b>A. V. Smirnov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>B. Ya. Sovetov</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAE, St. Petersburg, Russia
<b>V. A. Soyfer</b> ,	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Samara, Russia
<b>B. V. Sokolov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>L. V. Utkin</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>A. L. Fradkov</b> ,	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>L. B. Sheremetov</b> ,	Assoc. Prof., Dr. Sci., Mexico, Mexico

---

**Editor:** E. P. Miroshnikova

**Technical editor:** A. I. Motienko

**Translator:** P. N. Emeleva

---

## Editorial Board's address

14-th line VO, 39, SPIIRAS, St. Petersburg, 199178, Russia,  
e-mail: publ@iias.spb.su, web: <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru/>

**The journal is indexed in Scopus**

© St. Petersburg Institute for Informatics and Automation  
of the Russian Academy of Sciences, 2017

# ТРУДЫ СПИИРАН

Выпуск № 2(51), 2017

Научный, научно-образовательный, междисциплинарный журнал с базовой специализацией в области информатики, автоматизации и прикладной математики  
Журнал основан в 2002 году

---

## Учредитель и издатель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук  
(СПИИРАН)

---

## Главный редактор

Р. М. Юсупов, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., С-Петербург, РФ

---

## Редакционная коллегия

- А. А. Ашимов**, академик национальной академии наук Республики Казахстан д-р техн. наук, проф., Алматы, Казахстан  
**С. Н. Баранов**, д-р физ.-мат. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Н. П. Веселкин**, академик РАН, д-р мед. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. И. Городецкий**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**О. Ю. Гусихин**, Ph.D., Диаборн, США  
**В. Делич**, д-р техн. наук, проф., Нови-Сад, Сербия  
**А. Б. Долгий**, Dr. Habil., проф., Сент-Этьен, Франция  
**М. Железны**, Ph.D., доцент, Пльзень, Чешская республика  
**Д. А. Иванов**, д-р экон. наук, проф., Берлин, Германия  
**И. А. Каляев**, академик РАН, д-р техн. наук, профессор, Таганрог, РФ  
**Г. А. Леонов**, член-корр. РАН, д-р физ.-мат. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**К. П. Марков**, Ph.D., доцент, Аизу, Япония  
**Ю. А. Меркурьев**, академик Латвийской академии наук, Dr. Habil., проф., Рига, Латвия  
**Р. В. Мещеряков**, д-р техн. наук, профессор, Томск, РФ  
**Н. А. Молдовян**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. Е. Павловский**, д-р физ.-мат. наук, профессор, Москва, РФ  
**А. А. Петровский**, д-р техн. наук, проф., Минск, Беларусь  
**В. А. Путилов**, д-р техн. наук, проф., Апатиты, РФ  
**В. Х. Пшихопов**, д-р техн. наук, профессор, Таганрог, РФ  
**А. Л. Ронжин** (зам. главного редактора), д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**А. И. Рудской**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. Сгурев**, академик Болгарской академии наук, д-р техн. наук, проф., София, Болгария  
**В. А. Скормин**, Ph.D., проф., Бингемптон, США  
**А. В. Смирнов**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Б. Я. Советов**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**В. А. Сойфер**, академик РАН, д-р техн. наук, проф., Самара, РФ  
**Б. В. Соколов**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Л. В. Уткин**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**А. Л. Фрадков**, д-р техн. наук, проф., С.-Петербург, РФ  
**Л. Б. Шереметов**, д-р техн. наук, Мехико, Мексика

---

**Редактор:** Е. П. Мирошникова

**Технический редактор:** А. И. Мотиечко

**Переводчик:** П. Н. Емелева

---

## Адрес редакции

199178, Санкт-Петербург, 14-я линия, д. 39,  
e-mail: publ@iias.spb.su, сайт: <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru/>

## Журнал индексируется в международной базе данных Scopus

Журнал входит в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук, 2017  
Разрешается воспроизведение в прессе, а также сообщение в эфир или по кабелю опубликованных в составе печатного периодического издания–журнала «Труды СПИИРАН» статей по текущим экономическим, политическим, социальным и религиозным вопросам с обязательным указанием имени автора статьи и печатного периодического издания–журнала «Труды СПИИРАН»

## CONTENTS

### ***Methods of Information Processing and Management***

Yusupov R.M., Musaev A.A.  
EFFICIENCY OF INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGIES: FEATURES OF ESTIMATION 5

Tregubov R.B., Saitov I.A., Saitov S.I.  
ELEMENTS OF THE SET-THEORETIC BASE AND SYSTEM OF MODELS OF MULTIPATH MULTIPLE ADDRESS INFOCOMMUNICATION SYSTEMS 35

Burakov M.V., Shyshlakov V.F.  
A MODIFIED SMITH PREDICTOR FOR THE CONTROL OF SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAY 60

### ***Information Security***

Kozachok A.V., Kochetkov E.V.  
FORMAL MODEL OF PROCESS FUNCTIONING IN THE OPERATING SYSTEM 78

Gofman M.V.  
A METHOD OF HIDDEN DATA TRANSMISSION IN COMMUNICATION VIA AIR AUDIO CHANNEL 97

### ***Algorithms and Software***

Geidarov P.Sh.  
AN ALGORITHM IMPLEMENTING THE METHOD OF THE NEAREST NEIGHBOR IN A MULTI-LAYER PERCEPTRON 123

### ***Means of Computer Facilities and Control Systems***

Chirov D.S., Chertova O.G., Potapchuk T.N.  
METHODS OF STUDY REQUIREMENTS FOR THE COMPLEX ROBOTIC VISION SYSTEM 152

### ***Theoretical and Applied Mathematics***

Smokty O.I.  
NUMERICAL MODELING OF UNIFORM SLAB BRIGHTNESS COEFFICIENTS BASED ON THE MIRROR REFLECTION PRINCIPLE AND LINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS SOLUTIONS 177

Polansky I.S.  
VECTOR BARYCENTRIC METHOD IN COMPUTATIONAL ELECTRODYNAMICS 206

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Методы управления и обработки информации**

Юсупов Р.М., Мусаев А.А. ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ	5
Трегубов Р.Б., Сайтов И.А., Сайтов С.И. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО БАЗИСА И СИСТЕМЫ МОДЕЛЕЙ МНОГОПУТЕВЫХ МНОГОАДРЕСНЫХ ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ	35
Бураков М.В., Шишлаков В.Ф. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПРЕДИКТОР СМИТА ДЛЯ ОБЪЕКТА С ПЕРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКОЙ	60

### **Информационная безопасность**

Козачок А.В., Кочетков Е.В. ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА В ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ	78
Гофман М.В. МЕТОДИКА СКРЫТОЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПРИ СВЯЗИ ЧЕРЕЗ ВОЗДУШНЫЙ АУДИОКАНАЛ	97

### **Алгоритмы и программные средства**

Гейдаров П.Ш. АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА В МНОГОСЛОЙНОМ ПЕРСЕПТРОНЕ	123
---	-----

### **Средства вычислительной техники и систем управления**

Чиров Д.С., Чертова О.Г., Потапчук Т.Н. МЕТОДИКА ОБОСНОВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ К СИСТЕМЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА	152
--	-----

### **Теоретическая и прикладная математик**

Смоктый О.И. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЯРКОСТИ ПЛОСКОГО ОДНОРОДНОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА ЗЕРКАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ	177
Полянский И.С. ВЕКТОРНЫЙ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ	206

Р.М. ЮСУПОВ, А.А. МУСАЕВ  
**ОСОБЕННОСТИ ОЦЕНИВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И ТЕХНОЛОГИЙ**

*Юсупов Р.М., Мусаев А.А. Особенности оценивания эффективности информационных систем и технологий.*

**Аннотация.** Рассмотрена задача построения методологии оценки эффективности информационных систем и технологий, позволяющая количественно оценить результативность их применения. Особенностью информационных систем является их сервисный характер, что приводит к необходимости косвенного оценивания их эффективности через терминальный положительный эффект метасистемы, в интересах которой данная система была создана или адаптирована.

Приведен краткий обзор существующих подходов и методик к оцениванию эффективности информационных систем и технологий. Установлена неоднозначность используемых определений эффективности, и как следствие, сложности построения формализованной количественной методики ее оценивания.

Предложены количественные оценки эффективности информационной системы, учитывающие вероятностную природу исходных данных, используемых для построения этих оценок. Представлены варианты необходимых и достаточных критериев эффективности информационных систем, выраженные через эффективность метасистем, в интересах которых они функционируют.

**Ключевые слова:** информация, информационные системы, информационные технологии, эффективность, качество, методология, вероятностный подход, системный анализ, АСУ, логико-вероятностный метод.

**1. Введение.** Процесс создания и применения любой *информационной системы* (ИС) или *информационной технологии* (ИТ) неизбежно связан с проблемой оценки их эффективности. При этом возникает целый ряд сложных вопросов, обусловленных спецификой объекта, для переработки и хранения которого ИС создавалась — *информации*. Над таинством природы информации многие годы трудились философы и прикладные специалисты [1-5], однако их успехи существенно отстают от взрывоподобного роста практических приложений ИТ. В результате возникшего разрыва между теоретическим осознанием природы информационных процессов и быстро прогрессирующим развитием практических реализаций ИС, образовался пробел в области оценки их эффективности, связанный с общей задачей квалитметрии информационных систем.

Заметим, что ИС, в том числе и программные комплексы, можно рассматривать как терминальные реализации ИТ. В связи с этим в дальнейшем ограничимся задачей оценки эффективности ИС, имея в виду, что предложенная в статье методика распространяется и на ИТ.

Особую проблему при оценивании эффективности информационных систем создает тот факт, что большинство ИС относится к сервисным или инструментальным системам. Это означает, что сами по

себе они не создают итогового результата, который можно было бы оценить в терминах экономической эффективности. Иными словами, результативность ИС является опосредованной через функционирование других видов систем — технических, экономических, военных, социальных и т.п.

Задача оценивания эффективности ИС является неоднозначной и многоплановой. Однако реалии времени требуют практических методик, способных конструктивно оценить результативность разрабатываемой или уже действующей ИС. В связи с этим возникает задача формирования методологической базы, увязывающей оценку эффективности ИС с общей теорией системной квалиметрии. Решению данной задачи и посвящена настоящая работа.

**2. Анализ подходов к оценке эффективности информационных систем.** Отсутствие единого подхода к задаче оценивания эффективности ИС является закономерным следствием диалектического противоречия между общим и частным. Общий подход слабо отражает существенные особенности информационных систем, частные технологии оценки эффективности отдельных решений не подходят для других приложений.

Информационные системы обычно также относятся к инновационным решениям и теоретически они должны быть оценены на основе существующих методик. Однако на деле применение экономических методик анализа инноваций к ИС связано с существенными трудностями. Главной причиной этого является нематериальный характер объекта приложений ИС — информации. В частности, следствием нематериального характера информационного «сырья» является косвенный характер влияния информационных инноваций на экономическую эффективность проектов.

Проблемы оценивания эффективности ИС начинаются с неоднозначности исходных определений. В различных отечественных и зарубежных руководящих документах используются разнообразные определения эффективности [6-10]. По определению ISO 9000, «эффективность — это связь между достигнутым результатом и использованными ресурсами» [7]. При этом, как замечено в [11], перевод с английского, осуществленный в процессе преобразования ISO 9000 в ГОСТ Р ИСО 9000, содержит некорректную интерпретацию терминов *efficiency* и *effectiveness*. В частности, не учитываются содержательные различия в терминах «результативность» и «производительность».

Еще одно плохо формализуемое определение: «эффективность инвестиционного проекта — категория, отражающая соответствие инвестиционного проекта целям и интересам его участников» [6]. Относи-

тельно конструктивное определение эффективности, привязанное к экономическому анализу, можно найти в [10]: «Под экономической эффективностью понимается соотношение непосредственных результатов деятельности, результатов, полученных и планируемых для достижения в рамках тактических задач, программ, программных мероприятий, с затратами на их достижение».

Возникает закономерный вопрос — можно ли на основе таких размытых определений построить однозначную количественную оценку эффективности ИС (или любой другой системы)? Вопрос открытый. Сложность решения данной задачи привела к скептическому отношению к возможности априорных оценок эффективности инновационных проектов в целом.

В частности, авторитетный американский журнал CIO Insight утверждает, что более половины фирм вообще не осуществляет анализ окупаемости вложений в развитие информационной структуры (даже при внедрении столь существенных проектов, как ERP или корпоративные порталы). Вердикт журнала: «Состояние оценивания экономического эффекта от внедрения ИТ выглядит удручающе» [13]. По результатам опроса российских предпринимателей [14], в целом сохраняется вера в окупаемость вложений в информационную инфраструктуру компании (до 47% опрошенных). Однако 80% компаний, из числа не согласившихся на внедрение ИТ, в качестве причины отказа называют недостаточность эффекта от вложений.

Насколько эффективны современные западные методики оценки эффективности инвестиционных проектов? Речь идет, прежде всего, о таких интегральных показателях, как *TCO* (total cost of ownership, полная стоимость владения) и *ROI* (return on investment, возврат на инвестицию). По мнению ряда авторов [13, 14], отказ российских предпринимателей от использования этих показателей связан с иной ориентацией отечественного бизнеса. В РФ основной целевой функцией является не увеличение производительности труда, а рост отдачи от капитала.

Для ИТ-инноваций оба приведенных показателя являются несостоятельными в силу сложности оценки парциальной прибыли, обусловленной внедрением или модификацией информационных систем [15]. К тому же высочайшая скорость развития вычислительных средств крайне затрудняет оценку срока использования ИС. По результатам опроса [16], 70% компаний находят показатель ROI слишком сложным для вычисления и 44% — субъективным.

Следуя [9, 11], рассмотрим еще одну модель — *PRM*, применяемую, в частности, для оценки эффективности ИТ при использовании в интересах государственных служб. В качестве основного показателя

Productivity&Efficiency используется объем работы, выполненный в единицу времени и соотношенный с использованными ресурсами.

Важные результаты в отношении возможности применения традиционных методик оценки эффективности инноваций к ИС показали исследования П. Страссмана [17, 18]. Вывод оказался достаточно неожиданным: между ИТ-бюджетами и целевыми показателями результативности бизнеса статистических корреляций нет! Исключение составил показатель затрат на управление и администрирование, продвижение и поддержку продаж — Sales, General & Administrative (SG&A). Заметим, что данный вывод подтверждает справедливость вышеприведенного утверждения о косвенном характере влияния ИТ на терминальную эффективность бизнеса. На основе приведенных исследований в качестве оценки реальной эффективности ИС был предложен показатель информационной продуктивности — *Information Productivity* (IP) [17-20]  $IP = EVA/SG\&A$ , где *EVA* (Economic Value Add) — объем прибыли компании после уплаты налогов и выплаты дивидендов по акциям. Здесь *SG&A* используется как параметр, чувствительный к внедрению ИТ. Анализ динамики *IP* показал, что лишь немногие компании смогли получить конкурентные преимущества за счет внедрения ИТ. Анализ этого явления приведен в [19].

В качестве альтернативы к бизнес-оценкам эффективности ИС в [15] приводятся так называемые системные методы анализа, демонстрирующие целесообразность применения ИТ в различных сферах деятельности компаний. Примерами соответствующих методик могут служить:

- сбалансированная система показателей *BSC* (Balanced Score Card);
- система показателей ИТ *BITS* (Balanced IT Score Card);
- референтная модель производительности *PRM* (Performance Reference Model);
- бизнес-ценность ИТ *BVIT* (Business Value of IT);
- сервисная стратегия *ITIL* (Information Technology Infrastructure Library Service Strategy).

Существенным отличием системных методик является попытка отразить не только терминальные финансовые показатели, но и другие характеристики, благоприятно влияющие на деятельность компании. Примерами таких характеристик являются:

- вклад ИТ в развитие компании;
- операционные преимущества;
- влияние на перспективы компании;
- степень ориентации на клиентов и пользователей;

- улучшение качества предоставляемых услуг;
- степень влияния на бизнес-процессы;
- прямая окупаемость ИТ-инноваций и т.п.

Очевидными недостатками всех приведенных определений является их низкая пригодность для построения точных количественных оценок эффективности ИС на разных этапах их жизненного цикла. Достаточно понятно, что построить гармоническую интегральную оценку эффективности ИТ-инноваций на таком обширном, плохо формализованном пространстве практически невозможно. Результатом применения размытых методик в конечном итоге является множество числовых характеристик, не допускающих ранжирования, а следовательно, и корректного сравнения вариантов реализации ИС без вмешательства субъективной экспертизы.

Следует заметить, что отсутствие объективных подходов к оценке эффективности ИТ привело некоторых исследователей к парадоксальным выводам. Так, например, в работе Н. Карра [21] обосновывается вывод о том, что ИТ вообще не дают конкурентного преимущества. При этом приводятся вполне убедительные доводы: комплексная автоматизация предприятия на уровне ERP может стоить миллионы USD и потребовать существенной перестройки всей информационной инфраструктуры предприятия. В то же время сомнительный положительный эффект достигается только косвенным образом, через увеличение уровня транспарентности и, ожидаемо, управляемости производством. При этом в силу фантастической скорости развития микроэлектроники и ИТ развернутая дорогостоящая ERP может оказаться устаревшей уже к моменту ее внедрения.

В работах [22-23] также указывается, что ИС сами по себе не дают преимуществ и лишь в совокупности с другими инициативами способны влиять на ключевые факторы успеха, создавать конкурентные преимущества. Для оценки эффективности в этих статьях предлагается использовать процессный подход, разделяющий корпоративные процессы на основной, то есть добавляющий стоимость к исходному продукту, и вспомогательный. Для промышленных предприятий информационные процессы естественно относятся к категории вспомогательных. Следовательно, эффективность ИС в этом случае также следует оценивать косвенно, через совершенствование управления производственного цикла предприятия.

Экспериментальное опровержение парадоксу непроизводительности ИТ приведено в работах группы экспертов под руководством Э. Бриниолсона [24-25]. В частности, было показано, что ИТ оказывают существенное и статистически значимое влияние на итоги работы

компании, отдача на инвестиции в компьютерный капитал составляла в среднем около 81% и существенно превосходила отдачу от инвестиций в другие материальные активы.

В заключении обзора, посвященного эффективности ИС, следует указать на материалы проекта IT-Value [26], описывающие особенности экономического анализа инвестиций в ИТ. Исходными постулатами проекта являются утверждения:

— инвестиции в ИТ влияют на всю организацию, поэтому объект исследования — это компании в целом, а не информационные системы или ИТ-проекты по отдельности;

— развитие и эксплуатация корпоративных ИТ рассматривается как единый и взаимосвязанный комплекс процессов, который влияет на бизнес-результаты компании;

— существуют объективные закономерности влияния ИТ на экономические результаты компании, которые не зависят от того, что думают о них руководители организации или ИТ-директоры и др.

Важной особенностью проекта является разработка методов оценки эффективности инвестиций в ИТ, учитывающих специфику российской действительности.

Кратким выводом из приведенного обзора является заключение об актуальности задачи построения конструктивной количественной методики анализа эффективности ИС, обеспечивающей априорную оценку их результативности и возможность объективного сравнения вариантов их реализации с учетом нематериальной специфики информационных сред. В качестве теоретической платформы для построения такой методики предлагается проверенное сочетание вероятностно-статистического подхода к оцениванию эффективности с общими принципами системного анализа [27-32].

**2. Основные понятия теории эффективности информационных систем.** Выбор критериальной функции, предназначенной для количественной или качественной оценок результативности ИС, достаточно субъективен. Наиболее универсальным показателем качества системы является *эффективность* ее функционирования.

Эффективность является одним из фундаментальных свойств любой системы и непосредственно сопоставляется с результативностью ее применения. В связи с этим понятие эффективности системы во многих случаях используется как основной показатель качества ее функционирования.

Для описания столь сложного и многопланового понятия, как эффективность, применяется целый набор разнородных показателей, отражающих определенные квалиметрические признаки. Вариант неполной классификации показателей эффективности ИС приведен на рисунке 1.



Рис. 1. Классификация показателей эффективности информационных систем

Принципиальным вопросом для оценки эффективности ИС является размерность ее показателя: одномерность (или скалярность) интегрального показателя эффективности существенна. В этом случае сравнительный анализ вариантов решения поставленной задачи реализуется их прямым ранжированием на основе очевидного упорядочивания значений скалярного показателя эффективности.

В случае отказа от одномерного показателя эффективности и перехода к векторному, элементами которого являются частные характеристики формируемого решения, задача выбора наилучшего варианта не только существенно усложняется, но и становится не вполне корректной. Действительно, сравнение и упорядочивание ряда векторов, отвечающих набору возможных решений, реализуется лишь путем их скаляризации на основе той или иной метрики. В свою очередь, выбор подходящей метрики всегда несет в себе элементы субъективизма. В лучшем случае можно ожидать выбор метрики на основе экспертных оценок, когда весовые коэффициенты частных показателей определяются специальной обработкой результатов опроса группы или групп специалистов в соответствующих областях знаний.

Тем не менее векторные показатели эффективности также распространены на практике, поскольку позволяют осуществить естественную декомпозицию общей проблемы повышения эффективности функционирования ИС на ряд частных вопросов, каждый из которых может составлять самостоятельную научную задачу последующего иерархического уровня. Так, например, комплексная проблема совершенствования ИС состоит из задач повышения оперативности доступа к хранимой информации, уровня программной совместимости с другими *системами хранения информации* (СХИ) и с информационными приложениями, степени безопасности хранения данных, степени доступности данных для пользователей, возможности формирования нестандартных запросов и так далее. Необходимость учета частных показателей приводит к специфическим методам анализа и синтеза систем, основанным на многокритериальном подходе.

На вербальном уровне эффективность ИС определяется как количественная мера способности системы выполнять возложенные на нее задачи. Прямой эффект от применения конкретной системы оценивается так называемой *функциональной эффективностью*. Наряду с функциональной эффективностью широко используется понятие *экономической эффективности*, в котором достигнутый полезный эффект соотносится с экономическими затратами, потребляемым ресурсом и т.п. Окончательный выбор показателя и критерия эффективности ИС осуществляется, исходя из цели, в интересах которой создавалась эта система. Так, например, АСУ, рассматриваемая как информационная система, создавалась с целью повышения эффективности формируемых управляющих решений и их реализации, ИС образовательной системы — с целью повышения качества подготовки выпускников и т.п.

Таким образом, основные показатели эффективности ИС формируются на основе требований, предъявляемых к ней со стороны *метасистемы* — иерархически вышестоящая система, в интересах которой ИС создается.

Необходимость изучения ИС в иерархическом метасистемном ряду привела к разделению показателей эффективности на *собственные* и *несобственные*. Собственные (или *внутренние*) показатели предназначены для изучения системы *по разомкнутой схеме*, когда ИС рассматривается как самостоятельная, не связанная с метасистемой. Несобственные (или *внешние*) показатели отражают влияние качества функционирования изучаемой ИС на характеристики метасистемы с учетом выбранных критериев эффективности.

Достаточно очевидно, что даже наиболее полный набор собственных технических характеристик ИС (уровни полноты и достоверности обрабатываемой информации, оперативность, функциональная устойчивость, пропускная способность и т.д.) является недостаточным для интегральной оценки ее эффективности: итоговая оценка результативности исследуемой системы, как ранее отмечалось, должна восходить к показателям качества вышестоящей метасистемы.

Следует заметить, что далеко не всегда удается строго количественно оценить показатели эффективности сложной ИС. В этом случае переходят к качественным шкалам оценивания — номинальной или ординальной. Во многих случаях качественная оценка эффективности ИС формируется в результате опроса экспертов с последующей статистической обработкой их заключений.

В зависимости от степени достижения поставленной цели критерии эффективности могут быть отнесены к категории необходимых или достаточных. В случае, если критерий отражает принципиальную допустимость ИС (с достигнутым уровнем эффективности) для решения стоящих перед ней задач, то его следует отнести к категории необходимых. Типичным необходимым критерием является превышение показателем эффективности ИС некоторого априори заданного порога, определенного техническим заданием на ее разработку. Достаточные критерии эффективности ИС могут носить разный характер: в их роли могут выступать достижение показателем эффективности максимального значения в выбранном диапазоне исходных данных или, при заданных ограничениях, превышение показателем эффективности соответствующего показателя системы-прототипа и др.

В большинстве случаев, особенно при использовании векторных показателей, оказывается целесообразным сочетать необходимые и достаточные критерии. В частности, допускается оценивать эффективность ИС на основе метода главного показателя, когда один из показателей (главный), например, достоверность отображения контролируемой ситуации относится к категории достаточных и подлежит максимизации, а остальные — к категории необходимых, то есть отвечающих заданным пороговым нормам. К числу последних можно отнести полноту отображения ситуации, вычислительную реализуемость ИС, чувствительность к контролируемым параметрам, устойчивость к возмущениям и вариациям вероятностной структуры исходных данных и т.п.

Следует отметить, что для полноты классификации показателей эффективности ИС их можно разделить по характеру измерений (наблюдений) на прямые или косвенные, а также на абсолютные

или относительные. В соответствии с этим и оценивание их величин является прямым и косвенным, абсолютным и относительным. Косвенное оценивание реализуется в условиях, когда прямое наблюдение показателей эффективности ИС невозможно и уступает последнему по информативности и, как правило, по объективности (достоверности).

Разделение показателей на абсолютные и относительные достаточно очевидно: абсолютные показатели используются при наличии эталонной количественной шкалы. Если такую шкалу построить не удастся, то используются относительные показатели. Особенно наглядное применение относительной шкалы имеет место при использовании критерия превосходства. Например, разрабатываемая ИС превосходит по оперативности систему-прототип на 20%. Следует иметь в виду и очевидные недостатки относительной шкалы: относительные показатели не являются достаточными для принятия решения о практической состоятельности ИС. Так, например, ИС может превосходить прототип, но при этом не удовлетворять критерию пригодности или используемый показатель не является существенным с точки зрения практических приложений.

**3. Количественная оценка эффективности информационной системы. Критерии эффективности.** Основные технические характеристики любой ИС  $IS(Q)$  задаются векторной совокупностью ее собственных показателей  $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ .

Для ИС в роли таких показателей могут выступать:

- допустимый объем хранения полезной информации;
- реальный объем памяти hardware, занимаемый ИС;
- время доступа (время получения пользователем единицы объема востребованных данных из СХИ);
- степень безопасности ИС в отношении несанкционированного доступа;
- степень надежности сохранения информации в СХИ;
- открытость системы и т.п.

Из приведенного перечня видно, что собственные показатели эффективности ИС могут обладать различной природой: часть из них носит количественный (метрический) характер, хорошо согласующийся с традиционными методами статистического оценивания, другие имеют качественный характер и выражаются через логические переменные. В последнем случае требуются специальные методы обработки, основанные на правилах символического исчисления, неметрическом шкалировании, теории нечетких множеств и т.п. В результате возникает проблема согласования измерительных шкал (метрической, ординальной, номи-

нальной), решение которой позволяет использовать разнородные исходные данные и довести решение задачи анализа эффективности ИС до конструктивного результата.

Как правило, технические требования к ИС задаются в виде области допустимых значений  $\{Q_{IS}\}_0$ , полученной в результате априорного анализа аналогов, экспериментального и/или имитационного исследования функционирования информационной системы  $IS$  и метасистемы  $MS$ , в интересах которой она была создана. Наличие априорных требований к ИС позволяет сформировать простейший критерий пригодности ИС в виде:

$$Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0. \quad (3.1)$$

Как уже отмечалось, на практике в критерий (3.1) подставляется не значения вектора  $Q$ , а его оценка  $\hat{Q}$ , полученная по результатам измерений или априорного экспертного анализа. Следовательно, критерий (3.1) носит статистический характер.

Более общий подход основан на предположении о том, что множество допустимых значений технических характеристик ИС  $\{Q_{IS}\}_0$  должно отвечать требованию пригодности иерархически вышестоящей метасистемы  $MS$ , в интересах которой информационная система создавалась. Предположим, что эффективность (результативность, достигнутый положительный эффект) метасистемы  $MS$  определяется скалярной величиной  $Eff_{MS}$ , зависящей от технических характеристик входящей в ее состав ИС с параметрами  $Q_{IS}$ , то есть:

$$Eff_{MS} = Eff_{MS}(Q_{IS}). \quad (3.2)$$

Реальная эффективность функционирования метасистемы  $MS$  зависит от множества разнообразных факторов: показателей самой метасистемы, качества ее управления, особенностей применения и т.п. Однако для решения задачи оценки эффективности ИС интерес представляет только частная зависимость (3.2); остальные зависимости и параметры рассматриваются как условия, фиксируемые в ограничительной или дескриптивной части решаемой задачи.

Также было отмечено, что оценка эффективности ИС осуществляется исходя из результативности функционирования (применения) метасистемы. Оценка результативности метасистемы, рассматриваемая здесь как синоним ее эффективности, в свою очередь, определяется на

основе субъективных критериев, имеющих экзогенный (по отношению к  $MS$ ) характер. Следовательно, интегральная оценка эффективности ИС  $Eff_{IS}$  определяется набором априори заданных критериев, позволяющих определить необходимые и достаточные условия эффективности метасистемы  $MS$  в зависимости от собственных показателей ИС.

Необходимым условием эффективности любой системы является ее *пригодность*. Однако в отличие от (3.1), как это только что было декларировано, она должна выражаться через терминальную эффективность метасистемы  $MS$ .

При использовании детерминированного подхода, когда в наличии имеется одна единственная реализация (или в условиях полной статистической определенности) критерий пригодности описывается соотношением:

$$Eff_{MS}[Q_{IS}] > Eff_0, \quad (3.3)$$

Здесь  $Eff_0$  — некоторое пороговое значение эффективности метасистемы, ниже которого  $MS$  теряет функциональную пригодность. На практике оценка эффективности  $Eff_{MS}[Q_{IS}]$  является случайной величиной. Следовательно, для повышения достоверности критерия пригодности (3.3) целесообразно перейти к ее усредненному значению, полученному на основе серии из  $N$  испытаний с одинаковыми условиями их проведения:

$$\overline{Eff_{MS}(Q_{IS})} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Eff_{MS}(Q))_i > Eff_0. \quad (3.4)$$

Совокупность  $Q = Q_{IS}$ , отвечающих условию (3.4), образует множество допустимых значений технических характеристик ИС  $\{Q_{IS}\}_0$ .

В более общем случае пригодность ИС определяется вероятностью того, что достигнутый метасистемой положительный эффект (результат) будет превышать некоторый априори установленный порог  $Eff_{MS}^0 = Eff_0$ . В этом случае критерий пригодности ИС можно представить в виде:

$$P\{Eff_{MS}[Q_{IS}] > Eff_0\} > P_0, \quad (3.5)$$

где  $P_0$  — критическое значение, выбираемое исходя из требований решаемой метасистемой  $MS$  задачи.

Определение значения вероятности  $P_0$  предполагает знание функции распределения  $F(Eff_{MS}(Q))$ . В некоторых случаях распределение можно задать исходя из общих соображений. Например, из условий выполнения ограничений центральной предельной теоремы, можно сделать предположение о нормальном характере распределения  $Eff_{MS}(Q)$ . При наличии достаточного статистического материала можно построить непараметрическую оценку плотности распределения. Однако для большинства практических задач оценку функции распределения эффективности метасистемы получить не удастся и следует использовать более доступные для реализации критерии (3.3-3.4).

Критерий пригодности является необходимым условием; его невыполнение делает бессмысленным разработку или применение соответствующей ИС. Таким образом, выполнение критерия пригодности является некоторым императивом: с его помощью можно однозначно указать на нецелесообразность разработки/применения ИС, но нельзя ответить на другой не менее важный вопрос — насколько эффективна ее реализация.

В связи с этим, как отмечалось в предыдущем разделе, в практике системной квалиметрии одновременно с (3.3-3.5) используются условия достаточности — критерии превосходства или оптимальности.

*Критерий превосходства* позволяет оценить ИС на основе сопоставления ее параметров с параметрами системы-прототипа  $IS^0$ :

$$Eff_{MS}[Q(IS)] > Eff_{MS}^0 \text{ для } \forall Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0, \quad (3.6)$$

где множество допустимых значений параметров ИС  $\{Q_{IS}\}_0$  формируется из условия выполнения требования пригодности  $MS$  (3.1). Величина  $dEff_{MS} = Eff(Q) - Eff(Q^0)$  будет отражать выигрыш, достигнутый от применения ИС  $IS$  вместо системы-прототипа  $IS^0$ .

Применение критерия (3.6) требует существенных оговорок:

1. Желательно, чтобы эффективность метасистемы является монотонно-неубывающей функцией от параметров качества ИС  $Q$ , то есть:

$$\text{если } Q_1 \geq Q_2, \text{ то } Eff_{MS}(Q_1) \geq Eff_{MS}(Q_2). \quad (3.7)$$

На практике выполнения этого условия ожидать не следует. Повышение качества ИС не гарантирует повышение эффективности  $MS$ .

2. Понятия «больше» или «меньше» при сравнении векторов определяются через построенные на них скалярные меры. Выбор меры представляет субъективный экзогенный процесс и требует дополнительного обоснования.

3. Критерий превосходства в формуле (3.6) правомерен лишь для независимых параметров  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . В случае, когда последние являются зависимыми величинами, увеличение частного параметра  $q_i$  может привести к уменьшению другого параметра  $q_j$ , что для нелинейного оператора  $Eff_{MS}(Q)$  может привести к серьезным трудностям при формализованном синтезе ИС по критерию превосходства.

Очевидно, что критерий (3.6) не гарантирует, что исследуемая ИС будет обладать наибольшей эффективностью. Поэтому более строгое решение может быть получено на основе *критерия оптимальности*, выраженного через эффективность метасистемы:

$$Eff_{MS}(Q^*) > Eff_{MS}(Q_{IS}) \text{ для } \forall Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0. \quad (3.8)$$

При выполнении вышеприведенных ограничений 1-3, в частности при выполнении условия монотонности (3.7), векторный критерий оптимальности можно представить в виде  $Q = Q^* = extr\{Q_{IS}\}_0$ , то есть имеет наибольшее (или наименьшее) значение среди  $\forall Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0$ .

В ряде прикладных задач, связанных с оценкой эффективности ИС, крайне плодотворной оказывается представление качественного состояния системы в виде точки  $m$ -мерного фазового пространства. При этом изменение эффективности ИС будет соответствовать перемещению фазовой точки в данном пространстве  $\{Q^m\}$ . Попадание вектора  $Q$  в область  $\{Q_0\}$  соответствует выполнению критерия пригодности, превышение значений вектора  $q_j^0 \in \{Q_0\}$ ,  $j = 1, \dots, n$  — критерию превосходства и нахождение глобального максимума  $q_j^*$ ,  $j = 1, \dots, n$  — критерию оптимальности.

Заметим, что приведенные выше показатели эффективности относятся к детерминированной ситуации. В случае, когда имеется возможность получить избыточный объем наблюдений показателей качества, целесообразно перейти к вероятностно-статистической постановке, обеспечивающей более реалистичскую оценку эффективности ИС. В частности, при наличии вероятностного распределения вектора  $Q$ , критерии пригодности, превосходства и оптимальности можно представить в виде:

$$P\{Q \in \{Q_0\}\} > P_0 ; \quad (3.9)$$

$$P\{Q > Q^0\} > P_0 ; \quad (3.10)$$

$$P\{Q = Q^*\} > P_0. \quad (3.11)$$

При этом соотношение (3.9) является необходимым условием-ограничением для (3.10) и (3.11).

В более общем случае вероятностный подход требует знания функции распределения показателя эффективности метасистемы  $F[Eff_{MS}(0)]$ . По аналогии с необходимым критерием (критерием пригодности) (3.5) можно сформулировать и достаточные критерии эффективности. В частности, эффективность ИС по критерию превосходства определяется вероятностью того, что достигнутый метасистемой положительный эффект  $Eff_{MS}(Q(IS))$  будет превышать соответствующий эффект (полученный в тех же условиях), достигнутый при использовании ИС-прототипа  $IS^0 = IS(Q^0)$  с вероятностью не ниже заданной  $P_0$ . В этом случае критерий превосходства ИС можно представить в виде:

$$P\{Eff_{MS}[Q_{IS}] > Eff_{MS}[Q^0]\} > P_0, \quad (3.12)$$

При отсутствии полных априорных знаний о распределении параметра эффективности  $F\{Eff_{MS}(Q)\}$ , критерий превосходства можно сформировать на основе средних значений:

$$\overline{Eff_{MS}(Q_{IS})} > Eff_{MS}(Q_{IS_0}), \text{ для } \forall Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0. \quad (3.13)$$

Аналогичные соотношения могут быть получены для критерия оптимальности. При этом необходимо заранее определить множество, на котором осуществляется оптимизация. В частности, если осуществляется синтез или поиск оптимальной ИС на некотором множестве допустимых значений показателей качества ИС  $\{Q_{IS}\}_0$ , критерии оптимальности в зависимости от уровня априорной статистической определенности могут быть, по аналогии с (3.12-3.13), записаны в виде:  $P\{Eff_{MS}[Q^*_{IS}] > Eff_{MS}[Q_{IS}]\} > P_0$ , для  $\forall Q_{IS} \in \{Q_{IS}\}_0$  где  $Q^*(IS) = Q^*_{IS}$  — оптимальные значения параметров ИС.

Рассмотрим три примера приложения предложенной методики к оценке эффективности различных типов ИС.

**4. Пример 1. Оценка эффективности АСУ как информационной системы.** Как уже отмечалось, выбор показателя и критерия эффективности ИС осуществляется исходя из цели, определяемой со стороны иерархически вышестоящей метасистемы  $MS$ . В случае промышленного производства роль метасистемы  $MS$  по отношению к АСУ выполняет *технологический процесс* (ТП) или технологический цикл предприятия. Таким образом, эффективность АСУ как информационной системы следует оценивать через эффективность ТП.

Рассмотрим формализованную постановку оценки эффективности промышленной АСУ. Предположим, что ТП (то есть метасистема  $MS$ ), управляемый АСУ, функционирует в сложной, не полностью определенной среде под воздействием последовательностей управляющих воздействий  $\{u_k, k = 1, \dots, m\}$ . Функциональная схема взаимодействия АСУ и метасистемы (ТП) представлена на рисунке 2.

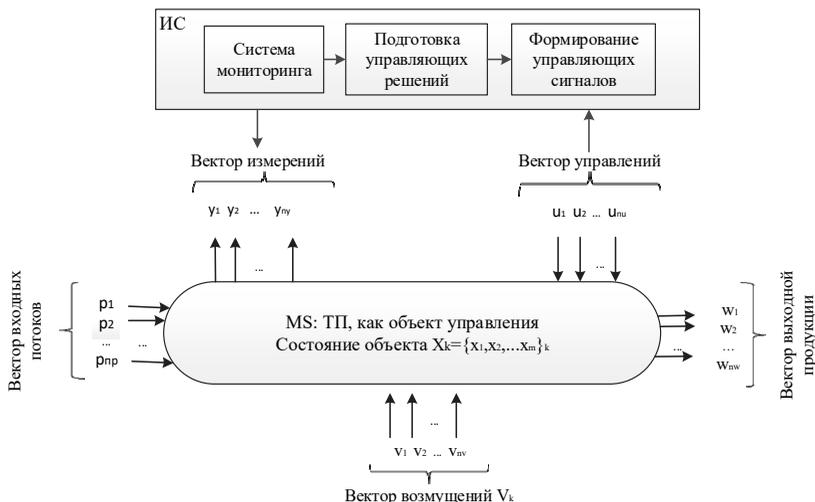


Рис. 2. Функциональная схема взаимодействия АСУ, как информационной системы, и метасистемы – технологического процесса

Состояние объекта управления  $X_k, k = 1, \dots, N$  в общем случае представляет собой векторный динамический стохастический процесс. Множество состояний, как правило, является континуумом, однако в процессе взаимодействия с цифровой системой мониторинга оно преобразуется в дискретную временную последовательность.

Векторная совокупность текущего состояния ТП  $x_k$ , управляющих  $u_k$  и возмущающих  $v_k$  воздействий образуют текущую ситуацию  $S_k = \{x_k, u_k, v_k, k = 1, \dots, N\}$ .

Предположим, что  $U = \{u_k\}$  — множество допустимых векторных управлений, формируемых АСУ. Каждое  $u_k \in U$  представляет собой текущее управление, сформированное на основе анализа текущей ситуации  $S_k$ . В результате мониторинга состояния ТП образуется последовательность векторов наблюдения  $Y_k = (y_1, \dots, y_{m_k})_k, k = 1, \dots, N$ , используемая для подготовки управляющих решений. Реализация управления приводит к реакции ТП, которая будет проявляться:

— в переходе ТП из состояния  $x_k$  в состояние  $x_{k+1}$  под воздействием управляющего сигнала  $u_k \in U$ ;

— в выработке выходных воздействий (выходной продукции)  $W_{k+\tau}$ , определяющей терминальное качество управления.

В конечном итоге ТП под воздействием управлений  $U_N = \{u_1, \dots, u_N\}$  переходит из состояния  $x_1$  в состояние  $x_N$ , в результате чего формируется положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  (функциональный или экономический, то есть соотнесенный с затратами). Для одного производственного цикла эффективность управления будет оцениваться терминальным эффектом самого ТП, то есть  $Eff_{IS} = \mathcal{E}_N$ . В случае, когда имеются данные по  $m$  завершенным производственным циклам, эффективность может быть уточнена традиционным усреднением  $Eff_{IS} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \mathcal{E}_{Ni}$ .

Рассмотрим задачу оценки эффективности пошагового корректирующего управления ТП. Пусть в результате теоретического анализа или моделирования установлено, что наибольшая достижимая величина положительного эффекта равна  $\mathcal{E}_N^*$ . Для достижения такого результата  $\mathcal{E}_N^*$  известными методами оптимального управления формируется оптимальный план (программа) — последовательность управлений  $U_N^* = \{u_1, \dots, u_N\}^*$ . При этом, в соответствии с принципами системного анализа [27-29], эффект, достигаемый на каждом конкретном шаге, может не быть наибольшим; важно, чтобы максимум достигался в конце управления при  $k = N$ , то есть в момент достижения терминальной цели.

Поскольку объект управления находится под воздействием большого числа не полностью определенных возмущений, его состояние отклоняется от оптимальной фазовой траектории, обеспечивающей оптимальное решение поставленной задачи. Для демпфирования возникающих отклонений ИС на основе обработки совокупности текущих наблюдений формирует последовательность корректирующих управлений  $U_k = \{u_1, \dots, u_N\}_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ , позволяющую поддерживать реализацию оптимального плана.

В случае, если формируемая последовательность управления обеспечивает пригодное или оптимальное функционирование ТП, можно говорить о пригодности или оптимальности оцениваемой ИС. Наоборот, если низкое качество управления приводит к тому, что система приходит в состояние  $x_N \neq x_N^*$ , то это означает неоптимальную работу ИС, приводящую к дефициту результирующего эффекта  $d\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N^* - \mathcal{E}_N$ . При этом, если  $d\mathcal{E}_N$  настолько велика, что полученный эффект оказывается меньше допустимого порога  $\mathcal{E}_0$ , то ИС оказывается не пригодной для выполнения поставленной перед ней задачей.

Отсюда, в соответствии с вышеприведенными критериями системной эффективности, можно получить конкретные формы оценки качества АСУ, как информационной системы.

ИС является *эффективной по критерию пригодности*, если качество формируемой ей программы управления  $U_{0N} = \{u_1, \dots, u_N\}_0$  обеспечивает результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  не меньше минимально допустимого  $\mathcal{E}_0$ . Область эффективных (здесь — допустимых) программ управлений  $\{U_0\} = \{u : \mathcal{E}_N \geq \mathcal{E}_0\}$ .

В случае, если имеется возможность набрать статистику управления, то есть повторить процесс несколько раз, можно использовать вероятностные оценки эффективности. В этом случае АСУ, как ИС, признается эффективной по критерию пригодности, если:

— результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  в среднем оказывается не меньше минимально допустимого  $\mathcal{E}_0$ , и следовательно, область эффективных программ управлений  $\{U_0\} = \{u : \bar{\mathcal{E}}_N \geq \mathcal{E}_0\}$ ;

— вероятность превышения результирующим положительным эффектом  $\mathcal{E}_N$  минимально допустимого порога  $\mathcal{E}_0$  превышает заданную величину  $P_0$ . Соответственно, область эффективных программ управлений равна  $\{\mathcal{E}_0\} = \{\mathcal{E} : P\{\mathcal{E}_N \geq \mathcal{E}_0\} \geq \alpha_0\}$ .

ИС является *эффективной по критерию превосходства*, если качество формируемых ей управляющих решений является достаточной для реализации программы управления  $U_N^0 = \{u_1, \dots, u_N\}^0$  такой, что:

— результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  не меньше эффекта  $\mathcal{E}^0$ , обеспечиваемого применением системы-прототипа:  $\mathcal{E}_N \geq \mathcal{E}^0$  (область эффективных программ управления):

$$\{U_0\} = \{u : \mathcal{E}_N \geq \mathcal{E}^0\};$$

— результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  в среднем оказывается не меньше эффекта  $\mathcal{E}^0$ , обеспечиваемого применением системы-прототипа:  $\bar{\mathcal{E}}_N \geq \mathcal{E}^0$  (область эффективных программ управления  $\{U_0\} = \{u : \bar{\mathcal{E}}_N \geq \mathcal{E}^0\}$ );

— вероятность превышения результирующим положительным эффектом  $\mathcal{E}_N$  эффекта  $\mathcal{E}^0$ , обеспечиваемого применением системы-прототипа, превышает заданную величину  $\alpha_0$  (область эффективных программ управления  $\{U_0\} = \{u : P[\bar{\mathcal{E}}_N \geq \mathcal{E}^0] \geq \alpha_0\}$ ).

АСУ как информационная система является *эффективной по критерию оптимальности*, если качество формируемых управляющих решений, предоставляемой ей АСУ, является достаточной для реализации наиболее эффективной программы управления  $U_N^* = \{u_1, \dots, u_N\}^*$  такой, что:

— результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  является оптимальным (максимальным) на классе всех допустимых управлений  $\{U\}$ , то есть  $\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N^*$ ; или при недостижимости  $\mathcal{E}_N^*$ ,  $\delta\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_N^* - \mathcal{E}_N = \min$  (область эффективных программ управления  $\{U^*\} = \{u : \delta\mathcal{E}_N = \min\}$ );

— результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  является оптимальным (максимальным) в среднем, то есть  $\bar{\mathcal{E}}_N = \mathcal{E}_N^*$  или  $\delta\bar{\mathcal{E}}_N = \mathcal{E}_N^* - \bar{\mathcal{E}}_N = \min$  (область эффективных программ управления  $\{U^*\} = \{u : \delta\bar{\mathcal{E}}_N = \min\}$ ;

— с вероятностью  $\alpha \geq \alpha_0$  результирующий положительный эффект  $\mathcal{E}_N$  превышает значение эффекта  $\mathcal{E}$ , обеспечиваемого любой другой допустимой программой управления. Соответствующая область эффективных программ управления равна  $\{U^*\} = \{u : P[\delta\bar{\mathcal{E}}_N = \min] \geq \alpha_0\}$ .

**5. Пример 2. Оценка эффективности информационных образовательных систем.** Основным назначением *информационных образовательных систем* (ИОС) университетов является повышение качества подготовки выпускников путем создания соответствующей информационной инфраструктуры обучения: обеспечения студентов электронной учебно-методической информацией (создание электронного кейса), осуществления электронного тестирования и самотестирования, предоставления электронных корректирующих программ, реализации оперативного направленного контроля образовательного процесса и т.п. Таким образом, в качестве метасистемы по отношению к ИОС выступает собственно образовательная система.

Основным показателем качества образовательной системы  $MS$  является степень соответствия усредненного показателя качества подготовки специалиста  $Q$  квалификационным требованиям (компетенциям)  $Q_0$ , сформированных на основе анализа пожеланий работодателя и рынка труда и сформулированных в виде *компетентностных характеристик* (КХ). Таким образом, интегральным количественным показателем образовательной системы может служить некоторая экзогенная метрика  $\mu(Q - Q_0)$ , позволяющая построить усредненный вариант критерия пригодности:

$$\bar{Q} \in \{Q_0\}. \quad (5.1)$$

Аналогично формируется критерий пригодности и в более общей вероятностной форме:

$$P(Q \in \{Q_0\}) > P_0.$$

Однако непосредственный перенос критериев эффективности образовательной системы на оценку качества ИОС достаточно неоднозначен, поскольку современная методология подготовки специалистов использует последнюю лишь в качестве вспомогательной сервисной системы, дополняющей традиционную педагогическую образовательную модель.

При использовании перспективных образовательных моделей, активно применяющих системы информационной поддержки образовательного процесса ИОС, как уже отмечалось, используется для оперативного направленного индивидуализированного контроля текущего состояния образовательного процесса, осуществления корректирующих управляющих воздействий  $U_N = \{u_1, \dots, u_N\}$  путем формирования и выдачи обучающимся индивидуальных корректирующих программ обучения и повторного контроля качества усвоения изучаемого материала.

Рассмотрим формализованную постановку данной задачи на основе концепции пространства состояния.

Пусть  $x_0$  — начальное состояние обучающегося,  $x_N$  — конечное состояние, отвечающее завершению процесса обучения. В случае, когда образовательный процесс завершился успешно, в соответствии с критерием пригодности (5.1) конечное состояние обучающегося должно отвечать всем требованиям компетентностного подхода, то есть  $x_N \in \{X_0\}$ .

Если текущее состояние  $x_k$  представляет  $m$ -мерный вектор характеристических параметров, то программа обучения будет соответствовать некоторой траектории в  $m$ -мерном фазовом пространстве  $X_N = \{x_1, \dots, x_N\}$ , где  $x_N \in \{X_0\}$ . В идеальном случае оптимальная образовательная траектория  $X_N^* = \{x_1^*, \dots, x_N^*\}^*$  должна представлять собой прямую линию (т.е. равномерное накопление компетентностных знаний), однако на практике, в силу специфики методических аспектов подготовки специалистов, она может иметь более сложную форму.

В случае отклонения индивидуального процесса обучения от оптимальной программы, то есть возникновения на каком-то  $k$ -м шаге отклонения  $\delta x_k = \mu(x_k^* - x_k) \neq 0$ , формируется корректирующее управление  $u_k$ , направленное на минимизацию величины  $\delta x_k$ . Таким образом, в качестве оптимального управляющего образовательного воздействия выступает величина  $u_k^* \in U_0$  такая, что  $\delta x_k \rightarrow \min$ , где  $U_0$  — множество допустимых управлений.

Как правило, качество ИОС, даже в системе индивидуального корректирующего обучения, не может оцениваться на основе одной

единственной реализации. В связи с этим используется статистическое усреднение по множеству реализаций (т.е. по множеству обучающихся) или вероятностная оценка.

Данный подход позволяет рассматривать ИОС как элемент специализированной корректирующей системы управления образовательным процессом. При этом ее центральной функциональностью является электронный контроль и формирование корректирующей программы  $U_N = \{u_1, \dots, u_N\}$ .

Предположим, что  $U_N^* = \{u_1, \dots, u_N\}^*$  — оптимальная программа корректирующего управления. Однако качество информации  $Q_{IS}(I_k)$ , поставляемой ИОС, может привести к тому, что будет реализована корректирующая программа  $U_N = \{u_1, \dots, u_N\}$ , отличающаяся от  $U_N^*$ , то есть  $\mu(U_N^* - U_N) \neq 0$ . В результате этого к моменту завершения обучения обучающийся оказался в некотором состоянии  $x_N \neq x_N^*$ . Такой дескрипт позволяет использовать ранее предложенные критерии эффективности и получить конкретные формы оценки качества ИОС.

ИОС является *эффективной по критерию пригодности*, если качество предоставляемой ей информации  $Q_{IS}(I_k)$ ,  $k=1, \dots, N$  является достаточным для реализации программы управления  $U_{0N} = \{u_1, \dots, u_N\}_0$  такой, что:

— состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k=N$  отвечает требованиям квалификационных характеристик, то есть  $x_N \in \{X_0\}$ ;

— состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k=N$  в среднем отвечает требованиям квалификационных характеристик, то есть  $\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \in \{X_0\}$ .

— вероятность достижения обучающимися на момент завершения учебы  $k=N$  состояния, отвечающего требованиям квалификационных характеристик, превышает заданную величину  $P_0 = \alpha_0$ , то есть  $P(x_N \in \{X_0\}) > \alpha_0$ .

Далее, ИОС является *эффективной по критерию превосходства*, если качество предоставляемой ей информации

$Q_{IS}(I_k)$ ,  $k=1, \dots, N$  является достаточным для реализации программы управления  $U_N^0 = \{u_1, \dots, u_N\}^0$ , такой, что:

— состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  будет превосходить требования квалификационных характеристик или параметры модели-прототипа  $\mu(x_N - x_N^0) > 0$  в смысле выбранной метрики  $\mu$ ;

— вероятность того, что состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  превосходит (для выбранной метрики  $\mu$ ) требования квалификационных характеристик или параметры модели-прототипа  $P\{\mu(x_N - x^0) > 0\} > \alpha^0$ .

Наконец, ИОС является *эффективной по критерию оптимальности*, если качество предоставляемой ей информации  $Q(I_k)$ ,  $k=1, \dots, N$  является достаточным для реализации оптимальной программы управления  $U_N^* = \{u_1, \dots, u_N\}^*$  такой, что:

— состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  превосходит (для выбранной метрики  $\mu$ ) требования квалификационных характеристик и выходные параметры  $\{x_{Nl}, l=1, \dots, L\}$  всех известных моделей-прототипов  $\mu(x_N - x_{Nl}^0) > 0$ ,  $l=0, 1, \dots, L$ , то есть  $\{\mu(x_N - x^0) > 0 \ \& \ \mu(x_N - x_{Nl}^0) > 0 \ \forall l=1, \dots, L\}$ ;

— состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  в среднем превосходит (в смысле выбранной метрики  $\mu$ ) требования квалификационных характеристик и выходные параметры всех известных моделей-прототипов, то есть:

$$\{\mu(\bar{x}_N - x^0) > 0 \ \& \ \mu(\bar{x}_N - x_{Nl}^0) > 0 \ \forall l=1, \dots, L\};$$

— вероятность того, что состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  превосходит (для выбранной метрики  $\mu$ ) требования квалификационных характеристик и выходные параметры всех известных моделей-прототипов на заданную величину  $\alpha$ , то есть:

$$P\{\mu(x_N - x^0) > 0 \ \& \ \mu(x_N - x_{Nl}^0) > 0 \ \forall l=1, \dots, L\} > \alpha.$$

Заметим, что последнее определение (так же, как и в случаях АСУ или АИС) можно поставить в более жесткой форме:

— вероятность того, что состояние обучающихся на момент завершения учебы  $k = N$  превосходит (для выбранной метрики  $\mu$ ) требования квалификационных характеристик и выходные параметры всех известных моделей-прототипов является наибольшей на множестве реализуемых (известных) ИОС:

$$P\{\mu(x_N - x^0 > 0 \ \& \ \mu(x_N - x_{Nl} > 0 \ \forall l = 1, \dots, L)\} = \max .$$

Другое замечание следует отнести к вопросу, связанному с оптимизацией программы корректирующего управления. В частности, в рассмотренных выше определениях допускались любые допустимые управления (а значит, и траектории образовательного процесса  $\{x_0, \dots, x_N\}$ ). В тоже время в условиях ограниченного временного или педагогического ресурса задача определения оптимальной ИОС может быть выражена через требование последовательного предоставления образовательной информации  $\{I_0, \dots, I_N\}$  с качеством  $\{Q_{IS}(I_k), k = 1, \dots, N\}$ , обеспечивающим наилучшую (в заранее определенном смысле) программу корректирующего управления  $\{u_0, \dots, u_{N-1}\}$ .

**6. Заключение.** Основным выводом из предложенных материалов следует считать принципиальную возможность и необходимость количественного оценивания эффективности информационных систем и технологий через положительный эффект, достигаемый метасистемой, в интересах которой они созданы и применяются.

Для успешного применения описанной в статье методологии следует учесть два замечания.

Первое из них связано с тем фактом, что и сама метасистема, в интересах которой создавалась ИС, может не являться терминалом. Например, для АСУ ТП метасистемой является технологический процесс. Однако реальный эффект достигается не на выходе ТП, а на выходе всего производственного цикла. Более того, и товарная продукция не отражает конечный эффект, ее необходимо еще продать, и учесть всю совокупность издержек. Поэтому выбор этапа, на котором осуществляется оценка положительного эффекта, как и выбор самого критерия эффективности, остается субъективной экзогенной задачей, формируемой на уровне здравого смысла.

Второе замечание связано с тесной взаимосвязью предложенного подхода с теорией риска. В частности, в качестве оценки эффективности ИС по критерию пригодности предложено использовать вероятность пре-

вышения достигнутым положительным эффектом минимального порогового значения  $P\{Eff_{MS}[Q_{IS}] > Eff_0\} \geq P_0$ . Следовательно, последнее соотношение можно трактовать как вероятность выполнения стоящей перед ИС задачи. Соответственно, дополнительная величина  $Q_0 = 1 - P_0$  представляет собой вероятность невыполнения поставленной задачи, что совпадает с вероятностным определением понятия риска.

Указанная взаимосвязь позволяет использовать для оценивания эффективности ИС методологии и технологии автоматизированного расчета рисков структурно-сложных систем [32, 33].

### Литература

1. *Соловьев И.В., Кочеткова Л.Н.* Философия информации как всеобщая методология развития // Российский технологический журнал. 2014. №3(4). С. 29–37.
2. *Соколов А.В.* Философия информации: учебное пособие // Челябинск: ЧГАКИ. 2011. 454 с.
3. *Коллин К.К.* Философия информации: структура реальности и феномен информации // Интелпрос. 2013. №4. С. 66–84.
4. *Хлебников Г.В.* Философия информации Л. Флориды // Интелпрос. 2013. №4. С. 35–48.
5. *Юсупов Р.М., Заболотский В.П.* Концептуальные и научно-методологические основы информатизации // СПб: Наука. 2009. 542 с.
6. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов (Вторая редакция) // М.: Экономика. 2016. 421 с.
7. ISO:9000:2015: fourth edition. Quality management systems. Fundamentals and vocabulary. URL: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:9000:ed-4:v1:en> (дата обращения: 26.11.2016).
8. Международный стандарт МЭК 50 (191)-90. Надежность и качество услуг. Термины и определения. URL: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/gosts/21964> (дата обращения: 26.11.2016).
9. FEA Consolidated Reference Model Document. Version 2.3. 2015. URL: <http://www.slideshare.net/WillyDevNET/fea-crm-v23finaloct> (дата обращения: 26.11.2016).
10. Методические рекомендации по подготовке докладов о результатах и основных направлениях деятельности субъектов бюджетного планирования. Минфин РФ. МЭРТ РФ. 2008. URL: <https://www.google.ru/url?sa=t&rc=t&q=&src=s&source=web> (дата обращения: 26.11.2016).
11. *Зиндер Е.* Что такое «эффективность ИТ»? // Intelligent Enterprise. 2006. №8. URL: <https://www.iemag.ru/master-class/detail.php?ID=15727> (дата обращения: 26.11.2016).
12. CIO Insight. The voice of CIO community. URL: [www.cioinsight.com](http://www.cioinsight.com). (дата обращения: 21.11.2016).
13. *Арутюнян М.* и др. Демистификация ИТ: Что на самом деле информационные технологии дают бизнесу // М.: Альпина Бизнес Букс. 2006. 296 с.

14. *Ермошкин Н.Н.* Шесть способов оценить пользу и эффективность информационных технологий // Банковский ритейл. 2006. №4. URL: <https://www.lawmix.ru/bux/76476> (дата обращения: 21.11.2016).
15. *Анишина М.* Оценка эффективности ИТ // Журнал школы IT-менеджмента «Системы управления бизнес-процессами». Академия народного хозяйства при Правительстве РФ. 2011. Вып. № 7. URL: <http://journal.itmane.ru/node/591> (дата обращения: 20.11.2016).
16. ROI 2003: Do You Have Any Faith In Your ROI Numbers? URL: <http://www.cioinsight.com/c/a/Research/ROI-2003-Do-You-Have-Any-Faith-In-Your-ROI-Numbers#sthash.uvUbGa45.dpuf> (дата обращения: 20.11.2016).
17. *Strassmann P.A.* The squandered computer. Evaluating the business alignment of information technologies // New Canaan: Information Economics Press. 1997. 232 p.
18. *Pisello T., Strassmann P.* IT value chain management. Maximizing the ROI from IT investment // New Canaan: Information Economics Press. 2003. 236 p.
19. *Ананьин В.И.* В поисках эффективности ИТ // Intelligent Enterprise. 2009. № 7. URL: <https://www.iemag.ru/analytics/detail.php?ID=18833> (дата обращения: 15.11.2016).
20. *Скряпкин К.Г.* Экономическая эффективность информационных систем // М.: ДМК Пресс. 2003. 256 с.
21. *Карр Н.* Блеск и нищета информационных технологий. Почему ИТ не являются конкурентным преимуществом // М: Секрет фирмы. 2005. 176 с.
22. *Новак Е.В.* Информационно-коммуникационные технологии: оценка эффективности // Информационные технологии. 2014. № 8. С. 74–80.
23. *Новак Е.В.* Как измерить эффективность информационно-коммуникационных технологий // Статистика и экономика. 2014. № 3. С. 186–191.
24. *Bresnahan T., Brynjolfsson E., Hitt L.* Information Technology, Workplace Organization and Demand for Skilled Labor: An Empirical Evidence // Quarterly Journal of Economics. 2002. vol. 117. no. 1. pp. 339–376.
25. *Brynjolfsson E., Hitt L., Yang S.* Intangible Assets: Computers and Organization Capital // Brookings Papers on Economic Activity. 2002. no. 1. pp. 137–198.
26. Эффективность инвестиций в ИТ. Альманах лучших работ // Information Management. 2012. 196 с.
27. *Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н.* Системный анализ и синтез стратегических решений в инноватике: Математические, эвристические и интеллектуальные методы системного анализа и синтеза // М.: Ленанд. 2015. 306 с.
28. *Белов П.Г.* Управление рисками, системный анализ и моделирование // Люберцы: Юрайт. 2016. 272 с.
29. *Дрогобыцкий И.Н.* Системный анализ в экономике: учебник // М.: ЮНИТИ. 2016. 423 с.
30. *Кириллов В.И.* Квалиметрия и системный анализ // М.: ИНФРА-М. 2012. 440 с.
31. *Козлов В.Н.* Системный анализ, оптимизация и принятие решений // М.: Проспект. 2016. 176 с.
32. *Гладкова И.А., Можжев А.С., Мусаев А.А.* Метод логико-детерминированного моделирования сетевых систем // Известия СПбГТИ. 2012. Вып. 12(38). С. 89–92.
33. *Мусаев А.А., Нозик А.А., Русинов Л.А.* Прогностический анализ безопасности промышленного предприятия // Известия СПбГТИ. 2016. №34(60). С. 87–93.

**Юсупов Рафаэль Мидхатович** — д-р техн. наук, профессор, член-корреспондент РАН, заслуженный деятель науки и техники РФ, директор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН), президент, НП Национальное общество имитационного моделирования («НОИМ»). Область научных интересов: теория управления, информатика, моделирование, теоретические основы информатизации и информационного общества, информационная безопасность. Число научных публикаций — 390. [spiiiran@iias.spb.su](mailto:spiiiran@iias.spb.su); 14 линия В.О., 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7(812)3283311, Факс: +7(812)328-4450.

**Мусаев Александр Азерович** — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН), декан факультета информационных технологий и управления, Санкт-Петербургский государственный технологический институт (технический университет). Область научных интересов: анализ данных, управление и прогнозирование в сложных динамических системах, стохастические и хаотические системы. Число научных публикаций — 245. [amusaev@technolog.edu.ru](mailto:amusaev@technolog.edu.ru); 14-я линия В.О., 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7(812)4949323, Факс: +7(812)3501113.

R.M. YUSUPOV, A.A. MUSAEV  
**EFFICIENCY OF INFORMATION SYSTEMS AND  
 TECHNOLOGIES: FEATURES OF ESTIMATION**

*Yusupov R.M., Musaev A.A. Efficiency of Information Systems and Technologies: Features of Estimation.*

**Abstract.** The task of creating a methodology for evaluating the efficiency of information systems and technologies is considered. A distinctive feature of information systems is their service nature which results in the need of indirect estimation of their efficiency through terminal positive effect of metasytem, for the benefit of which this system was created or adapted.

The brief summary of the existing approaches and techniques for estimating efficiency of information systems and technologies is provided. Ambiguity of the used efficiency measurements, resulting in the difficulties of the creation of a formalized, numerical technique for efficiency estimation, was revealed.

The quantitative efficiency evaluations of an information system, which take into account the probabilistic nature of the basic data used for creation of these estimates, are offered. The options of necessary and sufficient criteria for efficiency of information systems, expressed through efficiency of metasystems for the benefit of which they function, are provided.

**Keywords:** information; information systems; information technology; efficiency; quality; methodology; probabilistic approach; systems analysis; ACS; logical-probabilistic method.

**Yusupov Rafael Midhatovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, Corr. Member of RAS, Honored Worker of Science and Technology of Russian Federation, director, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), president of NP National Simulation Society («NSS»). Research interests: control theory, informatics, modeling, theoretic basics of informatization and information society, information security. The number of publications — 390. spiran@iiias.spb.su; 39, 14-th Line, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone: +7-812-328-3311, Fax: +7(812)328-4450.

**Musaev Alexander Azerovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, leading researcher, laboratory of IT in System Analysis and Modeling of St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), dean of IT and control systems department, St. Petersburg State Technological Institute (technical university). Research interests: data analysis, complicated dynamic processes prognosis and control, stochastic chaos systems. The number of publications — 245. amusaev@technolog.edu.ru; 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone: +7(812)4949323, Fax: +7(812)3501113.

## References

1. Solovjov I.V., Kochetkova L.N. [Information philosophy as general methodology of development]. *Russkiy tehnologicheskij gurnal – Russian technological journal*. 2014. vol. 3(4). pp. 29–37. (In Russ.).
2. Sokolov A.V. *Filosofia informacii* [Philosophy of information]. Chelyabinsk: ChSASI. 2011. 454 p. (In Russ.).
3. Colin K.K. [Information philosophy: structure of reality and phenomenon of information]. *Intelros – Intelros*. 2013. vol. 4. pp. 66–84.
4. Clebnikov G.V. [Philosophy of information of L. Floridi]. *Intelros – Intelros*. 2013. vol. 4. pp. 35–48. (In Russ.).

5. Yusupov R.M., Zabolotski V.P. *Conceptualnye, nauchnie I metodologicheskie osnovi informacii* [Conceptual, scientific and methodological bases of information]. S.Petersburg: Nauka. 2009. 542 p. (In Russ.).
6. *Metodicheskie rekomendacii po ocenke jeffektivnosti investicionnyh proektov (Vtoraja redakcija)* [Methodical recommendations according to efficiency of investment projects (Second ed.)]. Moscow: Economica. 2016. 421 p. (In Russ.).
7. ISO:9000:2015: fourth edition. Quality management systems. Fundamentals and vocabulary. Available at: <https://www.iso.org/obp/ui/#iso:std:iso:9000:ed-4:v1:en> (accessed 26.11.2016).
8. IEC 50 (191)-90. [International Standard. Reliability and quality of service. Terms and Definitions]. Available at: <http://dic.academic.ru/dic.nsf/gosts/21964> (accessed 26.11.2016). (In Russ.).
9. FEA Consolidated Reference Model Document Version 2.3. 2015. Available at: <http://www.slideshare.net/WillyDevNET/fea-crm-v23finaloct>. (accessed 26.11.2016).
10. Metodicheskie rekomendacii po podgotovke dokladov o rezul'tatah i osnovnyh napravlenijah dejatel'nosti sub#ektov bjudzhetnogo planirovanija [Guidelines for reporting on the results and main activities of the subjects of budget planning]. Minfin R.F. MERT RF. 2008. Available at: <https://www.google.ru/url?sa=t&rcrj&q=&esrc=s&source=web> (accessed 26.11.2016). (In Russ.).
11. Zinder E. [What is "IT efficiency"?]. *Intelligent Enterprise*. 2006. vol. 8. Available at: <https://www.iemag.ru/master-class/detail.php?ID=15727> (accessed 26.11.2016). (In Russ.).
12. CIO Insight. The voice of CIO community. Available at: [www.cioinsight.com](http://www.cioinsight.com). (accessed 21.11.2016).
13. Arutyunyan M. et al. *Demistifikaciya IT: Chto deistvitelno dayut informacionnie tehnologii biznesu?* [Demystifying IT: What actually give the information technology business]. Moscow: Alpina Buisness Books. 2006. 296 p. (In Russ.).
14. Ermoshkin N.N. [Six ways to evaluate the usefulness and efficiency of information technology]. *Riteil Banking – Retail Banking*. 2006. vol. 4. Available at: <https://www.lawmix.ru/bux/76476> (accessed 21.11.2016). (In Russ.).
15. Anshina M. [Assessment of IT effectiveness]. *Zhurnal shkoli IT-menegmenta "Bisnes proces menegment systems"- Journal of School of IT-management "Business process management systems."* 2011. vol. 7. Available at: <http://journal.itmane.ru/node/591> (accessed 20.11.2016). (In Russ.).
16. ROI 2003: Do You Have Any Faith In Your ROI Numbers? Available at: <http://www.cioinsight.com/c/a/Research/ROI-2003-Do-You-Have-Any-Faith-In-Your-ROI-Numbers#sthash.uvUbGa45.dpuf> (accessed 20.11.2016).
17. Strassmann P.A. The squandered computer. Evaluating the business alignment of information technologies. New Canaan: Information Economics Press. 1997. 232 p.
18. Pisello T., Strassmann P. IT value chain management. Maximizing the ROI from IT investment. New Canaan: Information Economics Press. 2003. 236 p.
19. Ananjin V.I. [In the search of IT efficiency]. *Intelligent Enterprise*. 2009. vol. 7. Available at: <https://www.iemag.ru/analytics/detail.php?ID=18833> (accessed 15.11.2016). (In Russ.).
20. Skripnik K.G. *Economicheskaya effektivnost informacionnih system* [The cost-effectiveness of information systems]. Moscow: DMK Press. 2003. 256 p. (In Russ.).
21. Carr N. *Blesk I nisheta informacionnih tehnologii* [Shine and poverty of information technology. Why IT is not a competitive advantage]. Moscow: Company's secret. 2005. 176 p. (In Russ.).
22. Novak E.V. [Information and communication technologies: evaluation of the effectiveness]. *Informacionnie tehnologii – Information Technology*. 2014. vol. 8. pp. 74–80. (In Russ.).

23. Novak E.V. How to measure the effectiveness of information and communication technologies. *Statistics and Economics*. 2014. vol. 3. pp. 186–191.
24. Bresnahan T., Brynjofsson E., Hitt L. Information Technology, Workplace Organization and Demand for Skilled Labor: An Empirical Evidence. *Quarterly Journal of Economics*. 2002. vol. 117. no. 1. pp. 339–376.
25. Brynjofsson E., Hitt L., Yang S. Intangible Assets: Computers and Organization Capital. *Brookings Papers on Economic Activity*. 2002. vol. 1. pp. 137–198.
26. *Effectivnost IT investitsiy. Al'manah luchshih rabot* [The effectiveness of IT investments. Almanac best works]. Information Management. 2012. 196 p. (In Russ.).
27. Andreychikov A.V., Andreychikova O.N. *Sistemni analiz b sintez strategicheskikh resheniy v innovatsiyah: matematicheskii, evristicheskie i intellektualnie metody sistemnogo analiza i sinteza* [System analysis and synthesis of strategic decisions in innovation: Mathematical, heuristic and intelligent methods of system analysis and synthesis]. Moscow: Lenand. 2015. 306 p. (In Russ.).
28. Belov P.G. *Risk menedjment, sistemni analiz i modelirovanie* [Risk management, systems analysis and modeling]. Lyuberci: Yurait. 2016. 272 p. (In Russ.).
29. Drogobicki I.N. *Sistemni analiz v ekonomike: uchebnyk* [System analysis in economics: textbook] Moscow: UNITI. 2016. 423 p. (In Russ.).
30. Kirillov V.I. *Kvalimetriya i sistemni analiz* [Qualimetry and Systems Analysis]. Moscow: INFRA-M. 2012. 440 p. (In Russ.).
31. Koslov V.N. *Sistemni analiz, optimizatsiya i prinyatie reshenii* [System analysis, optimization and decision-making]. Moscow: Prospect. 2016. 176 p. (In Russ.).
32. Gladkova I.A., Mogaev A.S., Musaev A.A. [Method of the logical determined modeling of network systems]. *Izvestiya SPbGTI – SPbSIT News*. 2012. vol. 12(38). pp. 89–92. (In Russ.).
33. Musaev A.A., Nozik A.A., Rusinov L.A. [Predictive analysis of safety of the industrial enterprise]. *Izvestiya SPbGTI – SPbSIT News*. 2016. vol. 34(60). pp. 87–93. (In Russ.).

Р.Б. ТРЕГУБОВ, И.А. САИТОВ, С.И. САИТОВ  
**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОГО БАЗИСА И  
СИСТЕМЫ МОДЕЛЕЙ МНОГОПУТЕВЫХ МНОГОАДРЕСНЫХ  
ИНФОКОММУНИКАЦИОННЫХ СИСТЕМ**

---

*Трегубов Р.Б., Саитов И.А., Саитов С.И.* Элементы теоретико-множественного базиса и системы моделей многопутевых многоадресных инфокоммуникационных систем.

**Аннотация.** В статье предлагается новый подход к моделированию и проектированию инфокоммуникационных систем, в которых предусмотрена иерархическая многоуровневая маршрутизация. Рассмотрены элементы теоретико-множественного базиса и системы моделей инфокоммуникационной системы, оперирующие не только традиционными модельными элементами — двухполюсными сетями связи, — но и кратными сегментами типа цепь, звезда, кольцо и дерево. С использованием положений теории множеств основным понятиям и процедурам эталонной модели взаимодействия открытых систем ставятся в соответствие математические объекты, обеспечивающие строгое формальное описание инфокоммуникационной системы, в которой реализуются многопутевые многоадресные физические и логические соединения «точка-многооточка», «многооточка-точка», «многооточка-многооточка». На примере моделирования свойства структурной надежности конкретной инфокоммуникационной системы показаны конструктивность, надежность и системность разработанного подхода.

**Ключевые слова:** инфокоммуникационная система, многоточечные соединения, многоадресная многопутевая маршрутизация, моделирование, теоретико-множественный базис, структурная и параметрическая оптимизация.

---

**1. Введение.** Анализ современного состояния инфокоммуникаций показал, что основной объективно наблюдаемой тенденцией сегодня является активное применение различных услуг типа «точка-многооточка», «многооточка-точка», «многооточка-многооточка». Это телефонные и видеоконференции, множественный доступ к удаленным информационным ресурсам, интерактивная работа распределенных коллективов и пр. Все эти услуги подразумевают одновременное наличие в инфокоммуникационной системе (ИКС) нескольких многоточечных соединений различной топологии: цепь, звезда, кольцо и дерево. Для их реализации в ИКС предусмотрено наличие маршрутизирующих подсистем, обеспечивающих многоадресное [1, 2] и многопутевое [3-5] распределение сообщений как по физическим трактам (цепям, линиям передачи), так и по логическим каналам, трактам, туннелям и виртуальным частным сетям (VPN) [6].

Данные тенденции вступают в противоречие с существующими подходами к проектированию телекоммуникаций, в частности, с используемыми на практике аналитическими средствами решения частных структурно-сетевых задач оптимизации ИКС [7-12]. Исследования

показывают, что действующие ИКС проектировались под сеансы типа «точка-точка» на основе декомпозиции физической инфраструктуры на двухполюсные сети связи (ДСС) [7, 9, 13]. В настоящее время обслуживание пользователей через виртуальные соединения, туннели и *VPN* приводит к тому, что администрация ИКС не в полной мере может прогнозировать последствия каждого вновь организуемого многоточечного сеанса. Вследствие этого на практике все чаще наблюдаются различные негативные симптомы: либо срывы связи в ходе конференций, либо избыточные затраты ресурсов на их обеспечение.

Имитационные научно-методические средства лишь частично снимают остроту этих вопросов и только для наиболее типовых условий эксплуатации ИКС [8, 14-16]. Следовательно, существует объективная необходимость развития формально-математической базы проектирования ИКС на базе разработки специализированных моделей и методов, учитывающих многоточечность сеансов, многопутевость и многоадресность реализуемых способов маршрутизации, что обуславливает актуальность проблем, описываемых в данной статье.

**2. Идея разрабатываемого подхода.** Центральную гипотезу исследований можно сформулировать следующим образом: если ИКС реализует иерархическую, многоуровневую, многопутевую и многоадресную маршрутизацию, то и ее оптимизацию необходимо производить на базе моделей и методов, оперирующих соответствующими иерархически вложенными многопутевыми и многоадресными сегментами, а не только путем декомпозиции системы на двухполюсные сети (направления связи) связи. Для реализации такого подхода требуется развитие теоретических основ проектирования (оптимизации) ИКС в направлении преодоления целого ряда модельных и методических сложностей. Ниже выделены основные из них.

1. Реализация в ИКС одновременно целого множества многоадресных и многопутевых физических и логических соединений (виртуальных каналов, туннелей, *VPN*) требует адекватного описания (и контроля в ходе оптимизации) *соответствия (отношения)* тех или иных виртуальных (логических) каналов (туннелей, *VPN*) конкретной группе физических трактов и узлов коммутации. В существующих средствах проектирования (оптимизации) данные процедуры осуществляются только для ДСС, полученных в ходе декомпозиции ИКС. Для преодоления этой модельной сложности уже на этапе постановки задачи проектирования (оптимизации) предлагается использовать *теоретико-множественный базис* [17-19] представления подсистем, элементов, примитивов на разных уровнях обслуживания и существенных свойств ИКС, позволяющий описать объект исследования в

виде совокупности *множеств*, взаимоувязанных системой *соответствий* и *отношений*.

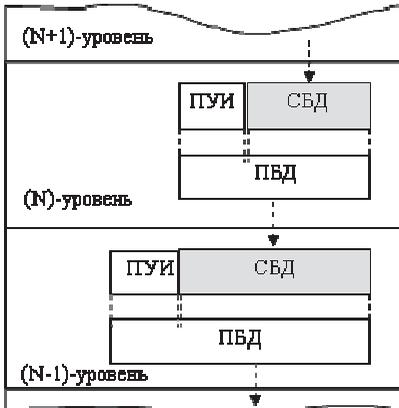
2. Модели, применяемые для описания физических и логических структур ИКС, а также закономерностей обслуживания блоков данных логическими соединениями (виртуальными каналами, туннелями, *VPN*), строятся на одних и тех же допущениях и ограничениях, разработанных под процедуры декомпозиции сети на ДСС и/или отдельные звенья [7, 9, 13, 20]. Эти формализмы отражают только *бинарные отношения* множеств каналов и узлов коммутации (например, инцидентность в ходе сеансов типа «точка-точка»). Для расширения возможностей существующего инструментария предлагается применить новую *систему моделей*, обеспечивающую учет как бинарных, так и *n*-нарных *отношений* и *соответствий* между множествами подсистем, элементов, примитивов и существенных свойств ИКС.

Далее будет показано, что при проектировании (оптимизации) ИКС, реализующей иерархическую многопутевую и многоадресную маршрутизацию для организации физических и логических соединений с топологиями цепь, звезда, кольцо и дерево, использование предлагаемых моделей, оперирующих кратными сегментами типа цепь, звезда, кольцо и дерево, а не только двухполюсными сетями связи, обеспечит при прочих равных условиях повышение достижимых характеристик эффективности обслуживания потоков блоков данных и структурной надежности этой системы.

**3. Теоретико-множественный базис анализа и оптимизации ИКС.** Предлагаемый базис опирается на положения теории иерархических многоуровневых систем [17], развитие которых для данной предметной области было предложено в [18]. В данной статье внимание уделено особенностям использования элементов этого подхода для ИКС. Описание объекта исследований далее осуществляется (рисунок 1) в терминах эталонной модели взаимодействия открытых систем (ЭМВОС) [21], а записи математических выражений производятся при помощи понятий и символов, принятых в теории множеств [22].

Представление элементов ИКС в теоретико-множественном базисе (ТМБ) предусматривает введение комплекса модельных обозначений [18]. Так,  $SS_l^{(n)}$  — это подсистема *n*-го уровня, а  $SS_n = \{ \dots, SS_l^{(n)}, \dots \}$  — множество подсистем *n*-го уровня. При этом (N+1)-уровень — верхний уровень, смежный с (N)-уровнем; (N-1)-уровень — нижний уровень, смежный с (N)-уровнем. Протокольный

блок данных (ПБД) называется в соответствии с тем уровнем, который его формирует. Например, ПБД сетевого уровня — IP-пакет, в структуре которого выделяется сервисный блок данных (СБД) и протокольная управляющая информация (ПУИ).



$pdu_l^{(n)}$  – ПБД  $n$ -го уровня;  
 $PDU_n = \{ \dots, pdu_l^{(n)}, \dots \}$  – множество ПБД  $n$ -го уровня;  
 $sdu_l^{(n)}$  – СБД  $n$ -го уровня;  
 $SDU_n = \{ \dots, sdu_l^{(n)}, \dots \}$  – множество СБД  $n$ -го уровня;  
 $pci_l^{(n)}$  – ПУИ  $n$ -го уровня;  
 $PCI_n = \{ \dots, pci_l^{(n)}, \dots \}$  – множество ПУИ  $n$ -го уровня.

Рис. 1. Структура блоков данных в ИКС и их обозначение в ТМБ

На базе ТМБ можно описать различные процедуры с ПБД, реализуемые в ИКС. Например, сцепление, расцепление, объединение, разъединение, сегментирование и сборку блоков данных, мультиплексирование и демультимплексирование, коммутацию и маршрутизацию, в том числе многоточечную. Так, процессы преобразования ПБД между уровнями системы — это соответствие между  $k$ -й декартовой степенью множества ПБД  $n$ -го уровня и  $r$ -й декартовой степенью множества СБД  $(n-1)$ -го уровня, то есть:

$$\left( PDU_n^{\times k}, SDU_{n-1}^{\times r}, CDUBL_{n-1,k,r} \right) \Leftrightarrow PDU_n^{\times k} \xrightarrow{CDUBL_{n-1,k,r}} SDU_{n-1}^{\times r}, \quad (1)$$

где  $CDUBL_{n-1,k,r} = \{ \dots, cdubl_m^{(n-1,k,r)}, \dots \}$  — подмножество множества

пар  $cdubl_m^{(n-1,k,r)} = \left( \left( \underbrace{\dots, pdu_l^{(n)}, \dots}_k \right), \left( \underbrace{\dots, sdu_j^{(n-1)}, \dots}_r \right) \right)$ , состоящих из

кортежа ПБД  $n$ -го уровня с числом компонентов  $k$  и кортежа СБД  $(n-1)$ -го уровня с числом компонентов  $r$ , которые взаимосвязаны рассмотренным выше соответствием.

Всем логическим объектам  $n$ -го уровня ИКС назначены адреса (например, MAC-адрес, TCP-порт, UDP-порт, IP-адрес и т. д.), которые могут быть как индивидуальные, так и групповые. В ТМБ это записывается следующим образом. Пусть  $a_l^{(n)}$  — адрес логического объекта (ЛО)  $n$ -го уровня;  $A_n = \{ \dots, a_l^{(n)}, \dots \}$  — множество адресов ЛО  $n$ -го уровня. Каждый ЛО  $n$ -го уровня ИКС принадлежит одной и только одной подсистеме  $n$ -го уровня. С другой стороны, одной подсистеме  $n$ -го уровня может принадлежать несколько ЛО  $n$ -го уровня. Формально это можно записать следующим образом:

$$\left( SS_n, A_n, B_n \right) \Leftrightarrow SS_n \xrightarrow{B_n} A_n, \quad (2)$$

где  $B_n = \{ \dots, b_k^{(n)}, \dots \}$  — подмножество множества пар  $b_k^{(n)} = \left( ss_l^{(n)}, a_j^{(n)} \right)$ , состоящих из адреса подсистемы  $n$ -го уровня и адреса ЛО  $n$ -го уровня, которые связаны указанным соответствием принадлежности.

Логическое соединение  $LC_{n-1,s,k}$  в ТМБ есть отношение между  $s$ -й декартовой степенью множества адресов ЛО  $n$ -го уровня и  $k$ -й декартовой степенью множества адресов ЛО этого же уровня, обеспечиваемое ближайшим нижним уровнем, что:

$$\left( A_n^{\times s}, A_n^{\times k}, LC_{n-1,s,k} \right) \Leftrightarrow A_n^{\times s} \xrightarrow{LC_{n-1,s,k}} A_n^{\times k}, \quad (3)$$

где  $LC_{n-1,s,k} = \{ \dots, lc_m^{(n-1,s,k)}, \dots \}$  — подмножество множества пар

$$lc_m^{(n-1,s,k)} = \left( \left( \underbrace{\dots, a_l^{(n)}, \dots}_s \right), \left( \underbrace{\dots, a_j^{(n)}, \dots}_k \right) \right),$$

состоящих из кортежа адресов ЛО  $n$ -го уровня с числом компонентов  $s$  и кортежа адресов ЛО  $n$ -го уровня с числом компонентов  $k$ , которые взаимосвязаны с помощью рассмотренного отношения связности. Если истинно  $(s=1) \wedge (k=1)$ , то соответствие  $LC_{n-1,s,k}$  описывает логическое соединение «точка-точка», при истинности  $(s>1) \wedge (k=1)$  — «мно-

точка-точка»; при истинности  $(s = 1) \wedge (k > 1)$  — «точка-многоточка»; при истинности  $(s > 1) \wedge (k > 1)$  «многоточка-многоточка».

В ТМБ коммутационное соединение  $WC_{n,s,k}$  может быть записано как:

$$(A_n^{\times s}, A_n^{\times k}, WC_{n,s,k}) \Leftrightarrow A_n^{\times s} \xrightarrow{WC_{n,s,k}} A_n^{\times k}, \quad (4)$$

где  $WC_{n,s,k} = \{ \dots, wc_m^{(n,s,k)}, \dots \}$  — подмножество множества пар

$$wc_m^{(n,s,k)} = \left( \left( \underbrace{\dots, a_j^{(n)}, \dots}_s \right), \left( \underbrace{\dots, a_j^{(n)}, \dots}_k \right) \right),$$

представляющих собой кортеж адресов ЛО  $n$ -го уровня с числом компонентов  $s$  и кортежа адресов логических объектов  $n$ -го уровня с числом компонентов  $k$ , которые взаимоуязваны соответствующим отношением связности. Если истинно  $(s = 1) \wedge (k = 1)$ , то соответствие  $WC_{n,s,k}$  описывает коммутационное соединение «точка-точка»; при истинности  $(s > 1) \wedge (k = 1)$  — «многоточка-точка»; при истинности  $(s = 1) \wedge (k > 1)$  — «точка-многоточка»; а при  $(s > 1) \wedge (k > 1)$  — «многоточка-многоточка».

Аналогично по форме в рамках ТМБ описывается интерфейсное соединение  $IC_{n-1,s,k}$ , одношаговое  $SHC_{n-1,1,1}$ , многошаговое соединение «точка-точка»  $MHC_{n-1,k,1,1}$  [18] и маршрутизируемое соединение «точка-точка»  $RC_{n-1,hl,1,1}$ . Для последнего справедливо:

$$\begin{aligned} (A_n^{\times 1}, A_n^{\times 1}, RC_{n-1,hl,1,1}) &\Leftrightarrow A_n^{\times 1} \xrightarrow{RC_{n-1,hl,1,1}} A_n^{\times 1} = \left( A_n^{\times 1} \xrightarrow{WC_{n,1,1} \circ MHC_{n-1,1,1,1}} A_n^{\times 1} \right) \cup \\ &\left( A_n^{\times 1} \xrightarrow{WC_{n,1,1} \circ MHC_{n-1,2,1,1}} A_n^{\times 1} \right) \cup \left( A_n^{\times 1} \xrightarrow{WC_{n,1,1} \circ MHC_{n-1,3,1,1}} A_n^{\times 1} \right) \cup \dots \cup \\ &\left( A_n^{\times 1} \xrightarrow{WC_{n,1,1} \circ MHC_{n-1,hl,1,1}} A_n^{\times 1} \right) = \bigcup_{h=1}^{h=hl} \left( A_n^{\times 1} \xrightarrow{WC_{n,1,1} \circ MHC_{n-1,h,1,1}} A_n^{\times 1} \right), \end{aligned} \quad (5)$$

где  $hl$  — это предельное число шагов в многошаговом соединении,

$RC_{n-1,hl,1,1} = \{ \dots, rc_k^{(n-1,hl,1,1)}, \dots \}$  — подмножество множества пар адре-

сов логических объектов  $n$ -го уровня, которые состоят в отношении связности;  $MHC_{n-1,k,1,1}$  — подмножество множества пар адресов логических объектов многошагового соединения  $n$ -го уровня.

Термин ДСС в ТМБ определяется как множество маршрутов соединений «точка-точка» между ЛО с адресом  $a_i^{(n)}$   $n$ -го уровня и ЛО  $a_j^{(n)}$  того же уровня, сформированные на базе всех таблиц маршрутизации  $RT_{n,h}$  маршрутов «точка-точка» того же уровня, то есть:

$$v_{a_i^{(n)}, a_j^{(n)}, hl}^{(n)} = \left\{ \mu_{a_i^{(n)}, a_j^{(n)}, RT_{n,h}, hl}^{(n)} \mid h \in H \right\}, \quad (6)$$

где  $\mu_{a_i^{(n)}, a_j^{(n)}, RT_{n,h}, hl}^{(n)}$  — маршрут «точка-точка» между ЛО с адресом  $a_i^{(n)}$   $n$ -го уровня и ЛО  $a_j^{(n)}$  того же уровня;  $H$  — множество параметров алгоритма маршрутизации.

Тогда множество ДСС между выделенной группой ЛО можно записать в виде формулы:

$$Y_n = \left\{ v_{a_l^{(n)}, a_j^{(n)}, hl}^{(n)} \mid (l \in I) \wedge (j \in I) \wedge (l \neq j) \wedge \left( (a_l^{(n)}, a_j^{(n)}) \notin WC_{n,1,1} \right) \right\} \quad (7)$$

Многополюсная сеть связи (МСС) трактуется в ТМБ как множество ДСС между заданной группой ЛО  $n$ -го уровня. Формальное представление МСС выглядит как:

$$w_{I_g, hl}^{(n)} = \left\{ v_{a_l^{(n)}, a_j^{(n)}, hl}^{(n)} \mid (l \in I_g) \wedge (j \in I_g) \wedge (l \neq j) \wedge \left( (a_l^{(n)}, a_j^{(n)}) \notin WC_{n,1,1} \right) \right\}, \quad (8)$$

где  $I_g \subseteq I$  — это подмножество множества всех номеров элементов множества  $A_n$ .

Формальное представление множества МСС между всеми ЛО  $n$ -го уровня целесообразно представить как

$$W_n = \left\{ w_{I_g, hl}^{(n)} \mid g \in G \right\}, \quad (9)$$

где  $G$  — это множество номеров заданных подмножеств множества  $A_n$ .

Таким образом, ТМБ обеспечивает универсальное представление подсистем, элементов, примитивов и существенных свойств ИКС, позволяет описать объект исследования и любую его часть (логическое, коммутационное, маршрутизируемое соединение (в том числе многоточечное), ДСС, МСС) в виде совокупности *множеств*, *взаимозавязанных системой соответствий* и *отношений*. Это оказывается особенно важным при моделировании ИКС, так как не позволяет манипулировать со свойствами логического объекта высшей иерархии без учета свойств логических объектов низшей иерархии.

**4. Система моделей иерархических многопутевых многоадресных ИКС.** Теоретико-множественный базис, представленный выше, по сути, является формальным языком *представления* ИКС. Однако сам по себе он не в состоянии служить инструментом математического описания зависимостей системных свойств объекта исследований от значений соответствующих управляемых характеристик. Представление таких зависимостей и составляет цель моделирования ИКС.

Предлагаемая *система моделей* отличается от существующих средств представления ИКС тем, что в разработанных формализмах осуществлен строгий математический переход от отношений и соответствий, введенных в рамках ТМБ, к описанию свойств объекта исследования, определяющих его целевое предназначение. Для этого используются методы теорий графов, надежности и массового обслуживания, модифицированные в направлении более полного учета многопутевости, многоадресности процедур маршрутизации и приоритетности обслуживания блоков данных различных пользователей.

Общая идея системы моделей состоит во взаимозавязанной декомпозиции общей задачи исследования в двух направлениях (рисунок 2):



Рис. 2. Структура системы моделей иерархических многопутевых многоадресных ИКС

- слева-направо, по логике решения структурно-сетевых задач от моделирования к структурной и параметрической оптимизации;
- снизу-вверх, в соответствии с ходом процесса обслуживания примитивов в открытых системах (например, узле коммутации ИКС).

В связи с многоуровневостью и сложностью объекта исследований (разнообразием элементов и подсистем ИКС, процедур обслуживания блоков данных, целевых установок, предпроектных условий и проектных операторов), полученная система моделей также является сложной, многоуровневой и многооператорной. Это не позволяет ее исчерпывающее изложение в рамках одной статьи. Для примера ниже рассматривается задача моделирования только одного свойства ИКС — структурной надежности.

**5. Представление свойства структурной надежности ИКС в разработанных базисе и системе моделей.** Структурная надежность ИКС зависит от работоспособности элементов, образующих ее маршруты. Исходными данными для моделирования являются сведения об ИКС, полученные от заказчика и представленные средствами ТМБ.

Пусть множество состояний (работоспособное и неработоспособное) ИКС в ТМБ задается следующим образом  $ST = \{0, 1\}$ . Тогда состояние любого логического объекта — есть соответствие между множеством  $A_n$  и множеством состояний  $ST$  :

$$(A_n, ST, STA_n) \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{STA_n} ST, \quad (10)$$

где  $STA_n = \{\dots, sta_l^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из двух элементов  $sta_l^{(n)} = (a_j^{(n)}, st_g)$ , включающих: адрес логического объекта  $n$ -го уровня  $a_j^{(n)}$  и его состояние  $st_g$ . Аналогично по форме в ТРБ записываются *состояния* соединений (логических  $STLC_{n-1,1,1,h}$ , коммутационных  $STWC_{n,1,1,g}$ , маршрутизируемых  $STM_{n,t}$ ), ДСС ( $STY_n$ ) и МСС ( $STW_n$ )  $n$ -го уровня.

Строгое формальное описание показателей надежности ИКС можно получить с использованием однородной *логической функции*, значения которой принадлежат множеству  $\{0, 1\}$  и аргументами которой также являются значения из множества  $\{0, 1\}$  [23]. Так, логическую функцию, связывающую состояния ЛО  $n$ -го уровня с состояни-

ями маршрутов (путей) «точка-точка»  $n$ -го уровня, целесообразно записать в виде соответствий:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{STA}_n, \mathbf{STLC}_{n-1,1,1}, \mathbf{STWC}_{n,1,1}, \mathbf{STM}_n, \mathbf{LFSTALCWCM}_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{STA}_n \times \mathbf{STLC}_{n-1,1,1} \times \mathbf{STWC}_{n,1,1} \xrightarrow{\mathbf{LFSTALCWCM}_n} \mathbf{STM}_n, \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\mathbf{STA}_n = \{\dots, STA_{n,l}, \dots\}$  — множество различных вариантов состояний логических объектов  $n$ -го уровня;  $\mathbf{STLC}_{n-1,1,1} = \{\dots, STLC_{n-1,1,1,h}, \dots\}$  — множество состояний логических соединений  $(n-1)$ -го уровня;  $\mathbf{STWC}_{n,1,1} = \{\dots, STWC_{n,1,1,g}, \dots\}$  — множество состояний коммутационных соединений  $n$ -го уровня;  $\mathbf{STM}_n = \{\dots, STM_{n,t}, \dots\}$  — множество состояний маршрутов соединений  $n$ -го уровня;  $\mathbf{LFSTALCWCM}_n = \{\dots, lfstalcwcm_q^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из четырех элементов  $lfstalcwcm_q^{(n)} = (STA_{n,l}, STLC_{n-1,1,1,h}, STWC_{n,1,1,g}, STM_{n,t})$ , включающих: состояния логических объектов  $n$ -го уровня  $STA_{n,l}$ , состояния логических соединений  $(n-1)$ -го уровня  $STLC_{n-1,1,1,h}$ , состояния коммутационных соединений  $n$ -го уровня  $STWC_{n,1,1,g}$  и состояния маршрутов соединений  $n$ -го уровня  $STM_{n,t}$ , взаимосвязанных с помощью соответствующего соответствия.

По аналогии с вышеизложенным в ТМБ можно представить логическую функцию  $\mathbf{LFSTMY}_n$ , связывающую состояния маршрутов соединений «точка-точка»  $n$ -го уровня с состояниями ДСС  $n$ -го уровня, а также логическую функцию  $\mathbf{LFSTYW}_n$ , связывающую состояния ДСС  $n$ -го уровня с состояниями МСС  $n$ -го уровня.

Множество вероятностей работоспособного состояния (ВРС) в ТРБ определяется следующим образом:

$$PR = \{pr \mid (pr \in \mathbf{R}) \wedge (0 \leq pr \leq 1)\}. \quad (12)$$

где  $\mathbf{R}$  — множество вещественных чисел.

Отсюда ВРС логического объекта можно определить как соответствие между заданным выше множеством  $A_n$  и множеством  $PR$  :

$$(A_n, PR, PRA_n) \Leftrightarrow A_n \xrightarrow{PRA_n} PR. \quad (13)$$

где  $PRA_n = \{\dots, pra_i^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из двух элементов  $pra_i^{(n)} = (a_j^{(n)}, pr_g)$ , включающих адрес логического объекта  $n$ -го уровня  $a_j^{(n)}$  и его ВРС  $pr_g$ . Аналогично по форме в ТМБ представляются ВРС соединений (логического  $PRLC_{n-1,s,k}$ , коммутационного  $PRWC_{n,s,k}$ , маршрутизируемого  $PRM_n$ ), ДСС ( $PRY_n$ ) и МСС ( $PRW_n$ )  $n$ -го уровня.

В разрабатываемой системе моделей под *вероятностной* функцией далее понимается вероятность истинности логической функции [23]. Так, вероятностную функцию, связывающую ВРС ЛО  $n$ -го уровня с ВРС маршрутов «точка-точка»  $n$ -го уровня, целесообразно записать в виде соответствий:

$$\begin{aligned} (\mathbf{PRA}_n, \mathbf{PRLC}_{n-1,1,1}, \mathbf{PRWC}_{n,1,1}, \mathbf{PRM}_n, \mathbf{PRALCWC}_n) &\Leftrightarrow & (14) \\ &\Leftrightarrow \mathbf{PRA}_n \times \mathbf{PRLC}_{n-1,1,1} \times \mathbf{PRWC}_{n,1,1} \xrightarrow{\mathbf{PRALCWC}_n} \mathbf{PRM}_n, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{PRA}_n = \{\dots, PRA_{n,l}, \dots\}$  — множество различных вариантов ВРС логических объектов  $n$ -го уровня;  $\mathbf{PRLC}_{n-1,1,1} = \{\dots, PRLC_{n-1,1,1,h}, \dots\}$  — множество ВРС логических соединений  $(n-1)$ -го уровня;  $\mathbf{PRWC}_{n,1,1} = \{\dots, PRWC_{n,1,1,g}, \dots\}$  — множество ВРС коммутационных соединений «точка-точка»  $n$ -го уровня;  $\mathbf{PRM}_n = \{\dots, PRM_{n,t}, \dots\}$  — множество ВРС маршрутов соединений  $n$ -го уровня;  $\mathbf{PRALCWC}_n = \{\dots, pralcwcm_q^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из четырех элементов  $pralcwcm_q^{(n)} = (PRA_{n,l}, PRLC_{n-1,1,1,h}, PRWC_{n,1,1,g}, PRM_{n,t})$ , включающих: ВРС логических объектов  $n$ -го уровня  $PRA_{n,l}$ , ВРС логических соединений  $(n-1)$ -го уровня  $PRLC_{n-1,1,1,h}$ , ВРС коммутационных соеди-

нений  $n$ -го уровня  $PRWC_{n,1,g}$  и ВРС маршрутов соединений  $n$ -го уровня  $PRM_{n,l}$ , взаимосвязанных с помощью заданного соответствия.

Аналогично по форме записывается вероятностная функция  $PRMY_n$ , связывающая ВРС маршрутов с ВРС ДСС, и вероятностная функция  $PRYW_n$ , связывающая ВРС ДСС связи с ВРС МСС.

Результатом анализа устойчивости (надежности, живучести) ИКС должно стать получение количественных значений требуемых показателей. Для этого далее предлагается использовать логические функции, допускающие непосредственный переход к вероятностным функциям путем замены всех логических переменных соответствующими вероятностями, а всех логических операций соответствующими арифметическими операциями. Такие логические функции называются формами перехода к полному замещению [23]. В предметной области применяется целый ряд форм перехода к полному замещению, однако далее предлагается остановиться на *ортогональной дизъюнктивной нормальной форме* (ОДНФ). Преобразование логической функции в ортогональную дизъюнктивную нормальную форму далее называется *ортогонализацией* [23]. При этом полное замещение понимается как преобразование ОДНФ в вероятностную функцию.

С учетом введенных в ТМБ формализмов ортогонализация с последующим полным замещением — это соответствие между рассмотренными выше логическими и вероятностными функциями:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{LFSTALCWCW}_n, \mathbf{PRALCWCW}_n, \mathbf{ORLFSTPRALCWCW}_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{LFSTALCWCW}_n \xrightarrow{\mathbf{ORLFSTPRALCWCW}_n} \mathbf{PRALCWCW}_n, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{LFSTMY}_n, \mathbf{PRMY}_n, \mathbf{ORLFSTPRMY}_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{LFSTMY}_n \xrightarrow{\mathbf{ORLFSTPRMY}_n} \mathbf{PRMY}_n, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} & (\mathbf{LFSTYW}_n, \mathbf{PRYW}_n, \mathbf{ORLFSTPRYW}_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \mathbf{LFSTYW}_n \xrightarrow{\mathbf{ORLFSTPRYW}_n} \mathbf{PRYW}_n, \end{aligned} \quad (17)$$

где  $\mathbf{LFSTALCWCW}_n = \{\dots, \mathbf{LFSTALCWCW}_{n,l}, \dots\}$  — множество вариантов логической функции связывающей состояния логических объектов  $n$ -го уровня, логических соединений  $(n-1)$ -го уровня, коммутационных соединений  $n$ -го уровня с состояниями маршрутов соедине-

ний  $n$ -го уровня;  $\mathbf{PRALCWCM}_n = \{\dots, PRALCWCM_{n,j}, \dots\}$  — множество вероятностной функции, связывающей ВРС логических объектов  $n$ -го уровня, ВРС логических соединений  $(n-1)$ -го уровня, ВРС коммутационных соединений  $n$ -го уровня с ВРС маршрутов соединений  $n$ -го уровня;  $\mathbf{LFSTMY}_n = \{\dots, LFSTMY_{n,l}, \dots\}$  — множество логической функции, связывающей состояния маршрутов соединений  $n$ -го уровня с состояниями ДСС  $n$ -го уровня;  $\mathbf{PRMY}_n = \{\dots, PRMY_{n,j}, \dots\}$  — множество вероятностной функции, связывающей ВРС маршрутов соединений  $n$ -го уровня с ВРС двухполюсных сетей связи;  $\mathbf{LFSTYW}_n = \{\dots, LFSTYW_{n,l}, \dots\}$  — множество логической функции, связывающей состояния ДСС  $n$ -го уровня с состояниями МСС;  $\mathbf{PRYW}_n = \{\dots, PRYW_{n,l}, \dots\}$  — множество вероятностной функции, связывающей ВРС двухполюсных сетей связи с ВРС многополюсных сетей связи;

$\mathbf{ORLFSTPRALCWCM}_n = \{\dots, orlfstpralcwcm_k^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из двух элементов  $orlfstpralcwcm_k^{(n)} = (LFSTALCWCM_{n,l}, PRALCWCM_{n,j})$ , включающих: логическую функцию, связывающую состояния логических объектов  $n$ -го уровня, логических соединений  $(n-1)$ -го уровня, коммутационных соединений  $n$ -го уровня с состояниями маршрутов соединений  $n$ -го уровня и вероятностную функцию, связывающую ВРС логических объектов  $n$ -го уровня, ВРС логических соединений  $(n-1)$ -го уровня, ВРС коммутационных соединений  $n$ -го уровня с ВРС маршрутов соединений «точка-точка»  $n$ -го уровня;

$\mathbf{ORLFSTPRMY}_n = \{\dots, orlfstprmy_k^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из двух элементов  $orlfstprmy_k^{(n)} = (LFSTMY_{n,l}, PRMY_{n,j})$ , включающих: логическую функцию, связывающую состояния маршрутов соединений  $n$ -го уровня с состояниями ДСС  $n$ -го уровня, и вероятностную функцию, связывающую ВРС маршрутов соединений  $n$ -го уровня с ВРС ДСС  $n$ -го уровня;

$\mathbf{ORLFSTPRYW}_n = \{\dots, orlfstpryw_k^{(n)}, \dots\}$  — подмножество множества кортежей из двух элементов

$orlfstpryw_k^{(n)} = (LFSTYW_{n,l}, PRYW_{n,j})$ , включающих: логическую функцию, связывающую состояния ДСС с состояниями МСС и вероятностную функцию связывающую ВРС ДСС с вероятностью работоспособного состояния МСС.

Для практического нахождения значений  $ORLFSTPRALCWCМ_n$ ,  $ORLFSTPRMY_n$  и  $ORLFSTPRYW_n$  можно воспользоваться соответствием:

$$FR \subseteq Z_1 \times Z_2 \Leftrightarrow (Z_1, Z_2, FR) \Leftrightarrow Z_1 \xrightarrow{FR} Z_2 \Leftrightarrow FR : Z_1 \rightarrow Z_2. \quad (18)$$

где:

$$Z_1 = \left\{ \left\{ \dots, \overline{\hat{x}}_s, \dots \right\}, \left\{ \dots, \hat{x}_s, \dots \right\}, \wedge, \vee \right\},$$

$$Z_2 = \left\{ \left\{ \dots, p(\overline{\hat{x}}_s), \dots \right\}, \left\{ \dots, p(\hat{x}_s), \dots \right\}, \times, + \right\},$$

$$FR = \left\{ \left\{ \left\{ \dots, \overline{\hat{x}}_s, \dots \right\}, \left\{ \dots, p(\overline{\hat{x}}_s), \dots \right\} \right\}, \left\{ \left\{ \dots, \hat{x}_s, \dots \right\}, \left\{ \dots, p(\hat{x}_s), \dots \right\} \right\}, (\wedge, \times), (\vee, +) \right\},$$

где  $p(\overline{\hat{x}}_s)$  — вероятность нахождения  $s$ -го элемента ИКС в работоспособном состоянии, то есть  $p(\hat{x}_s = 1)$ ;  $p(\hat{x}_s)$  — вероятность нахождения  $s$ -го элемента ИКС в неработоспособном состоянии,  $p(\hat{x}_s = 0)$ .

**6. Логическая функция логического сочетания.** В существующих подходах ИКС декомпозируется (как правило, эвристически) на направления связи (ДСС), что значительно огрубляет модельные возможности ТМБ. Следовательно, узловым моментом моделирования в данной ситуации является необходимость строгого математического задания *условий работоспособности* ИКС, в которой планируется одновременная организация *нескольких* многоадресных многопутевых физических и логических соединений (виртуальных каналов, туннелей, VPN). В разрабатываемом подходе предлагается использовать новую логическую функцию *логического сочетания* в виде [13]:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^{(m)}. \quad (19)$$

Новая логическая функция определяет следующую процедуру: логическое сочетание  $n$  логических переменных по  $m$  равно единице, тогда и только тогда, когда число логических переменных, равных единице, равно  $m$  или более.

Логике работы этой функции можно наглядно продемонстрировать на примере одной, двух и трех переменных:

$$\begin{aligned}(x_1)^{(0)} &= 1, (x_1)^{(1)} = x_1, (x_1)^{(2)} = 0, (x_1, x_2)^{(0)} = 1, (x_1, x_2)^{(3)} = 0, \\(x_1, x_2)^{(1)} &= x_1 \vee x_2, (x_1, x_2)^{(2)} = x_1 \wedge x_2, \\(x_1, x_2, x_3)^{(0)} &= 1, (x_1, x_2, x_3)^{(1)} = x_1 \vee x_2 \vee x_3, \\(x_1, x_2, x_3)^{(2)} &= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3), \\(x_1, x_2, x_3)^{(3)} &= x_1 \wedge x_2 \wedge x_3, (x_1, x_2, x_3)^{(4)} = 0.\end{aligned}$$

Функция отрицания при этом может быть представлена выражением  $(x_1)^{(2 \cdot x_1)} = \overline{x_1}$ , где  $(2 \cdot x_1)$  — это арифметическое произведение, а именно  $2 \cdot 0 = 0$ ,  $2 \cdot 1 = 2$ .

Видно, что на основе предложенной функции *логического сочетания* имеется возможность представить все базовые функции одной и двух логических переменных, такие как конъюнкцию, отрицание и дизъюнкцию. Это свидетельствует о том, что наряду с функциями «штрих Шеффера» и «стрелка Пирса» функция *логического сочетания* может применяться для формализации любой логической функции одного и двух независимых логических переменных.

Аналитическое выражение для нахождения дизъюнктивной нормальной формы любого логического сочетания для  $0 < m \leq n$  целесообразно записать в виде:

$$\begin{aligned}&(x_1, x_2, \dots, x_n)^{(m)} = \\&= \bigvee_{i_{m-1}=1}^{n-[m-1]} x_{i_{m-1}} \wedge \left[ \bigvee_{i_{m-2}=i_{m-1}+1}^{n-[m-2]} x_{i_{m-2}} \wedge \left[ \dots \wedge \left[ \bigvee_{i_{m-m}=i_{m-m+1}+1}^{n-[m-m]} x_{i_{m-m}} \dots \right] \right] \right]. \quad (20)\end{aligned}$$

Видно, что с помощью выражения (20) появляется возможность осуществить формальное описание ИКС в ситуации, когда условия работоспособности системы представляются как в форме дизъюнкции  $m$  маршрутов, так и в форме дизъюнкции  $m$  кратчайших циклов, остовных деревьев и других типов подграфов [18].

**7. Исследование структурной надежности ИКС с заданной узловой основой.** Пусть задана узловая основа ИКС, включающая 6 узлов (рисунок 3а). В исследуемой ИКС в первом приближении предполагается функционирование пяти направлений связи (ДСС), связывающих следующие пары корреспондирующих узлов: (1, 2),

(3, 2), (4, 2), (5, 2) и (6, 2). Кроме того, в ИКС предусмотрено предоставление *многоточечных* сервисов с топологиями *дерево*, *цепь* и *кольцо* от любого из этих узлов.

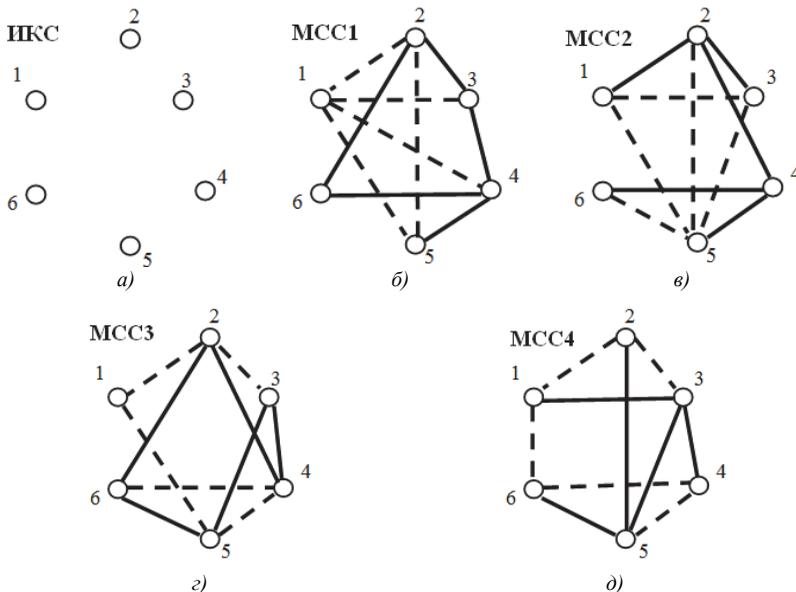


Рис. 3. Графовые модели исследуемых ИКС: а) исходная узловая основа; б) композиция ДСС; в) композиция остовных деревьев; г) композиция цепей; д) композиция циклов

В организации ИКС предполагается использование ресурса от двух операторов связи, каналы которых имеют разные ВРС: у первого — 0,997 (пунктирные линии), у второго — 0,999. *Заказчик требует* обеспечить ВРС системы в целом не хуже 0,9999.

Пусть МСС считается работоспособной, если работоспособны все ДСС, ее образующие. В свою очередь каждая ДСС работоспособна, если работоспособен хотя бы один маршрут из двадцати кратчайших маршрутов успешного функционирования (КМУФ) [25], связывающих соответствующую вершину-исток с вершиной-сток. Очевидно, что наилучшие показатели структурной надежности будут у полностью связанной ИКС, однако такое решение является затратным. В ходе моделирования были исследованы вероятности работоспособного состояния МСС для различных вариантов ее более дешевого (неполнодоступного) формирования из каналов (трактов) обоих операторов:

– для стандартного — композиции из двухполюсных сетей связи (МСС1, рисунок 3б);

– вновь предлагаемых — из остовных деревьев (МСС2, рисунок 3в), гамильтоновых цепей (МСС3, рисунок 3е) или циклов (МСС4, рисунок 3д).

Результаты моделирования представлены на рисунках 4а и б. На основе метода ветвей и границ [26] для исходного полносвязного графа решена задача распределения ресурса, включающего: пять ребер с коэффициентом готовности 0,999, пять ребер с коэффициентом готовности 0,997 и пять ребер с коэффициентом готовности 0 (ребра с коэффициентом готовности 0 на графах рисунка 3 не показаны). Цель решения — максимизация вероятности работоспособного состояния МСС, рассчитываемую с помощью логической функции связности в ОДНФ (см. п. 5 настоящей статьи).

На рисунке 4а показаны результаты анализа МСС1 (рисунок 3б), являющейся композицией ДСС. Структурная надежность синтезированного графа оценивалась по следующим четырем параметрам:

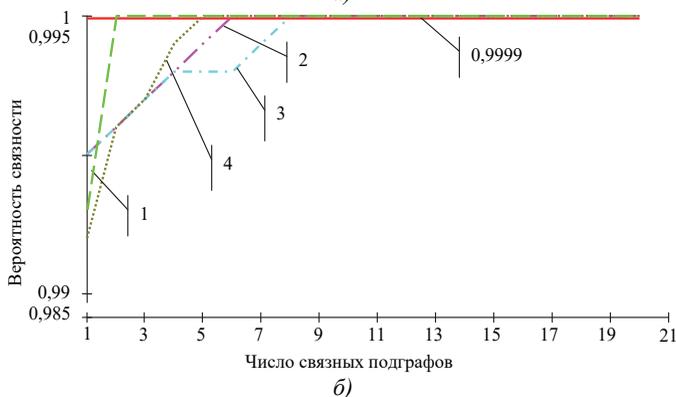
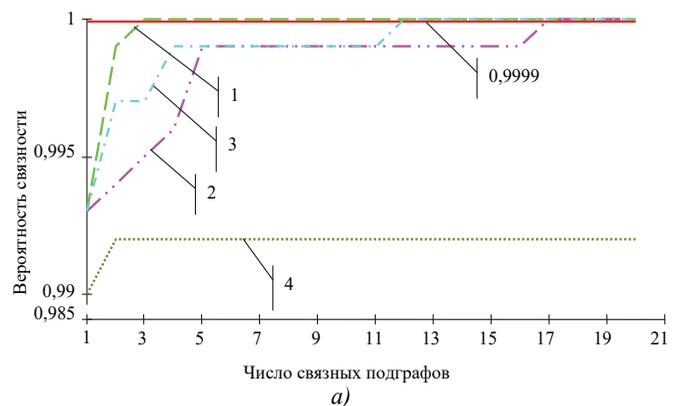


Рис. 4. Исследование графовых моделей ИКК: а) МСС1; б) МСС4

1) вероятность нахождения в работоспособном состоянии хотя бы одного маршрута из  $m$  КМУФ для каждой из заданных пяти ДСС;

2) вероятность нахождения в работоспособном состоянии хотя бы одного остонового дерева из  $m$  минимальных (кратчайших) остовных деревьев;

3) ВРС хотя бы одного гамильтонова маршрута из  $m$  кратчайших гамильтоновых маршрутов;

4) ВРС хотя бы одного гамильтонова цикла из  $m$  кратчайших гамильтоновых циклов.

При этом учитывается, что по требованию заказчика вероятность нахождения МСС в работоспособном состоянии для всех четырех параметров должна быть не хуже, чем 0,9999.

Видно, что при формировании ИКС из ДСС, выполнение требований по надежности к многоточечным соединениям возможно только с дополнительными затратами ресурсов.

Результаты анализа МСС4 (рисунок 3д), представленные на рисунке 4б, свидетельствуют о том, что наиболее надежные топологии многоточечных соединений физических и логических каналов в ходе проектирования ИКС могут быть получены путем представления МСС в виде композиции *гамильтоновых циклов*, а не ДСС. Из примера следует, что расчет параметров надежности ИКС в рамках разработанного подхода предполагает последовательное (по иерархии системы) применение функций работоспособности в порядке: маршрут, двухполюсная и многополюсная сеть связи. То есть в ходе анализа исследователь получает сведения не только о надежности всей системы, но и о вкладе каждого элемента в это значение.

Таким образом, в рамках предложенных ТМБ и системы моделей осуществляется строгий математический переход от исходных данных к количественным значениям системных свойств ИКС.

**8. Общая характеристика моделей, применяемых для решения задач параметрической оптимизации ИКС.** В отличие от используемых для структурной оптимизации ИКС, данная группа моделей (рисунок 2) опирается на теоретико-множественное представление *процедур* обслуживания блоков данных в КМУФ, ДСС и МСС. Так соответствие между множеством блоков данных и множеством моментов времени записывается в виде:

$$\left( PDU_n, T, FPDU_n \right) \Leftrightarrow PDU_n \xrightarrow{FPDU_n} T, \quad (21)$$

где:

$$FPDU_n = \left\{ \dots, fpdu_m^{(n)}, \dots \right\}, \quad fpdu_m^{(n)} = \left( pdu_l^{(n)}, t_j \right),$$

а множество моментов времени:

$$T = \{t_j \mid (t_j \in \mathbf{R}) \wedge (t_j \geq 0)\}. \quad (22)$$

Аналогично по форме осуществляется запись вариантов и вероятности обслуживания потоков блоков данных элементами ИКС, зависящих от свободности, занятости и/или работоспособности последних. Процесс моделирования при этом основан на композиции инструментария открытых сетей Джексона и метода множителей Лагранжа [18, 27, 28, 29]. От существующих формализмов он отличается тем, что процесс обслуживания блоков данных логическим или физическим каналами описывается смесью вероятностно-временных характеристик независимо функционирующих систем массового обслуживания.

Исследования показали, что задавшись тем или иным показателем качества обслуживания можно формализовать качество обслуживания отдельным элементом ИКС, маршрутом, ДСС и ИКС в целом. При этом ТМБ обеспечивает формальный переход к существующим и вновь разработанным моделям теории массового обслуживания [18, 27], фракталов и др.

Так, например, в ходе применения рассмотренных выше моделей на серии графов рисунка 3, была выявлена следующая закономерность. Повысить *эффективность обслуживания трафика данных* в многоадресных многопутевых ИКС можно путем формирования МСС в виде композиции гамильтоновых циклов. По сравнению с существующим принципом декомпозиции ИКС на ДСС, выигрыш может составить величину порядка 15-20%, что достигается за счет уменьшения числа альтернативных путей доставки информации.

Таким образом, представленная система моделей многоадресных многопутевых ИКС позволяет получать результаты, важные для практики проектирования современных информационных инфраструктур. Разработанные формализмы, в отличие от существующих, учитывают возможность предоставления услуг типа «точка-многоточка», «многоточка-точка», «многоточка-многоточка», в том числе в условиях приоритетности блоков данных в современных ИКС.

**9. Заключение.** Рассмотренные ТМБ и система математических моделей ИКС в теоретическом смысле являются дальнейшим развитием методологии многоуровневых иерархических систем [17, 18]. Разрабатываемый подход отличается от традиционного тем, что вводимые в ТМБ отношения и соответствия конкретизируются в системе моделей с помощью модифицированных методов теорий графов, надежности и массового обслуживания, учитывающих иерархичность, много-

путевость, многоадресность процедур маршрутизации. Вычислительные эксперименты показали, что использование предлагаемых формализмов, оперирующих сегментами типа цепь, звезда, кольцо и дерево, а не только ДСС, позволяет при прочих равных условиях обеспечить повышение достижимых характеристик эффективности обслуживания трафика и структурной надежности этой системы.

Направлениями дальнейших исследований является разработка прагматических (в том числе инженерных) методов структурно-параметрической оптимизации многоуровневых многоадресных и многопутевых ИКС с эффективным использованием возросших вычислительных мощностей современных вычислительных средств. При этом рассмотренный выше ТМБ должен стать основой нового формального способа машинного представления элементов ИКС и процессов, протекающих в ней.

Перспективными направлениями применения разработанного в статье инструментария являются:

- моделирование и оптимизация числа полос движения транспорта на сети автодорог федерального и внутризонального (регионального) значения на основе требуемого уровня надежности;
- моделирование и оптимизация социально-ориентированных инфокоммуникационных систем с учетом уровня восприятия сервисов связи и информационных услуг;
- формализация процессов в газотранспортной сети древовидной структуры, управляемой средствами телемеханики, в том числе международных;
- моделирование нефтепроводных сетей сложных структур с кольцевыми сегментами, в том числе международных;
- моделирование и анализ надежности электроэнергетических систем федерального и внутризонального (регионального) значения;
- моделирование и анализ устойчивости междоменных связей программно-конфигурированных сетей.

### **Литература**

1. *Жарикова В. О.* Анализ эффективности функционирования методов многоадресной маршрутизации в мультисервисных сетях связи // Вестник СибГУТИ. 2011. № 3. С. 98–104.
2. *Жарикова В. О., Новиков С. Н.* Математическая модель анализа многоадресной маршрутизации в мультисервисной сети связи: часть 2 // Доклады ТУСУР. 2012. № 1(25). С. 92–95.
3. *Лемешко А.В., Вавенко Т.В.* Разработка и исследование потоковой модели адаптивной маршрутизации в программно-конфигурируемых сетях с балансировкой нагрузки // Доклады ТУСУР. 2013. № 3(29). С. 100–108.

4. *Шувалов В.П., Вараксина И.Ю.* Классификация методов многопутевой маршрутизации // Т-Comm. 2014. № 1. С. 29–32.
5. *Козан А.В.* Организация многопутевой междоменной маршрутизации с оптимальным числом граничных маршрутизаторов // Вісник НТУУ «КПІ» Інформатика, управління та обчислювальна техніка. К.: Век+. 2013. № 59. С. 111–115.
6. *Барсков А.* Говорим WAN, подразумеваем VPN // Журнал сетевых решений LAN. 2010. № 06. URL: <http://www.osp.ru/lan/2010/06/13002982/> (дата обращения: 10.12.2016).
7. *Семенов Ю.В.* Проектирование сетей связи следующего поколения // Спб.: Наука и Техника. 2005. 240 с.
8. *Алиев Т.И.* Основы проектирования систем // С-Пб.: Университет ИТМО. 2015. 120 с.
9. *Лохмотко В.В.* Модели и методы оптимизации структуры телекоммуникационных сетей: диссертация д-ра техн. наук // СПб.: СПбГУТ. 1998. 290 с.
10. *Вавенко Т.В., Стерин В.Л., Симоненко А.В.* Поточковая модель маршрутизации с балансировкой нагрузки по длине очереди в программно-конфигурируемых сетях // Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики. 2013. № 4(86). С. 38–45.
11. *Будко П.А. и др.* Расчет пропускной способности каналов инфокоммуникационной системы при нечетко заданных параметрах информационных потоков // Инфокоммуникационные технологии. 2007. Том 5. № 3. С. 45–49.
12. *Ромашкова О.Н., Яковлев Р.И.* Анализ моделей и методов для оценки живучести инфокоммуникационных сетей в условиях чрезвычайных ситуаций // Т-Comm. 2012. № 7. С.165–170.
13. *Захаров Г.П.* Методы исследования сетей передачи данных // М.: Радио и связь. 1982. 208 с.
14. *Советов Б.Я., Яковлев С.А.* Моделирование сложных систем // М.: Высшая школа. 2001. 343 с.
15. *Лежков К.Е.* Моделирование методики оценки изменения качества информационного обмена в инфокоммуникационной системе специального назначения // Н&ES: Наукоемкие технологии в космических исследованиях земли. 2013. № 2. С. 44–51.
16. *Барабанова Е.А., Береснев И.А.* Дискретное имитационное моделирование алгоритма организации очереди в буфере маршрутизатора // Научный вестник НГТУ. 2015. Том 58. № 1. С. 135–147.
17. *Mesarovic M., Macko D., Takahara Y.* Hierarchical Multilevel Systems Theory // Academic Press. New York. 1970. 344 p.
18. *Трегубов Р.Б., Саитов И.А.* Теоретические основы анализа и оптимизации иерархических многоуровневых маршрутизирующих систем // Орел: Академия ФСО России. 2017. 585 с.
19. *Сотников А.Д., Катасонова Г.Р.* Модели прикладных и социально-ориентированных инфокоммуникационных систем // Фундаментальные исследования. 2015. № 2. С. 6070–6077.
20. *Филин Б.П.* Методы анализа структурной надежности сетей связи // М.: Радио и связь. 1988. 208 с.
21. ГОСТ Р ИСО/МЭК 7498-1-99 Информационная технология. Взаимосвязь открытых систем. Базовая эталонная модель. Часть 1. Базовая модель // М.: Стандартинформ. 2006. 58 с.
22. *Шрейдер Ю.А.* Равенство, сходство, порядок // М.: Главная редакция физико-математической литературы издательства "НАУКА". 1971. 254 с.
23. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем // СПб.: Политехника. 2000. 248 с.

24. *Трегубов Р.Б.* Композиционный метод исследования надежности иерархических многоуровневых маршрутизирующих систем // Научно-технический вестник ИТМО. 2016. № 5. С. 879–892.
25. *Трегубов Р.Б., Орешин А.Н., Алексиков Ю.Г.* Алгоритм нахождения  $k$  кратчайших путей // Телекоммуникации. 2013. № 6. С. 10–15.
26. *Martello S., Toth P.* Knapsack problems: algorithms and computer implementations // John Wiley & Sons Ltd. 1990. 296 с.
27. *Tregubov R.B., Saitov I.A., Korolev A.V.* Methods of Optimization of Characteristics in Small and Medium Connectivity Data Transmission Networks // Telecommunications and Radio Engineering. 2009. vol. 68. pp. 167–179.
28. *Трегубов Р.Б., Мясин Н.И., Мясин К.И.* Оптимизация скоростей передачи битового потока в каналах транспортной сети связи с коммутацией пакетов, обеспечивающая максимум вероятности своевременной доставки протокольных блоков данных // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2015. № 2 С. 34–40.
29. *Кокорева Е.В.* Методы анализа сетей массового обслуживания для оценки показателей качества в сетях связи // Информационные технологии. Радиоэлектроника. Телекоммуникации (ITRT–2016): сб. статей VI международной заочной научно-технической конференции. Ч.1. Поволжский гос. ун-т сервиса. – Тольятти: ПВГУС. 2016. С. 302–307.

**Трегубов Роман Борисович** — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: теория графов, теория массового обслуживания, теория вероятностей, применение методов математического моделирования в телекоммуникациях. Число научных публикаций — 61. [treba@list.ru](mailto:treba@list.ru); ул. Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(4862)54-9731.

**Сайтов Игорь Акрамович** — д-р техн. наук, профессор, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: теория графов, теория массового обслуживания, теория вероятностей, теория множеств, применение методов математического моделирования в телекоммуникациях, анализ и синтез волоконно-оптических транспортных сетей. Число научных публикаций — 170. [Akramovich@mail.ru](mailto:Akramovich@mail.ru); ул. Приборостроительная, 35, Орел, 302034, РФ; р.т.: +7(4862)549801.

**Сайтов Сергей Игоревич** — сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: теория графов, теория массового обслуживания, теория вероятностей, применение методов математического моделирования в телекоммуникациях. Число научных публикаций — 8. [serg-saitov@yadex.ru](mailto:serg-saitov@yadex.ru); ул. Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(4862)54-9731.

R.B. TREGUBOV, I.A. SAITOV, S.I. SAITOV  
**ELEMENTS OF THE SET-THEORETIC BASE AND SYSTEM OF  
 MODELS OF MULTIPATH MULTI-ADDRESS  
 INFOCOMMUNICATION SYSTEMS**

---

*Tregubov R.B., Saitov I.A., Saitov S.I. Elements of the Set-Theoretic base and System of Models of Multipath Multi-Address Infocommunication Systems.*

**Annotation.** In the article we propose a new approach to simulation and design of infocommunication systems, in which hierarchical multi-level routing is provided. We have considered the elements of a set-theoretic base and a system of models of infocommunication system handling not only traditional model elements – bipolar communication networks, – but also the multiple segments such as a circuit, a star, a ring and a tree. Using the provisions of the theory of sets, the basic concepts and procedures of a reference interaction model of open system are put in compliance with mathematical objects providing the strict formal description of the infocommunication system, in which multipath multi-address physical and logical connections "point-to-multipoint", "multipoint-to-point", "multipoint-to-multipoint" are implemented. Constructability, visualization and systematicity of the developed approach are shown through the example of simulation of the structural reliability property of a specific infocommunication system.

**Keywords:** infocommunication system, multipoint connections, multiple multipath routing, simulation, set-theoretic base, structural and parameter optimization.

---

**Tregubov Roman Borisovich** — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: graph theory, waiting theory, probability theory, application of mathematical model approaches in telecommunications. The number of publications — 61. [treba@list.ru](mailto:treba@list.ru); 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(4862)54-9731.

**Saitov Igor' Akramovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: graph theory, queueing theory, probability theory, set theory, application of mathematical model approaches in telecommunications, analysis and synthesis fiber transport networks. The number of publications — 170. [Akramovich@mail.ru](mailto:Akramovich@mail.ru); 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(4862)549801.

**Saitov Sergey Igorevich** — researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: graph theory, waiting theory, probability theory, application of mathematical model approaches in telecommunications. The number of publications — 8. [serg-saitov@yadex.ru](mailto:serg-saitov@yadex.ru); 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(4862)54-9731.

## References

1. Zharikova V.O. [The analysis of efficiency of functioning of methods of multiple routing in multiservice communication networks]. *Vestnik SibGUTI – Vestnik SibGUTI*. 2011. vol. 3. pp. 98–104. (In Russ.).
2. Zharikova V.O., Novikov S.N. [Mathematical model of the analysis of multiple routing in a multiservice communication network: part 2]. *Doklady TUSUR – Proceedings of TUSUR University*. 2012. vol. 1(25). pp. 92–95. (In Russ.).

3. Lemesheko A.V., Vavenko T.V. [Development and research of stream model of the adaptive routing on the software defined networks with balancing of loading]. *Doklady TUSUR – Proceedings of TUSUR University*. 2013. vol. 3(29). pp. 100–108. (In Russ.).
4. Shuvalov V.P., Varaksina I.Yu. [Classification of methods of multipath routing]. *T-Comm*. 2014. vol. 1. pp. 29–32. (In Russ.).
5. Kogan A. V. [The organization of multipath interdomain routing with optimum number of boundary routers]. *Вісник НТУУ «КПІ» Інформатика, управління та обчислювальна техніка*. Kiev: Vek+. 2013. vol. 59. pp. 111–115. (In Russ.).
6. Barskov A. [Talk WAN, mean VPN]. *Journal of LAN networking solutions*. Available at: <http://www.osp.ru/lan/2010/06/13002982/> (accessed: 10.12.2016). (In Russ.).
7. Semenov Yu.V. *Proektirovanie setey svyazi sleduyushchego pokoleniya* [Designing a new generation networks]. Spb.: Nauka i Tehnika. 2005. 240 p. (In Russ.).
8. Aliev T.I. *Osnovy proektirovaniya sistem* [Fundamentals of systems design]. SPb.: Universitet ITMO. 2015. 120 p. (In Russ.).
9. Lohmotko V.V. *Modeli i metody optimizatsii struktury telekommunikatsionnykh setey: dissertatsiya d-ra tehn. nauk* [Models and methods of optimization of structure of telecommunication networks: doctoral thesis]. SPb.: SPbGUT. 1998. 290 p. (In Russ.).
10. Vavenko T.V., Sterin V.L., Simonenko A.V. [Stream model of routing with balancing of loading on queue length on the software defined networks]. *Nauchno-tekhnicheskiiy vestnik informatsionnykh tekhnologiy, mekhaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2013. vol. 4(86). pp. 38–45. (In Russ.).
11. Budko P.A. et al. [Calculation of throughput of channels of infocommunication system in case of indistinct given parameters of information flows]. *Infokommunikatsionnyye tekhnologii – Infocommunication technologies*. 2007. vol. 5. no. 3. pp. 45–49. (In Russ.).
12. Romashkova O.N., Yakovlev R.I. [The analysis of models and methods for assessment of survivability of infocommunication networks in the conditions of emergency situations]. *T-Comm*. 2012. vol. 7. pp. 165–170. (In Russ.).
13. Zakharov G.P. *Metody issledovaniya setey peredachi dannykh* [Methods of research data networks]. M.: Radio i svyaz'. 1982. 208 p. (In Russ.).
14. Sovetov B.Ya., Jakovlev S.A. *Modelirovanie slozhnykh sistem* [Modeling of complex systems]. M.: Vysshaya shkola. 2001. 343 p. (In Russ.).
15. Legkov K.E. [Simulation of a technique of assessment of change of quality of information exchange in infocommunication system of a special purpose]. *H&ES: Naukoemkie tekhnologii v kosmicheskikh issledovaniyakh zemli – H&ES: High tech in earth space research*. 2013. vol. 2. pp. 44–51. (In Russ.).
16. Barabanova E.A., Beresnev I.A. [The discrete simulation modeling of an algorithm of the organization of queue in the router buffer]. *Nauchnyy vestnik NGTU – Science bulletin of NSTU*. 2015. Issue 58. vol. 1. pp. 135–147. (In Russ.).
17. Mesarovic M., Macko, D., Takahara, Y. *Hierarchical Multilevel Systems Theory*. Academic Press. 1970. 344 p.
18. Tregubov R.B., Saitov I.A. *Teoreticheskie osnovy analiza i optimizatsii ierarkhicheskikh mnogourovnevnykh marshrutiziruyushchikh sistem* [Theoretical bases of the analysis and optimization of the hierarchical multilevel routing systems]. Orel: Akademiya FSO Rossii. 2016. 585 p. (In Russ.).
19. Sotnikov A.D., Katasonova G.R. [Models of application-oriented and socially oriented infocommunication systems]. *Fundamental'nye issledovaniya – Fundamental research*. 2015. vol. 2. pp. 6070–6077. (In Russ.).

20. Filin B.P. *Metody analiza strukturnoj nadezhnosti setej svyazi* [Methods of the analysis of structural reliability of communication networks]. M.: Radio i svjaz'. 1988. 208 p. (In Russ.).
21. GOST R ISO/MEK 7498-1-99. [Information technology. Open systems interconnection. Basic reference model. Part 1. The basic model]. M.: Standartinform. 2006. 58 p. (In Russ.).
22. Shreyder Yu.A. *Ravenstvo, skhodstvo, porjadok* [Equality, similarity, order]. M.: Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury izdatel'stva "NAUKA". 1971. 254 p. (In Russ.).
23. Ryabinin I.A. *Nadezhnost' i bezopasnost' strukturno-slozhnykh sistem*. [Reliability and safety of structurally complicated systems]. SPb.: Politehnika. 2000. 248 p. (In Russ.).
24. Tregubov R.B. [Composite method of reliability research for hierarchical multilayer routing systems]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik ITMO – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2016. vol. 5. pp. 879–892. (In Russ.).
25. Tregubov R.B., Oreshin A.N., Aleksikov Yu.G. [The algorithm for finding k shortest paths]. *Telekommunikatsii – Telecommunications*. 2013. vol. 6. pp. 10–15. (In Russ.).
26. Martello S., Toth P. *Knapsack problems: algorithms and computer implementations*. John Wiley & Sons Ltd. 1990. 296 p.
27. Tregubov R.B., Saitov I.A., Korolev A.V. *Methods of Optimization of Characteristics in Small and Medium Connectivity Data Transmission Networks*. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2009. vol. 68. pp. 167–179.
28. Tregubov R.B., Myasin N.I., Myasin K.I. [The optimization of a bit transmission rates in channels of a packet switched transport communication network providing a maximum of probability of timely delivery of protocol data UNITS]. *T-Comm: Telekommunikatsii i transport – T-Comm: Telecommunications and transport*. 2015. vol. 2. pp. 34–40. (In Russ.).
29. Kokoreva E.V. [Methods of the analysis of queueing network for assessment of figures of merit in communication networks]. *Informatsionnye tekhnologii. Radioelektronika. Telekommunikatsii (ITRT-2016): sb. statey VI mezhdunarodnoy zaobnoy nauchno-tehnicheskoy konferentsii* [Information Technology. Electronics. Telecommunications (ITRT-2016): Proc. of VI International extramural scientific and technical conference. P.1]. Povolzhskiy gos. un-t servisa. Tol'yatti: PVGUS. 2016. pp. 302–307. (In Russ.).

М.В. БУРАКОВ, В.Ф. ШИШЛАКОВ  
**МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ПРЕДИКТОР СМИТА ДЛЯ  
ОБЪЕКТА С ПЕРЕМЕННОЙ ЗАДЕРЖКОЙ**

---

*Бураков М.В., Шишлаков В.Ф. Модифицированный предиктор Смита для объекта с переменной задержкой.*

**Аннотация.** При управлении системами с переменным временем задержки традиционный предиктор Смита обладает плохой устойчивостью. Предлагается разработка усовершенствованного адаптивного ПИД-Смит предиктора, который использует ПИД-регулятор в качестве основного контроллера и, кроме того, блок оценки неизвестного времени задержки. Цель исследования состоит в том, чтобы гарантировать стабильность работы системы и устойчивость к ошибкам моделирования.

Рассматриваются два варианта организации блока оценки: на базе нейронной сети и на базе нечеткого регулятора. В первом варианте генетический алгоритм применяется для поиска оптимальных параметров блока оценки в автономном режиме. Во втором варианте нечеткий регулятор типа Такаги — Сугено использует множество моделей с различным временем задержки. В каждый момент времени вычисляется ошибка выхода для каждой модели. Выходной сигнал блока оценки рассчитывается по правилу дефаззификации. Результаты моделирования показывают эффективность предложенного метода.

**Ключевые слова:** система с запаздыванием, предиктор Смита, адаптивное управление, нейронная сеть, генетический алгоритм, нечеткий логический регулятор Такаги — Сугено.

---

**1. Введение.** Объекты управления с запаздыванием часто встречаются в различных отраслях индустрии, в том числе в химической, металлургической промышленности и топливно-энергетическом комплексе.

Системы с запаздыванием образуют важный класс систем автоматического управления, поскольку звено запаздывания вносит отрицательный сдвиг фазы, способный привести к потере устойчивости. Для управления объектами с запаздыванием часто применяют предиктор Смита [1, 2], недостаток непосредственного использования которого заключается в необходимости точного знания всех параметров системы, что на практике часто невозможно. Кроме того, задержка на выходе системы может быть переменной, и это, в свою очередь, не позволяет однозначно настроить задержку модели [3]. Поэтому существующие классические подходы к управлению линейными системами с запаздыванием в последние годы совершенствуются на базе методов адаптивного управления [4, 5] с расширением на класс нелинейных систем [6, 7]. Перспективным является применение для управления системами с запаздыванием методов искусственного интеллекта. Так, например, в работах [8-13] представлены варианты улучшения робастности классического предиктора Смита на базе нечеткой логики и нейросетевой технологии. В [8] рассмотрена комбинация нечеткого регулятора ПИ-типа и предиктора Смита, позволяющая устранить пе-

ререгулирование и сократить время переходного процесса. В [9, 10] для достижения аналогичного эффекта использована искусственная нейронная сеть (НС), обучаемая с помощью алгоритма обратного распространения. В [11-13] использован нечеткий супервизор для управления коэффициентами ПИД-регулятора.

В настоящей работе рассмотрена задача управления линейным динамическим объектом с переменным запаздыванием. Анализируются варианты структур блока оценки запаздывания на базе НС и на основе нечеткого логического регулятора (НЛР). Предлагаются алгоритмы синтеза параметров блока оценки задержки, позволяющие обеспечить требуемое качество переходных процессов.

**2. Предиктор Смита и его модификация.** Линейной системе с запаздыванием, замкнутой единичной обратной связью, соответствует следующая передаточная функция (ПФ):

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{W_c(s)W(s)e^{-\tau s}}{1 + W_c(s)W(s)e^{-\tau s}}, \quad (1)$$

где  $Y(s)$  и  $R(s)$  — выход и вход системы,  $W_c(s)$  — ПФ регулятора,  $W(s)e^{-\tau s}$  — ПФ объекта управления.

Цель предиктора Смита — предсказать, какой сигнал должен появиться на выходе до того, как он там появится на самом деле. Обычно используется комбинация ПИД-регулятора и предиктора Смита [2]. Для предсказания используется модель объекта управления, состоящая из ПФ  $W_m(s)$  и транспортной задержки  $\tau_m$  (рисунок 1, где  $E(s)$  — ошибка управления,  $U(s)$  — сигнал управления).

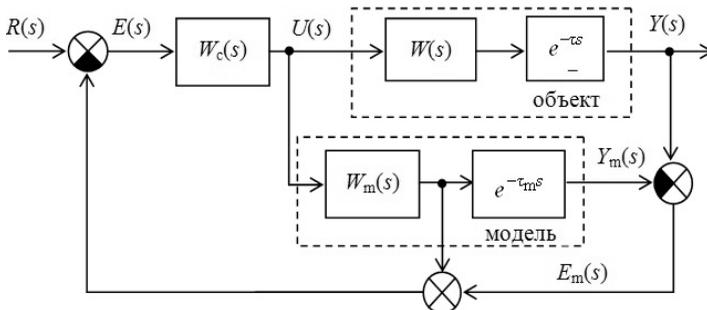


Рис. 1. Вариант описания предиктора Смита

При равенстве параметров объекта и модели ( $W_m(s) = W(s)$  и  $\tau_m = \tau$ ) выполняется условие:

$$E_m(s) = Y(s) - Y_m(s) = 0,$$



**3. Нейросетевая реализация блока оценки задержки.** При оценке изменения задержки важно учитывать не только текущее значение ошибки, но и ее динамику, поэтому:

$$\dot{\tau} = f(e_m, \dot{e}_m, \int e_m dt) \Rightarrow \tau = \int f(e_m, \dot{e}_m, \int e_m dt) dt + \tau_0, \quad (3)$$

где  $\tau_0$  — начальная оценка задержки.

В качестве оператора  $f$  в (3) может быть использована взвешенная сумма (линейный ПИД-нейрон) или нелинейное преобразование, реализуемое с помощью искусственной нейронной сети (ИНС). Варианты блока оценки с блоком ограничения на выходе представлены на рисунках 3 и 4, оба они могут трактоваться как варианты ИНС.

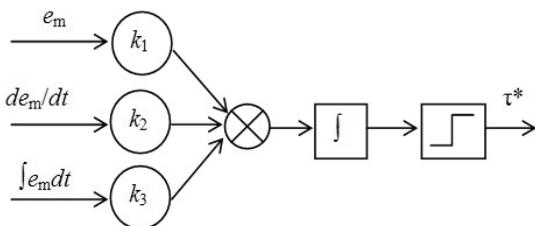


Рис. 3. Блок оценки на основе линейного ПИД-нейрона

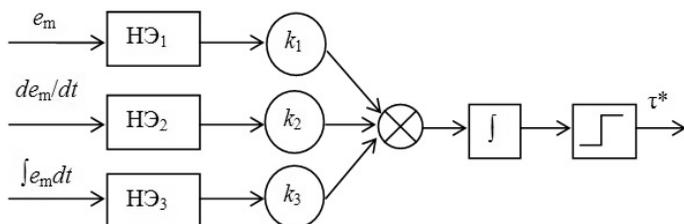


Рис. 4. Блок оценки на основе нелинейной структуры

Нелинейные элементы (НЭ), использованные в структуре блока оценки на рисунке 4, позволяют описать более сложный закон управления, который соответствует нечеткому регулятору ПИД-типа [14, 15]. Блоки НЭ<sub>1</sub>–НЭ<sub>3</sub> представляют собой нечетко-симметричные нелинейности, которые описываются с помощью кусочно-линейной аппроксимации.

Для оптимизации параметров блока оценки используется генетический алгоритм [16]. Целевая функция имеет вид:

$$P = \sum_{i=1}^N e_m(i) \rightarrow \min,$$

где  $i$  — количество шагов моделирования переходного процесса.

**4. Реализация блока оценки задержки на базе нечеткого регулятора Такаги — Сугено.** Нечеткий регулятор Такаги — Сугено впервые описан в работе [17]. В отличие от НЛР типа Мамдани, в которых заключения нечетких правил являются нечеткими множествами, в НЛР типа Такаги — Сугено правые части нечетких правил представляют собой линейные функции входных переменных.

Такая структура открывает широкие возможности как для конструирования НЛР для нелинейных объектов [18, 19], так и для моделирования нелинейных систем [20]. Иначе говоря, здесь рассматривается множество линейных моделей, каждая из которых соответствует нечеткой локальной области фазового пространства объекта. Положение этих локальных нечетких областей априори задано, так что можно вычислять соответствие текущего положения объекта различным областям, изменяя «вес» выхода соответствующих моделей. Общий выходной сигнал модели оказывается «смесью» выходных сигналов локальных моделей. Располагая множеством линейных моделей, можно синтезировать регулятор для каждой из них, а затем рассмотреть нелинейный закон управления, в котором выходные сигналы локальных регуляторов «смешиваются» аналогично выходам линейных моделей (рисунок 5, где  $\mu_i$  — степень соответствия состояния объекта  $X$  области действия  $i$ -го регулятора).

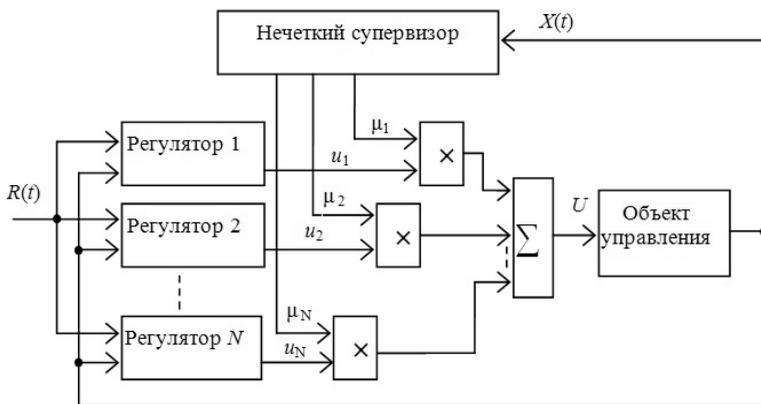


Рис. 5. Общая структура НЛР Такаги — Сугено

Выходной сигнал НЛР получается по формуле, которая соответствует дискретному варианту метода центра тяжести, применяемому для дефазификации:

$$U = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i u_i(k)}{\sum_{i=1}^N \mu_i} \quad (4)$$

Рассмотрим, как может быть использована методика конструирования НЛР Такаги — Сугено применительно к данной задаче. Выходом НЛР здесь будет являться оценка задержки  $\tau^*$ , которая может изменяться в некоторых известных пределах:  $\tau^* \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ .

В схеме, показанной на рисунке 5, значение степени соответствия формируется как  $T$ -норма вида:

$$\mu_i = \min((A_1^i \cap x_1), (A_2^i \cap x_2) \dots (A_k^i \cap x_k)),$$

где  $x_j$  — компоненты вектора состояния  $X$ ,  $A_j$  — априорно заданные нечеткие множества, описывающие область действия  $i$ -й модели,  $k$  — размерность вектора состояния.

В задаче оценки задержки на выходе одномерной системы  $k = 1$ , но априорное описание состояния невозможно, поскольку соответствии выхода системы и значения задержки неоднозначно.

Для описания степени принадлежности  $\mu_i$  рассмотрим совокупность моделей систем с предиктором Смита, каждый из которых настроен на определенную задержку  $\tau_i$  таким образом, что:

$$\tau_i = i \cdot \Delta\tau, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где  $\Delta\tau$  — шаг изменения задержки,  $N$  — количество моделей.

В результате сравнения выхода каждой модели с выходом объекта получается ошибка выхода  $i$ -й модели. Интеграл этой ошибки может служить в качестве оценки соответствия модели объекту (рисунок 6).

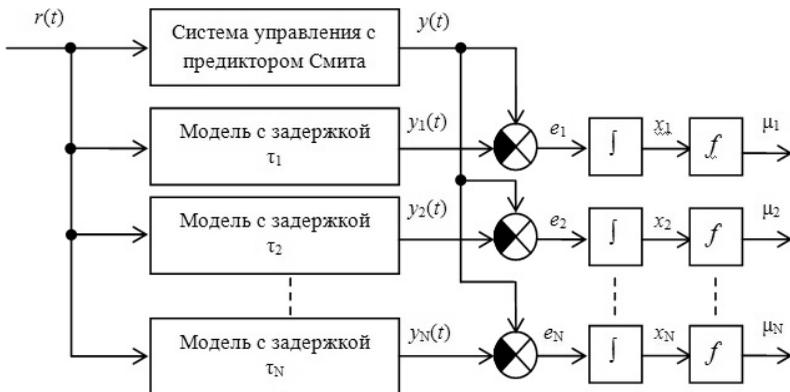


Рис. 6. Схема формирования значения принадлежности

Большие значения интеграла ошибки означают малое соответствие модели объекту, поэтому для описания степени соответствия может быть использована гауссова функция с центром в точке 0:

$$\mu_i = f(x_i) = \exp\left(-\frac{(x_i)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где параметр  $\sigma$  подбирается экспериментально.

Таким образом обеспечивается условие:  $\mu_i \in [0, 1]$ .

Поскольку с каждой моделью связана определенная задержка  $\tau_i$ , выход блока оценки может быть получен в соответствии с (4):

$$\tau^* = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i \tau_i}{\sum_{i=1}^N \mu_i}. \quad (6)$$

## 5. Пример моделирования.

**5.1. Классический предиктор Смита.** Рассмотрим в качестве примера систему управления с ПИД-регулятором (рисунок 7).

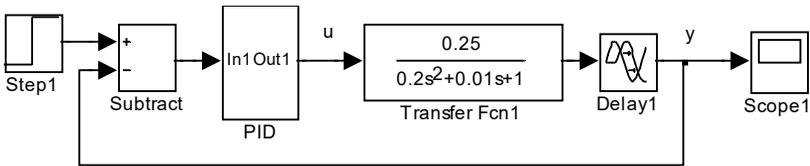


Рис. 7. Блок-схема системы управления в *MatLab*

На рисунке 8 приведены переходные процессы в системе, которая теряет устойчивость при  $\tau \geq 0.18$  с.

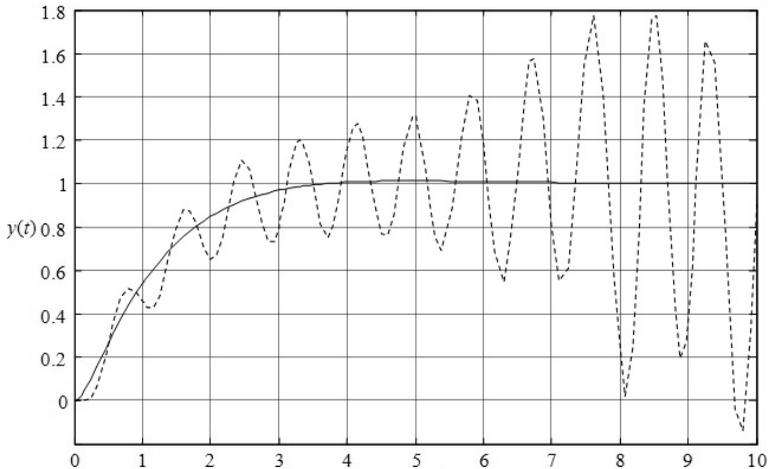


Рис. 8. Реакция системы на единичный скачок при  $\tau = 0$  (сплошная) и при  $\tau = 0.18$  с (пунктир)

Использование предиктора Смита (рисунок 9) позволяет сохранить вид переходного процесса.

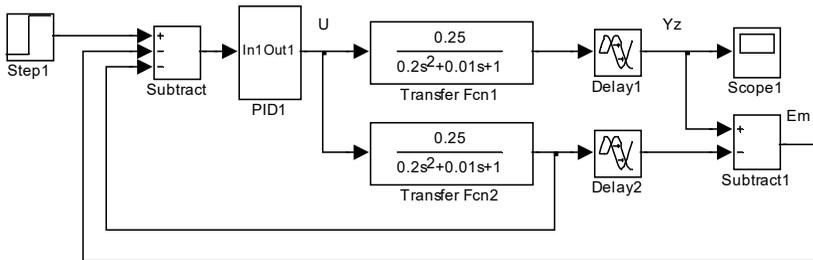


Рис. 9. Блок-схема системы с предиктором

Однако, как показывает рисунок 10, качество работы системы быстро ухудшается, если  $\text{Delay1} \neq \text{Delay2}$ .

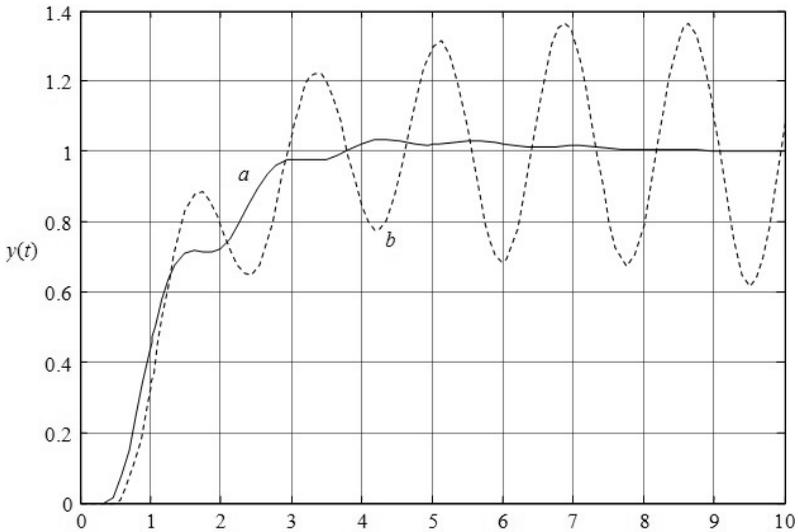


Рис. 10. Переходные процессы в схеме с предиктором:  $\text{Delay1} = 0.2\text{c}$ ,  $\text{Delay2} = 0.38\text{c}$ . (a) и  $\text{Delay1} = 0.2\text{c}$ ,  $\text{Delay2} = 0.5\text{c}$  (b)

Таким образом, классический предиктор Смита неработоспособен при наличии переменной задержки на выходе системы.

**5.2. Предиктор Смита с нейросетевым блоком оценки.** На рисунке 11 представлена схема предиктора с блоком оценки задержки на

базе, собранная в *Simulink MatLab* (блоки *Signal Builder* служат для формирования обучающей и тестовой последовательности изменения  $\tau$ ).

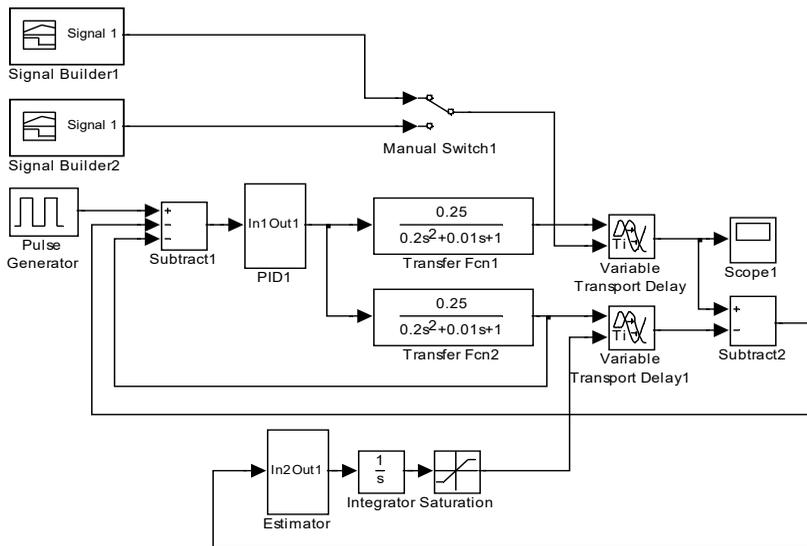


Рис. 11. Предиктор Смита с блоком оценки задержки

Оба варианта организации блока оценки (рисунки 3 и 4) показали хорошее качество генетического обучения (рисунки 12 и 13).

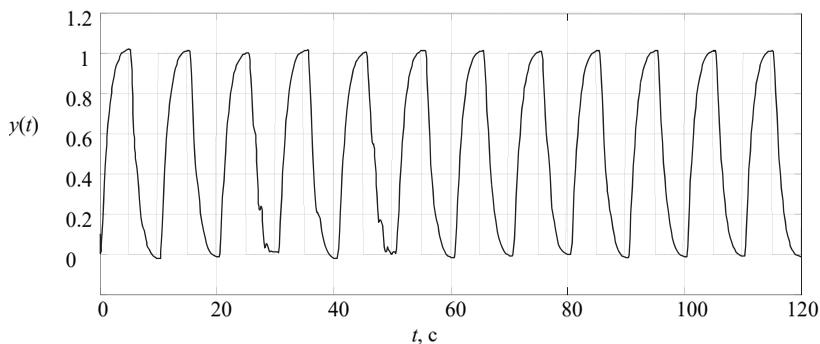


Рис. 12. Реакция модифицированного предиктора Смита (сплошная) на задающее воздействие (пунктир)

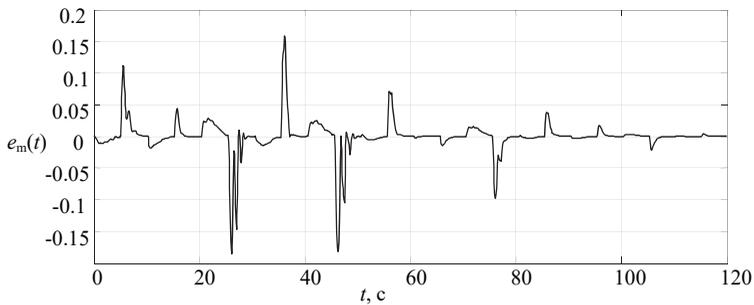


Рис. 13. Ошибка выхода модели

На рисунке 14 показан выходной сигнал блока оценки модели для блока оценки на базе линейной НС (система 1) и блока оценки на базе нелинейной НС (система 2).

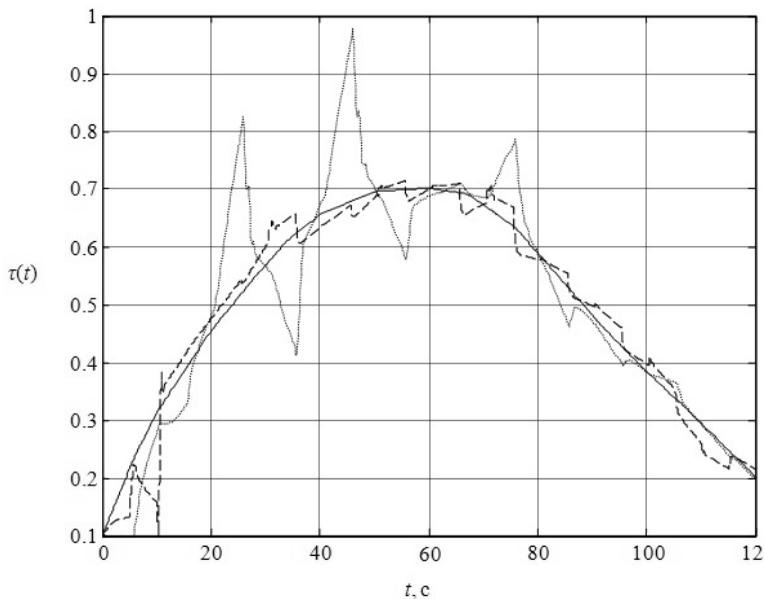


Рис. 14. Изменение значения задержки: задающее воздействие (сплошная), система 1 (точки), система 2 (тире)

Для системы 1 характерны резкие колебания значения  $\tau^*$ , поэтому после обучения система 1 не смогла справиться с тестовой задачей, которую решила система 2 (рисунки 15 и 16).

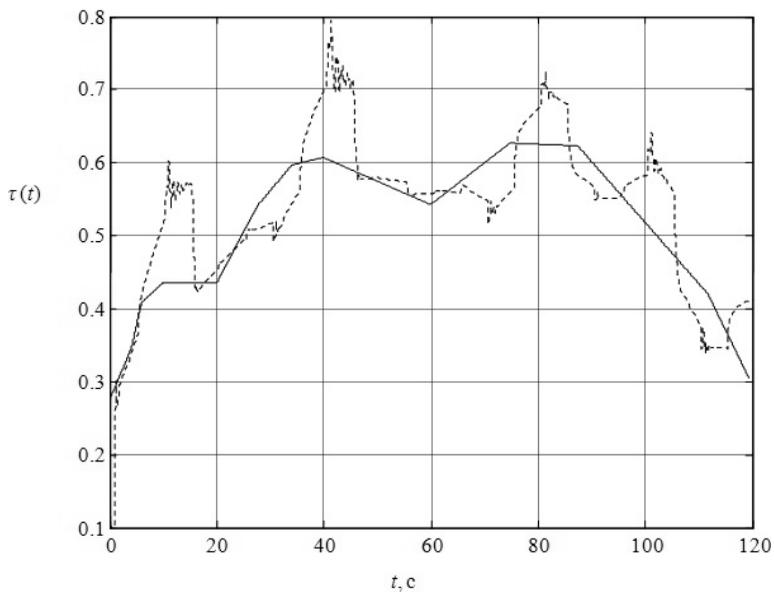


Рис. 15. Изменение значения задержки для тестового примера: задающее воздействие (сплошная), система 2 (тире)

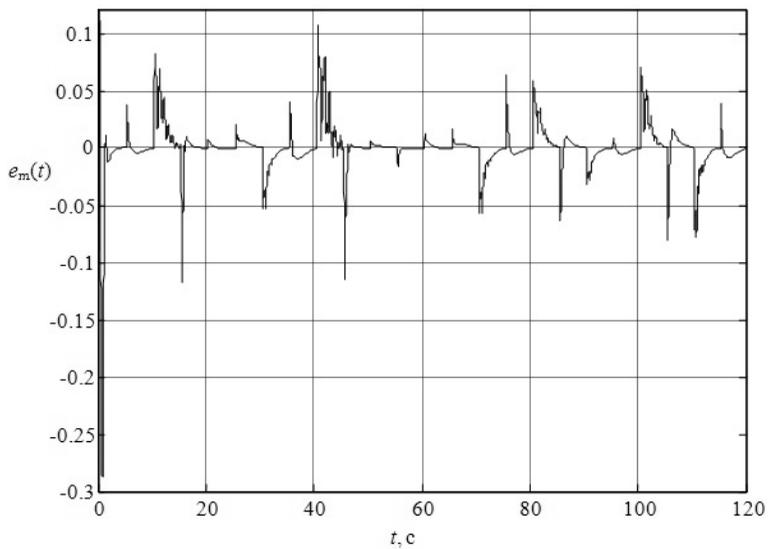


Рис. 16. Ошибка выхода модели для тестовой последовательности

На рисунке 17 представлены нелинейные элементы, полученные после генетического обучения системы 2.

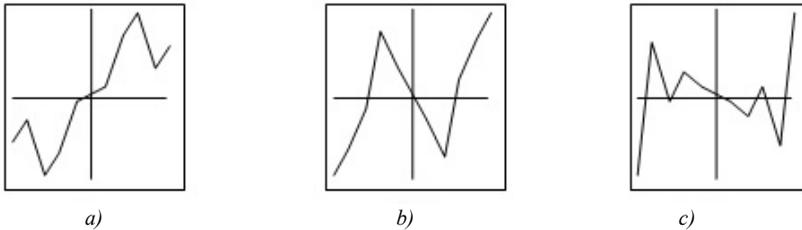


Рис. 17. Нелинейности: *a* — канал ошибки, *b* — канал производной, *c* — канал интеграла ошибки

### 5.3. Предиктор Смита с нечетким блоком оценки задержки.

На рисунке 18 представлен пример схемы предиктора с блоком оценки задержки на основе нечеткого регулятора Такаги — Сугено.

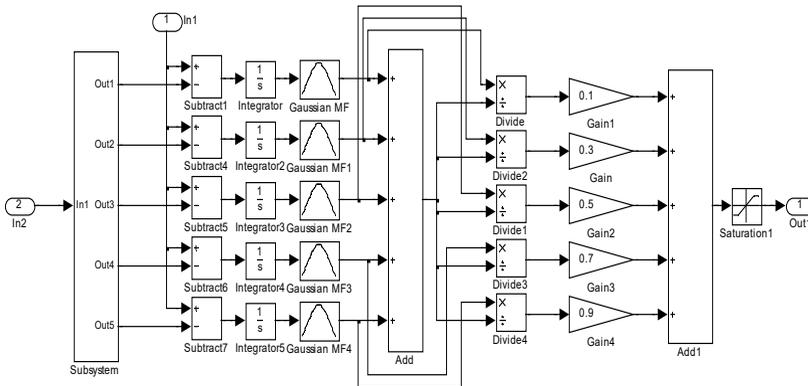


Рис. 18. Блок-схема предиктора на базе нечеткого регулятора

Блок Subsystem на рисунке 18 содержит набор из 5 схем с предиктором (рисунок 9), в которых задержка изменяется согласно (5) с шагом 0.2 с. Во всех схемах параметры ПИД-регулятора одинаковы. Вход In2 соответствует задающему воздействию, вход In1 — выходу объекта с переменной задержкой. Блок сумматоров вычисляет ошибку выхода каждой модели, ее интеграл и преобразование с помощью функции Гаусса (рисунок 6). Остальная часть схемы реализует (6). Таким образом, на рисунке 16  $\tau^* \in [0.1; 0.9]$ .

На рисунке 19 показана реакция предиктора Смита с нечетким блоком оценки задержки на синусоидальное входное воздействие, на рисунке 20 — ошибка выхода.

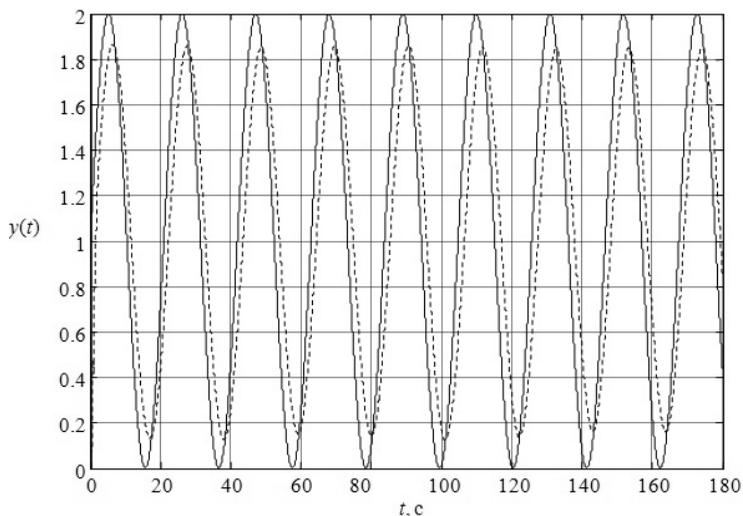


Рис. 19. Реакция предиктора Смита с нечетким блоком оценки (пунктир) на задающее воздействие (сплошная)

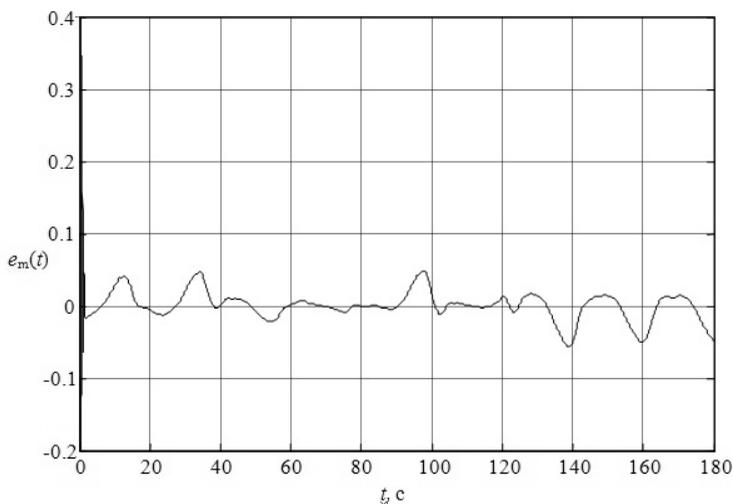


Рис. 20. Ошибка обработки синусоидального воздействия

На рисунке 21 представлен выходной сигнал нечеткого блока оценки задержки.

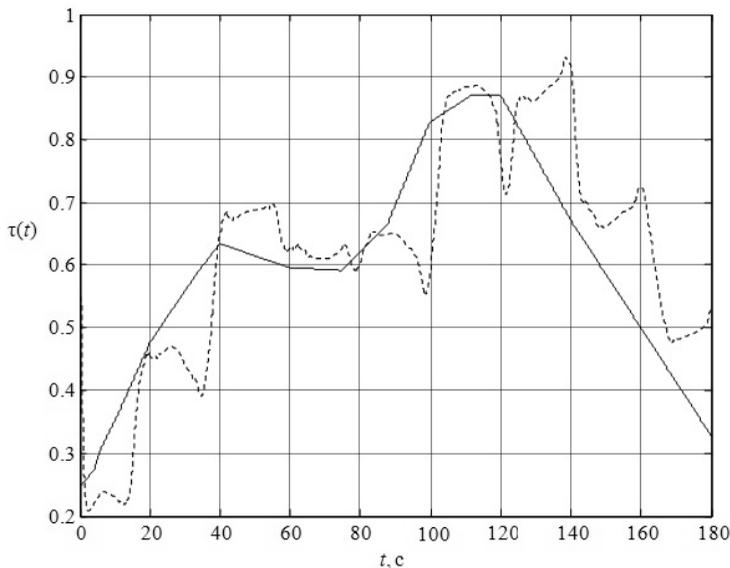


Рис. 21. Изменение значения задержки: задающее воздействие (сплошная), выход нечеткого блока оценки (тире)

Моделирование показало, что при увеличении количества моделей можно значительно повысить точность оценки времени задержки (уменьшение шага  $\Delta t$ ) или расширить диапазон возможных изменений задержки. Динамическая ошибка выхода системы на рисунке 19 зависит от параметров основного ПИД-регулятора. В целом схема на базе нечеткого блока оценки показала высокую робастность при обработке произвольных законов изменения задержки.

**6. Заключение.** Результаты проведенных экспериментов подтверждают практическую значимость предлагаемой схемы модификации предиктора Смита с помощью блока оценки задержки. Обеспечивается устойчивость и заданная форма переходного процесса при вариации задержки в достаточно широком диапазоне значений, что невозможно при использовании классического предиктора Смита.

Рассмотренные варианты реализации блока оценки задержки имеют свои достоинства и недостатки.

Вариант на базе рассмотренных линейной и нелинейной НС отличается простотой реализации, однако требует достаточно трудоемкого этапа обучения. Линейный закон адаптации показал худшую ро-

бастность, чем нелинейный вариант. Качество генетического обучения сильно зависит от разнообразия обучающей выборки. Как показало моделирование, при обучении требуется использовать длительные временные интервалы, чтобы изменение задержки было достаточно плавным. При отработке ступенчатых импульсов ошибка выхода лишь в отдельные моменты превышала 10%, в то время как система с традиционным предиктором Смита оказывается неработоспособной.

Вариант блока оценки на базе нечеткого регулятора не требует обучения, обеспечивает высокую робастность и позволяет добиться регулирования качества оценки времени задержки. В проведенном эксперименте по отработке синусоидального входного сигнала ошибка выхода системы с переменным временем задержки не превышала 5%. Однако этот вариант опирается на использование множества моделей системы управления, что вызывает большие вычислительные затраты при работе в реальном времени.

Выбор того или иного варианта модификации предиктора Смита должен происходить с учетом специфики решаемой задачи.

Таким образом, рассмотренный подход может быть полезен при разработке систем управления широким классом динамических объектов с запаздыванием.

## Литература

1. *Smith O.J.M.* Close Control of Loops with Dead Time // *Chemical Engineering Progress*. 1957. vol. 53. pp. 217–235.
2. *Гурецкий Х.* Анализ и синтез систем управления с запаздыванием // М.: Машиностроение. 1973. 328 с.
3. *Вундер Н.А., Ушаков А.В.* Анализ чувствительности к вариации запаздывания систем с последовательным компенсатором, включённым по схеме Смита // *Автометрия*. 2016. № 3. С. 71–78.
4. *Фуртат И.Б., Цыкунов А.М.* Адаптивное управление объектами с запаздыванием по выходу // *Известия ВУЗов. Приборостроение*. 2005. № 7. С. 15–19.
5. *Kamali M., Askari J., Sheikholeslam F.* An Output-feedback adaptive actuator failure compensation controller for systems with unknown state delays // *J. Nonlinear Dyn.* 2012. vol. 64. no. 4. pp. 2397–2410.
6. *Бобцов А.А.* Стабилизация нелинейных систем по выходу в условиях запаздывания // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2008. № 2. С. 21–28.
7. *Бобцов А.А., Пыркин А.А.* Адаптивное и робастное управление с компенсацией неопределенностей // СПб: НИУ ИТМО. 2013. 135 с.
8. *Wei Q., Wang W.* Research on fuzzy self-adaptive PI-Smith control in long time-delay system // *Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*. 2011. vol. 18(5). pp. 114–117.
9. *Wang P.G., Feng H.P., Zong X.P.* Smith predictive control based on NN // *Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. Guangzhou. 2005. pp. 4179–4183.
10. *Chen H., Zouaoui Z., Chen Z.* A modified Smith predictive scheme based back-propagation neural network approach for FOPDT processes control // *Journal of Process Control*. 2013. vol. 23(9). pp. 1261–1269.

11. *Padhan D.G., Majhi S.* Modified Smith predictor based cascade control of unstable time delay processes // ISA Transactions. 2012. vol. 51. no. 1. pp. 95–104.
12. *Ren H., Cao X., Guo J.* Modified Smith Predictor Design and Its Applications to Long Time Delay Systems // International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition. 2015. vol. 8. no. 5. pp. 151–160.
13. *Abuzaid O.M., Emheisen M.A., Ammar A.A.* Design of Fuzzy Self-adaptive PI-Smith Predictor Process Controller // International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT). 2016. vol. 31. no. 1. pp. 18–21.
14. *Бураков М.В., Кирпичников А.П.* Нечеткий регулятор ПИД-типа для нелинейного объекта // Вестник Казанского технологического университета. 2015. Т.18. № 4. С. 242–244.
15. *Burakov M.V., Kurbanov V.G.* Fuzzy PID controller for nonlinear plant // ARPN Journal of Engineering and Applied Sciences. 2016. vol. 11. no. 9. pp. 5745–5748.
16. *Бураков М.В., Коновалов А.С., Яковец О.Б.* Эволюционный синтез нечетких регуляторов // Информационно-управляющие системы. 2015. № 6. С. 28–33.
17. *Takagi T., Sugeno M.* Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control // IEEE Trans. Systems Man Cybernet. 1985. vol. 15. no. 116. pp. 116–132.
18. *Gao Q., Feng G., Wang Y.* Universal fuzzy controllers based on generalized T–S fuzzy models // Fuzzy Sets and Systems. 2012. vol. 201. pp. 55–70.
19. *Klug M., Castelan E.B., Leite V.J., Silva L.F.* Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi–Sugeno models // Fuzzy Sets and Systems. 2015. vol. 263. pp. 92–111.
20. *Бураков М.В., Брунов М.С.* Структурная идентификация нечеткой модели // Труды СПИИРАН. 2014. Вып. 3 (34). С. 232–246.

**Бураков Михаил Владимирович** — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры управления в технических системах института инновационных технологий в электромеханике и робототехнике, Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП). Область научных интересов: адаптивные и нечеткие системы, нейронные сети, генетические алгоритмы. Число научных публикаций — 150. [bmV@sknt.ru](mailto:bmV@sknt.ru); ул. Б. Морская, 67, Санкт-Петербург, 190000; р.т.: +7(812)4947031.

**Шихлаков Владислав Федорович** — д-р техн. наук, профессор, директор института инновационных технологий в электромеханике и робототехнике, заведующий кафедрой управления в технических системах института инновационных технологий в электромеханике и робототехнике, Санкт-Петербургский Государственный университет аэрокосмического приборостроения (СПбГУАП). Область научных интересов: методы синтеза нелинейных систем управления, электроэнергетические комплексы, сверхпроводимость, энергоэффективность. Число научных публикаций — 170. [svfmail@yandex.ru](mailto:svfmail@yandex.ru); ул. Б. Морская, 67, Санкт-Петербург, 190000; р.т.: +7(812)4947031.

M.V. BURAKOV, V.F. SHYSHLAKOV  
**A MODIFIED SMITH PREDICTOR FOR THE CONTROL OF SYSTEMS WITH TIME-VARYING DELAY**

*Burakov M.V., Shyshlakov V.F. A Modified Smith Predictor for the Control of Systems with Time-Varying Delay.*

**Abstract.** A conventional Smith predictor presents poor stability when controlling systems with time-varying delay. In this paper, an improved adaptive PID-Smith predictor is proposed. It uses a PID controller as the primary controller as well as the estimator for unknown time delay. The goal is to ensure system stability and resistance to modeling errors.

This article discusses two structures of the estimator unit - based on a neural network and on a fuzzy controller. In the first variant, the genetic algorithm is used to find the optimal parameters of the estimator in the autonomous mode. In the second variant, the fuzzy controller of the Takagi – Sugeno type uses a variety of models with different delay time. At each time point the error of output is calculated for all models. The output signal of the estimator is formed by the rule of defuzzification. Simulation results show the effectiveness of the proposed modification of the Smith predictor.

**Keywords:** Time-delayed systems, Smith predictor, adaptive control, neural network, genetic algorithm, Takagi – Sugeno fuzzy logic controller.

**Burakov Mikhail Vladimirovich** — Ph.D., associate professor, associate professor of control in technical systems department of Institute of Innovative Technologies in Electromechanics and Robotics, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI). Research interests: adaptive and fuzzy systems, neural net, genetic algorithm. The number of publications — 150. [bmvmv@sknt.ru](mailto:bmvmv@sknt.ru); 67, Bolshaya Morskaya str., St. Petersburg, 190000; office phone: +7(812)4947031.

**Shyshlakov Vladislav Fedorovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, head of control in technical systems department of Institute of Innovative Technologies in Electromechanics and Robotics, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation (SUAI). Research interests: methods of synthesis of nonlinear control systems, power-engineering complexes, superconductivity, ergo-efficiency. The number of publications — 170. [svfmail@yandex.ru](mailto:svfmail@yandex.ru); 67, Bolshaya Morskaya str., St. Petersburg, 190000; office phone: +7(812)4947031.

### References

1. Smith O.J.M. Close Control of Loops with Dead Time. *Chemical Engineering Progress*. 1957. vol. 53. pp. 217–235.
2. Guretskij Kh. *Analiz i sintez sistem upravleniya s zapazdyvaniem* [Analysis and synthesis of control systems with delay]. M.: Mashinostroenie. 1973. 328 p. (In Russ.).
3. Vunder N.A., Ushakov A.B. [A sensitivity analysis to variations in delay systems with serial compensator included on the Smith chart]. *Aviometriya – Autometry*. 2016. vol. 3. pp. 71–78. (In Russ.).
4. Furtat I.B., Tsykunov A.M. [Adaptive control of plants with delayed output]. *Izv. vyssh. uchebn. zavedenij: Priborostroenie – Proceedings of the higher educational institutions: Instrumentation*. 2005. vol. 7. pp. 15–19. (In Russ.).
5. Kamali M., Askari J., Sheikholeslam F. An Output-feedback adaptive actuator failure compensation controller for systems with unknown state delays. *Journal of Nonlinear Dynamics*. 2012. vol. 64. no. 4. pp. 2397–2410.

6. Bobtsov A.A. [Stabilization of nonlinear systems by output in terms of delay]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya – Journal of computer and systems sciences international*. 2008. vol. 2. pp. 21–28. (In Russ.).
7. Bobtsov A.A., Pyrkin A.A. *Adaptivnoe i robustnoe upravlenie s kompensatsiyey neopredelennostey* [Adaptive and robust control with uncertainties compensation]. SPb: NIU ITMO. 2013. 135 p. (In Russ.).
8. Wei Q., Wang W. Research on fuzzy self-adaptive PI-Smith control in long time-delay system. *Journal of China Universities of Posts and Telecommunications*. 2011. vol. 18(5). pp. 114–117.
9. Wang P. G., Feng H. P., Zong X. P. Smith predictive control based on NN. Proceedings of 2005 International Conference on Machine Learning and Cybernetics. Guangzhou. 2005. pp. 4179–4183.
10. Chen H., Zouaoui Z., Chen Z. A modified Smith predictive scheme based back-propagation neural network approach for FOPDT processes control. *Journal of Process Control*. 2013. vol. 23. pp. 1261–1269.
11. Padhan D.G., Majhi S. Modified Smith predictor based cascade control of unstable time delay processes. *ISA Transactions*. 2012. vol. 51. no 1. pp. 95–104.
12. Ren H., Cao X., Guo J. Modified Smith Predictor Design and Its Applications to Long Time Delay Systems. *International Journal of Signal Processing, Image Processing and Pattern Recognition*. 2015. vol. 8. no. 5. pp. 151–160.
13. Abuzaid O.M., Emheisen M.A., Ammar A.A. Design of Fuzzy Self-adaptive PI-Smith Predictor Process Controller. *International Journal of Engineering Trends and Technology (IJETT)*. 2016. vol. 31 no 1. pp. 18–21.
14. Burakov M.V., Kirpichnikov A.P. [Fuzzy PID controller for nonlinear plant]. *Vestnik Kazanskogo tekhnologicheskogo universiteta – Bulletin of Kazan Technological University*. 2015. vol. 18. no 4. pp. 242–244. (In Russ.).
15. Burakov M.V., Kurbanov V.G. Fuzzy PID controller for nonlinear plant. *ARNP Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2016. vol. 11. no. 9. pp. 5745–5748.
16. Burakov M. V., Konovalov A.S., Yakovets O.B. [Evolutionary design of Fuzzy controllers]. *Informatsionno-upravlyayushchie sistemy – Information and Control Systems*. 2016. pp. 28–33. (In Russ.).
17. Takagi T., Sugeno M. Fuzzy identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Trans. Systems Man Cybernet*. 1985. vol. 15. no. 116. pp. 116–132.
18. Gao Q., Feng G., Wang Y. Universal fuzzy controllers based on generalized T–S fuzzy models. *Fuzzy Sets and Systems*. 2012. vol. 201. pp. 55–70.
19. Klug M., Castelan E.B., Leite V.J., Silva L.F. Fuzzy dynamic output feedback control through nonlinear Takagi–Sugeno models. *Fuzzy Sets and Systems*. 2015. vol. 263. pp. 92–111.
20. Burakov M.V., Brunov M.S. [Structural identification of fuzzy model]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2014. vol. 3(34). pp. 232–246.

А.В. КОЗАЧОК, Е.В. КОЧЕТКОВ  
**ФОРМАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА  
В ОПЕРАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ**

---

*Козачок А.В., Кочетков Е.В.* **Формальная модель функционирования процесса в операционной системе.**

**Аннотация.** В статье представлена формальная модель функционирования процесса в операционной системе, построенная на основе применения субъектно-объектного подхода к разделению основных элементов операционной системы. Особенностью представленной модели является высокоуровневая абстракция описания взаимодействия процесса с ресурсами операционной системы, что позволяет применить полученные на ее основе результаты к широкому классу аналогичных систем. Применение данной модели необходимо для совершения перехода от реального процесса к его формальной модели, позволяющей учитывать значимые свойства поведения процесса как на статическом этапе анализа бинарного исполняемого файла, так и на динамическом этапе контроля за его выполнением. Предложена структура системы безопасного исполнения программного кода, являющаяся расширенной композицией таких подходов к обнаружению вредоносного программного обеспечения, как применение метода формальной верификации «Model checking» и использования автомата безопасности для контроля за выполнением исследуемой программы. Применение данной системы позволит использовать в корпоративных информационно-вычислительных сетях только программное обеспечение, уровень доверия к которому подтверждается формальным математическим доказательством и непрерывным контролем за его функционированием.

**Ключевые слова:** формальная модель процесса, model checking, вредоносное программное обеспечение.

---

**1. Введение.** В последние несколько лет в исследованиях, посвященных защите информации, особое внимание уделяется вопросу, касающемуся обеспечения информационной безопасности корпоративных информационно-вычислительных сетей (КИВС). Эти исследования касаются главным образом формальной верификации свойств безопасности. Основной целью при этом является разработка формальной математической модели свойств безопасности системы, а также верификация этой модели с помощью математических доказательств.

Как показывает практика, большинство угроз информационной безопасности КИВС обусловлено использованием глобальной сети Интернет, в частности, использованием в работе недоверенных программных средств. Одним из наиболее успешных путей проникновения в компьютеры сотрудников организации является применение методов социальной инженерии, а именно отправка большого количества электронных писем с вложениями, содержащими вредоносное программное обеспечение (ВПО) или ссылку на него в Интернете. Путем использования множества методов злоумышленники побуждают сотрудников организации активировать вредоносную программу, не-

смотря на отсутствие достоверной информации о ее происхождении и функциональном содержании [1].

В данной ситуации разумно предложить обеспечить необходимый строгий экспертный контроль за всеми приходящими извне в КИВС файлами. Однако реализация такого подхода сводится к принятию решения аналитиком о допуске или запрете использования конкретного файла в КИВС. Данное решение может быть принято на основе анализа множества факторов, основными из которых являются:

- отнесение антивирусным средством (АВС) исследуемого файла к классу ВПО;
- совпадение контрольной суммы файла с эталонной из доверенного источника;
- проверка сертификата, которым подписан данный файл;
- доверие каналу передачи и источнику, откуда прибыл файл.

Однако, как можно заметить, даже успешное соответствие всем перечисленным признакам не дает гарантии безопасного использования исследуемой программы в КИВС ввиду отсутствия исследования потенциальных функциональных возможностей программы, а также учитывая, что данная проверка будет производиться лишь один раз на пограничном шлюзе организации.

В настоящее время решение о допуске исполняемых файлов в КИВС в основном принимается на основе результатов их проверки АВС. Исследования показывают, что применяемые в них механизмы обнаружения позволяют достичь вероятностей ошибок первого и второго рода, удовлетворяющих современным требованиям. Но стоит учитывать, что даже при вероятности обнаружения равной 0,974, показанной средством «Avast Internet Security», остаются необнаруженными 468 образцов ВПО, уровень потенциальной опасности которых неизвестен [2]. При этом успешный запуск даже одной такой программы в КИВС может нанести существенный ущерб всей организации в целом.

Отказ от использования глобальной сети в повседневной деятельности организации невозможен, что обуславливает поиск разумного компромисса между удобством работы пользователей и требуемым уровнем информационной безопасности КИВС.

По мнению авторов, таким компромиссом является применение системы безопасного исполнения программного кода. Предлагаемая система является расширенной композицией двух активно развивающихся подходов к обнаружению ВПО, а именно: применение методов формальной верификации модели исследуемой программы [3-7] и использование автомата безопасности для контроля за исполнением исследуемой программы в реальном времени [8-12]. В основе функцио-

нирования системы безопасного исполнения программного кода лежит предположение о том, что если безопасность неизвестной ранее программы при заданных функциональных ограничениях не подтверждена, то ее использование запрещено. Реализация данного утверждения требует разработки формальной модели функционирования процесса в операционной системе, которая бы позволила выражать функциональные ограничения в единой форме независимо от способа проверки их достижения.

Целью настоящего исследования является разработка формальной модели функционирования процесса в ОС с перспективой ее использования для формулирования функциональных ограничений, накладываемых на выполнение программы, в единой форме независимо от способа проверки их выполнения в рамках построения системы безопасного исполнения программного кода.

**2. Краткий обзор исследований в области обнаружения ВПО.** Формальную постановку задачи обнаружения ВПО можно представить следующим выражением:

$$F : X \rightarrow Y, \quad (1)$$

где  $X$  — множество всех программ;  $Y = \{\{C\}, \{V\}\}$  — множество индексов классов программ;  $C$  — множество индексов класса программ, безопасных для запуска в ОС;  $V$  — множество индексов класса программ, небезопасных для запуска в ОС (ВПО);  $F$  — функция, отображающая элементы множества  $X$  во множество  $Y$ .

Как следует из постановки задачи обнаружения ВПО, индикаторная функция  $F$  может быть построена множеством различных способов, однако ее построение всегда происходит в рамках одной из двух стратегий защиты компьютерных систем от проникновения ВПО.

При применении первой стратегии разделение исполняемых файлов происходит на основе выявления в них признаков наличия вредоносного функционала (рисунок 1а). Изначально все исполняемые файлы входят во множество  $C$ , то есть множество программ, исполнение которых является безопасным. В случае обнаружения у исполняемого файла признаков наличия ВПО, с точки зрения индикаторной функции  $F$ , данный исполняемый файл переносится во множество  $V$ , то есть множество программ, исполнение которых вызывает потенциально опасные последствия для пользователя. Данная стратегия используется в большинстве коммерческих АВС ввиду универсальности ее применения.

В основе применения второй стратегии к разделению всего множества исполняемых файлов  $X$  лежит принцип «запрещающей» политики — все, что не разрешено, то запрещено (рисунок 1б).

Изначально все исполняемые файлы входят во множество  $V$ , то есть множество программ, безопасность запуска которых не подтверждена, а также отсутствует априорная информация о степени риска их выполнения в ОС. Если после проведения соответствующего исследования подтверждается безопасность запуска определенной программы, то она переносится во множество  $C$ . Данная стратегия не нашла широкого распространения в коммерческих продуктах ввиду сложности реализации и отсутствия соответствующих механизмов анализа.

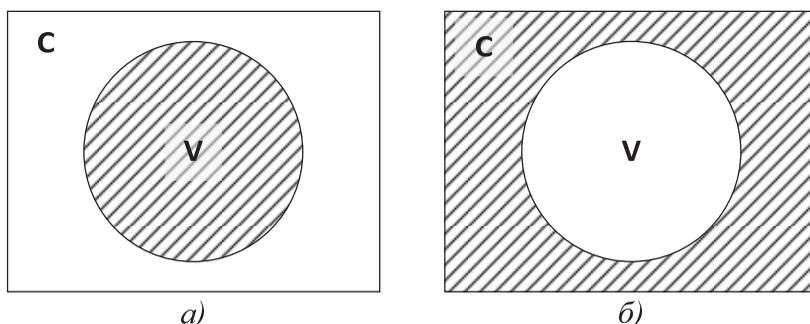


Рис. 1. Стратегии обнаружения ВПО: а) разрешающая; б) запрещающая

В настоящее время выделяются следующие подходы к выявлению признаков вредоносного кода в исполняемых файлах:

- сигнатурный анализ;
- эвристические анализаторы;
- поведенческие анализаторы;
- на основе методов формальной верификации «Model checking».

Поиск на основе сигнатур является основным механизмом, применяемым коммерческими АВС. Сигнатура представляет собой шаблон (регулярное выражение), который однозначно идентифицирует определенную вредоносную программу. Сигнатура позволяет однозначно определить конкретный штамм ВПО, если он присутствует в базе сигнатур. Главными достоинствами этого механизма являются высокая скорость работы и точность обнаружения. Однако он обладает рядом ограничений [13]:

- отсутствует возможность обнаружения новых и модифицированных вредоносных программ до тех пор, пока сигнатура штамма не будет добавлена в базу сигнатур;

– многие современные семейства ВПО используют методы самомодификации в процессе работы [14, 15], что делает поиск на основе сигнатур против них малоэффективным.

Методы эвристического анализа для обнаружения ВПО строятся на основе анализа накопленных знаний об особенностях функционирования различных классов вредоносных программ и применении методов машинного обучения, позволяющих отличать незараженные файлы от ВПО на основе статистических взаимосвязей различных признаков и характеристик [16].

В настоящее время также активно развиваются методы обнаружения ВПО на основе анализа поведения исполняемых файлов. Такой подход является более универсальным, так как позволяет описать поведение вредоносной программы на абстрактном уровне без привязки к бинарному представлению исполняемого файла, которое легко модифицировать [17-19].

Методы обнаружения ВПО на основе анализа поведения непрерывно отслеживают поведение программ в ОС на предмет соответствия некоторой политике безопасности. В течение фазы обучения для детектора администратором формируются правила поведения каждого конкретного приложения. Основное ограничение при применении этого метода — сложность определения множества правил безопасного поведения программ, которые могут быть установлены в защищенной системе. Это, в свою очередь, порождает необходимость вовлечения пользователя в процесс принятия решения. Обзор существующих подходов к обнаружению ВПО на основе анализа поведения представлен в работе [20].

Идея применения метода формальной верификации «Model checking» для решения задачи обнаружения ВПО состоит в том, чтобы построить формальную (математическую) модель вредоносной программы, которая отражает (моделирует) ее возможное поведение в ОС. Поведение штамма ВПО при этом описываются в виде спецификации. На основе этой спецификации и модели исполняемого файла, используя метод «Model checking», можно проверить, согласуется ли возможное поведение с вредоносным.

Впервые использование метода «Model checking» для обнаружения ВПО было предложено в 2005 году в работе [3]. Группа авторов предложила подход, отличительной особенностью которого от существующих на тот момент было обнаружение ВПО на основе анализа его поведения на предмет соответствия заданной модели поведения, характерной для ВПО. Предложенный ими подход заключается в сопоставлении одной спецификации (формулы темпоральной логики-

ки) определенному семейству ВПО, представители которого не имели отличий в поведении, однако существенно отличались по бинарному представлению, вследствие чего не могли быть обнаружены сигнатурным методом до соответствующего изучения каждого образца. Каждый исследуемый бинарный файл преобразовывался в автоматическом режиме в модель, описанную на языке верификатора. На основе этой модели верификатор определял, подходит ли она хотя бы одной из множества заданных спецификаций, соответствующих семействам ВПО. Для сокращения записи спецификаций авторами была введена логика CTPL (Computation Tree Predicate Logic), являющаяся расширением известной логики CTL.

Достоинство предложенного подхода — возможность обнаружения целых семейств вредоносных программ. Недостатком является то, что он не учитывает работу исследуемой программы со стеком, а также необходимость ручного составления спецификации поведения для каждого класса ВПО.

В 2012 году Fu Song и Taoussir Touili предложили использовать метод «Model checking» для обнаружения ВПО с учетом его поведения, включая работу со стеком [4]. Для описания модели поведения вредоносных программ авторами была введена логика SCTPL (Stack CTPL), позволяющая учитывать работу со стеком. Применение данного подхода позволило существенно повысить точность обнаружения вредоносных программ. В результате развития данного подхода авторами была предложена логика SLTPL (Stack Linear TPL) [5].

Суть метода, предлагаемого авторами настоящей статьи, заключается в извлечении информации о поведении исследуемой программы как на этапе хранения, так и на этапе исполнения. Полученная информация сравнивается со спецификацией поведения в соответствии с заданными функциональными требованиями. В случае их соответствия исследуемая программа признается безопасной.

Для реализации предложенного подхода на практике необходимо решение следующих частных задач:

- анализ (извлечение и преобразование информации из исследуемой программы в вид, пригодный для дальнейшей обработки — спецификации);
- синтез (построение модели безопасного исполнения программного кода в соответствии с заданными функциональными требованиями);
- верификация (алгоритм, получающий на вход спецификацию анализируемой программы и принимающий решение о ее соответствии модели безопасного исполнения программного кода);

– контроль исполнения (реализация монитора исполнения программы, позволяющего перехватывать все сигналы взаимодействия процесса с ОС, отслеживать соответствие состояния программы заданной конфигурации и завершить целевую программу в случае необходимости).

Предлагаемые подходы к решению обозначенных выше частных задач рассмотрены в следующем разделе.

**3. Функциональная модель системы безопасного исполнения программного кода.** Для решения задачи обнаружения ВПО предлагается реализовать индикаторную функцию  $F$  (выражение 1) в виде системы безопасного исполнения программного кода, функциональная схема которой представлена на рисунке 2.



Рис. 2. Функциональная модель системы безопасного исполнения программного кода

На вход блока 1 подается исследуемый исполняемый файл, безопасность использования которого необходимо установить. В данном блоке происходит проверка на наличие в коде программы конструкций самомодификации (включая упаковщики) и механизмов защиты кода программы от анализа. Выполнение этих требований является необходимым условием для дальнейшего исследования исполняемого файла.

В случае их нарушения файл признается небезопасным и его дальнейшая проверка прекращается. Далее происходит преобразование исполняемого файла из бинарного представления в последовательность ассемблерных команд и данных, на их основе строятся графы потока управления (Control Flow Graph) и графы потока данных (Data Flow Graph). Также на этом этапе осуществляется сбор и систематизация априорных сведений о функциональном предназначении программы, которые подаются на вход блока 2.

В блоке «Задание спецификации» на основе априорных сведений о функциональном предназначении программы формируется перечень ограничений на ее функциональные возможности, выполнение которых необходимо для безопасного использования программы. Данный перечень включает в себя функциональные требования, выполнение которых может быть обеспечено в рамках работы системы безопасного исполнения программного кода. Они могут быть разделены на группы в зависимости от категории исследуемой программы. Выходом данного блока являются формализованные функциональные ограничения на работу программы в виде формулы темпоральной логики и конфигурации автомата безопасности.

В блоке 3 осуществляется процесс формальной верификации модели исполняемого файла, построенной на основе графов потоков управления и данных, на соответствие функциональным требованиям статического этапа проверки с помощью метода «Model checking». Требования по корректности безопасного поведения при этом описываются в виде спецификации, которая отражает рамки разрешенного поведения программы. В связи с тем, что происходит именно математическая верификация, решение о согласованности, то есть соответствии возможного поведения требуемому является корректным. Алгоритмы проверки моделей, как правило, базируются на исчерпывающей достижимости всего множества состояний модели [21]. Таким образом, для каждого состояния проверяется, удовлетворяет ли оно заданным в спецификации требованиям и свойствам программы.

В самой простой форме алгоритмы проверки моделей позволяют дать ответ на вопрос о достижимости заданных состояний. В таком случае необходимо определить все запрещенные состояния, достижение которых является небезопасным, и выяснить, существует ли такая последовательность их смены, которая приводит к одному из запрещенных. Если такая последовательность существует, то принимается решение о запрете использования исследуемой программы. Стоит отметить, что исчерпывающая достижимость множества состояний гарантируется ввиду конечности состояний модели [22]. В случае согласованности модели программы и спецификации безопасности ис-

полняемый файл признается небезопасным, и дальнейшее исследование прекращается. Выходом данного блока является решение о безопасности использования данной программы по результатам верификации на статическом этапе проверки.

Для контроля над выполнением функциональных ограничений во время работы программы предлагается использование системы, схожей с системой предотвращения вторжений на уровне компьютера (host-based intrusion detection system). Структура предлагаемой системы представлена на рисунке 3.

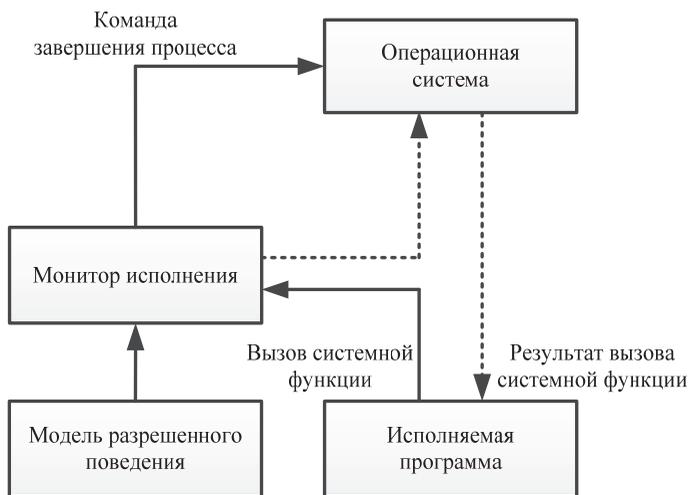


Рис. 3. Структура системы мониторинга исполнения

Монитор исполнения запускается параллельно с исполняемой программой и перехватывает все совершаемые ею системные вызовы. Изначально монитор исполнения загружает модель разрешенного поведения и устанавливает начальное состояние. Каждый вызов системной функции сопоставляется с моделью разрешенного поведения, и происходит переход в новое состояние или, в случае отсутствия такого перехода, подается команда на завершение процесса. В основу монитора исполнения положен автомат безопасности (Security Automata) [8], который строится, как правило, на основе автомата со стеком, определяемого следующим выражением:

$$SA = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F),$$

где  $Q$  — множество состояний;  $\Sigma$  — входной алфавит, включая «пустой» входной символ  $\epsilon$ ;  $\Gamma$  — алфавит стека;  $\delta$  — функция перехода;

$q_0 \in Q$  — начальное состояние автомата;  $z_0 \in \Gamma$  — начальное состояние стека (стартовый символ);  $F \supseteq Q$  — множество конечных состояний.

Таким образом, входными символами автомата  $SA$  является множество событий функционирования процесса. Конфигурация автомата  $SA$  определяет множество разрешенных операций в любом состоянии.

В блоке 4 происходит преобразование функциональных требований к программе в конфигурацию конечного автомата со стеком. В блоке 5 производится непрерывный мониторинг за исполнением программы в рамках заданной модели безопасного исполнения. Выходом данного блока является решение о безопасном выполнении исполняемого файла на динамическом этапе проверки.

Для построения формальной модели функционирования процесса в ОС с учетом перечисленных требований необходимо рассмотреть порядок функционирования процесса в ОС. К разрабатываемой модели предъявляются следующие требования [23]:

- целенаправленность (модель должна обеспечивать выделение значимых свойств процесса, взаимодействующего с ОС и ее ресурсами, с учетом момента совершения операций и их критичности, достаточных для построения модели безопасного исполнения программного кода);

- адекватность (модель должна точно отображать свойства исследуемого объекта, а именно функционирование процесса в ОС);

- универсальность (модель должна позволять описывать функционирование любого процесса в большинстве мультипрограммных ОС общего назначения);

- адаптивность (модель должна позволять расширять возможности описания функционирования процесса в ОС с учетом его особенностей);

- интегрируемость (форма описания модели должна позволять преобразования в синтаксис описания спецификации верификатора, конфигурацию автомата безопасности и обратно).

Для построения формальной модели функционирования процесса в ОС с учетом перечисленных требований необходимо рассмотреть порядок взаимодействия процесса с ОС и ее ресурсами.

#### **4. Формальная модель функционирования процесса в ОС.**

Операционная система является необходимой частью любого вычислительного устройства общего назначения. Она представляет собой интерфейс взаимодействия между пользователем, прикладными программами и аппаратным обеспечением. Большинство прикладных программ не имеют прямого доступа к аппаратному обеспечению вычислительного устройства, а взаимодействуют с ним только через обращения к ОС. Взаимодействие пользователей с программами также

осуществляется только через интерфейсы ОС, передающей воздействие пользователей на устройства ввода и отображающей отклик на устройствах вывода.

Базовыми понятиями при рассмотрении работы ОС являются процесс и ресурс. Согласно [24], процесс — это контейнер для набора ресурсов, используемых при выполнении экземпляра программы. К основным видам ресурсов ОС относятся следующие элементы [25]:

- процессорное время;
- оперативная память;
- внешняя память;
- устройства ввода-вывода.

В основе построения предложенной модели функционирования процесса лежит принцип разделения всех взаимодействующих элементов ОС на субъекты и объекты. К субъектам относятся процессы, совершающие действия по отношению к объектам. Объектами являются ресурсы ОС и процессы, в отношении которых совершаются действия другими субъектами:

- «процесс» (P);
- «оперативная память» (M);
- «внешняя память» (E);
- «периферийные устройства» (D);
- «сетевая подсистема» (N).

Для осуществления доступа к ресурсу процесс выполняет соответствующую функцию ОС, то есть подает заявку на выполнение некоторых действий. ОС на основе внутренних механизмов распределения ресурсов, а также на основе политики безопасности принимает решение о доступе исполняемого кода данного процесса к запрашиваемому ресурсу.

Прикладные программы в процессе работы обладают полным доступом к своему виртуальному адресному пространству для выполнения операций чтения и записи. Для ввода или вывода данных за пределы своего адресного пространства прикладной программе необходимо вызывать соответствующие функции ОС, если она имеет соответствующие привилегии для осуществления таких операций. К таким функциям ОС можно отнести операции чтения, записи, запуск или завершение процесса, выделение дополнительной области памяти, ее освобождение и др.

*Определение 1.* Под описанием процесса в ОС  $S_i$  будем понимать последовательность действий  $\{S_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , выполняемых субъектом  $p_i^{k_p}$ . Каждое действие описывается тройкой элементов:

$$s_i = \langle p_i^{k_p}; a_o; o_y^{k_o} \rangle, \quad (2)$$

где  $p_i^{k_p}$  — субъект категории  $k_p$  с идентификатором  $i$ ;  $a_o \in A_o$  — некоторое действие субъекта по отношению к объекту;  $o_y^{k_o}$  — некоторый объект категории  $k_o$  с идентификатором  $y$ .

Операторное представление выражения (2) имеет следующий вид:

$$s_i = p_i^{k_p} \xrightarrow{a_o} o_y^{k_o}.$$

При выполнении процессом некоторого действия большое значение имеет его категория, так как она определяет возможность совершения им привилегированных операций по отношению к объектам различных категорий.

Важно отметить, что прикладная интерпретация каждой операции зависит от объекта, к которому она применяется и его категории (таблица 1).

Таблица 1. Возможные операции в рамках модели

Обозначение	Наименование операции	Описание
<i>c</i>	<i>create</i>	Создание в общем виде нового экземпляра объекта определенной категории.
<i>o</i>	<i>open</i>	Получение в общем виде сведений об экземпляре объекта определенной категории.
<i>d</i>	<i>delete</i>	Удаление экземпляра объекта определенной категории.
<i>r</i>	<i>read</i>	Чтение информации из экземпляра объекта определенной категории.
<i>w</i>	<i>write</i>	Запись информации в экземпляр объекта определенной категории.

В таблице 2 указаны категории субъектов и объектов представленной модели.

Таблица 2. Категории объектов и субъектов в рамках модели

Обозначение	Описание
Категории субъекта «Процесс»	
$P^1$	системный процесс
$P^2$	привилегированный процесс
$P^3$	пользовательский процесс
Категории объекта «Оперативная память»	
$M^1$	адресное пространство системного процесса
$M^2$	адресное пространство другого процесса
$M^3$	собственное адресное пространство процесса
Категории объекта «Внешняя память»	
$E^1$	исполняемые файлы
$E^2$	системные каталоги и конфигурация системы
$E^3$	конфигурация пользовательского окружения
$E^4$	файлы и каталоги других пользователей
$E^5$	собственные файлы и каталоги
Категории объекта «Периферийные устройства»	
$D^1$	устройства вывода
$D^2$	устройства ввода
Категории объекта «Сетевая подсистема»	
$N^1$	сервисы узлов глобальной сети
$N^2$	сервисы узлов локальной сети
$N^3$	локальные сетевые сервисы

Схематичное представление модели функционирования процесса в ОС изображено на рисунке 4.

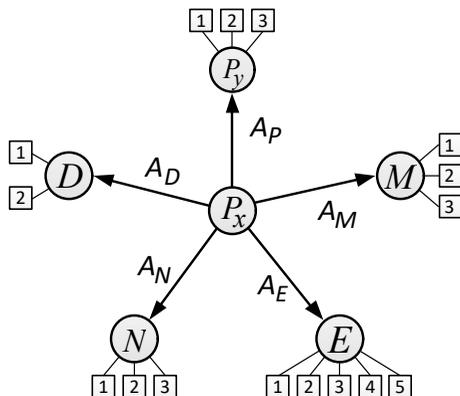


Рис. 4. Модель взаимодействия процесса с ресурсами ОС

В общем виде каждое действие субъекта можно описать набором параметров. Важным отличием при этом от аналогичных моделей является учет параметров осуществляемых действий.

**5. Применение модели функционирования процесса в ОС для описания модели безопасного исполнения программного кода.** Модель безопасного исполнения программного кода строится на основе аксиом безопасного исполнения программного кода.

*Определение 2.* Под аксиомой безопасного исполнения программного кода  $AX$  будем понимать описание параметров разрешенных действий  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Q}}$  для процесса  $p_1^{kp}$  во время его функционирования  $S_i$ , позволяющее исключить потенциальную возможность выполнения программой вредоносных действий:

$$AX_j = \bigcup_k s_k, k \in \mathbb{Q}_j,$$

где  $\mathbb{Q}_j$  — множество индексов безопасных действий для процесса  $p_1^{kp}$  при заданных функциональных требованиях  $FR_j$ .

Пример задания аксиомы «Запрет на создание пользовательским процессом привилегированного или системного процесса» представлен в следующем выражении:

$$AX_j = \neg EF \left[ p^3 \xrightarrow{c} p^2 \right] \vee \neg EF \left[ p^3 \xrightarrow{c} p^1 \right]$$

*Определение 3.* Моделью безопасного исполнения программного кода  $SM$  будем называть совокупность аксиом безопасного исполнения программного кода  $AX_j$  для процесса  $p_1^{kp}$  при заданных функциональных требованиях  $FR$ :

$$SM = \bigcup_{j \in M} AX_j |_{FR = \bigcup_{j \in M} FR_j},$$

где  $M$  — множество индексов аксиом безопасного исполнения программного кода, выбранных с учетом функциональных требований.

Главным достоинством описываемой модели функционирования процесса в ОС является возможность описания функционирования процесса на высоком уровне абстракции (без конкретизации выполняемых операций), что позволяет применять полученные на ее основе выводы к широкому классу операционных систем такой же архитектуры.

Представленная модель может быть использована для решения двух взаимосвязанных задач анализа и синтеза при моделировании функционирования процесса в ОС.

Применительно к задаче анализа она позволяет построить модель функционирования процесса в ОС путем наблюдения за его поведением или исследованием бинарного исполняемого файла. В этом случае после моделирования будет получена последовательность событий, порожденных процессом, или граф потока управления. Данные сведения позволяют определить характерные свойства программы и могут быть использованы для оценки потенциальной опасности, которую может принести ее использование.

Применительно к задаче синтеза она позволяет построить модель функционирования процесса в ОС с заранее заданными свойствами, то есть описать такую модель функционирования процесса в ОС, которая соответствует определенному классу безопасности.

**6. Заключение.** В результате проделанной работы разработана формальная модель функционирования процесса в ОС, позволяющая описать поведение процесса без конкретизации операций или элементарных действий (на высоком уровне абстракции), что позволяет в обобщенной математической форме выразить субъектно-объектные отношения процессов с ресурсами ОС различных категорий.

Рассматриваемая модель может быть использована для описания функциональных ограничений на исполнение программы с использованием операторов темпоральной логики, что позволит выразить их в единой форме в независимости от способа доказательства их выполнения как на статическом, так и на динамическом этапе анализа.

Предложена система безопасного исполнения программного кода, построенная с использованием данной модели, которая позволяет осуществить проверку выполнения функциональных требований. Результатом данной проверки является решение о соответствии исследуемой программы заявленным функциональным ограничениям или принятие решения о запрете ее использования в КИВС.

Направлением дальнейших исследований является построение аксиом безопасного исполнения программного кода с использованием формальной модели функционирования процесса в ОС, практическая реализация системы безопасного исполнения программного кода и экспериментальная проверка качества предложенных решений при решении задачи обнаружения ВПО.

### Литература

1. *Kromholz K., Hobel H., Huber M., Weippl E.* Advanced social engineering attacks // *Journal of Information Security and Applications*. 2015. vol. 22. pp. 113–122.
2. *Бекбосынова А.А.* Тестирование и анализ эффективности и производительности антивирусов // *Теория и практика современной науки*. 2015. № 5(5). С. 53–56.

3. *Kinder J. et al.* Detecting malicious code by model checking // International Conference on Detection of Intrusions and Malware, and Vulnerability Assessment. Springer Berlin Heidelberg, 2005. pp. 174–187.
4. *Song F., Touili T.* Efficient malware detection using model-checking // International Symposium on Formal Methods. Springer Berlin Heidelberg, 2012. pp. 418–433.
5. *Song F., Touili T.* PoMMaDe: pushdown model-checking for malware detection // Proceedings of the 2013 9th Joint Meeting on Foundations of Software Engineering. ACM, 2013. pp. 607–610.
6. *Jasiul B., Szyrka M., Śliwa J.* Formal Specification of Malware Models in the Form of Colored Petri Nets // Computer Science and its Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2015. pp. 475–482.
7. *Козачок А.В., Кочетков Е.В.* Обоснование возможности применения верификации программ для обнаружения вредоносного кода // Вопросы кибербезопасности. 2016. № 3(16). С. 25–32.
8. *Schneider F.B.* Enforceable security policies // ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC). 2000. vol. 3. no. 1. pp. 30–50.
9. *Feng H.H. et al.* Formalizing sensitivity in static analysis for intrusion detection // Security and Privacy. Proceedings. 2004 IEEE Symposium on. IEEE, 2004. pp. 194–208.
10. *Basin D. et al.* Enforceable security policies revisited // ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC). 2013. vol. 16. no. 1. pp. 3.
11. *Feng H.H. et al.* Anomaly detection using call stack information // Security and Privacy. Proceedings. 2003 Symposium on. IEEE, 2003. pp. 62–75.
12. *Basin D., Klaedtke F., Zălinescu E.* Algorithms for monitoring real-time properties // International Conference on Runtime Verification. Springer Berlin Heidelberg, 2011. pp. 260–275.
13. *Anderson B. et al.* Graph-based malware detection using dynamic analysis // Journal in computer Virology. 2011. vol. 7. no. 4. pp. 247–258.
14. *Devesa J. et al.* Automatic Behaviour-based Analysis and Classification System for Malware Detection // ICEIS. 2010. vol. 2. pp. 395–399.
15. *Козачок А.В., Бочков М.В., Фаткиева Р.Р., Туан Л.М.* Аналитическая модель защиты файлов документальных форматов от несанкционированного доступа // Труды СПИИРАН. 2015. Вып. 6(43). С. 228–252.
16. *Zhang B. et al.* Malicious codes detection based on ensemble learning // International Conference on Autonomic and Trusted Computing. Springer Berlin Heidelberg, 2007. pp. 468–477.
17. *Козачок А.В., Туан Л.М.* Обоснование возможности применения неразличимой обфускации для защиты исполняемых файлов // В сборнике: Перспективные информационные технологии (ПИТ 2015) труды Международной научно-технической конференции. СГАУ. 2015. С. 269–272.
18. *Preda M.D. et al.* A semantics-based approach to malware detection // ACM SIGPLAN Notices. 2007. vol. 42. no. 1. pp. 377–388.
19. *Козачок А.В., Мацкевич А.Г.* Модификация структурного метода распознавания вирусов // Информация и безопасность. 2010. Т. 13. С. 33.
20. *Jacob G., Debar H., Filiol E.* Behavioral detection of malware: from a survey towards an established taxonomy // Journal in computer Virology. 2008. vol. 4. no. 3. pp. 251–266.
21. *Кларк Э., Грамберг О., Пелед Д.* Верификация моделей программ: Model Checking // М.: МЦНМО. 2002.
22. *Вельдер С.Э., Лукин М.А., Шальто А.А., Яминов Б.Р.* Верификация автоматных программ // СПб. Наука. 2011. 244 с.
23. *Рябов О.А.* Моделирование процессов и систем: учебное пособие // Красноярск. 2008. 122 с.

24. *Руссинович М., Соломон Д.* Внутреннее устройство Microsoft Windows. 6-е изд. // СПб.: Питер. 2013. 800 с.
25. *Гордеев А.В.* Операционные системы: по направлению подгот. «Информатика и вычисл. техника» // Издательский дом «Питер». 2009.
26. *Бабенко Л.К., Буртыка Ф.Б., Макаревич О.Б., Трепачева А.В.* Обобщенная модель системы криптографически защищенных вычислений // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 5(166). С. 77–86.

**Козачок Александр Васильевич** — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: информационная безопасность, защита от несанкционированного доступа, математическая криптография, теоретические проблемы информатики. Число научных публикаций — 80 alex.totrin@gmail.com; Приборостроительная, 35, Орёл, 302034; р.т.: +7(486) 254-99-33.

**Кочетков Евгений Викторович** — сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: информационная безопасность, защита от несанкционированного доступа, защита от вредоносных программ, теоретические проблемы информатики. Число научных публикаций — 10. alex.totrin@gmail.com. 302034, Орёл, ул. Приборостроительная, 35. р.т. +7(486) 254-99-33.

A.V. KOZACHOK, E.V. KOCHETKOV  
**FORMAL MODEL OF PROCESS FUNCTIONING IN THE  
 OPERATING SYSTEM**

---

*Kozachok A.V., Kochetkov E.V. Formal Model of Process Functioning in the Operating System.*

**Abstract.** The article presents a formal model of the functioning of the process in the operating system, created on the basis of a subject-object approach to the separation of the main elements of the operating system. A feature of the presented model is a high-level abstraction of the interaction between the operating system processes and resources, which allows applying the obtained results to a wide range of similar systems. The use of this model is necessary for carrying out the transition from the real world object (process) to a formal model to take into account the significant properties of the behavior of the process both during the static analysis phase of a binary executable file and the dynamic phase of monitoring its implementation. The system of safe execution of code is an extension of the composition of such approaches to the detection of malicious software as the application of the formal verification method «Model checking» and the use of machine safety to monitor the implementation of the studied program. This system allows using in corporate information and computer networks only such software, reliability of which is confirmed by a formal mathematical proof and continuous monitoring of its execution.

**Keywords:** formal model of process, model checking, malware.

---

**Kozachok Alexander Vasilevich** — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: information security, unauthorized access protection, mathematical cryptography, theoretical problems of computer science. The number of publications — 80. alex.totrin@gmail.com; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(486) 254-99-33.

**Kochetkov Evgeniy Victorovich** — researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: information security, unauthorized access protection, malware detection, theoretical problems of computer science. The number of publications — 10. alex.totrin@gmail.com; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(486) 254-99-33.

### References

1. Kromholz K., Hobel H., Huber M., Weippl E. Advanced social engineering attacks. *Journal of Information Security and Applications*. 2015. vol. 22. pp. 113–122.
2. Bekbosynova A.A. [Testing and analysis of the effectiveness and efficiency of antivirus]. *Teorija i praktika sovremennoj nauki – The theory and practice of modern science*. 2015. vol. 5(5). pp. 53–56. (In Russ).
3. Kinder J. et al. Detecting malicious code by model checking. *International Conference on Detection of Intrusions and Malware, and Vulnerability Assessment*. Springer Berlin Heidelberg. 2005. pp. 174–187.
4. Song F., Touili T. Efficient malware detection using model-checking. *International Symposium on Formal Methods*. Springer Berlin Heidelberg. 2012. pp. 418–433.
5. Song F., Touili T. PoMMaDe: pushdown model-checking for malware detection. *Proceedings of the 2013 9th Joint Meeting on Foundations of Software Engineering*. ACM. 2013. pp. 607–610.

6. Jasiul B., Szpyrka M., Śliwa J. Formal Specification of Malware Models in the Form of Colored Petri Nets. *Computer Science and its Applications*. Springer Berlin Heidelberg. 2015. pp. 475–482.
7. Kozachok A.V., Kochetkov E.V. [Using program verification for detecting malware] *Voprosy kiberbezopasnosti – Cybersecurity issues*. 2016. vol. 3(16). pp. 25–32. (In Russ.).
8. Schneider F.B. Enforceable security policies. *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)*. 2000. vol. 3 .no. 1. pp. 30–50.
9. Feng H.H. et al. Formalizing sensitivity in static analysis for intrusion detection. *Security and Privacy. Proceedings. 2004 IEEE Symposium on*. IEEE. 2004. pp. 194–208.
10. Basin D. et al. Enforceable security policies revisited. *ACM Transactions on Information and System Security (TISSEC)*. 2013. vol. 16. no. 1. pp. 3.
11. Feng H.H. et al. Anomaly detection using call stack information. *Security and Privacy. Proceedings. 2003 Symposium on IEEE*. 2003. pp. 62–75.
12. Basin D., Klaedtke F., Zălinescu E. Algorithms for monitoring real-time properties. *International Conference on Runtime Verification*. Springer Berlin Heidelberg. 2011. pp. 260–275.
13. Anderson B. et al. Graph-based malware detection using dynamic analysis. *Journal in computer Virology*. 2011. vol. 7. no. 4. pp. 247–258.
14. Devesa J. et al. Automatic Behaviour-based Analysis and Classification System for Malware Detection. *ICEIS*. 2010. vol. 2. pp. 395–399.
15. Kozachok A.V., Bochkov M.V., Fatkueva R.R., Tuan L.M. [Analytical Model for Protecting Documentary File Formats from Unauthorized Access]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2015. vol. 6(43). pp. 228–252. (In Russ.).
16. Zhang B. et al. Malicious codes detection based on ensemble learning. *International Conference on Autonomic and Trusted Computing*. Springer Berlin Heidelberg. 2007. pp. 468–477.
17. Kozachok A.V., Tuan L.M. [Rationale for the possibility of using an indiscernible obfuscation to protect executable files]. *Perspektivnye informacionnye tehnologii – Perspective information technologies (PIT 2015) trudy Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii. SGAU [Advanced Information Technologies and Scientific Computing]*. 2015. pp. 269–272. (In Russ.).
18. Preda M.D. et al. A semantics-based approach to malware detection. *ACM SIGPLAN Notices*. 2007. vol. 42. no. 1. pp. 377–388.
19. Kozachok A.V., Mackevich A.G. [Modification of the structural method of recognition of viruses]. *Informacija i bezopasnost' – Information and security*. 2010. vol. 13. pp. 33. (In Russ.).
20. Jacob G., Debar H., Filiol E. Behavioral detection of malware: from a survey towards an established taxonomy. *Journal in computer Virology*. 2008. vol. 4. no. 3. pp. 251–266.
21. Klark Je., Gramberg O., Peled D. *Verifikacija modelej programm: Model Checking [Verification programs models: Model Checking]*. M.: MCNMO. 2002. 416 p. (In Russ.).
22. Vef'der S.Je., Lukin M.A., Shalyto A.A., Jaminov B.R. *Verifikacija avtomatnyh programm [Verification of the automatic programs]*. Spb. Nauka. 2011. 244 p. (In Russ.).
23. Rjabov O.A. *Modelirovanie processov i system: uchebnoe posobie [Modelling of processes and systems: tutorial]*. Krasnojarsk. 2008. 122 p. (In Russ.).
24. Russinovich M., Solomon D. *Vnutrennee ustrojstvo Microsoft Windows. 6-e izd. [Internal Microsoft Windows device. 6th ed.]* SPb.: Piter. 2013. 800 p. (In Russ.).
25. Gordeev A.V. *Operacionnye sistemy [Operating Systems]*. Izdatel'skij dom «Piter». 2009. 412 p. (In Russ.).
26. Babenko L.K., Burtyka F.B., Makarevich O.B., Trepacheva A.V. [A general model of cryptographically secure computing system]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering sciences*. 2015. vol. 5(166). pp. 77–86. (In Russ.).

М.В. ГОФМАН  
**МЕТОДИКА СКРЫТОЙ ПЕРЕДАЧИ ДАННЫХ ПРИ СВЯЗИ  
ЧЕРЕЗ ВОЗДУШНЫЙ АУДИОКАНАЛ**

---

*Гофман М.В. Методика скрытой передачи данных при связи через воздушный аудиоканал.*

**Аннотация.** В этой статье предлагается методика скрытой передачи информации в слышимой области частотного спектра воздушной среды, а именно — построения, внедрения, выделения и восстановления скрываемого сигнала, когда передача осуществляется через воздушный аудиоканал. Скрываемый сигнал состоит из двух частей. Одна часть используется для синхронизации, а другая часть — информационная. В основе синхронизационной части лежит последовательность Касами, тогда как в основе информационной — кодовое слово кода БЧХ. Обе части скрываемого сигнала получают путем специального кодирования своих двоичных элементов. При выполнении этого кодирования используются последовательности Голда и RZ коды. В качестве скрывающего или несущего сигнала используется аудиосигнал, который может представлять собой как речь, так и музыку. Построение стегоаудиосигнала выполняется путем внедрения скрываемого сигнала в частотную область скрывающего сигнала. Внедрение представляет собой амплитудную модуляцию отдельных спектральных составляющих скрывающего сигнала. В статье аналитически рассматривается вопрос возможности восстановления скрываемого сигнала, после передачи стегоаудиосигнала через воздушный аудиоканал. Статья снабжена результатами имитационного моделирования и натурных экспериментов передачи стегоаудиосигнала через воздушный аудиоканал.

**Ключевые слова:** аудиосигнал, стеганография, воздушный аудиоканал, воздушный зазор, последовательность Касами, последовательность Голда, БЧХ код, RZ код.

---

**1. Введение.** Компьютеры, которым требуется обеспечить повышенную безопасность, обычно изолируют. Множество видов изоляции объединяют под таким понятием, как «воздушный зазор» (air-gap). Скрытая передача информации через воздушный зазор всегда привлекает к себе внимание исследователей. Классификацию методов сокрытия информации можно найти в статье [1].

Если компьютер, находящийся за воздушным зазором, оснащен динамиком и микрофоном, то их в принципе возможно использовать в качестве средств для скрытой передачи информации. Так, рядом расположенные мобильные телефоны и ноутбуки можно объединить в беспроводную скрытую сеть утечки информации (mesh networks) [2]; чтобы окружающие люди не слышали саму передачу, пока что для таких сетей требуется использовать динамики и микрофоны, способные работать на частотах, близких к ультразвуку, что, конечно, ограничивает круг устройств весьма дорогостоящими.

Вообще задача использования аудиосигналов в качестве «контейнеров» для скрытой передачи дополнительной информации, обычно называемой цифровым водяным знаком, привлекает к себе большое внимание [3, 4, 5, 6, 7]. Есть методики передачи стегоаудиосигналов через радиоканалы и проводные каналы [8]. Однако передача стегоаудиосигналов через воздушный аудиоканал или, иными словами, через слышимый частотный спектр воздушной среды требует разработки и использования таких методик построения сигналов и их внедрения в несущий аудиосигнал, которые были бы устойчивы к воздействию окружающей среды.

В этой статье предлагается методика внедрения информации в аудиосигнал и восстановления внедренной информации после передачи стегоаудиосигнала через воздушный аудиоканал, позволяющая выполнять скрытую передачу данных через такой канал. Особенностью предлагаемой методики внедрения информации в аудиосигнал является то, что информация не будет воспринята человеческим ухом в процессе передачи такого стегоаудиосигнала, тогда как само внедрение информации может быть выполнено в любую частотную область слышимого диапазона. При этом восстановление внедренной информации из принятого стегоаудиосигнала возможно даже при незнании приемником аудиосигнала, в который производилось встраивание.

**2. Методика построения, внедрения, выделения и восстановления скрытого сигнала.** В предлагаемой методике выполняется построение сигнала, состоящего из двух частей, каждая из которых выполняет свою функцию. Одна используется для установления синхронизации; в ее основе лежит последовательность Касами (Kasami) [9]. Другая часть защищает передаваемую информацию от ошибок; для этого используется код, исправляющий ошибки. При этом элементы этих частей получаются в результате преобразования, в основе которого лежат последовательности Голда (Gold) и RZ коды [8].

Далее, для удобства описания предлагаемой методики как подхода для передачи информации используется терминология и понятия систем передачи данных. Так, кодер и декодер канала используются для построения и восстановления дополнительной информации. Тогда как модулятор и демодулятор используются для

процедур внедрения дополнительной информации в аудиосигнал и выделения ее из принятого сигнала соответственно.

**2.1. Передающая сторона.** В кодер канала поступает информационная последовательность:

$$\mathbf{x} = (x(1) \ x(2) \ \dots \ x(N_x)),$$

где  $x(i) \in \{0,1\}$ . Кодер канала преобразует информационную последовательность в кодовое слово  $(N_c, N_x)$  БЧХ кода [10, 11]:

$$\mathbf{c}_{\text{БЧХ}} = (c_{\text{БЧХ}}(1) \ c_{\text{БЧХ}}(2) \ \dots \ c_{\text{БЧХ}}(N_c)),$$

где  $c_{\text{БЧХ}}(i) \in \{0,1\}$ ; количество исправляемых кодом ошибок обозначим символом  $N_t$ . Кодер канала, используя вектор  $\mathbf{c}_{\text{БЧХ}}$ , строит кодовое слово следующего вида:

$$\mathbf{y} = (y(1) \ y(2) \ \dots \ y(N_y)) = (\mathbf{y}_{\text{сх}} \ \mathbf{y}_{\text{иф}}),$$

которое можно разделить на две части: часть  $\mathbf{y}_{\text{сх}}$ , используемую для установления синхронизации, и часть  $\mathbf{y}_{\text{иф}}$ , которая кодирует вектор  $\mathbf{c}_{\text{БЧХ}}$ . Каждая из этих частей представляет собой вектор, элементы которого — числа из множества  $\{-1,1\}$ .

Синхронизационная часть  $\mathbf{y}_{\text{сх}}$  получается в результате кодирования последовательностями Голда элементов последовательности Касами с последующим кодированием RZ кодом. Так, вектор:

$$\mathbf{y}_{\text{сх}} = (y_{\text{сх}}(1) \ y_{\text{сх}}(2) \ \dots \ y_{\text{сх}}(N_K N_\Gamma N_{\text{RZ}})),$$

где  $N_K$  — это длина используемой последовательности Касами,  $N_\Gamma$  — длина используемых последовательностей Голда, а  $N_{\text{RZ}}$  — длина кодовых слов используемого RZ кода. Пусть задана последовательность Касами:

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta(1) \ \beta(2) \ \dots \ \beta(N_K)),$$

где  $\beta(i) \in \{-1, 1\}$ ; заданы последовательности Голда:

$$\mathbf{g}_1 = (g(1,1) \quad g(1,2) \quad \dots \quad g(1, N_\Gamma)),$$

$$\mathbf{g}_2 = (g(2,1) \quad g(2,2) \quad \dots \quad g(2, N_\Gamma)),$$

где  $g(i, j) \in \{-1, 1\}$ ; а также, пусть, задан RZ код из 2-х кодовых слов:

$$\mathbf{c}_{RZ}(1) = (c_{RZ}(1,1) \quad c_{RZ}(1,2) \quad \dots \quad c_{RZ}(1, N_{RZ})),$$

$$\mathbf{c}_{RZ}(2) = (c_{RZ}(2,1) \quad c_{RZ}(2,2) \quad \dots \quad c_{RZ}(2, N_{RZ})),$$

где  $N_{RZ}$  — четное число,

$$c_{RZ}(1,1) = c_{RZ}(1,2) = \dots = c_{RZ}\left(1, \frac{N_{RZ}}{2}\right) = -1,$$

$$c_{RZ}\left(1, \frac{N_{RZ}}{2} + 1\right) = c_{RZ}\left(1, \frac{N_{RZ}}{2} + 2\right) = \dots = c_{RZ}(1, N_{RZ}) = 1,$$

$$c_{RZ}(2, j) = (-1) \cdot c_{RZ}(1, j).$$

В этом случае, если -1 кодируется вектором  $\mathbf{g}_1$ , а 1 кодируется  $\mathbf{g}_2$ , то элементы синхронизационной части удовлетворяют следующему равенству:

$$y_{cx}(N_\Gamma N_{RZ}(i-1) + N_{RZ}(j-1) + k) = c_{RZ}\left(\frac{g\left(\frac{\beta(i)+1}{2} + 1, j\right) + 1}{2} + 1, k\right),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, N_\Gamma\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_\Gamma\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_{RZ}\}$ . Таким образом, вначале элементы последовательности Касами подвергаются кодированию последовательностями Голда, элементы которых, в свою очередь, подвергаются кодированию RZ кодом.

Информационная часть:

$$\mathbf{y}_{иф} = (y_{иф}(1) \quad y_{иф}(2) \quad \dots \quad y_{иф}(N_c N_\Gamma N_{RZ}))$$

получается таким же образом, как и синхронизационная часть, но путем кодирования элементов вектора  $c_{\text{БЧХ}}$ . Так,

$$y_{\text{иф}}(N_{\Gamma}N_{\text{RZ}}(i-1) + N_{\text{RZ}}(j-1) + k) = c_{\text{RZ}}\left(\frac{g(c_{\text{БЧХ}}(i)+1, j)+1}{2} + 1, k\right),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, N_{\text{с}}\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_{\Gamma}\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_{\text{RZ}}\}$ .

По длинам векторов  $y_{\text{сх}}$  и  $y_{\text{иф}}$  видно, что длина итогового вектора  $y$  будет удовлетворять равенству:

$$N_{\text{Y}} = (N_{\text{с}} + N_{\text{к}})N_{\Gamma}N_{\text{RZ}}.$$

Модулятор выполняет встраивание кодового слова  $y$ , далее называемого *скрываемым сигналом*, в частотную область *скрывающего сигнала* путем модификации амплитуд спектральных линий скрывающего сигнала. Пусть скрывающий сигнал представляет собой цифровой аудиосигнал:

$$z = (z(1) \ z(2) \ \dots \ z(k_{\text{Z}}N_{\text{Z}})),$$

где  $z(i)$  — отсчеты цифрового аудиосигнала, принимающие значения из диапазона  $[-1, 1]$ ,  $k_{\text{Z}} = (N_{\text{с}} + N_{\text{к}})N_{\text{RZ}}$ ,  $N_{\text{Z}}$  — четное число, для которого выполняется неравенство  $N_{\text{Z}} \geq 2(N_{\Gamma} + 1)$ .

Смежные блоки элементов вектора  $z$ , длинами  $N_{\text{Z}}$ , подвергаются дискретным преобразованиям Фурье, что в итоге дает вместо вещественного вектора  $z$ , комплексный вектор такой же длины, каждый элемент которого называется спектральной линией. Таким образом  $j$ -я спектральная линия  $i$ -го блока равна комплексному числу:

$$Z(i, j) = \sum_{k=1}^{N_{\text{Z}}} z((i-1)N_{\text{Z}} + k) \exp\left(-\frac{i2\pi(k-1)(j-1)}{N_{\text{Z}}}\right),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_{\text{Z}}\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_{\text{Z}}\}$ ,  $\iota = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Встраивание скрываемого сигнала выполняется путем изменения некоторого подмножества спектральных линий  $Z(i, j)$  с номерами  $j$  из диапазона от 1 до  $N_{\text{Z}}/2$ ; при этом мощность модифицируемого

подмножества равна  $N_\Gamma$ . Так, если  $\{B(i,1), B(i,2), \dots, B(i, N_\Gamma)\}$  — это множество номеров спектральных линий  $i$ -го блока, выбранных для встраивания, при этом  $1 < B(i, k) \leq N_Z / 2$ , а  $\{A(i,1), A(i,2), \dots, A(i, N_\Gamma)\}$  — это множество коэффициентов, определяющих силу встраивания (обычно  $A(i, k) \ll 1$ ), то, обозначив результат модификации спектральной линии  $Z(i, j)$  как  $Z'(i, j)$ , само встраивание выполняется по следующему правилу:

$$Z'(i, j) = \begin{cases} Z(i, B(i, k))(1 + A(i, k)y(m)), & \text{если } j = B(i, k), \\ Z(i, j), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_Z / 2\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_\Gamma\}$ ,  $m$  — номер встраиваемого элемента вектора  $y$ . Значение  $m$  зависит и от номера блока  $i$ , и от числа  $k$  по следующему правилу:

$$m = ((i-1) \bmod N_{RZ}) + 1 + (k-1)N_{RZ} + \left\lceil \frac{i-1}{N_{RZ}} \right\rceil N_{RZ} N_\Gamma,$$

где  $[a]$  — целая часть вещественного числа  $a$ . По правилу зависимости  $m$  от  $i$  и  $k$  видно, что в каждый блок спектральных линий внедряется лишь один элемент каждого кодового слова RZ кода, полученный при кодировании отдельной последовательности Голда. Спектральные линии  $Z(i, j)$  с номерами  $j$  из диапазона от  $(N_Z / 2) + 1$  до  $N_Z$  для сохранения свойства сопряженной симметричности также подвергаются изменениям в соответствии со следующим равенством:

$$Z'(i, j) = \begin{cases} (Z'(i, N_Z - j + 2))^*, & \text{если } j \neq (N_Z / 2) + 1, \\ Z(i, j), & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ,  $j \in \{(N_Z / 2) + 1, (N_Z / 2) + 2, \dots, N_Z\}$ ,  $(a)^*$  — число, комплексно сопряженное числу  $a$ . Выполняя обратное дискретные преобразование Фурье над модифицированными блоками

спектральных линий, будет получен вещественный цифровой аудиосигнал:

$$z' = (z'(1) \ z'(2) \ \dots \ z'(k_Z N_Z)),$$

где

$$z'((i-1)N_Z + k) = \frac{1}{N_Z} \sum_{j=1}^{N_Z} Z'(i, j) \exp\left(\frac{i2\pi(j-1)(k-1)}{N_Z}\right),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_Z\}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Значения элементов вектора  $z'$  в результате встраивания вектора  $y$  могут оказаться вне диапазона  $[-1, 1]$ . Поэтому перед отправкой в канал элементы вектора  $z'$  умножаются на нормирующий коэффициент:

$$\theta = \frac{1}{\max\{|z'(1)|, |z'(2)|, \dots, |z'(k_Z N_Z)|\}},$$

где  $|a|$  — абсолютное значение числа  $a$ .

Так как при построении скрываемого сигнала  $y$  RZ кодирование выполнялось в последнюю очередь, то ясно, что смежные блоки элементов вектора  $y$  длинами  $N_{RZ}$  представляют собой кодовые слова RZ кода. А процесс встраивания приведет к тому, что эти кодовые слова последовательно половинами будут встроены в смежные блоки вектора  $z$ , длинами  $N_Z$ . Выбор величин коэффициентов  $A(i, k)$  можно осуществлять, опираясь на значения сигнал-маска, получаемые при помощи психоакустической модели, приведенной в [12, 13].

**2.2. Принимающая сторона.** Аудиосигнал  $z'$  передается через воздушный аудиоканал. Пусть на выходе канала выполняется дискретизация с частотой  $F_s$ , равной частоте отправки отсчетов сигнала  $z'$  в аудиоканал. Таким образом, на выходе канала получается последовательность отсчетов:

$$r = r(1), r(2), \dots, r(k_Z N_Z), r(k_Z N_Z + 1), \dots$$

Приемник разбивает последовательность  $r$  на перекрывающиеся блоки длиной  $k_Z N_Z$  отсчетов. Для вынесения решения о наличии

скрытого сигнала в некотором блоке или, иными словами, для вынесения решения об установлении синхронизации на некотором блоке приемнику требуется обработать еще  $W-1$  такого же размера блоков справа от исследуемого, то есть требуется сделать еще  $W-1$  шагов. Шаг составляет один отсчет, поэтому смежные блоки перекрываются настолько, что отличаются лишь в одном элементе. Обозначим блок отсчетов, обрабатываемый на некотором шаге  $i_{\text{шаг}} \in \{1, 2, \dots\}$  вектором:

$$\mathbf{r}(i_{\text{шаг}}) = (r(i_{\text{шаг}}) \ r(i_{\text{шаг}} + 1) \ \dots \ r(i_{\text{шаг}} + k_Z N_Z - 1)).$$

Вектор  $\mathbf{r}(i_{\text{шаг}})$  передается в демодулятор. Помимо него в демодулятор поступают множества  $\{B(i, 1), B(i, 2), \dots, B(i, N_\Gamma)\}$  номеров спектральных линий, в которые производилось встраивание скрываемого сигнала передатчиком, для всех  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ . Кроме того, в демодулятор может поступать сам скрывающий сигнал  $\mathbf{z}$ , если известно, что он обычно повышает точность синхронизации и уменьшает вероятность ошибок восстановления символов информационной части. Однако, даже когда скрывающий сигнал  $\mathbf{z}$  неизвестен приемнику, описываемые в этой работе схемы кодирования и декодирования позволяют выделять скрываемый сигнал  $\mathbf{u}$  из принятого сигнала; но следует учитывать, что в таком случае сам скрывающий сигнал станет шумом для приемника и будет влиять на качество восстановления скрытого сигнала.

Демодулятор выполняет действия, некоторые из которых обратны выполненным модулятором. Так, он выполняет дискретные преобразования Фурье над смежными блоками элементов вектора  $\mathbf{r}(i_{\text{шаг}})$ , при этом длина блока также равна  $N_Z$ ; например, первый блок можно описать вектором:

$$(r(i_{\text{шаг}}) \ r(i_{\text{шаг}} + 1) \ \dots \ r(i_{\text{шаг}} + N_Z - 1)), \quad (1)$$

а второй блок — вектором:

$$(r(i_{\text{шаг}} + N_Z) \ r(i_{\text{шаг}} + N_Z + 1) \ \dots \ r(i_{\text{шаг}} + 2N_Z - 1)), \quad (2)$$

и так далее. В результате этих преобразований каждый блок преобразуется в такой же размерности комплексный вектор — вектор спектральных линий. Обозначим  $j$ -ю спектральную линию  $i$ -го блока через:

$$R(i, j, i_{\text{шаг}}) = \sum_{k=0}^{N_Z-1} r(i_{\text{шаг}} + (i-1)N_Z + k) \exp\left(-\frac{i2\pi k(j-1)}{N_Z}\right),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, N_Z\}$ ,  $i = \sqrt{-1}$  — мнимая единица.

Далее вычисляется натуральный логарифм от абсолютных значений тех спектральных линий  $R(i, j, i_{\text{шаг}})$ , номера которых входят в соответствующее множество  $\{B(i, 1), B(i, 2), \dots, B(i, N_\Gamma)\}$ . Если предположить, что  $r(i_{\text{шаг}})$  представляет собой переданный сигнал  $z'$ , искаженный шумом канала, то:

$$R(i, B(i, k), i_{\text{шаг}}) = \frac{1}{\theta} n(i, B(i, k), i_{\text{шаг}}) Z(i, B(i, k)) (1 + A(i, k) y(m)),$$

где  $i \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, N_\Gamma\}$ ,  $n(i, B(i, k), i_{\text{шаг}})$  — коэффициент, появившийся из-за шума в канале связи, и наконец:

$$m = ((i-1) \bmod N_{\text{RZ}}) + 1 + (k-1) N_{\text{RZ}} + \left\lfloor \frac{i-1}{N_{\text{RZ}}} \right\rfloor N_{\text{RZ}} N_\Gamma.$$

В таком случае натуральный логарифм абсолютной величины  $|R(i, B(i, k), i_{\text{шаг}})|$  равен сумме:

$$\ln \frac{1}{\theta} + \ln |n(i, B(i, k), i_{\text{шаг}})| + \ln |Z(i, B(i, k))| + \ln |1 + A(i, k) y(m)|.$$

Чтобы удалить влияние спектральной линии скрывающего сигнала  $z$ , демодулятор вычитает величину  $\ln |Z(i, B(i, k))|$  из этой суммы, но только в том случае, когда ему известен скрывающий сигнал  $z$ . Если  $A(i, k) \ll 1$ , то последнее слагаемое будет удовлетворять следующему приближенному равенству:

$$\ln|1 + A(i, k)y(m)| \approx A(i, k)y(m),$$

то есть приближенно будет пропорционально отсчету скрытого сигнала. При выполнении этих условий можно записать, что выполняется приближенное равенство:

$$\begin{aligned} & \ln|R(i, B(i, k), i_{\text{шаг}})| - \ln|Z(i, B(i, k))| \approx \\ & \approx \ln \frac{1}{\theta} + \ln|n(i, B(i, k), i_{\text{шаг}})| + A(i, k)y(m). \end{aligned}$$

Как бы то ни было, когда на вход демодулятора поступает вектор отсчетов  $\mathbf{r}(i_{\text{шаг}})$ , тогда на его выходе, при известном скрывающем сигнале  $\mathbf{z}$ , будет вектор:

$$\mathbf{R}_B(i_{\text{шаг}}) = (R_B(1, i_{\text{шаг}}) \quad R_B(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad R_B(k_Z N_\Gamma, i_{\text{шаг}})),$$

где  $R_B(j, i_{\text{шаг}}) = \ln|R(m, B(m, k), i_{\text{шаг}})| - \ln|Z(m, B(m, k))|$ , тогда как при неизвестном скрывающем сигнале  $\mathbf{z}$  будет выполняться равенство:

$$R_B(j, i_{\text{шаг}}) = \ln|R(m, B(m, k), i_{\text{шаг}})|,$$

где  $j \in \{1, 2, \dots, k_Z N_\Gamma\}$ , а зависимость между целыми числами  $m, k, j$  определяется следующими равенствами:

$$m = \left\lceil \frac{j-1}{N_\Gamma} \right\rceil + 1,$$

$$k = ((j-1) \bmod N_\Gamma) + 1.$$

Однако на этом работа демодулятора не оканчивается: он таким же образом обрабатывает следующие  $W-1$  блоков отсчетов. В итоге он обрабатывает множество  $\{\mathbf{r}(i_{\text{шаг}}), \mathbf{r}(i_{\text{шаг}}+1), \dots, \mathbf{r}(i_{\text{шаг}}+W-1)\}$  блоков отсчетов и формирует множество:

$$\Psi(i_{\text{шаг}}) = \{\mathbf{R}_B(i_{\text{шаг}}), \dots, \mathbf{R}_B(i_{\text{шаг}}+W-1)\},$$

которое передается декодеру канала.

Декодер канала, получив множество  $\Psi(i_{\text{шаг}})$ , каждый из его элементов обрабатывает одинаковым образом. Поэтому для примера далее показана обработка вектора  $\mathbf{R}_B(i_{\text{шаг}})$  декодером канала.

Вектор  $\mathbf{R}_B(i_{\text{шаг}})$  форматируется в матрицу  $\mathbf{D}(i_{\text{шаг}})$  размером  $N_{\text{RZ}} \times (N_c + N_K) N_{\Gamma}$ :

$$\mathbf{D}(i_{\text{шаг}}) = \begin{pmatrix} D(1,1,i_{\text{шаг}}) & D(1,2,i_{\text{шаг}}) & \cdots & D(1,(N_c + N_K)N_{\Gamma},i_{\text{шаг}}) \\ D(2,1,i_{\text{шаг}}) & D(2,2,i_{\text{шаг}}) & \cdots & D(2,(N_c + N_K)N_{\Gamma},i_{\text{шаг}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D(N_{\text{RZ}},1,i_{\text{шаг}}) & D(N_{\text{RZ}},2,i_{\text{шаг}}) & \cdots & D(N_{\text{RZ}},(N_c + N_K)N_{\Gamma},i_{\text{шаг}}) \end{pmatrix},$$

где

$$D(i, j, i_{\text{шаг}}) = R_B(k, i_{\text{шаг}}),$$

где  $k \in \{1, 2, \dots, k_Z N_{\Gamma}\}$ , а зависимость между целыми числами  $i, j, k$  выглядит так:

$$i = \left[ \left[ \frac{k-1}{N_{\Gamma}} \right] \bmod N_{\text{RZ}} \right] + 1,$$

$$j = \left[ \frac{k-1}{N_{\Gamma} N_{\text{RZ}}} \right] N_{\Gamma} + ((k-1) \bmod N_{\Gamma}) + 1.$$

Далее отдельно вычисляются суммы верхней половины строк матрицы  $\mathbf{D}(i_{\text{шаг}})$  и нижней ее половины, в результате получается два вектора-строки, представляющих собой соответствующие суммы, для удобства назовем их верхней и нижней соответственно. А после этого из верхней суммы вычитается нижняя, что дает вещественный вектор  $\delta(i_{\text{шаг}})$ , длиной  $(N_c + N_K) N_{\Gamma}$ :

$$\delta(i_{\text{шаг}}) = (\delta(1, i_{\text{шаг}}) \quad \delta(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad \delta((N_c + N_K)N_{\Gamma}, i_{\text{шаг}})),$$

где

$$\delta(j, i_{\text{шаг}}) = \sum_{i=1}^{N_{\text{RZ}}/2} D(i, j, i_{\text{шаг}}) - \sum_{i=(N_{\text{RZ}}/2)+1}^{N_{\text{RZ}}} D(i, j, i_{\text{шаг}}).$$

Если  $R_B(i_{\text{шаг}})$  содержит скрытый сигнал, то, выполняя такое вычитание, будет нивелировано влияние слагаемого  $\ln \theta^{-1}$ , которое в некотором роде является шумовым, так как приемнику оно неизвестно.

Оставшаяся шумовая составляющая, входящая в  $\delta(j, i_{\text{шаг}})$ , может быть представлена в виде следующей разности случайных величин:

$$\sum_{i=1}^{N_{\text{RZ}}/2} \ln |n(i+m, B(i+m, k), i_{\text{шаг}})| - \sum_{i=(N_{\text{RZ}}/2)+1}^{N_{\text{RZ}}} \ln |n(i+m, B(i+m, k), i_{\text{шаг}})|,$$

где

$$m = \left[ \frac{j-1}{N_{\Gamma}} \right] N_{\text{RZ}},$$

$$k = ((j-1) \bmod N_{\Gamma}) + 1,$$

где  $j \in \{1, 2, \dots, (N_c + N_k) N_{\Gamma}\}$ .

В обычных условиях можно ожидать, что амплитудные спектры шума для смежных блоков отсчетов аудиосигнала, принимаемого микрофоном, будут приблизительно одинаковыми; например, можно ожидать приближенное равенство амплитудных спектров, полученных в результате дискретного преобразования Фурье векторов (1) и (2). Зачастую, время, в течение которого состояние канала не меняется, называют временем когерентности канала. Если предположить, что время когерентности канала не меньше времени передачи последовательности из  $N_{\text{RZ}} N_Z$  отсчетов сигнала  $z'$ , то шумовая составляющая в  $\delta(j, i_{\text{шаг}})$  будет близка к нулю. При выполнении этого условия будет выполняться следующее приближенное равенство:

$$\delta(j, i_{\text{шаг}}) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{RZ}}/2} A(i+m, k) y(u) - \sum_{i=(N_{\text{RZ}}/2)+1}^{N_{\text{RZ}}} A(i+m, k) y(u),$$

где  $j \in \{1, 2, \dots, (N_c + N_k) N_{\Gamma}\}$ , зависимость между целыми числами  $m, k, u, j$  определяется следующими равенствами:

$$m = \left\lceil \frac{j-1}{N_\Gamma} \right\rceil N_{\text{RZ}},$$

$$k = ((j-1) \bmod N_\Gamma) + 1,$$

$$u = ((i+m-1) \bmod N_{\text{RZ}}) + 1 + (k-1)N_{\text{RZ}} + \left\lceil \frac{i+m-1}{N_{\text{RZ}}} \right\rceil N_{\text{RZ}}N_\Gamma.$$

К каждому элементу вектора  $\delta(i_{\text{шаг}})$  применяется функция:

$$\text{sign}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } a \geq 0, \\ -1, & \text{если } a < 0, \end{cases}$$

что дает вектор  $\mathbf{s}(i_{\text{шаг}})$ , длиной  $(N_c + N_K)N_\Gamma$ :

$$\mathbf{s}(i_{\text{шаг}}) = (s(1, i_{\text{шаг}}) \quad s(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad s((N_c + N_K)N_\Gamma, i_{\text{шаг}})),$$

где  $s(i, i_{\text{шаг}}) \in \{1, -1\}$ .

Для выполнения дальнейших действий вектор  $\mathbf{s}(i_{\text{шаг}})$  выгодно представить в виде матрицы

$$\mathbf{S}(i_{\text{шаг}}) = \begin{pmatrix} S(1, 1, i_{\text{шаг}}) & S(1, 2, i_{\text{шаг}}) & \dots & S(1, N_\Gamma, i_{\text{шаг}}) \\ S(2, 1, i_{\text{шаг}}) & S(2, 2, i_{\text{шаг}}) & \dots & S(2, N_\Gamma, i_{\text{шаг}}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(N_c + N_K, 1, i_{\text{шаг}}) & S(N_c + N_K, 2, i_{\text{шаг}}) & \dots & S(N_c + N_K, N_\Gamma, i_{\text{шаг}}) \end{pmatrix},$$

где

$$S(i, j, i_{\text{шаг}}) = s(k, i_{\text{шаг}}),$$

где  $k \in \{1, 2, \dots, (N_c + N_K)N_\Gamma\}$ , а зависимость между  $i, j, k$  определяется следующими равенствами:

$$i = \left\lceil \frac{k-1}{N_\Gamma} \right\rceil + 1,$$

$$j = ((k-1) \bmod N_\Gamma) + 1.$$

Теперь вычисляется значение взаимно-корреляционной функции между последовательностью Голда и теми последовательностями, которые извлечены из  $R_B(i_{\text{шаг}})$  — строками матрицы  $S(i_{\text{шаг}})$ . Для этого используется матрица  $G$ , размера  $N_{\Gamma} \times 2$ , составленная из использованных передатчиком последовательностей Голда  $g_1, g_2$ :

$$G = \begin{pmatrix} G(1,1) & G(1,2) \\ G(2,1) & G(2,2) \\ \vdots & \vdots \\ G(N_{\Gamma},1) & G(N_{\Gamma},2) \end{pmatrix},$$

где  $G(i, j) = g(j, i)$ . Матрица  $G$  слева умножается на матрицу  $S(i_{\text{шаг}})$ , что дает матрицу  $Y(i_{\text{шаг}})$ , размера  $(N_c + N_K) \times 2$ ,

$$Y(i_{\text{шаг}}) = \begin{pmatrix} Y(1,1,i_{\text{шаг}}) & Y(1,2,i_{\text{шаг}}) \\ Y(2,1,i_{\text{шаг}}) & Y(2,2,i_{\text{шаг}}) \\ \vdots & \vdots \\ Y(N_c + N_K,1,i_{\text{шаг}}) & Y(N_c + N_K,2,i_{\text{шаг}}) \end{pmatrix} = S(i_{\text{шаг}})G.$$

Далее вычисляется вектор:

$$\gamma(i_{\text{шаг}}) = (\gamma(1, i_{\text{шаг}}) \quad \gamma(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad \gamma(N_c + N_K, i_{\text{шаг}})),$$

где

$$\gamma(i, i_{\text{шаг}}) = \begin{cases} 1, & \text{если } Y(i,1,i_{\text{шаг}}) < Y(i,2,i_{\text{шаг}}), \\ -1, & \text{если } Y(i,1,i_{\text{шаг}}) \geq Y(i,2,i_{\text{шаг}}). \end{cases}$$

Каждая из величин  $Y(i,1,i_{\text{шаг}})$ ,  $Y(i,2,i_{\text{шаг}})$  — это есть величина взаимно корреляционной функции, поэтому правило вычисления элементов вектора  $\gamma(i_{\text{шаг}})$  опирается на то, что большее из значений  $Y(i,1,i_{\text{шаг}})$ ,  $Y(i,2,i_{\text{шаг}})$  указывает на большее количество совпадений между принятыми последовательностями и последовательностями Голда  $g_1, g_2$  соответственно.

Решение об установлении синхронизации будет положительным, если будут выполняться следующие условия, алгебраически зависящие от величины  $i_{\text{шаг}}$  номера шага. Во-первых, должно выполняться неравенство:

$$\rho(i_{\text{шаг}}) \geq \rho_K,$$

где  $\rho_K$  — пороговое значение, удовлетворяющее неравенству  $\rho_K \leq N_K$ ;  $\rho(i_{\text{шаг}})$  — скалярное произведение вектора  $\beta$ , определяющего использованную при передаче последовательности Касами, и первых  $N_K$  элементов вектора  $\gamma(i_{\text{шаг}})$ :

$$\rho(i_{\text{шаг}}) = \sum_{i=1}^{N_K} \gamma(i, i_{\text{шаг}}) \beta(i).$$

Во-вторых, значение  $\rho(i_{\text{шаг}})$  должно быть наибольшим среди всех таких же значений, но полученных из остальных элементов множества  $\Psi(i_{\text{шаг}})$ , то есть должно выполняться равенство:

$$\rho(i_{\text{шаг}}) = \max \{ \rho(i_{\text{шаг}}), \rho(i_{\text{шаг}} + 1), \dots, \rho(i_{\text{шаг}} + W - 1) \},$$

где величины  $\rho(i_{\text{шаг}} + j)$  при  $j \in \{0, 1, \dots, W - 1\}$  получены после обработки соответствующих остальных векторов  $R_B(i_{\text{шаг}} + j) \in \Psi(i_{\text{шаг}})$ .

В-третьих, сумма:

$$\sum_{i=1}^{N_K} \left( N_{\Gamma} - Y \left( i, \frac{\gamma(i, i_{\text{шаг}}) + 1}{2} + 1, i_{\text{шаг}} \right) \right)^2$$

должна быть наименьшей, в сравнении с такими же суммами, но полученными для всех остальных элементов множества  $\{ \rho(i_{\text{шаг}}), \rho(i_{\text{шаг}} + 1), \dots, \rho(i_{\text{шаг}} + W - 1) \}$ . В таком варианте третье условие является независимым от результатов применения двух предыдущих условий, что может привести к увеличению времени установления синхронизации. Поэтому для уменьшения времени может быть выгоден другой вариант третьего условия: выполнять сравнение не со всеми остальными элементами множества  $\{ \rho(i_{\text{шаг}}), \rho(i_{\text{шаг}} + 1), \dots, \rho(i_{\text{шаг}} + W - 1) \}$ , а только с равными  $\rho(i_{\text{шаг}})$

элементами. Второй вариант третьего условия делает это условие зависимым от результатов применения предыдущих условий: если в результате их применения среди остальных элементов не окажется равных  $\rho(i_{\text{шаг}})$ , то применение этого условия никак не отразится на принятии решения об установлении синхронизации.

Конечно, даже при выполнении всех этих условий не исключается ситуация наличия нескольких элементов в множестве  $\{i_{\text{шаг}}, \dots, i_{\text{шаг}} + W - 1\}$ , которые будут удовлетворять сразу всем этим условиям; тем не менее выбор будет сделан в пользу  $i_{\text{шаг}}$ . Если же величина  $i_{\text{шаг}}$  не удовлетворяет этим условиям, то декодер канала запрашивает от демодулятора множество  $\Psi(i_{\text{шаг}} + 1)$ , и такая же проверка выполняется уже для множества  $\{i_{\text{шаг}} + 1, \dots, i_{\text{шаг}} + W\}$  и так далее.

Когда для величины  $i_{\text{шаг}}$  все эти условия выполняются, тогда считается, что синхронизация установлена на блоке отсчетов  $r(i_{\text{шаг}})$ , то есть приемник будет считать, что этот блок отсчетов содержит переданный сигнал. В таком случае выполняется декодирование последних  $N_c$  элементов вектора  $\gamma(i_{\text{шаг}})$ . Для проведения процесса декодирования вычисляется вектор:

$$\mu(i_{\text{шаг}}) = (\mu(1, i_{\text{шаг}}) \quad \mu(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad \mu(N_c, i_{\text{шаг}})),$$

составленный из 0 и 1 по следующему правилу:

$$\mu(i, i_{\text{шаг}}) = \frac{\gamma(N_K + i, i_{\text{шаг}}) + 1}{2}.$$

Вектор  $\mu(i_{\text{шаг}})$  рассматривается декодером канала как искаженное шумом кодовое слово  $(N_c, N_x)$  БЧХ кода. Этот вектор подвергается БЧХ декодированию, что даст битовый вектор:

$$\mathbf{x}'(i_{\text{шаг}}) = (x'(1, i_{\text{шаг}}) \quad x'(2, i_{\text{шаг}}) \quad \dots \quad x'(N_x, i_{\text{шаг}})),$$

где  $x'(i, i_{\text{шаг}}) \in \{0, 1\}$ . Когда синхронизация установлена, а количество произошедших ошибок меньше  $N_t$ , тогда вектор  $\mathbf{x}'(i_{\text{шаг}})$  совпадет с переданным информационным вектором  $\mathbf{x}$ .

**3. Оценка вероятности ошибки восстановления символов кодового слова, лежащего в основе информационной части скрываемого сигнала.** После принятия положительного решения о наличии скрываемого сигнала  $y$  в блоке отсчетов  $r(i_{\text{шаг}})$  наступает этап декодирования вектора  $\mu(i_{\text{шаг}})$ . От того, совпадает ли элемент этого вектора с соответствующим элементом кодового слова  $c_{\text{БЧХ}}$ , зависит правильность восстановления переданного информационного вектора  $x$ . Поэтому для практического использования предлагаемой методики важно получить оценку вероятности ошибки восстановления элементов кодового слова  $c_{\text{БЧХ}}$  или, иными словами, получить оценку вероятности несовпадения элементов вектора  $\mu(i_{\text{шаг}})$  с элементами вектора  $c_{\text{БЧХ}}$ .

Основные параметры предлагаемой в этой работе методики — длина кодового слова RZ кода  $N_{\text{RZ}}$ , длина кодового слова БЧХ кода  $N_{\text{с}}$ , количество информационных символов в кодовом слове БЧХ кода  $N_{\text{х}}$ , исправляющая способность используемого БЧХ кода  $N_{\text{т}}$ , длина последовательности Касами  $N_{\text{К}}$ , длина последовательности Голда  $N_{\text{Г}}$ , размер блока отсчетов  $N_{\text{Z}}$ , мощность множества  $\Psi(i_{\text{шаг}})$ , равная  $|\Psi(i_{\text{шаг}})| = W$ , пороговое значение  $\rho_{\text{К}}$  и, наконец, частота дискретизации  $F_{\text{с}}$ . Варьируя числовые значения этих параметров, можно влиять на устойчивость к искажающим влияниям канала связи.

Выбор скрывающего сигнала  $z$  также имеет значение для надежности передачи. Так, каждый скрывающий сигнал, например, характеризуется своим набором допустимых коэффициентов сил встраивания  $A(i, j)$ , а также подходящими значениями параметров  $N_{\text{Z}}$  и  $N_{\text{RZ}}$ . Выбор значений этих параметров определяется тем, насколько в скрывающем сигнале смежные блоки отсчетов имеют схожие амплитудные спектры.

**3.1. Результаты имитационного моделирования.** Используем модель канала связи, в которой принятый сигнал — это сумма эхо-сигналов, представляющих собой переданный сигнал, искаженный шумом в частотной области; при этом искажаться будут только спектральные линии, несущие информацию. Отсчет  $r(i)$  с выхода

такой модели канала, взятый в  $i$ -й момент времени, удовлетворяет следующему равенству:

$$r(i) = r_{\text{эхо}}(i, 1) + \sum_{j=2}^{N_{\text{эхо}}} \alpha_{\text{эхо}}(j) r_{\text{эхо}}(i, j) + n_{\text{фон}}(i),$$

где  $i$  — целое число;  $N_{\text{эхо}}$  — максимально возможное количество эхо-сигналов;  $r_{\text{эхо}}(i, j)$  — это составляющая отсчета  $r(i)$ , вносимая  $j$ -м эхо-сигналом;  $\alpha_{\text{эхо}}(j) \in \{0, 1\}$  — коэффициент, указывающий на наличие или отсутствие эхо-сигнала с задержкой на  $j-1$  отсчет относительно эхо-сигнала  $r_{\text{эхо}}(i, 1)$ ;  $n_{\text{фон}}(i)$  — фоновый шум, используемый для моделирования ситуации установления синхронизации и которым можно пренебречь, пока на приемник поступают эхо-сигналы, то есть когда:

$$1 \leq i \leq k_Z N_Z + \max_{\alpha_{\text{эхо}}(j) \neq 0} \{j\} - 1.$$

Величины  $r_{\text{эхо}}(i, j)$  определяются следующим равенством:

$$r_{\text{эхо}}(i, j) = \begin{cases} e_{\text{эхо}}(j) r_{\text{эхо, IDFT}}(i, j), & \text{если } 0 \leq i - j < k_Z N_Z, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $j \in \{1, 2, \dots, N_{\text{эхо}}\}$ ,  $e_{\text{эхо}}(j) \in [0, 1]$  — это доля переданной энергии, которая приходится на  $j$ -й эхо-сигнал,

$$r_{\text{эхо, IDFT}}(i, j) = \frac{1}{N_Z} \sum_{k=1}^{N_Z} R_{\text{эхо}} \left( k, \left[ \frac{i-j}{N_Z} \right] + 1, j \right) \exp \left( \frac{i 2\pi (k-1) ((i-j) \bmod N_Z)}{N_Z} \right),$$

где  $R_{\text{эхо}}(k, l, j)$  — это комплексное число, определяющее  $k$ -ю спектральную линию  $l$ -го блока  $j$ -го эхо-сигнала. Величины  $R_{\text{эхо}}(k, l, j)$  определяются следующим образом:

$$R_{\text{эхо}}(k, l, j) = \begin{cases} Z(l, B(l, u)) (1 + A(l, u) (y(m) + n_{\text{блок}}(u, l, j))), & \text{если } k = B(l, u), \\ Z(l, k), & \text{иначе,} \end{cases}$$

когда  $u \in \{1, 2, \dots, N_\Gamma\}$  и  $k \in \{1, 2, \dots, N_Z / 2\}$ , но

$$R_{\text{эхо}}(k, l, j) = \begin{cases} (R_{\text{эхо}}(N_Z - k + 2, l, j))^*, & \text{если } k \neq (N_Z / 2) + 1, \\ Z(l, k), & \text{иначе,} \end{cases}$$

когда  $k \in \{(N_Z / 2) + 1, (N_Z / 2) + 2, \dots, N_Z\}$ ; в обоих равенствах  $l \in \{1, 2, \dots, k_Z\}$ ; величины  $A, B$  и  $m$  были определены ранее при указании правила получения спектральных линий  $Z'$  переданного сигнала  $z'$ ;  $n_{\text{блок}}(u, l, j)$  — это шум в  $B(l, u)$ -й спектральной линии  $l$ -го блока  $j$ -го эхо-сигнала. Шум  $n_{\text{блок}}(u, l, j)$  отсутствует в тех спектральных линиях  $R_{\text{эхо}}(k, l, j)$ , которые не несут элемента скрываемого сигнала  $y$ . Величины  $n_{\text{блок}}(u, l, j)$  определяются так:

$$n_{\text{блок}}(u, l, j) = n \left( \left[ \frac{l-1}{N_{\text{RZ}}} \right] N_\Gamma + u, j \right),$$

где  $n(\cdot, j)$  — независимые одинаково распределенные гауссовы случайные величины с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $\sigma^2$ .

Особенностью этой модели канала является то, что аддитивный шум  $n_{\text{блок}}(u, l, j)$  остается неизменным в каждом  $N_{\text{RZ}}$  блоках спектральных линий, а значит, он сохраняется в течение  $N_{\text{RZ}}N_Z / F_s$  секунд. Эту модель аудиоканала можно сравнить с моделью беспроводного канала с независимыми блоковыми замираниями [14, 15], когда замирания в канале имеют блоковый характер — сохраняются в течение времени когерентности канала. Таким образом, если использовать ту же терминологию, то в предлагаемой модели дискретного аудиоканала эхо-сигналы подвергаются независимым блоковым замираниям со временем когерентности, равным времени взятия  $N_{\text{RZ}}N_Z$  отсчетов, а именно столько времени требуется на передачу  $N_{\text{RZ}}N_\Gamma$  элементов скрываемого сигнала  $y$ .

В этой модели отношение сигнал-шум SNR для отдельного эхо-сигнала можно посчитать следующим образом. Так как элемент скрываемого сигнала всегда имеет одинаковое абсолютное значение

$|y(\cdot)| = 1$ , то при известном приемнику скрывающем сигнале  $z$  можно определить отношение сигнал-шум (выраженное в дБ) SNR на спектральную линию, опираясь на величину дисперсии  $\sigma^2$ :

$$\text{SNR} = 10 \lg \left( \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

Основные параметры канала: максимально возможное количество  $N_{\text{эхо}}$  эхо-сигналов; двоичный вектор:

$$\mathbf{a}_{\text{эхо}} = (1 \quad \alpha_{\text{эхо}}(2) \quad \dots \quad \alpha_{\text{эхо}}(N_{\text{эхо}})),$$

определяющий существование соответствующего эхо-сигнала; вещественный вектор:

$$\mathbf{e}_{\text{эхо}} = (e_{\text{эхо}}(1) \quad e_{\text{эхо}}(2) \quad \dots \quad e_{\text{эхо}}(N_{\text{эхо}})),$$

элементы которого — это доли переданной энергии, переносимые соответствующими эхо-сигналами, величина дисперсии  $\sigma^2$  шума. Остальные параметры, использованные при описании модели канала, определяются по параметрам передаваемого вектора  $\mathbf{z}'$ .

Предположим, что распространению звука до микрофона ничего не мешает, а также предположим, что в области распространения звука нет никаких отражающих его объектов, и, наконец, предположим, что расстояние между микрофоном и динамиком такое, что можно пренебречь ослаблением звука. В таком случае микрофона достигнет только один эхо-сигнал, энергия которого приблизительно равна переданной. Поэтому параметры модели канала будут иметь следующие значения:  $N_{\text{эхо}} = 1$ ;  $\alpha_{\text{эхо}}(1) = 1$ , остальные  $\alpha_{\text{эхо}}(j) = 0$ ;  $e_{\text{эхо}}(1) = 1$ , остальные  $e_{\text{эхо}}(j) = 0$ . В таком случае отсчет сигнала на выходе канала, взятый в  $i$ -й момент времени, будет удовлетворять следующему равенству:

$$r(i) = r_{\text{эхо}}(i, 1) + n_{\text{фон}}(i),$$

где  $n_{\text{фон}}(i)$  — фоновый шум, представляющий собой независимые одинаково распределенные нормальные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю, и дисперсией, равной единице, когда  $k_Z N_Z < i \leq 0$ , но  $n_{\text{фон}}(i) = 0$ , когда  $1 \leq i \leq k_Z N_Z$ .

В таблице 1 приводятся результаты имитационного моделирования представленной методики для случая, когда канал описывается этой моделью. Моделирование выполнялось с фоновым шумом перед приемом и после приема переданного сигнала, чтобы промоделировать процесс установления синхронизации. По результатам моделирования, полученным, когда скрывающий сигнал  $z$  неизвестен, видно, что, несмотря на уменьшение отношения сигнал-шум, вероятность ошибки не уменьшается, а колеблется возле некоторой величины; это происходит из-за того, что сам скрывающий сигнал  $z$  становится шумом и мешает восстановлению переданных символов. Когда же скрывающий сигнал  $z$  известен приемнику, тогда вероятность ошибки восстановления меньше  $10^{-2}$  уже при отношении сигнал-шум  $-28$  дБ.

Таблица 1. Сводная таблица результатов использования предлагаемой методики для модели канала с одним эхо-сигналом

Отношение сигнал-шум SNR, дБ	Вероятность ошибки восстановления символа переданного кодового слова $C_{БЧХ}$	
	Первый вариант третьего условия	Второй вариант третьего условия
Скрывающий сигнал известен приемнику		
-40	0.262	0.264
-35	0.131	0.13
-34	0.104	0.1
-33	0.08	0.075
-32	0.06	0.056
-31	0.035	0.037
-30	0.023	0.023
-29	0.011	0.012
-28	0.006	0.006
-27	0.002	0.003
-26	0.001	0.0006
-25	0.0003	0.0002
Скрывающий сигнал не известен приемнику		
-25	0.265	0.225
-20	0.083	0.081
-19	0.069	0.067
-18	0.068	0.057
-17	0.05	0.052
-16	0.043	0.046
-15	0.042	0.038
-14	0.039	0.039
-13	0.037	0.037
-12	0.037	0.04
-11	0.043	0.043

Параметры методики:  $N_{RZ} = 20$  ,  $N_c = 63$  ,  $N_x = 7$  ,  $N_t = 15$  ,  $N_K = 255$  ,  $N_\Gamma = 127$  ,  $N_Z = 256$  ,  $\rho_K = 100$  ,  $W = 1500$  . Результаты, приведенные в этой таблице, учитывают вероятность установления синхронизации.

**3.2. Результаты натуральных экспериментов.** В качестве значения  $\rho_K$  , используемого методикой как порогового при вынесении решения об установлении синхронизации, будем использовать число 101. Таким образом, если в процессе передачи через канал изменятся более 77 символов из 255 символов последовательности Касами, то выбранный порог не будет превышен.

Остальные параметры методики будут такими:  $N_c = 63$  ,  $N_K = 255$  ,  $N_\Gamma = 127$  ,  $N_Z = 2(N_\Gamma + 1) = 256$  ,  $F_s = 32000$  Гц,  $W = 1500$  . Величину  $N_{RZ}$  при проведении экспериментов будем варьировать. Для примера рассчитаем, сколько времени потребуется для передачи скрытого сигнала с этими параметрами и  $N_{RZ} = 20$  . Так, для встраивания такого скрываемого сигнала потребуется модифицировать:

$$k_Z = (N_c + N_K) N_{RZ} = 6360$$

непересекающихся блок отсчетов, при этом каждый блок состоит из  $N_Z = 256$  отсчетов. Следовательно, во времени, при частоте дискретизации равной  $F_s = 32$  кГц, потребуется:

$$\frac{k_Z N_Z}{32000} = 50.88$$

секунд на передачу скрываемого сигнала  $y$  .

Используем следующую аппаратуру для выполнения натурального эксперимента. В качестве динамиков будем использовать наушники Sennheiser MX170. Микрофоном будет Philips SBC ME570. И, наконец, аудиокарта ASUS Xonar Essence STX/A.

Запись будет продолжаться некоторое время и после окончания передачи аудиосигнала. Удлинение времени записи должно быть достаточным, чтобы передаваемый аудиосигнал распространился от динамика до микрофона. Запись будем выполнять в шумном помещении.

Конечно, в зависимости от шума в реальном канале, а также от выбранного скрывающего сигнала  $z$ , значения вероятности ошибки восстановления каждого отдельного случая будут своими. Тем не менее содержимое таблицы 2, полученное в результате ряда натуральных экспериментов, дает некоторую оценку того, насколько знание скрывающего сигнала приемником и вычитание его из принятого сигнала может повлиять на вероятность ошибки восстановления символа кодового слова. Например, при  $N_{RZ} = 20$  вероятность ошибки восстановления меньше более чем в два раза, когда скрывающий сигнал  $z$  известен приемнику, в сравнении со случаем, когда он не известен приемнику.

Таблица 2. Сводная таблица результатов натуральных экспериментов по оценке вероятности ошибки восстановления символов кодового слова при различных значениях параметров методики

Значение $N_{RZ}$	4	8	12	16	20
Вероятность ошибки восстановления символа переданного кодового слова $C_{БЧХ}$ (скрывающий сигнал <u>известен</u> приемнику)	0.16	0.1	0.06	0.05	0.03
Вероятность ошибки восстановления символа переданного кодового слова $C_{БЧХ}$ (скрывающий сигнал <u>не известен</u> приемнику)	0.2	0.19	0.1	0.12	0.09

Скрывающий сигнал — речь. Вещание ведется в нешумном помещении. Расстояние между микрофоном и динамиком  $\approx 2.5$  см. Мощность динамика 40% от номинальной. Значения основных параметров:  $\rho_K=101$ ,  $W = 1500$ ,  $N_{\Gamma} = 127$ ,  $N_Z=256$ ,  $N_K=255$ ,  $F_s=32$  кГц.

**4. Заключение.** В этой работе предложена методика построения, внедрения и восстановления скрытого сигнала при передаче через воздушный аудиоканал. Методика имеет следующие характерные черты. Во-первых, ее можно использовать даже при передаче стегоаудиосигнала через воздушный аудиоканал. Во-вторых, внедрение и восстановление скрываемого сигнала возможно и в том случае, когда скрывающий сигнал является речевым сигналом. В-третьих, синхронизационная часть скрываемого сигнала во времени передается отдельно. В-четвертых, внедрение скрываемого сигнала выполняется в неперекрывающиеся блоки отсчетов скрывающего сигнала. В-пятых, используется правило вынесения решения об установлении синхронизации, основанное на проверке трех условий, которые обычно ликвидируют ситуации неоднозначного выбора.

Для оценки вероятности ошибки восстановления символов кодового слова предложена модель воздушного аудиоканала. Результаты имитационного моделирования, полученные с ее помощью, для различных значений отношения сигнал–шум позволяют оценить требуемую исправляющую способность кода для использования при построении информационной части скрываемого сигнала. Натурные эксперименты показывают применимость предлагаемой методики для передачи в реальном воздушном аудиоканале.

### Литература

1. *Petitcolas F.A.P., Anderson R.J., Kuhn M.G.* Information hiding – a survey // Proceedings of the IEEE. 1999. vol. 87. no. 7. pp. 1062–1078.
2. *Hanspach M., Goetz M.* On covert acoustical mesh networks in air // Journal of Communications. 2013. vol. 8. no. 11. pp. 758–767.
3. *Мирончиков Е.Т., Гофман М.В., Вихарев С.О.* Методика построения цифровых водяных знаков, устойчивых к сбоям синхронизации // Известия Петербургского Университета Путей Сообщения. 2016. Т. 13. Вып. 1(46). С. 60–67.
4. *Wu S., Huang J., Huang D., Shi Y. Q.* Efficiently self-synchronized audio watermarking for assured audio data transmission // IEEE Transactions on Broadcasting. 2005. vol. 51. no. 1. pp. 69–76.
5. *Hua G. et al.* Twenty years of digital audio watermarking – a comprehensive review // Signal Processing. 2016. vol. 128. pp. 222–242.
6. *Roy S., Sarkar N., Chowdhury A.K., Iqbal S.M.A.* An efficient and blind audio watermarking technique in DCT domain // 18th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIT). IEEE. 2015. pp. 362–367.
7. *Cui D., Gong Y., Liu M.* Design and Performance Evaluation of Robust Digital Audio Watermarking under Low Bits Rates // 2nd International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE). IEEE. 2015. pp. 194–197.
8. *Zhang Z., Wu X.* An Audio Covert Communication System for Analog Channels // 2010 International Conference on Electrical and Control Engineering (ICECE). IEEE. 2010. pp. 3279–3282.
9. *Torrieri D.* Principles of spread-spectrum communication systems. Springer. 2015. 641 p.
10. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки: монография // М.: Мир. 1976. 594 с.
11. *Кудряшов Б.Д.* Основы теории кодирования: учеб. пособие // СПб.: БХВ-Петербург. 2016. 400 с.
12. ГОСТ Р 54711-2011: Звуковое вещание цифровое. Кодирование сигналов звукового вещания с сокращением избыточности для передачи по цифровым каналам связи. MPEG-1 часть III (MPEG-1 audio) // М.: Стандартинформ. 2014. 169 с.
13. *Spanias A., Painter T., Atti V.* Audio signal processing and coding // John Wiley & Sons. 2007. 464 p.
14. *Collins A., Polyanskiy Y.* Dispersion of the coherent MIMO block-fading channel // IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). IEEE. 2016. pp. 1068–1072.
15. *Гофман М.В.* Помехоустойчивое пространственное блочное кодирование // LAP Lambert Academic Publishing. 2013. 176 с.

**Гофман Максим Викторович** — к-т техн. наук, доцент кафедры информатики и информационной безопасности, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I. Область научных интересов: системы связи, системы передачи данных. Число научных публикаций — 10. maxgof@gmail.com; Московский пр., 9, Санкт-Петербург, 190031; р.т.: +7(812)310-34-72, Факс: +7(812)570-76-68.

M.V. GOFMAN

## A METHOD OF HIDDEN DATA TRANSMISSION IN COMMUNICATION VIA AIR AUDIO CHANNEL

*Gofman M.V. A Method of Hidden Data Transmission in Communication via Air Audio Channel.*

**Abstract.** This article proposes a method for secure data transmission in the audible domain of the frequency spectrum of the air environment. Specifically, it proposes the method of construction, embedding, extraction and recovery of a hidden signal transmitted through the air audio channel. The hidden signal consists of two parts. One part is used for synchronization, and the other one is used for carrying information. The basis of the synchronization part is the Kasami sequence, whereas the basis of the information part is a code word of the binary BCH code. Both parts of the hidden signal are obtained through special encoding of their binary elements. The encoding uses Gold sequences and RZ codes. Speech or music are used as a carrier signal. The hidden signal is embedded in the frequency domain of the carrying signal. The embedding is based on amplitude modulation of individual spectral components of the carrying signal. The article discusses the possibility of restoring the hidden signal after the transmission of the stego-audio signal through the air audio channel. The article presents the results of simulation modeling and field experiments of transmission of the stego-audio signal through the air audio channel.

**Keywords:** audio signal, steganography, air audio channel, air-gap, Kasami sequence, Gold sequence, BCH code, RZ code.

### References

1. Petitcolas F.A.P., Anderson R.J., Kuhn M.G. Information hiding – a survey. *Proceedings of the IEEE*. 1999. vol. 87. no. 7. pp. 1062–1078.
2. Hanspach M., Goetz M. On covert acoustical mesh networks in air. *Journal of Communications*. 2013. vol. 8. no. 11. pp. 758–767.
3. Mironchikov E.T., Gofman M.V., Viharev S.O. [A method for building synchronization fault-tolerant digital watermarks]. *Izvestija Peterburgskogo Universiteta Putej Soobshhenija – Proceedings of Petersburg Transport University*. 2016. vol. 13. no. 1(46). pp. 60–67. (In Russ.).
4. Wu S., Huang J., Huang D., Shi Y. Q. Efficiently self-synchronized audio watermarking for assured audio data transmission. *IEEE Transactions on Broadcasting*. 2005. vol. 51. no. 1. pp. 69–76.
5. Hua G. et al. Twenty years of digital audio watermarking – a comprehensive review. *Signal Processing*. 2016. vol. 128. pp. 222–242.
6. Roy S., Sarkar N., Chowdhury A. K., Iqbal S. M. A. An efficient and blind audio watermarking technique in DCT domain. 18th International Conference on Computer and Information Technology (ICCIT). IEEE. 2015. pp. 362–367.
7. Cui D., Gong Y., Liu M. Design and Performance Evaluation of Robust Digital Audio Watermarking under Low Bits Rates. 2nd International Conference on Information Science and Control Engineering (ICISCE). IEEE. 2015. pp. 194–197.
8. Zhang Z., Wu X. An Audio Covert Communication System for Analog Channels // 2010 International Conference on Electrical and Control Engineering (ICECE). IEEE. 2010. pp. 3279–3282.
9. Torrieri D. Principles of spread-spectrum communication systems. Springer. 2015. 641 p.

10. Peterson W.W., Weldon E.J. *Error-correcting codes*. Cambridge, MA: MIT. 1972. 571 p. (Russ. ed.: Piterson U., Ujeldon Je. *Kody, ispravljajushhie oshibki*. M: Mir. 1976. 594 p.).
11. Kudrjashov B.D. *Osnovy teorii kodirovanija [Basics of Coding Theory]*. SPb.: BHV-Peterburg. 2016. 400 p. (In Russ.).
12. GOST R 54711-2011 [Digital sound broadcasting. Coding of sound broadcasting signals with redundancy for transfer on digital communication channels. MPEG-1 part III (MPEG-1 audio)]. M.: Standartinform. 2014. 169 p. (In Russ.).
13. Spanias A., Painter T., Atti V. *Audio signal processing and coding*. John Wiley & Sons. 2007. 464 p.
14. Collins A., Polyanskiy Y. Dispersion of the coherent MIMO block-fading channel. *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. IEEE. 2016. pp. 1068–1072.
15. Gofman M.V. *Pomehoustojchivoe prostranstvennoe blokovoje kodirovanie [Noiseproof space-time block coding]*. LAP Lambert Academic Publishing. 2013. 176 p. (In Russ.).

**Gofman Maksim Viktorovich** — Ph.D., associate professor of informatics and information security department, Emperor Alexander I st. St. Petersburg State Transport University. Research interests: communication systems, systems of data transmission. The number of publications — 10. maxgof@gmail.com; 9, Moskovsky pr., Saint Petersburg, 190031; office phone: +7(812)310-34-72, Fax: +7(812)570-76-68.

П.Ш. ГЕЙДАРОВ  
**АЛГОРИТМ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА БЛИЖАЙШЕГО СОСЕДА  
В МНОГОСЛОЙНОМ ПЕРСЕПТРОНЕ**

*Гейдаров П.Ш. Алгоритм реализации метода ближайшего соседа в многослойном персептоне.*

**Аннотация.** Известно, что технология реализации задач распознавания и принятия решений на основе классических нейронных сетей имеет ряд сложностей, среди которых необходимость наличия значительной по объему обучающей выборки; длительность и сложность алгоритмов обучения; сложности с выбором параметров структуры сети, таких как количество нейронов, слоев, связей, а также способа соединения нейронов; возможные сбои и не удачи во время обучения с необходимостью повторных изменений параметров сети и повторного обучения. В данной работе рассматривается возможность создания на основе алгоритмов метрических методов распознавания, в частности на основе алгоритма ближайшего соседа, многослойного персептрон с полной системой связей и с пороговой функцией активации. Такая возможность позволяет в итоге создать полностью связанный многослойный персептон, такие параметры которого, как количество нейронов, слоев, а также значение весов и порогов определяются аналитически. Также рассмотрена закономерность, определяющая распределение весовых и пороговых значений для второго и третьего слоя полученного многослойного персептрон, на основе которого предложен алгоритм вычисления пороговых и весовых значений многослойного персептрон, а также приведен пример, реализующий данный алгоритм. Также рассмотрены возможные применения полученных сетей для разных задач.

**Ключевые слова:** архитектуры нейронных сетей, метод ближайшего соседа, многослойный персептон, обучение нейронных сетей, линейные нейронные сети, обучающая выборка.

**1. Введение.** В настоящее время практика и интерес к реализации задач распознавания и принятия решений на основе искусственных нейронных сетей по-прежнему остается перспективным и популярным среди разработчиков и исследователей [1-9]. Вместе с тем, несмотря на все достижения в этой области, технологии создания и обучения классических нейронных сетей [10-12] оставляют за собой ряд сложностей, среди которых такие как необходимость наличия значительной по объему обучающей выборки и выполнения длительных и сложных алгоритмов обучения, во время которых возможны сбои, требующие повторных изменений параметров сети и повторного обучения. Также имеются сложности с выбором начальных параметров сети: количество нейронов, слоев, связей. Кроме того, отсутствует строгое понимание, почему один набор настроенных весовых и пороговых значений в процессе обучения формирует высокую результативность работы сети, тогда как при других наборах этого нет. В данной работе рассматривается возможность создания на основе алгоритмов метрических методов распознавания [13], в частности на основе алгоритма ближайшего

соседа, многослойного персептрона с полной системой связей и с пороговой функцией активации. Полученный многослойный персептрон имеет прозрачную архитектуру, что позволяет рассмотреть закономерность распределений пороговых и весовых значений полученной нейронной сети многослойного персептрона. Кроме того, такой подход позволяет сразу получить работающий многослойный персептрон без использования алгоритмов обучения. При этом полученный многослойный персептрон может дообучаться существующими классическими алгоритмами обучения нейронных сетей.

**2. Постановка задачи.** С этой целью в работах [14, 15] были предложены и рассмотрены модели архитектур линейных нейронных сетей, реализующих метрические методы распознавания (НСММР). Данные сети имеют некоторую схожесть с классом определяемых сетей, например сети Хопфилда, Хемминга [10], поскольку по аналогии с этими сетями параметры и структура НСММР — количество нейронов, слов, связей — определяется исходя из начальных условий задачи распознавания, среди которых количество эталонов, образов, признаков. Также весовые значения связей определяются аналитически, на основе используемых выражений метрических методов распознавания, определяющих характеристики близости. При этом результативность полученных НСММР, определяемых по выражению:

$$R = \frac{n_k}{N_k} * 100\%, \quad (1)$$

где  $n_k$  — количество правильно идентифицированных элементов из общего числа  $N_k$  элементов контрольной выборки повторяют как результативность, так и ошибки (2) метрических методов распознавания, на основе которых реализованы данные архитектуры нейронных сетей:

$$F = 100\% - R. \quad (2)$$

Нужно сказать, что результаты работы (1, 2), полученные НСММР, будут ближе к глобальному минимуму  $F_g$  (рисунок 1), чем лучше будут подобраны начальные параметры  $X$  используемых метрических методов распознавания, таких как количество и качество набора эталонов одного образа; выбранные выражения характеристики близости метода распознавания и другие.

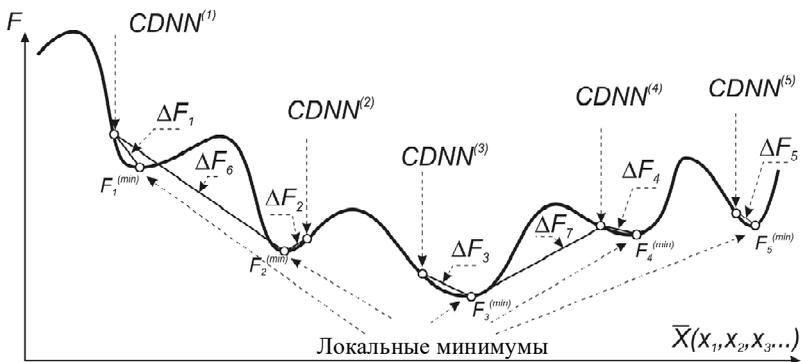


Рис. 1. График зависимости ошибки  $F$  от начальных параметров многослойного персептрона

Несмотря на возможность аналитически вычислять значения весовых и пороговых значений, которые имеют полученные архитектуры НСММР, тем не менее для этих сетей целесообразно иметь возможность дообучаться классическими алгоритмами обучения. С этой целью преобразование полученных сетей НСММР в многослойный персептрон (рисунок 2) решают эту задачу, поскольку известно, что многослойные персептроны обучаются.

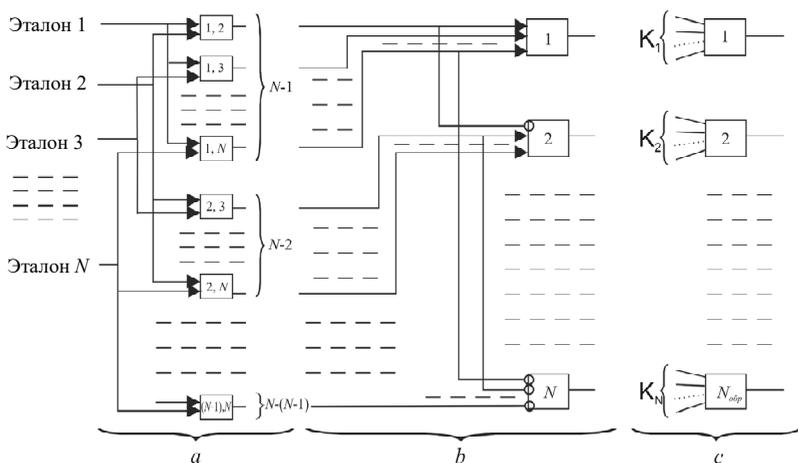


Рис. 2. Трехслойная схема с сжатой архитектурой НСММР

В этом случае, если результативность (1) полученной НСММР не удовлетворяет условиям задачи, то возможно дообучение полученной НСММР существующими классическими алгоритмами обучения и уменьшение ошибок (2) задачи распознавания, как, например, показано на рисунке 1 на  $\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3, \Delta F_4, \Delta F_5, \Delta F_6, \Delta F_7$ . Таким образом, дальнейшая цель будет заключаться в преобразовании схемы на рисунке 2 в схему на рисунке 1, а также в рассмотрении закономерности определения распределений весовых и пороговых значений для полученного многослойного персептрона, и создание на основе этих данных обобщенного алгоритма определения весовых и пороговых значений.

**3. Распределение весовых и пороговых значений для второго слоя.** На рисунке 2 приведена схема сжатой архитектуры нейронной сети, реализующей метрические методы распознавания. В работе [14] с целью сжатия схемы нейронной сети были исключены нейроны первого слоя, выполняющие сравнение одноименных пар эталонов. Для этого на входах второго слоя схемы сети (рисунок 2б) были добавлены логические элементы, инвертирующие значения сигналов, что вдвое уменьшило количество  $n_1$  нейронов первого слоя:

$$n_1 = N(N-1)/2, \quad (3)$$

где  $N$  — общее количество используемых в задаче эталонов.

Поскольку в схеме многослойного персептрона, представленного на рисунке 3, отсутствуют элементы инвертирования, то с целью их исключения, расширим схему рисунка 2. Полученная схема представлена на рисунке 4.

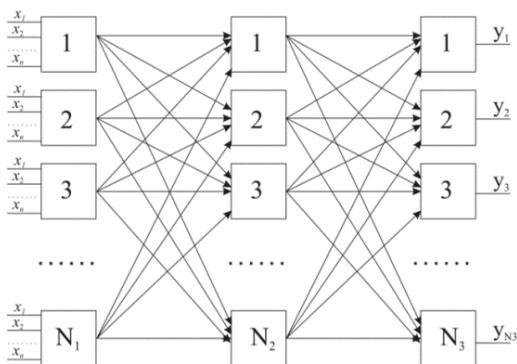


Рис. 3. Трехслойный полно связный персептрон

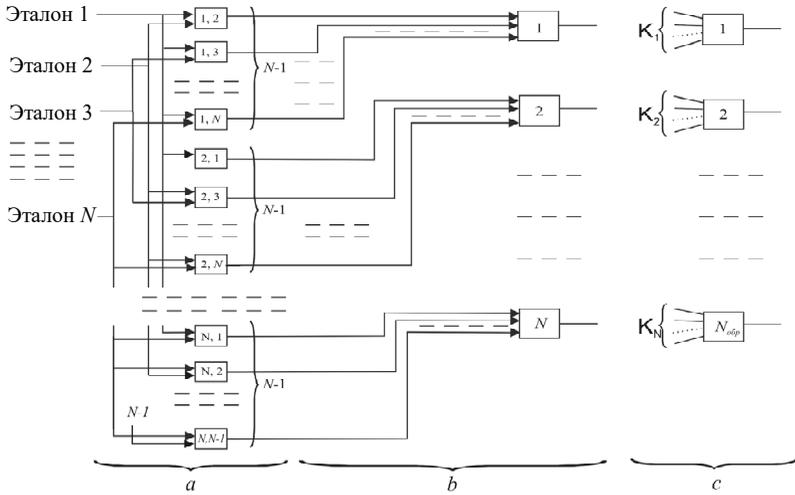


Рис. 4. Трехслойная HCMMP в раскрытой форме

При этом функция активации нейронов второго слоя (рисунок 2б, 4б) определится как:

$$\begin{cases} f(Sn_k^{(2)}) = 1, \text{если } Sn_k^{(2)} \geq \alpha(N-1) = H^{(2)} \\ f(Sn_k^{(2)}) = 0, \text{если } Sn_k^{(2)} < \alpha(N-1) = H^{(2)} \end{cases}, \quad (4)$$

где  $H^{(2)}$  — пороговое значение функции состояния для всех нейронов второго слоя (рисунок 2б и рисунок 4б),  $Sn_k^{(2)}$  — значение функции состояния  $k$ -го нейрона второго слоя, которая для схемы на рисунке 2б определяется по выражению (5) [15] и по выражению (6) для схемы на рисунке 4б:

$$Sn_k^{(2)} = \alpha \left( \sum_{j=1}^{k-1} \bar{f}(Sn_{j,k}^{(1)}) + \sum_{j=k+1}^N f(Sn_{k,j}^{(1)}) \right), \quad (5)$$

$$Sn_k^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} (w_{k,j}^{(2)} f(Sn_{k,j}^{(1)})) = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} (\alpha f(Sn_{k,j}^{(1)})) = \alpha \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} f(Sn_{k,j}^{(1)}), \quad (6)$$

где  $Sn_{k,j}^{(1)}$ ,  $f(Sn_{k,j}^{(1)})$  — значение функции состояния и функции активации нейрона первого слоя, для которых таблицы весов реализованы на основе  $k$  и  $j$  эталонов.

Поскольку в многослойном персептроне значения  $w_{i,j}^{(2)}$  — это величины, которые могут принимать широкий спектр значений, то предположим, что на рисунке 4б значение  $w_{k,j}^{(2)} = \alpha_{k,j}$  — это также произвольные значения. Значение функции состояния нейрона второго слоя в этом случае определится по выражению:

$$Sn_k^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right) = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \left( \alpha_{k,j} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right). \quad (7)$$

А условия функции активации преобразуется в:

$$\begin{cases} f \left( Sn_k^{(2)} \right) = 1, \text{если } Sn_k^{(2)} \geq H_k^{(2)} \\ f \left( Sn_k^{(2)} \right) = 0, \text{если } Sn_k^{(2)} < H_k^{(2)} \end{cases}, \quad (8)$$

где  $H_k^{(2)}$  — пороговое значение функции состояния для  $k$ -го нейрона, определяемое в пределах:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,j \min}^{(2)} < H_k^{(2)} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)}, \quad (9)$$

где  $w_{k,j \min}^{(2)}$  — минимальное значение  $w_{k,j}^{(2)}$   $k$ -го нейрона второго слоя.

Условие (4) и (8) означают, что при активности всех входов  $k$ -го нейрона второго слоя на выходе нейрона будет значение 1, в противном случае — 0. При этом в выражении (8) для выполнения этого условия должно также выполняться условие (9). Можно показать, что если условие (9) не выполняется, то на выходе  $k$ -го нейрона второго слоя

могут быть ошибки. Например, когда значение  $H_k^{(2)} > \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)}$ , то при

активности всех входов  $k$ -го нейрона ( $f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) = 1$ ) на выходе  $k$ -го нейрона согласно (7) и (8) вместо необходимого значения 1 будет  $f \left( Sn_k^{(2)} \right) = 0$ :

$$Sn_k^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} \times 1 \right) = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} < H_k^{(2)} \Rightarrow f \left( Sn_k^{(2)} \right) = 0. \quad (10)$$

Напротив, если  $H_k^{(2)} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,jmin}^{(2)}$ , то в этом случае на

выходе  $k$ -го нейрона может также быть ошибочное значение, например, при наличии неактивного входа  $f(Sn_{k,jmin}^{(1)}) = 0$ . В этом случае на выходе  $k$ -го нейрона ( $f(Sn_k^{(2)})$ ) согласно выражениям (7), (8), (11) вместо необходимого значения 0 будет 1:

$$\begin{aligned} Sn_k^{(2)} &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k, j \neq s}}^{N-2} \left( w_{k,j}^{(2)} \times 1 \right) + w_{k,jmin}^{(2)} \times 0 = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,jmin}^{(2)} \geq H_k^{(2)} \Rightarrow f(Sn_k^{(2)}) = 1. \end{aligned} \quad (11)$$

Покажем также, что для выполнения условия (8) необходимо выполнение условий  $w_{k,j}^{(2)} > 0$  для всех  $j$  входов нейрона (12). Пусть существует  $j=m$ , для которого  $-w_{k,m}^{(2)} \leq 0$ . Тогда при активности всех входов  $k$ -го нейрона ( $f(Sn_{k,j}^{(1)}) = 1$ ) на выходе нейрона согласно выражениям (7, 8, 9) вместо значения 1 будет 0:

$$\begin{aligned} Sn_k^{(2)} &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f(Sn_{k,j}^{(1)}) \right) = \\ &= \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k, j \neq m)}}^{N-2} \left( w_{k,j}^{(2)} \times 1 \right) - w_{k,m}^{(2)} \times 1 = \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k, j \neq m)}}^{N-2} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,m}^{(2)} \leq \\ &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq k)}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,jmin}^{(2)} < H_k^{(2)} \Rightarrow f(Sn_k^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Поскольку на схеме рисунка 3 приведена сеть с полной системой связи, где каждый выход предыдущего слоя связан с каждым нейроном последующего слоя, то по аналогии с этой системой добавим дополнительные связи в схему нейронной сети на рисунке 4, соединив каждый вход нейрона второго слоя с каждым выходом нейрона первого слоя. В этом случае определение значения функции состояния  $k$ -го нейрона второго слоя изменится с выражения (7) на выражение:

$$Sn_k^{(2)} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^{N-1} \left( w_{i,j}^{(2)} f \left( Sn_{i,j}^{(1)} \right) \right), \quad (13)$$

где  $i, j$  определяют порядковые номера эталонов (рисунок 4а).

При этом также можно будет показать, что для  $k$ -го нейрона второго слоя для всех добавленных связей ( $i \neq k$ ) с целью соблюдения стабильности работы функции активации (8) необходимо выполнения условий (14, 15):

$$\sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} \geq 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} < H_k^{(2)} - \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right) - w_{k,jmin}^{(2)} \right), \quad (14)$$

$$\left| \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} \right| \leq \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right) - H_k^{(2)}, \quad (15)$$

где левые части в выражениях (14), (15) положительные и отрицательные составляющие суммы всех  $w_{i,j}^{(2)}$  для  $k$ -го нейрона второго слоя, для которых  $i \neq k$ .

Условие (14) следует из того, что при любом неактивном выходе нейрона  $(k,s)$  первого слоя  $f\left(Sn_{k,s}^{(1)}\right)=0$  на выходе нейрона  $\left(f\left(Sn_k^{(2)}\right)\right)$  должно быть значение 0. Покажем это, разложив значение функции состояния нейрона  $Sn_k^{(2)}$  (13) на следующие составляющие:

$$\begin{aligned}
 Sn_k^{(2)} = & \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-2} \left( w_{k,j}^{(2)} f\left(Sn_{k,j}^{(1)}\right) \right) + w_{k,s}^{(2)} \times 0 + \\
 & + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} > 0}}^{N-1} \left( w_{i,j}^{(2)} f\left(Sn_{i,j}^{(1)}\right) \right) - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} \left( \left| w_{i,j}^{(2)} \right| f\left(Sn_{i,j}^{(1)}\right) \right). \quad (16)
 \end{aligned}$$

Из (16) можно видеть, что максимальное значение функции состояния нейрона второго слоя будет при условии, когда:  $w_{k,s}^{(2)} = w_{k,jmin}^{(2)}$ , значения всех остальных  $f\left(Sn_{k,j}^{(1)}\right)=1$ , а значения  $f\left(Sn_{i,j}^{(1)}\right)=1$  для всех связей  $k$ -го нейрона у которых  $i \neq k$  и  $w_{i,j}^{(2)} > 0$ , и напротив значения  $f\left(Sn_{i,j}^{(1)}\right)=0$  для всех  $i \neq k$  у которых  $w_{i,j}^{(2)} < 0$ :

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N-2} \left( w_{k,j}^{(2)} \times 1 \right) + w_{k,jmin}^{(2)} \times 0 + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} > 0}}^{N-1} \left( w_{i,j}^{(2)} \times 1 \right) - \\
 & - \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} \left( \left| w_{i,j}^{(2)} \right| \times 0 \right) = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - w_{k,jmin}^{(2)} + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} > 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} < H_k^{(2)}. \quad (17)
 \end{aligned}$$

Из (17) получаем условие (14). Условие в (15) следует из того, что при активности всех  $N-1$  нейронов первого слоя для  $k$ -го образа

( $f(Sn_{k,j}^{(1)})=1$ ), на выходе нейрона должно быть  $f(Sn_k^{(2)})=1$ . В этом случае значение функции состояния нейрона (13) представим как:

$$Sn_k^{(2)} = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} (w_{k,j}^{(2)} \times 1) + \sum_{i=1, i \neq k}^{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (w_{i,j}^{(2)} f(Sn_{i,j}^{(1)})) - \sum_{i=1, i \neq k}^{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (|w_{i,j}^{(2)}| f(Sn_{i,j}^{(1)})), \quad (18)$$

$w_{i,j}^{(2)} > 0$    $w_{i,j}^{(2)} < 0$

Из (18) можно видеть, что минимальное значение функции состояния  $k$ -го нейрона второго слоя ( $Sn_k^{(2)}$ ) будет тогда, когда значения  $f(Sn_{i,j}^{(1)})=0$  для всех  $i \neq k$ , для которых  $w_{i,j}^{(2)} > 0$ , и напротив,  $f(Sn_{i,j}^{(1)})=1$  для всех  $i \neq k$ , для которых  $w_{i,j}^{(2)} < 0$ . Отсюда, согласно выражению (8), следует (19) и, соответственно, условие (15):

$$\sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} (w_{k,j}^{(2)} \times 1) + \sum_{i=1, i \neq k}^{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (w_{i,j}^{(2)} \times 0) - \sum_{i=1, i \neq k}^{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} (|w_{i,j}^{(2)}| \times 1) = \sum_{j=1, j \neq k}^{N-1} w_{k,j}^{(2)} - \left| \sum_{i=1, i \neq k}^{N-1} \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} \right| \geq H_k^{(2)}. \quad (19)$$

Несоблюдение условий (14, 15) будет означать возможность появления ошибочных значений на выходе  $k$ -го нейрона второго слоя  $f(Sn_k^{(2)})$ , даже при условии исключения возможных ошибок на выходах первого слоя сети.

**4. Распределение весовых и пороговых значений для третьего слоя.** Рассмотрим также третий слой нейронной сети (рисунок 4с). Напомним, что третий слой нейронной сети нужен был тогда, когда

распознаваемый образ представлялся не одним, а несколькими эталонами [14]. В этом случае  $k$ -ый нейрон третьего слоя объединял выходы нейронов второго слоя, соответствующих эталонам одного  $k$ -го образа, а значение функции состояния нейрона  $Sn_k^{(3)}$  определялось как:

$$Sn_k^{(3)} = \sum_{j=1}^K \left( \alpha \times f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right), \quad (20)$$

где  $\alpha$  — значение  $w_{i,j}^{(3)}$  для всех входов нейрона третьего слоя,  $K$  — количество эталонов, принадлежащих  $k$ -му образу. В отличие от нейрона второго слоя функция активации нейрона третьего слоя (21) выполняет условие, при котором при наличии хотя бы одного активного выхода нейрона  $f \left( Sn_j^{(2)} \right) = 1$ , выход  $k$ -го нейрона третьего слоя будет также активным  $f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 1$ , иначе  $f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 0$ .

$$\begin{cases} f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 1, \text{ если } Sn_k^{(3)} \geq H^{(3)} = \alpha \\ f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 0, \text{ если } Sn_k^{(3)} < H^{(3)} = \alpha \end{cases}. \quad (21)$$

Здесь для всех нейронов третьего слоя пороговое значение  $H^{(3)} = \alpha$ . Если аналогично предположить, что значение  $w_{k,j}^{(3)} = \alpha_{k,j}$  являются произвольные значения, то значение функции состояния  $k$ -го нейрона третьего слоя определится как:

$$Sn_k^{(3)} = \sum_{j=1}^K \left( w_{k,j}^{(3)} f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right) = \sum_{j=1}^K \left( \alpha_{k,j} f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right). \quad (22)$$

Условие функции активации (21) в этом случае преобразуется в (23):

$$\begin{cases} f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 1, \text{ если } Sn_k^{(3)} \geq H_k^{(3)} \\ f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 0, \text{ если } Sn_k^{(3)} < H_k^{(3)} \end{cases}, \quad (23)$$

где  $H_k^{(3)}$  — пороговое значение функции состояния для  $k$ -го нейрона третьего слоя, определяемое в диапазоне:

$$0 < H_k^{(3)} \leq w_{k,j}^{(3)(\min)}. \quad (24)$$

Здесь  $w_{k,j}^{(3)(\min)}$  минимальное значение веса  $w_{k,j}^{(3)}$ . При этом условия (23 и 24) соответствуют тому, что если имеется хотя бы один активный вход нейрона  $f(Sn_j^{(2)}) = 1$ , то выход нейрона  $f(Sn_k^{(3)})$  также будет равен 1:

$$\begin{aligned} Sn_k^{(3)} &= \sum_{j=1}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right) = \sum_{j=1}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(3)} \times 0 \right) + w_{k,j}^{(3)} \times 1 = \\ &= w_{k,j}^{(3)} \geq w_{k,j}^{(3)(\min)} \geq H_k^{(3)} \Rightarrow f(Sn_k^{(3)}) = 1. \end{aligned} \quad (25)$$

Если же все входы  $f(Sn_j^{(2)}) = 0$ , то выход равен  $f(Sn_k^{(3)}) = 0$ :

$$Sn_k^{(3)} = \sum_{j=1}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right) = \sum_{j=1}^N \left( w_{k,j}^{(3)} \times 0 \right) = 0 < H_k^{(3)} \Rightarrow f(Sn_k^{(3)}) = 0. \quad (26)$$

По аналогии со вторым слоем соединим все нейроны второго слоя с нейронами третьего слоя (рисунок 3). В этом случае значение функции состояния нейрона определится как:

$$Sn_k^{(3)} = \sum_{j=1}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right), \quad (27)$$

где  $N$  — это количество нейронов второго слоя, а также количество используемых в задаче эталонов.

Можно показать, что для стабильности работы третьего слоя значения весов добавленных связей  $w_{k,j}^{(3)}$  при  $j \neq j_k$  должны определяться условиями:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N w_{k,j}^{(3)} &< H_k^{(3)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\left| \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N w_{k,j}^{(3)} \right| \leq w_{k,j_k}^{(3)(min)} - H_k^{(3)}. \quad (29)$$

Здесь  $j_k$  —  $j$ -ые входы  $k$ -го нейрона третьего слоя, соединяющиеся с нейронами второго слоя, выходы которых соответствуют эталонам  $k$ -го образа,  $w_{k,j_k}^{(3)(min)}$  — минимальное значение веса для  $j_k$  связей. Левые части выражений (28), (29) — это положительные и отрицательные составляющие суммы весов для всех добавленных связей  $k$ -го нейрона третьего слоя ( $j \neq j_k$ ),  $N$  — количество нейронов третьего слоя. Условие (28) исходит из того, что при неактивности всех выходов нейронов второго слоя, определяющих выходы эталонов  $k$ -го образа ( $f(Sn_{j_k}^{(2)}) = 0$ ), на выходе  $k$ -го нейрона третьего слоя должно быть значение 0. Покажем это.

Для этого разложим значение функции состояния  $k$ -го нейрона третьего слоя, определяемое для полной системы связи, на следующие составляющие:

$$\begin{aligned} Sn_k^{(3)} &= \sum_{j=1}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right) = \sum_{j=1}^K \left( w_{k,j_k}^{(3)} \times 0 \right) + \\ &+ \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N \left| w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right| = \\ &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N \left| w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)}) \right| < H_k^{(3)}. \end{aligned} \quad (30)$$

Из выражения (30) видно, что наибольшее значение функции состояния нейрона  $Sn_k^{(3)}$  для этого случая будет при условии, когда для всех добавленных связей ( $j \neq j_k$ ), для которых значения весов  $w_{k,j}^{(3)} < 0$ , значения  $f(Sn_j^{(2)}) = 0$ , а для всех добавленных связей ( $j \neq j_k$ ), для которых значения весов  $w_{k,j}^{(3)} > 0$ , значения  $f(Sn_j^{(2)}) = 1$ . Соответственно, отсюда из (30) и (31) следует условие (28):

$$\begin{aligned}
 Sn_k^{(3)} &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N (w_{k,j}^{(3)} \times 1) - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N |w_{k,j}^{(3)} \times 0| = \\
 &= \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N w_{k,j}^{(3)} < H_k^{(3)} \Rightarrow f(Sn_k^{(3)}) = 0.
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Условие (29) исходит из того, что при активности хотя бы одного из  $j_k = s$  выходов нейрона  $f(Sn_s^{(2)}) = 1$  на выходе нейрона  $k$ -го нейрона третьего слоя будет 1. Для этого разложим значение функции состояния  $k$ -го нейрона на следующие составляющие:

$$\begin{aligned}
 Sn_k^{(3)} &= \sum_{j=1}^N (w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)})) = \sum_{j=1}^{K-1} (w_{k,j_k}^{(3)} \times 0) + \\
 &+ w_{k,s}^{(3)} f(Sn_s^{(2)}) + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N (w_{k,j}^{(3)} f(Sn_j^{(2)})) -
 \end{aligned}
 \tag{32}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N \left| w_{k,j}^{(3)} f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right| = w_{k,s}^{(3)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N \left( w_{k,j}^{(3)} f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right) - \\
& - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N \left| w_{k,j}^{(3)} f \left( Sn_j^{(2)} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Из (32) можно видеть, что наименьшим значение функции состояния нейрона  $Sn_k^{(3)}$  будет при условии, когда  $w_{k,s}^{(3)} = w_{k,j_k}^{(3)(min)}$ , а также когда для всех добавленных связей ( $j \neq j_k$ ), у которых значения весов  $w_{k,j}^{(3)} < 0$ , значения  $f \left( Sn_j^{(2)} \right) = 1$ , и напротив, для всех добавленных связей ( $j \neq j_k$ ), для которых  $w_{k,j}^{(3)} > 0$ , значения  $f \left( Sn_j^{(2)} \right) = 0$ . Соответственно, из выражения (32) и (33) следует условие (29):

$$Sn_k^{(3)} = w_{k,j_k}^{(3)(min)} + \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N \left( w_{k,j}^{(3)} \times 0 \right) -$$

$$\left| - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N \left| w_{k,j}^{(3)} \times 1 \right| = w_{k,j_k}^{(3)(min)} - \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq j_k, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N w_{k,j}^{(3)} \right| \geq H_k^{(3)} \Rightarrow f \left( Sn_k^{(3)} \right) = 1. \tag{33}$$

В итоге для стабильности работы второго и третьего слоя нейронной сети с полной системой связей (рисунок 3) и с пороговой функцией активации для каждого нейрона необходимо выполнение условий, когда значение всех  $w_{k,j}^{(2)} > 0$  и  $w_{k,j_k}^{(3)} > 0$ , а значения всех  $w_{i,j}^{(2)}$ , для которых  $i \neq k$ , и  $w_{i,j}^{(3)}$ , для которых  $j \neq j_k$ , будут определяться в пределах, определенных условиями (14, 15, 28, 29). А пороговые значения функций

состояний нейронов должны определяться выражениями (9, 24). Кроме того, приведенные выражения распределений значений  $w_{i,j}$  и  $H_k$  для второго и третьего слоя являются наиболее обобщенными условиями реализации второго и третьего слоя НСММР.

**5. Обобщенный алгоритм определения весовых и пороговых значений для второго и третьего слоя.** На основе всех полученных условий работы сети также приведем возможный алгоритм определения значений  $w_{i,j}^{(2)}$  и  $H_k^{(2)}$  для всех нейронов второго слоя:

1. На основе существующего эталонного набора составляется сеть с полной системой связей (рисунок 3) на основе архитектуры [14] (рисунок 4), где количество нейронов для первого слоя определяется по выражению (1), количество нейронов второго слоя определяется количеством эталонов, а количество нейронов третьего слоя — количеством распознаваемых образов.

2. Для  $k$ -го нейрона значения весов для всех добавленных связей  $w_{i,j}^{(2)}$  (для которых  $i \neq k$ ) выбираются случайным образом.

3. Из полученных значений  $w_{i,j}^{(2)}$  определяются значения сумм  $S_1$  и  $S_2$  положительных и отрицательных составляющих, взятых по модулю:

$$S_1 = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} \geq 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)}, \quad S_2 = \left| \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} \right|. \quad (34)$$

4. Определяем минимальное значение  $w_{k,jmin}^{(2)}$ , по выражению:

$$w_{k,jmin}^{(2)} = S_1 + S_2 + \beta, \quad (35)$$

где  $\beta$  — любое положительное число,  $\beta \in (0, \infty)$ . При этом выражение (35) определяется на основе сложений правых и левых частей выражений (14) и (15) и приведением неравенства к равенству:

$$\left| \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} \geq 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} + \sum_{\substack{i=1, \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} \right| < H_k^{(2)} - \quad (36)$$

$$- \left( \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right) - w_{k,jmin}^{(2)} \right) + \sum_{\substack{j=1, \\ J \neq k}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right) - H_k^{(2)} ;$$

$$\left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} \geq 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} \right| < w_{k,jmin}^{(2)} ; \quad (37)$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} \geq 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{N-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i, \\ w_{i,j}^{(2)} < 0}}^{N-1} w_{i,j}^{(2)} + \beta = w_{k,jmin}^{(2)} . \quad (38)$$

5. Выбираем случайным образом остальные значения  $w_{k,j}^{(2)}$ , при этом соблюдая условие  $w_{k,j}^{(2)} \geq w_{k,jmin}^{(2)}$ , а также определяем сумму  $S_k$  всех  $w_{k,j}^{(2)}$ :

$$S_k = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq k}}^{N-1} \left( w_{k,j}^{(2)} f \left( Sn_{k,j}^{(1)} \right) \right). \quad (39)$$

6. Определяем значения порога  $H_k^{(2)}$  для этого нейрона, например, исходя из неравенства (14):

$$H_k^{(2)} = (S_k - w_{k,jmin}^{(2)}) + S_1 + c, \quad (40)$$

где  $c \in (0; \beta]$ .

7. Переходим на следующий  $k+1$  нейрон и продолжаем алгоритм с пункта 2.

Для третьего слоя алгоритм определения значений  $w_{k,j}^{(3)}$  и  $H_k^{(3)}$  будет отличаться тем, что в пункте 4 определяется минимальное значение  $w_{k,jk}^{(3)(min)}$ , как:

$$w_{k,jk}^{(3)(min)} = S_1 + S_2 + \beta, \quad (41)$$

$$\text{где } S_1 = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq jk, \\ w_{k,j}^{(2)} \geq 0}}^N w_{k,j}^{(3)}, \quad S_2 = \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq jk, \\ w_{k,j}^{(2)} < 0}}^N w_{k,j}^{(3)}.$$

А пороговое значение  $H_k^{(3)}$  для  $k$ -го нейрона определится из выражения (28), как:

$$H_k^{(3)} = S_1 + c, \quad (42)$$

где  $c \in (0; \beta]$

### 6. Пример использованием трехслойной нейронной сети .

Рассмотрим пример задачи распознавания двух графических образов {4, 3}, состоящих из набора, например, трех эталонов, приведенных на рисунке 5.



Рис. 5. Пример набора эталонов для двух образов

На рисунке 6 приведена схема трехслойной нейронной сети с системой связей, необходимая для данной задачи и определенная на основе архитектуры НСММР, где количество нейронов первого слоя определяется по формуле (3), а количество нейронов второго и третьего слоя, соответственно, равны количеству эталонов и образов.

Поскольку в наборе эталонов (рисунок 5) образу {4} принадлежит два эталона {эталон 1, эталон 3}, то, следовательно, согласно нумерации эталонов, 1-ый и 3-ий нейроны второго слоя соответствуют образу {4}, выход 2 — образу {3}. При этом выход сети  $y_1$  определим как выход образа {4}, а  $y_2$  — выход образа {3}. В таблице 1 и 2 приведены значения весов  $w_{i,j}^{(2)}$  и  $w_{k,j}^{(3)}$ , определенные по приведенному выше алгоритму.

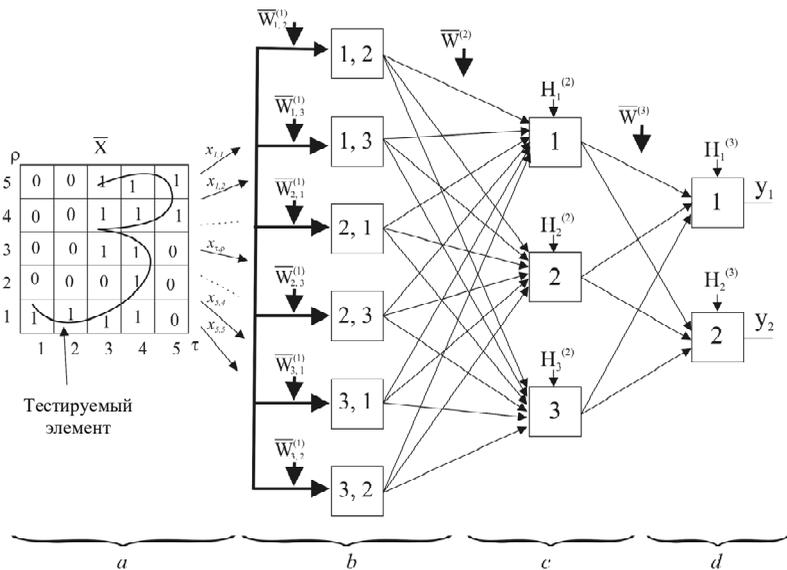


Рис. 6. Схема распознавания с использованием трехслойной нейронной сети: а — тестируемый элемент  $\bar{X}$ ; б — первый слой; в — второй слой; с — третий слой

Покажем это на примере первого нейрона ( $k=1$ ) второго слоя. Для этого сначала случайным образом выбираем значения  $w_{i,j}^{(2)}$  для  $i \neq k$  (не окрашенные ячейки) в диапазоне, например,  $[-5, 5]$ :  $w_{2,1}^{(2)} = -2$ ,  $w_{2,3}^{(2)} = -2$ ,  $w_{3,1}^{(2)} = 3$ ,  $w_{3,2}^{(2)} = 4$  (таблица 1). Определяем

значения  $S_1 = 3 + 4 = 7$ ,  $S_2 = |-2 - 2| = 4$ . Если  $\beta$  принять за 4 и при этом  $w_{1,3}^{(2)}$  принять как наименьшее из всех значений  $w_{i,j}^{(2)}$ , для которых  $i = k$ , то  $w_{1,3}^{(2)} = w_{k,j\min}^{(2)} = 7 + 4 + 4 = 15$ . Тогда значение  $w_{1,2}^{(2)} \geq w_{1,3}^{(2)}$  выбираем, например, как  $w_{1,2}^{(2)} = 19$  (таблица 1). Определяем значение  $S_k = w_{1,2}^{(2)} + w_{1,3}^{(2)} = 15 + 19 = 34$ . Если принять  $c = 3 (< \beta)$ , то значение  $H_1^{(2)}$  определяем согласно (40)  $H_1^{(2)} = 34 - 15 + 7 + 3 = 29$ . Аналогично определяются все  $w_{i,j}^{(2)}$  и  $H_k^{(2)}$  для всех остальных нейронов второго слоя (таблица 1).

Таблица.1. Значение весов  $w_{i,j}^{(2)}$  и параметры алгоритма для второго слоя

$w_{i,j}^{(2)}$ для $k$ -го нейрона							Параметры алгоритма для 2-го слоя						
$k \backslash i, j$	1, 2	1, 3	2, 1	2, 3	3, 1	3, 2	$S_1$	$S_2$	$\beta$	$w_{k,j\min}^{(2)}$	$S_k$	$c$	$H_k^{(2)}$
1	19	15	-2	-2	3	4	7	4	4	15	34	3	29
2	-4	2	11	14	0	3	5	4	2	11	25	1	20
3	-5	3	2	5	22	17	10	5	2	17	39	1	33

Для третьего слоя рассмотрим первый нейрон ( $k=1$ ). Здесь  $j_k$  связи — это первый и третий входы (закрашенные ячейки), определяющие эталоны образа  $\{4\}$ . Значение  $w_{1,2}^{(3)}$  ( $j \neq j_k$ ) определяем случайным образом, например, 2. Отсюда значения  $S_1 = 2$ ,  $S_2 = 0$ . Если значение  $w_{1,3}^{(3)}$  принять за минимальное среди  $j_k$  связей  $w_{1,3}^{(3)} = w_{k,jk}^{(3)(\min)}$ , то при  $\beta = 3$ ,  $w_{1,3}^{(3)} = 2 + 0 + 3 = 5$ . Соответственно,  $w_{1,1}^{(3)} \geq w_{1,3}^{(3)}$  будет, например,  $w_{1,1}^{(3)} = 7$ . По формуле (42) определяем  $H_1^{(3)} = 2 + 2 = 4$  (таблица 2).

Таблица. 2. Значение весов  $w_{k,j}^{(3)}$  и параметры алгоритма для третьего слоя

$w_{k,j}^{(3)}$ для $k$ -го нейрона				Параметры алгоритма для 3-го слоя						
$k \backslash j$	1	2	3	$S_1$	$S_2$	$\beta$	$w_{k,jk}^{(3)(\min)}$	$S_k$	$c$	$H_k^{(3)}$
1	7	2	5	2	0	3	5	12	2	4
2	1	9	-4	1	4	4	9	9	1	2

На рисунке 7 приведен пример таблиц весов размерности  $5 \times 5$ , определенных для каждого нейрона первого слоя рисунка 6б. При этом каждая таблица создается на основе двух эталонов (рисунок 7), а значения весов  $w_{\tau,\rho}^{(1)}$  аналитически определяются на основе используемых метрических выражений, например, (43) [15].

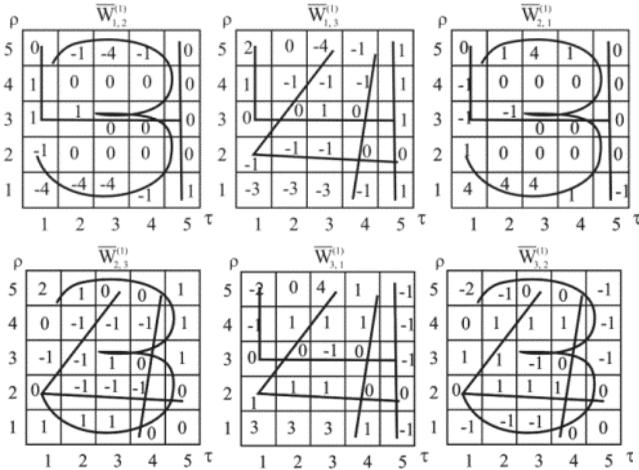


Рис. 7. Таблицы весов для первого слоя нейронной сети

$$w_{\tau,\rho}^{(1)} = \left( \left( \tau_2^{(min)} - \tau \right)^2 + \left( \rho_2^{(min)} - \rho \right)^2 \right) - \left( \left( \tau_1^{(min)} - \tau \right)^2 + \left( \rho_1^{(min)} - \rho \right)^2 \right), \quad (43)$$

где  $(\tau_1^{(min)}, \rho_1^{(min)})$  и  $(\tau_2^{(min)}, \rho_2^{(min)})$  — координаты ближайших ячеек таблиц весов, которые являются активизированными ( $x_{\tau,\rho} = 1$ ) (рисунок 6а) контурами изображений эталонных символов [15] (рисунок 7) относительно текущей ячейки  $(\tau, \rho)$ .

Таблица. 3. Значения функции состояния и функции активации нейронов для элемента  $\bar{X}$  на рисунке 6

первый слой				второй слой				третий слой				$Y_{\text{вых}}$
$N\bar{e} (i, j)$	$Sn_{i,j}^{(1)}$	$f(Sn_{i,j}^{(1)})$		$N\bar{e} k$	$Sn_k^{(2)}$	$f(Sn_k^{(2)})$		$N\bar{e} k$	$Sn_k^{(3)}$	$y_k = f(Sn_k^{(3)})$		
1, 2	-18	$\geq 0$	0	1	-1	$\geq 29$	0	1	2	$\geq 4$	0	-
1, 3	-14	$\geq 0$	0	2	25	$\geq 20$	1	2	9	$\geq 2$	1	{3}
2, 1	18	$\geq 0$	1	3	29	$\geq 33$	0					
2, 3	3	$\geq 0$	1									
3, 1	14	$\geq 0$	1									
3, 2	-3	$\geq 0$	0									

В таблице 3 приведены значения функции состояния и функции активации всех нейронов рисунка 6 для случая, когда на входы сети был подан тестируемый элемент  $\bar{X}$  (рисунок 6а), принадлежащий образу {3}. При этом значения функции состояния и функции активации нейронов для второго и третьего слоя определялись на основе приведенных выражений (8, 13, 22, 23) с использованием полученных весовых и пороговых значений таблицы 1 и таблицы 2, а значения функций активаций нейронов первого слоя определялись условием:

$$\begin{cases} f(Sn_{i,j}^{(1)}) = 1, \text{ если } Sn_{i,j}^{(1)} > 0 \\ f(Sn_{i,j}^{(1)}) = 0, \text{ если } Sn_{i,j}^{(1)} < 0 \end{cases}, \quad (44)$$

где  $Sn_{i,j}^{(1)}$  — значение функции состояния нейрона первого слоя, определяемого как сумма (45), где  $\tau$  и  $\rho$  — номера ячеек таблиц весов на рисунке 7 с размерностью  $5 \times 5$  [14, 15].

$$Sn_{i,j}^{(1)} = \sum_{\tau=1}^5 \sum_{\rho=1}^5 (w_{\tau,\rho}^{(1)} x_{\tau,\rho}). \quad (45)$$

По результатам таблицы 3 можно видеть, что на выходах третьего слоя активизируется выход второго нейрона  $y_2 = 1$ , что соответствует образу  $Y_{вых} = \{3\}$ .

Нужно также сказать, что количество нейронов, которые для схем на рисунках 2, 4, 6 определяются предварительно и строго аналитически, в действительности могут быть определены и в произвольном количестве аналогично тому, как это свойственно для схем многослойного персептрона рисунка 3, для которых определение количества нейронов не имеет точных аналитических выражений и выбираются на основе приближенных оценок. При этом при увеличении количества нейронов второго и третьего слоя связи добавленных нейронов могут рассматриваться как связи  $i \neq k$  и  $j \neq j_k$ , и в этом случае, как было показано выше, результативность работы сети не изменится. Кроме того, упорядоченное расположение самих нейронов в слоях сети, приведенных на рисунках 2, 4, 6, может быть также нарушена, что будет соответствовать схемам персептрона (рисунок 3), для которых, как известно, отсутствует какой-либо порядок в расположении нейронов в слоях сети. При этом хаотичная перестановка нейронов в слоях, например на рисунке 6, не

повлияют на результативность работы сети, поскольку каждый нейрон сохранит свои весовые и пороговые значения, и значения функции состояний и функции активаций нейронов (13, 22) не изменятся. Нужно также сказать, что характеристика метрической меры близости, определяющая значения весов первого слоя может выражаться различными способами, отличными от выражения (43). При этом, чем лучше будет определена мера близости, тем лучше будут все параметры и результативность нейронной сети.

**7. Применение НСММР к другим задачам.** В приведенном примере (рисунок 7) распознаваемые символы (цифры) представляются на основе бинарной матрицы, размерность которой определяет и размерность таблицы весов (на рисунке 7 размерность таблиц весов по вертикали  $R=5$  и по горизонтали  $C=5$ ), а также количество связей  $n_{ce}$  одного нейрона первого слоя, где:

$$n_{ce} = RC . \quad (46)$$

Нужно сказать, что способы представления эталонов образов могут быть различны и представляться не только в виде бинарной матрицы самого изображения. Элементы образа могут быть описаны в виде отдельного набора математически определенных признаков. Такой набор признаков можно представить в виде вектора  $\vec{V}(v_i)$  или одной двумерной кривой рисунка 8, расположив все признаки в определенном порядке, где ось  $x$  определяет номер каждого признака, а ось  $y$  — значение признака. Возможно также выполнить предварительное масштабирование всех параметров объекта так, как, например, было показано в [16], в том случае, если параметры распознаваемого объекта не являются равнозначными или физически не связаны между собой, такие как: скорость, температура, возраст и т.д. Полученную кривую признаков рисунка 8 можно представить в виде бинарной матрицы с определенно выбранной размерностью  $R:C$ . На основе полученного набора эталонных кривых вычисляются таблицы весов. Например, для ячейки ( $c=2, r=3$ ) на рисунке 8 значение веса  $w_{2,3}$  может определиться как:

$$w_{2,3} = (4-3)^2 - (1-3)^2 = -3. \quad (47)$$

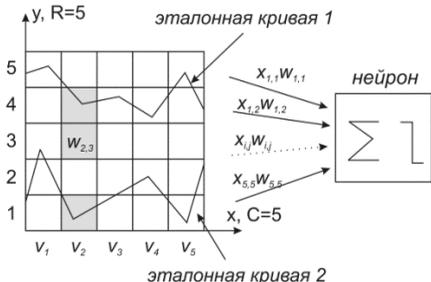


Рис. 8. Таблица весов для сравнения двух эталонных кривых

В частности, для изображений однотонных символов можно аналогичным способом применить инвариантные способы представления символов [17], позволяющие узнавать однотонные изображения с учетом возможных сдвигов, поворотов и масштабирования данного изображения. Такая возможность достигается путем вычисления набора параметров — нормированных моментов [17], определяемых на основе характеристик вертикальных и горизонтальных штрихов изображения. Основываясь на полученном наборе моментов  $M_i$  или нормированных моментов  $N_p$  [17], определенных для всех или только для выбранных вертикальных и горизонтальных строк изображения, создаются кривые, например, как на рисунке 9 [17], которые можно использовать как эталонные кривые по аналогии со схемой на рисунке 8.

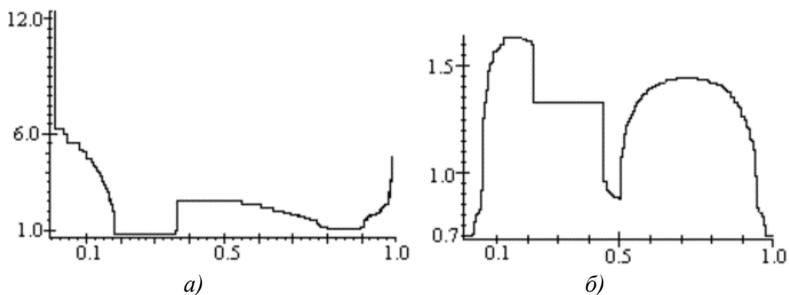


Рис. 9. Все нормированные вертикальные (а) и горизонтальные (б) моменты изображения эталонной буквы «Б»

По этой же аналогии могут решаться и более сложные задачи. Например, для задачи распознавания лиц в качестве эталона может быть вектор  $\vec{V}$ , где каждому параметру  $v_i$  соответствуют выделенные характеристики лица. При этом параметры вектора  $\vec{V}$  могут быть различны и зависеть от способа представления изображения. В качестве

параметров лица могут быть выбраны, например, значения пикселей или изменения градиента пикселей в определенных участках изображения (на рисунке 10а в узлах установленной решетки, на рисунке 10b, с — в особых точках изображения лица). В качестве параметров вектора также могут быть размеры отдельных объектов изображения лица и их расположение друг относительно друга, например: расстояние между глазами, бровями, длина носа, губ, подбородка и т. д (рисунок 10с). В качестве эталонных кривых могут использоваться кривые гистограмм, определенных для каждого изображения лица. Эталонные векторы (кривые) отдельно создаются для каждого распознаваемого лица. Далее строится двухслойный персептрон с полной системой связей, где количество нейронов первого слоя  $n_1$  определяется по выражению  $n_1 = N(N-1)$ , а количество нейронов второго слоя равно количеству эталонов. Для каждого нейрона первого слоя вычисляется таблица весов на основе пары эталонных векторов по схеме на рисунке 8. На основе предложенного выше алгоритма вычисляются весовые и пороговые значения второго слоя. Каждый распознаваемый объект (лицо) предварительно обрабатывается, приводится к единому масштабу, после чего для нормализованного изображения выделяется соответствующий вектор параметров  $\vec{V}_{\text{объекта}}$ . Полученный входной вектор поступает на вход нейронной сети. В результате активный выход нейронной сети определяет соответствие распознаваемого объекта (лица) к тому или иному лицу.

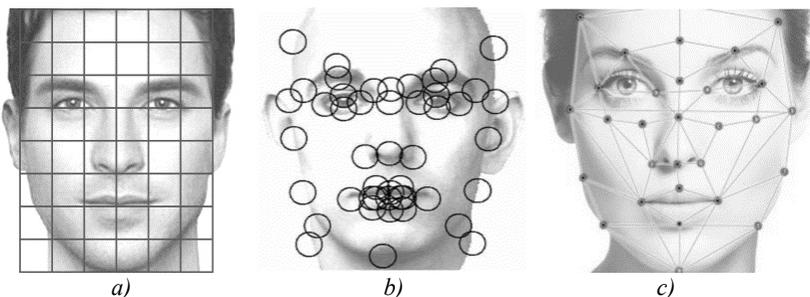


Рис. 10. Выделение точек изображений лиц

Для распознавания лица при разных поворотах головы могут использоваться несколько эталонов одного лица. В этом случае в нейронную сеть добавляется полносвязный третий слой, для которого количество нейронов равно количеству распознаваемых лиц. Далее определяются пороговые и весовые значения для третьего слоя по

приведенному выше алгоритму. Полученная сеть многослойного персептрона может дообучаться классическими алгоритмами обучения. Количество и набор выбранных эталонов, способ представления эталонов, а также размерность таблицы весов и функции, определяющие меру близости (43, 47), будут выбираться разработчиком сети и зависеть от сложности решаемой задачи.

**8. Заключение.** Таким образом, НСММР (рисунки 2, 4) преобразуются в многослойный персептрон с полной системой связей. Исходя из этого можно сказать, что НСММР (рисунки 2, 4, 6) являются частными случаями многослойного персептрона (рисунок 3). При этом, в отличие от классических схем персептрона, НСММР имеют строго определяемую прозрачную архитектуру сети, параметры которой вычисляются аналитически. Соответственно, существующие алгоритмы обучения для классических схем применимы и к схемам сетей на рисунках 2, 4, 6. Процесс обучения заменяется на процесс дообучения, который может выполняться тогда, когда НСММР не обеспечивают необходимую результативность (1) работы нейронной сети для данной задачи.

В итоге алгоритм реализации метода ближайшего соседа с созданием персептрона будет выглядеть следующим образом:

1. Выбирается набор эталонов либо произвольным путем, либо при помощи алгоритма отбора, приведенного в [14].
2. Создается НСММР по схеме на рисунке 4.
3. Вычисляются таблицы весов для первого слоя, где значения весов определяются по выражению используемой метрической меры близости, например, по выражениям (43, 47).
4. Выполняется приведенный выше алгоритм вычисления весовых и пороговых значений для второго и третьего слоя.

### Литература

1. *Азаров И.С., Петровский А.А.* Формирование персональной модели голоса диктора с универсальным фонетическим пространством признаков на основе искусственной нейронной сети // Труды СПИИРАН. 2014. Вып. 5(36). С. 128–151.
2. *Голов Д.В., Красовская Л.В.* Нейронные сети и распознавание рукописных цифр на основе искусственных нейронных сетей // Исследования технических наук. 2014. № 4(14). С. 18–20.
3. *Будко Р.Ю., Старченко И.Б.* Создание классификатора мимических движений на основе анализа электромиограммы // Труды СПИИРАН. 2016. № 3(46). С. 76–89.
4. *Егорова Е.Г., Мусавев А.А.* Система диагностики процесса агломерации // Труды СПИИРАН. 2012. Вып. 3(22). С. 249–259.
5. *Ле Т.Ч.* Сравнение нейронной сети смас и многослойной нейронной сети в задаче обнаружения dos-атак // Нейрокомпьютеры: разработка, применение. 2016. № 7. С. 65–69.

6. *Посягин А.И., Южаков А.А.* Разработка двухслойной нейронной сети для само маршрутизирующегося аналого-цифрового преобразователя на основе нейронной сети // *Электротехника*. 2013. № 11. С. 10–13.
7. *Синчук О.Н., Бойко С.Н.* Нейронные сети и управление процессом управления электроснабжением объектов от комбинированных электрических сетей // *Технічна електродинаміка*. 2014. № 5. С. 53–55.
8. *Тимофеев А.В., Дерин О.А.* Принципы построения иерархических нейросетей для анализа мульти - изображений // *Труды СПИИРАН*. 2009. № 10. С. 160–166.
9. *Титов А.И.* Использование нейросетевой аппроксимации при оценке трудоемкости разработки программного обеспечения // *Труды СПИИРАН*. 2016. Вып. 1(44). С. 20–30.
10. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника. Теория и практика // М.: Мир. 1992. 184 с.
11. *Mehra P., Wah B.W.* Artificial Neural Networks: Concepts and Theory // IEEE Computer Society Press. 1992. vol. 680.
12. *Головкин В.Л.* Нейронные сети: обучение, организация и применение // М.: ИПРЖР. 2001. 256 с.
13. *Биргер И.А.* Техническая диагностика // М.: Машиностроение. 1978. 240 с.
14. *Geidarov P.Sh.* Neural Networks on the Basis of the Sample Method // *Automatic Control and Computer Sci.* New York: Alerton Press. 2009. vol. 43. no. 4. pp. 203–210.
15. *Geidarov P.Sh.* Multitasking application of neural networks implementing metric methods of recognition // *Autom. Remote Control*. 2013. vol. 74. no. 9. pp. 1474–1485.
16. *Гейдаров П.Ш.* Нейронные сети на основе метрических методов распознавания в применении к задачам с нечеткими выводами // *Искусственный интеллект и принятие решений*. Москва. 2010. №2. С. 77–88.
17. *Васин Д.Ю., Аратский А.В.* Распознавание символов на основе инвариантных моментов графических изображений // 25 международная конференция GraphiCon 2015. Москва. 2015. С. 259–264.

**Гейдаров Полад Шахмалы оглы** — кандидат технических наук, доцент, ведущий научный сотрудник института системного управления НАН Азербайджана. Область научных интересов: распознавание образов и сигналов, нейронные сети, обработка изображений, электронное правительство, электронная наука. Число научных публикаций – 28. [pbaku2010@gmail.com](mailto:pbaku2010@gmail.com) ; Азербайджан. г. Баку. ул. С. Вургуна, 13-1-2; тел.: 994507225694.

P.Sh. GEIDAROV

## AN ALGORITHM IMPLEMENTING THE METHOD OF THE NEAREST NEIGHBOR IN A MULTI-LAYER PERCEPTRON

*Geidarov P.Sh. An Algorithm Implementing the Method of the Nearest Neighbor in a Multi-Layer Perceptron.*

**Abstract.** It is known that the implementation technology of recognition problems, based on the classic neural network, has a number of difficulties such as the need to have a large training set; the duration and complexity of learning algorithms; difficulty with the choice of such network design parameters as the number of neurons, layers, links, as well as ways to connect neurons; there may be no successful learning, with the need to re-change the network settings and re-training. In this paper we consider the possibility of creating a multi-layer perceptron with a full system of connections and with a threshold activation function on the basis of algorithms metric methods of recognition and in particular the nearest neighbor algorithm. It is shown that this method allows you to create a fully connected multilayer perceptron, such parameters of which as the number of neurons, layers, as well as the value of the weights and thresholds, are determined analytically. The distribution of weight and threshold values for the second and third layer is also discussed. On this basis, we have proposed an algorithm for calculating the thresholds and weights of a multilayer perceptron and showed an example of its implementation. The possible applications of the network for different tasks are considered.

**Keywords:** neural network architecture, nearest neighbor, multilayer perceptron, neural network training, linear neural network, training set

### References

1. Azarov I.S., Petrovskij A.A. [Training Personal Voice Model of a Speaker with Unified Phonetic Space of Features Using Artificial Neural Network]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2014. vol. 5(36). pp. 128–151. (In Russ.).
2. Golov D.V., Krasovskaja L.V. [Neural networks and recognition of handwritten digits based on artificial neural networks]. *Issledovanija tehniceskikh nauk – Researches of technical sciences*. 2014. vol. 4(14). pp. 18–20. (In Russ.).
3. Budko R.Ju., Starchenko I.B. [Creation of the Facial Gestures Classifier Based on the Electromyogram Analysis]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 3(46). pp. 76–89. (In Russ.).
4. Egorova E.G., Musaev A.A. [Diagnostic system of sintering process.]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2012. vol. 3(22). pp. 249–259. (In Russ.).
5. Le T.Ch. [The comparison of neural network CMAC and multilayer neural network in the task of detection of DoS attacks]. *Nejrokompjutery: razrabotka, primenenie - Neurocomputers: development, application*. 2016. vol. 7. pp. 65–69. (In Russ.).
6. Posjagin A.I., Juzhakov A.A. [Two-layer neural network of self-routing analog-to-digital converter review]. *Jelektrotehnika – Electrical engineering*. 2013. vol. 11. pp. 10–13. (In Russ.).
7. Sinchuk O.N., Bojko S.N. [Neural networks and control of process control power objects from combined electric networks]. *Tehnichna elektrodinamika – Technical electrodynamic*s. 2014. vol. 5. pp. 53–55. (In Russ.).
8. Timofeev A.V., Derin O.A. [Principles of hierarchical neural networks for analysis of multi-images]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2009. vol. 10. pp. 160–166. (In Russ.).

9. Titov A.I. [Software development effort estimation using a neuro network approximation approach]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 1(44). pp. 20–30. (In Russ).
10. Wasserman. F. *Nejrokomputernaja tehnika. Teorija i praktika* [Neurocomputing technique: theory and practice]. M.: Mir. 1992. 184 p. (In Russ.).
11. Mehra P., Wah B.W. *Artificial Neural Networks: Concepts and Theory*. Los Alamitos, CA: IEEE Computer Society Press. 1992. vol. 680.
12. Golovko V.L. *Nejronnye seti: obuchenie, organizacija, primenenie* [Neural networks: training, organization and application]. M.: IPRZhR, 2001. 256 p. (In Russ.).
13. Birger I.A. *Tehnicheskaja diagnostika* [Technical diagnostics]. Moscow: Mashinostroenie, 1978. 240 p. (In Russ.).
14. Geidarov P.Sh. Neural Networks on the Basis of the Sample Method. *Automatic Control and Computer Sci*. New York: Alerton Press. 2009. vol. 43. no. 4. pp. 203–210.
15. Geidarov P.Sh. Multitasking application of neural networks implementing metric methods of recognition. *Autom. Remote Control*. 2013. vol. 74. no. 9. pp. 1474–1485.
16. Geidarov P.Sh. [Neural networks based on metric recognition methods in application to problems with fuzzy conclusions] *Iskusstvennyj intellekt i prinyatie reshenij – Artificial intelligence and decision-making*. Moscow. 2010. vol. 2. pp. 77–88. (In Russ.).
17. Vasin D. YU., Aratskij A. V. [The character recognition based on invariant moments graphics]. *25 mezhdunarodnaya konferenciya GraphiCon2015* [25 International Conference GraphiCon2015]. Moscow. 2015. pp. 259–264. (In Russ.).

**Geidarov Polad Shahmali oglu** - PhD, Associate Professor, leading researcher of the Institute of System Control of Azerbaijan National Academy of Sciences. Research interests: pattern and signals recognition, neural networks, image processing, e-government, e-science. The number of publications – 28. [plbaku2010@gmail.com](mailto:plbaku2010@gmail.com); 13-1-2, S. Vurgun st. Baku. Azerbaijan; phone. 994507225694.

Д.С. ЧИРОВ, О.Г. ЧЕРТОВА, Т.Н. ПОТАПЧУК  
**МЕТОДИКА ОБОСНОВАНИЯ ТРЕБОВАНИЙ К СИСТЕМЕ  
ТЕХНИЧЕСКОГО ЗРЕНИЯ РОБОТОТЕХНИЧЕСКОГО  
КОМПЛЕКСА**

---

*Чиров Д.С., Чертова О.Г., Потапчук Т.Н. Методика обоснования требований к системе технического зрения робототехнического комплекса.*

**Аннотация.** В статье представлена методика обоснования требований к системе технического зрения робототехнического комплекса. Система технического зрения робототехнического комплекса рассматривается как совокупность двух подсистем: измерения и распознавания. Для реализации методики разработаны: методики расчетов частных критериев оптимальности для решения задачи обоснования технических требований и оценки области поиска оптимальных значений характеристик измерительных средств системы технического зрения робототехнического комплекса; рекурсивная процедура выбора оптимальных значений характеристик измерительного средства системы технического зрения робототехнического комплекса; схема компромисса для оценки оптимальных технических характеристик перспективных измерительных средств системы технического зрения робототехнического комплекса в различных технико-экономических концепциях.

Поиск оптимального решения производится по частным критериям: эффективность распознавания, стоимость и риск создания измерительного средства. Для построения рекурсивной процедуры на основе сформулированных допущений и утверждения синтезирован критерий, обеспечивающий поиск Парето-оптимальных решений. Разработанная методика при выборе решения из компромиссной области позволяет учитывать существующую (желательную) технико-экономическую концепцию создания робототехнического комплекса.

**Ключевые слова:** робототехнический комплекс, системы технического зрения, распознавание, измерительные средства, методы оптимизации, компромиссные решения, рекурсивная процедура.

---

**1. Введение.** Вторая половина XX и начало XXI характеризуются бурным развитием робототехники. Именно появление роботов позволило совершить четвертую промышленную революцию [1]. Однако, современная робототехника не ограничивается исключительно промышленностью. С каждым годом все больше робототехнических комплексов (РТК) используется в военных и экстремальных задачах [2, 3, 4], в быту (автомобили-роботы, робот-уборщик) [5, 6], медицине [7] и других отраслях деятельности человека.

В данной статье речь пойдет о системе технического зрения (СТЗ) робототехнического комплекса. Эта система состоит из различных типов датчиков (измерительных средств) и комплекса распознавания [8-10], в качестве измерительных средств обычно используются телекамеры, тепловизоры, лазеры, радио- и ультразвуковые локаторы и т.д. Комплекс распознавания объектов по измерительной информации реализуются в виде программного

обеспечения для специализированной микроЭВМ или микропроцессоров. СТЗ обеспечивает как процесс восприятия окружающих объектов с помощью датчиков, так и их распознавание на основе полученной информации.

Очевидно, что при такой широкой номенклатуре измерительных средств их состав должен определяться на этапе проектирования РТК с учетом функционального назначения РТК и технико-экономических ограничений. В настоящее время в литературных источниках отсутствует единая методическая база для обоснования требований к СТЗ. Имеется ряд работ [11-17], решающих узкоспециализированные задачи по обоснованию требований к СТЗ.

В частности, в [11] представлена методика обоснования требований к основным показателям назначения СТЗ промышленного РТК (вероятности правильного распознавания и СКО измерения погрешности линейного и углового положения объектов). Методика [11] основана на блочно-иерархическом подходе к проектированию, но не дает представления о принципах построения алгоритмов оптимизации технических характеристик СТЗ при заданных показателях эффективности.

В [12] предложена оригинальная методика оптимизации системы технического зрения на базе трех камер. Для расчета оптимального сочетания параметров стереоскопической системы в работе предлагается использовать возможности генетических алгоритмов. В [13] рассмотрена задача построения СТЗ на базе однопозиционных модулей активного радиовидения. Принципы построения СТЗ для наземного РТК с использованием выносного беспилотного аппарата проанализированы в [14]. В [15] предложена комбинированная система технического зрения мобильных роботов на базе обзорной панорамной оптико-электронной системы. Декомпозиция СТЗ мобильного робота, разбитая на три подсистемы — телевизионная для прокладки маршрута, телевизионная объемного зрения и телевизионная для навигации, — представлена в [16]. В [17] предложен вариант системы технического зрения мобильных роботов с супервизорным сетевым управлением. Однако задача обоснования требований к СТЗ в общем виде в [11-17] не рассматривается.

В [18-22] рассматриваются различные алгоритмы обработки информации и принятия решения в системах машинного зрения с конкретными архитектурой и характеристиками.

Таким образом, в настоящее время отсутствует четкая методическая основа для формирования требований к СТЗ РТК как системы «средства измерения — распознавания». В тоже время

существует ряд исследований, направленных на создание методического аппарата обоснования характеристик информационных систем в других областях [23-27]. В данной статье делается попытка расширить имеющийся у авторов статьи задел [28-29] на актуальную задачу формирования требований к СТЗ РТК.

**2. Формализация задачи.** Совокупность задач распознавания объектов СТЗ РТК можно формально представить вектором  $\mathbf{R} = (R_i)$  решаемых задач, где  $R_i$  —  $i$ -я задача распознавания,  $i=1...N$ ,  $N$  — количество задач распознавания. Распознавание объектов производится по совокупности разнотипных видов информации, получаемой измерительными средствами РТК  $\mathbf{G}$ . Условно данную информацию можно разделить на три класса:

- координатная измерительная информация —  $\mathbf{KI}$ ;
- некоординатная измерительная информация —  $\mathbf{NKI}$ ;
- априорная информация об объекте —  $\mathbf{AI}$ .

Полученная измерительным комплексом СТЗ РТК информация преобразуется для получения признаков распознавания  $\mathbf{P}$ . Далее принимается решение о классе (типе) объекта путем сравнения формализованного описания объекта (признаков  $\mathbf{P}$ ) с формализованными описаниями отдельных классов в соответствии с принятым в процедуре сравнения решающим правилом. Таким образом, процесс распознавания объектов СТЗ РТК можно представить в виде:

$$\mathbf{G} \rightarrow (\mathbf{KI}, \mathbf{NKI}, \mathbf{AI}) \rightarrow \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{R}. \quad (1)$$

При появлении новых измерительных средств  $\mathbf{G}'$ , позволяющих получать новые для РТК виды измерений  $\mathbf{KI}'$  и  $\mathbf{NKI}'$ , выражение (1) будет выглядеть как:

$$(\mathbf{G} + \mathbf{G}') \rightarrow (\mathbf{KI} + \mathbf{KI}', \mathbf{NKI} + \mathbf{NKI}', \mathbf{AI}) \rightarrow (\mathbf{P} + \mathbf{P}') \rightarrow \mathbf{R}. \quad (2)$$

В постановке (2) измерительный комплекс СТЗ РТК изменяется в части:

- новых тактико-технических требований к измерительным комплексам для получения информации;
- новых методов и алгоритмов предварительной обработки информации для формирования признаков распознавания  $\mathbf{P}'$ ;
- новых методов и алгоритмов распознавания объектов.

Причем изменения процесса распознавания объектов СТЗ РТК происходят при следующих ограничениях и условиях:

1. РТК обеспечивает решение своих функциональных задач по информации от существующих измерительных средств на определенном уровне. Изменение состава и характеристик измерительных средств СТЗ РТК должно обеспечивать повышение уровня решения задач, в том числе распознавания объектов, то есть:

$$f\{\mathbf{R}(\mathbf{G} + \mathbf{G}')\} > f\{\mathbf{R}(\mathbf{G})\}, \quad (3)$$

где  $f$  — функция оценки качества распознавания объектов СТЗ РТК.

Условие (3) введено с целью исключения ситуации, когда увеличение количества (или типов) измерительных средств СТЗ и их характеристик не приводит к повышению уровня решения задач распознавания. Хотя в большинстве случаев расширение номенклатуры измерительных средств СТЗ и улучшение их характеристик приводят к повышению вероятности распознавания объектов. В [30] показано, что за счет введения в состав СТЗ дополнительных измерительных каналов других спектральных диапазонов повышается вероятность распознавания объектов. В [12] повышение вероятности распознавания объектов стереоскопической СТЗ достигается за счет применения дополнительной ТВ-камеры.

2. Объектами наблюдения РТК являются объекты искусственного и естественного происхождения, а объектом анализа — окружающая обстановка. Количество и конструктивно-габаритные характеристики объектов наблюдения являются динамически изменяющимися параметрами во времени, то есть при построении процесса распознавания объектов необходимо учитывать динамику и полисценарность окружающей обстановки.

3. Для повышения эффективности распознавания объектов РТК требуются новые виды высокоинформативных измерений. Получение новых видов информации требует создания новых средств измерения, новых методов и моделей предварительной обработки и распознавания объектов по новым видам измерений. Причем средства получения измерений должны создаваться с учетом возможностей новых методов распознавания объектов.

Таким образом, общая постановка задачи обоснования технических требований к измерительным средствам СТЗ РТК заключается в следующем.

Пусть имеется измерительное средство СТЗ РТК  $g_i$ , принадлежащее множеству технически реализуемых измерительных средств  $G$ . Каждое средство описывается набором параметров

$g_i = \{\{p\}_i, \{x\}_i, \{r\}_i\}$ , где  $\{p\}_i$  — признак вида средства;  $\{x\}_i$  — тактико-технические характеристики средства;  $\{r\}_i$  — признаки вида информации получаемой средством  $i$ -го вида. Набор возможных векторов  $\{x\}_i$  образует дискретное множество тактико-технических характеристик измерительных средств СТЗ РТК **X**.

Показателем технической реализуемости  $g_i$  определим технологический риск создания средства —  $\mu_i$ . Под технологическим риском создания средства  $g_i$  будем понимать  $\mu_i = 1 - P(g_i, t, C)$ , где  $P(g_i, t, C)$  — вероятность создания средства  $g_i$  стоимостью  $C$  в заданный период времени  $t$ .

Целью создания измерительного средства СТЗ РТК  $g_i$  определим повышение эффективности решения задачи распознавания объектов  $W$  робототехническим комплексом. Эффективность решения задачи распознавания объектов зависит от качества и полноты используемой информации и характеристик алгоритмов распознавания.

Под эффективностью решения задачи распознавания объектов  $W$  будем понимать соответствие РТК требованиям технического задания в части характеристик распознавания.

Создание нового или модернизация существующего измерительного средства РТК может потребовать модернизации или создания новых алгоритмов распознавания, обеспечивающих решение задач распознавания объектов по информации от различных измерительных средств СТЗ РТК с эффективностью  $W$ .

Допустимые варианты подсистемы распознавания СТЗ (программ и алгоритмов) представим в виде дискретного множества  $\{Y_\beta\}$ ,  $\beta = 1, 2, \dots, \beta, \dots, \bar{\beta}$ .

Анализ хода выполнения работ по созданию измерительных средств и подсистемы распознавания СТЗ РТК показывает, что принцип согласованности характеристик измерительных средств и параметров подсистемы распознавания СТЗ не всегда выполняем в силу ряда объективных причин. Данное обстоятельство приводит к возникновению потерь эффективности решения задач распознавания объектов. Основной причиной несогласованности характеристик  $g_i$  и параметров  $\{Y_\beta\}$  является то, что требования к объему и качеству измерительной информации должны предъявляться с учетом возможностей и ограничений алгоритмов распознавания, реализованных в  $\{Y_\beta\}$ . В свою

очередь, оценить применимость и эффективность новых методов распознавания объектов возможно только с учетом поставляемого объема и качества измерительной информации от  $g_i$ . Таким образом, для каждого  $g_i$  необходимо определить соответствующие параметры  $\{Y_\beta\}$ , то есть рекурсия должна проводиться не только по характеристикам  $g_i$ , но и по параметрам  $\{Y_\beta\}$ .

Условия и ограничения создания измерительного средства СТЗ РТК заданы положениями  $D$ , включающими:

$W^{ТРЕБ}$ ,  $W^{СУЩ}$  — требуемая и существующая эффективность решения задач распознавания объектов по измерительной информации от комплекса измерительных средств РТК;

$\mu_{\max}$  — ограничения на максимальную величину технологического риска создания средства;

$C_{\lim}$  — ограничения на максимальную величину выделяемых ассигнований, привязанные к рассматриваемому временному периоду, на создание и модернизацию измерительных средств СТЗ РТК.

Таким образом, обоснование технических требований к измерительному средству СТЗ РТК может быть сведено к выбору из множества вариантов средств  $G$  такого варианта средства  $g_i$ , для которого некоторая целевая функция  $Q$  достигает экстремума. Отсюда задача обоснования технических требований представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} Q_1(g_i, \{Y_\beta\}) \rightarrow \max \\ Q_2(g_i) \rightarrow \max \\ Q_3(g_i) \rightarrow \max \\ \varphi_1(g_i, \{Y_\beta\}, V) \geq \Delta W, \\ \varphi_2(g_i) \leq C_{\lim} \\ \varphi_3(g_i, t) \leq \mu_{\max} \\ g_i \in G \end{cases} \quad (4)$$

где  $Q_1$  — показатель эффективности решения задачи распознавания объектов РТК,  $Q_2$  — показатель стоимости создания измерительного средства СТЗ РТК  $g_i$ ,  $Q_3$  — показатель технологического риска создания  $g_i$  с учетом ограничений:

$\varphi_1$  — средство должно обеспечивать повышение эффективности решения задач распознавания объектов по информации от комплекса измерительных средств СТЗ РТК не менее чем на  $\Delta W = W^{ТРЕБ} - W^{СУЩ}$  ;

$\varphi_2$  — ограничение на максимальную стоимость средства;

$\varphi_3$  — ограничение на максимальный технологический риск создания средства;

средство должно быть технически реализуемо.

Многокритериальность задачи обоснования тактико-технических характеристик измерительного средства СТЗ РТК обусловлена следующими причинами:

— множественность тактико-технических требований, которые предъявляются к средству;

— необходимость обеспечения функциональной полноты показателей, конкретизирующих оптимальные свойства измерительного средства РТК при одновременной их физической наглядности.

Анализ проводимых работ по созданию измерительных средств СТЗ РТК показывает, что критерий эффективности решения задач распознавания является противоречивым по отношению к стоимости и технологическому риску создания средства  $g_i$ . Для решения оптимизационных задач такого типа хорошо себя зарекомендовали методы поиска Парето-оптимальных решений [31, 32], суть которых сводится к поиску эффективных точек и областей компромисса  $G_P$ , то есть областей, в которых нельзя улучшить ни один критерий, не ухудшив при этом остальные. Поскольку в эффективных точках векторный критерий оптимальности  $Q$  является не улучшаемым по всем частным критериям одновременно, то эти точки также называются не улучшаемыми решениями или оптимальными по Парето. Отсюда решением задачи (4) является нахождение точки  $g^{opt}$ , которая находится в области оптимальной по Парето, то есть  $g^{opt} \in G_P$ . В соответствии с принятым подходом решение исходной задачи (4) разбито на два последовательных этапа:

*Этап 1.* Определение подмножества средств  $G_P$ , оптимальных по Парето, и соответствующую ему область компромиссов  $D_k$  при соблюдении заданных ограничений.

*Этап 2.* Определение экстремума  $Q^{opt} \in D_k$  в соответствии с выбранными коэффициентами компромисса  $k_1, k_2, k_3$  и соответствующей ему точки  $g^{opt}$ .

В формализованном виде процесс обоснования тактико-технических требований к измерительным средствам СТЗ РТК включает последовательное решение следующих задач:

— оценка качества измерительной информации  $A$ , получаемой средством  $g_i$  с тактико-техническими характеристиками  $\{x\}_i$  в целевой обстановке  $V$ , которая задается функционалом отображения:

$$f_1(g_i, V) \rightarrow A_i; \quad (5)$$

— оценка эффективности решения задачи распознавания объектов СТЗ РТК при вводе в ее состав измерительного средства  $g_i$ , обеспечивающего получение измерений с качеством  $A$  при заданных характеристиках подсистемы распознавания СТЗ  $\{Y_\beta\}$ :

$$f_2(g_i, A_i, \{Y_\beta\}) \rightarrow W_i; \quad (6)$$

— оценка стоимости измерительного средства  $g_i$ :

$$f_3(g_i) \rightarrow C_i; \quad (7)$$

— оценка технологического риска создания средства  $g_i$ :

$$f_4(g_i) \rightarrow \mu_i; \quad (8)$$

— формирование подмножества решений  $\bar{g}^0 \in G$  оптимальных по Парето в соответствии с заданными ограничениями:

$$f_5(G, W, C, \mu) \rightarrow G_p; \quad (9)$$

— выбор из подмножества  $G_p$  оптимального с точки зрения выбранной технико-экономической концепции  $k$  измерительного средства  $g^{opt}$  с тактико-техническими характеристиками  $\{x^{opt}\}_i$ :

$$f_6(G_p, k) \rightarrow g^{opt}. \quad (10)$$

Функционалы  $f_5(\dots)$  и  $f_6(\dots)$  задают алгоритмы, а функционалы  $f_1(\dots)$ ,  $f_2(\dots)$ ,  $f_3(\dots)$  и  $f_4(\dots)$  описывают основные операции рекурсивного многопараметрического метода построения подмножества  $G_p$ .

Общий алгоритм обоснования технических характеристик измерительных средств СТЗ РТК можно представить в виде:

$$f_6 \langle f_5 [f_1(\dots) \rightarrow f_2(\dots) \rightarrow f_3(\dots) \rightarrow f_4(\dots)] \rangle \rightarrow g^{opt}. \quad (11)$$

Исходя из общей постановки задачи, для реализации метода обоснования технических требований к измерительным средствам СТЗ РТК разработаны:

— методики расчетов частных критериев оптимальности для решения задачи обоснования технических требований и оценки области поиска оптимальных значений характеристик измерительных средств СТЗ РТК;

— рекурсивная процедура выбора оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК;

— схема компромисса для оценки оптимальных технических характеристик перспективного измерительных средств СТЗ РТК в различных технико-экономических концепциях.

### 3. Методики расчетов частных критериев оптимальности.

Эффективность распознавания объектов  $Q_1$  РТК носит вероятностный характер и представляется совокупностью вероятностей решения  $k$ -й задачи распознавания  $P_k$  на интервале времени  $\Delta T$ . Оценку данных вероятностей целесообразно осуществлять с использованием штатного программного обеспечения СТЗ РТК, на котором предполагается установка измерительного средства.

Эффективность решения  $k$ -ой задачи распознавания объектов РТК представим в виде степени соответствия полученной вероятностной оценки  $\hat{P}_k$  и требуемой  $P_k^0$ :

$$q_k = P_k^0 - \hat{P}_k, \text{ если } P_k^0 \geq \hat{P}_k, \quad (12)$$

$$q_k = 0, \text{ если } P_k^0 < \hat{P}_k.$$

Тогда общая оценка эффективности решения задачи распознавания объектов СТЗ РТК будет иметь вид:

$$Q_1 = \frac{1}{\sum_{k=1}^N q_k}, \text{ если } \sum_{k=1}^N q_k \neq 0, \quad (13)$$

$$Q_1 = 1, \text{ если } \sum_{k=1}^N q_k = 0.$$

Таким образом, оценка эффективности задачи распознавания объектов СТЗ РТК будет характеризоваться коэффициентом  $Q_1 \in 0..1$  и зависеть от степени соответствия вероятности решения каждой задачи распознавания заданному в техническом задании на РТК значению.

Стоимость создания измерительного средства СТЗ РТК  $\hat{C}(\bar{g})$  имеет ограничения  $C_{\lim}$  на максимальную величину выделяемых ассигнований, привязанных к рассматриваемому временному периоду, на создание и модернизацию измерительных средств СТЗ РТК. Отсюда относительная оценка стоимости средства с характеристиками  $\bar{g}$  будет иметь вид:

$$Q_2 = \frac{C_{\lim} - \hat{C}(\bar{g})}{C_{\lim}}. \quad (14)$$

Выбор такого способа оценки критерия стоимости создания измерительного средства СТЗ РТК объясняется тем, что получаемый критерий носит безразмерный характер и  $Q_2 \in 0..1$ , что позволяет использовать единый масштаб при расчете критерия  $Q^{opt}$ , на этапе выбора оптимального решения в соответствии с выбранной схемой компромисса (блок 9 на рисунке 1).

Непосредственно расчет  $\hat{C}(\bar{g})$  целесообразно осуществлять с использованием метода сопоставления аналогов. Суть данного метода заключается в оценке стоимости нового образца техники путем пересчета стоимости ближайшего к нему аналога  $C_{ан}$  через коэффициенты новизны  $K_n$  и эффективности  $K_{эф}$ . Общая оценка стоимости средства  $\bar{g}$  с использованием метода сопоставления аналогов будет иметь вид [33]:

$$\hat{C}(\bar{g}) = C_{ан} \cdot K_n + C_{ан} \cdot K_{эф}. \quad (15)$$

В существующих ограничениях на решение задачи наиболее предпочтительным методом оценки технологического (проектного) риска создания измерительного средства СТЗ РТК является определение меры достижимости (реализуемости) заданных ТТХ  $\bar{g}$ .

Одним из эффективных методов оценки рисков создания сложной технической системы является метод «закрепленных шкал» [34]. Применительно к задаче оценки реализуемости

измерительного средства РТК с характеристиками  $\bar{g}$  данный метод можно представить как оценку вероятности технического успеха, получаемую с учетом весов частных факторов [34]:

$$Q_3(\bar{g}) = 0.54 \ln\{R(\bar{g})\} + 0.04, \quad (16)$$

где  $R(\bar{g}) = \sum_{i=1}^N B_i \eta_i$  — итоговая оценка реализуемости в баллах,  $B_i$  — оценка  $i$ -го фактора реализуемости;  $\eta_i$  — вес  $i$ -го фактора. Выражение (16) является аппроксимацией изменения вероятности технического успеха (реализуемости) от бальной (экспертной) оценки реализуемости проекта.

Предлагаемые методики расчета частных критериев оптимальности обеспечивают расчет данных критериев с учетом ограничений на решение задачи: отсутствие конкретной детализации технических решений для реализации оцениваемых  $\bar{g}$ ; отсутствие данных о технологических возможностях предполагаемого исполнителя; недостаточность информации об имеющихся аналогах создаваемого измерительного средства СТЗ РТК. Применение экспертных оценок по фиксированным шкалам и аппроксимационные выражения позволяют проводить упрощенный, но адекватный расчет стоимости и технологического риска создания измерительного средства СТЗ РТК.

**4. Рекурсивная процедура выбора оптимальных значений характеристик измерительного средства РТК.** Анализ существующих методов показал, что для определения области поиска оптимальных характеристик измерительного средства СТЗ РТК целесообразно использовать метод кривых развития технических систем Альтшуллера [35]. Методика оценки области поиска значений характеристик измерительных средств СТЗ РТК представляется следующим образом:

— определение перечня технических характеристик средства  $g$  заданного типажа  $p_k$ ;

— формирование пар  $\langle x_j \Rightarrow Z_j \rangle_t$  за предыдущий период времени  $T$ , где  $x_j$  — значение  $j$ -той технической характеристики,  $Z_j$  — реализующая данное значение технической характеристики технология,  $t \in T$  — временной период, когда  $x_j \Rightarrow Z_j : true$ . Текущее значение  $x_j$

принимается за нижнюю границу  $a_j$  области поиска оптимального значения  $j$ -й технической характеристики средства  $g$  типажа  $p_k$ ;

— оценка уровня развития  $K$  технологии  $Z_j$ , реализующей значение  $x_j$  в настоящий момент времени, с использованием  $S$ -функции, где [35]:

$$K = \frac{L}{(a + e^{b \cdot e^{-\beta \cdot t}})}, \quad (17)$$

где  $L, a, b, \beta$  — коэффициенты, определяемые по статическим данным;  $t$  — время;

— прогноз развития  $x_j$  с учетом уровня развития  $K$ ;

— прогнозное значение  $x_j$  принимается за верхнюю границ  $b_j$  области поиска оптимального значения  $j$ -й характеристики средства  $g$  типажа  $p_k$ .

Для разработки рекурсивной процедуры выбора оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК сформулированы следующие допущения и доказано утверждение:

Допущение 1: процедура выбора оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК  $g^{opt}$  должна осуществляться для каждого варианта подсистемы распознавания  $\{Y_j\}$ ;

Допущение 2: для каждого варианта подсистемы распознавания СТЗ предполагается создание (модернизация) определенного типажа измерительных средств:

$$Y_j \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{p\}^j \\ \{r\}^j \end{array} \right\}, \quad (18)$$

обеспечивающих получение определенных видов измерений  $p_n \rightarrow \{r\}_n$ ;

Допущение 3: зависимость частных показателей эффективности от технических характеристик измерительного средства СТЗ РТК является монотонной функцией:

$$\forall x_k, y_k \in a_k \dots b_k \quad x_k > y_k \Rightarrow Q_j(x_k) \geq Q_j(y_k), \quad j = 1, 2, 3. \quad (19)$$

Допущение 3 о монотонности функции сформулировано исходя из следующих положений. На качественном уровне зависимость эффективности решения задачи распознавания от технических характеристик средств измерения известна: чем выше качество измерений (информативность, точность и т.д.), тем эффективней решение задач распознавания. Например, чем меньше значение разрешающей способности оптической системы, тем более детальным получается зарегистрированное изображение объекта, и соответственно, тем выше вероятность его правильного распознавания. Данный факт подтверждается как классическими трудами по распознаванию образов [36-38], так и современными исследователями [39-41] в различных прикладных областях. Как правило, эта зависимость имеет монотонный характер, исключение может составить случай, когда улучшение технических характеристик измерительного средства не приводит к повышению вероятности правильного распознавания и теоретически может привести к ухудшению результата из-за особенностей алгоритма распознавания. Однако, сделанные нами допущения 1 и 2, а также функция ограничения  $\varphi_1$  позволяют избежать данной ситуации при решении поставленной задачи.

Аналогичные ограничения справедливы для показателей стоимости [33, 42, 43] и риска.

Вид таких функций можно описать квадратичным полиномом (квадратичными функциями) вида:

$$y = ax^2 + bx + c. \quad (20)$$

Исходя из принятого способа оценки векторного критерия оптимальности, целевая функция решаемой задачи представляет собой результат суммирования трех функций (частных критериев  $Q_j(\bar{g})$ ). Таким образом, целевая функция является суммой трех квадратичных функций и, соответственно, сама является квадратичной или линейной (при  $a_1 + a_2 + a_3 = 0$ ).

Производная в каждой точке функций частных критериев и итоговой целевой функции может быть представлена в виде касательной прямой:

$$y' = 2ax + b = kx + b, \quad (21)$$

где  $k$  характеризует скорость и направление изменения значения функции, при  $k > 0$  — функция возрастает,  $k < 0$  — убывает,  $x$  — одна тактико-техническая характеристика измерительного средства,

$x \in x_0 \dots x_N$ . Просуммировав производные функций частных критериев эффективности в точке  $x_i$  с учетом знака коэффициента  $k$  каждой функции (для  $Q_1$  коэффициент  $k > 0$ , а для  $Q_2$  и  $Q_3$  — меньше 0), получаем, что итоговая целевая функция возрастает при условии:

$$k_1 > -(k_2 + k_3)$$

или

$$\Delta Q_1^{(i)} > \Delta Q_2^{(i)} + \Delta Q_3^{(i)}. \quad (22)$$

Аналогичный вывод можно сделать в случае описаний функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$  логарифмическим полиномом или линейной зависимостью. Отсюда можно сформулировать утверждение.

Утверждение: если функция  $f(x)$  является суммой трех монотонных функций  $f_1(x)$ ,  $f_2(x)$ ,  $f_3(x)$ , определенных на интервале  $x \in [a, b]$ , причем  $f_1(x)$  — возрастающая, а  $f_2(x)$  и  $f_3(x)$  — убывающие, то  $f(x)$  возрастает на интервале  $x + \Delta x$ , если:

$$\Delta f_1(x + \Delta x) > \Delta f_2(x + \Delta x) + \Delta f_3(x + \Delta x),$$

и убывает, если:

$$\Delta f_1(x + \Delta x) < \Delta f_2(x + \Delta x) + \Delta f_3(x + \Delta x),$$

а при:

$$\Delta f_1(x + \Delta x) = \Delta f_2(x + \Delta x) + \Delta f_3(x + \Delta x)$$

точка  $x + \Delta x$  является точкой перегиба.

Исходя из сформулированных допущений и утверждения, *правило (критерий)* формирования области Парето-оптимальных решений  $G_p$  будет иметь вид:

$$\begin{cases} \Delta Q_1^{(i)} > \Delta Q_2^{(i)} + \Delta Q_3^{(i)} \\ \Delta Q_1^{(i)} \geq \Delta W \\ C(g_i) \leq C_{\text{lim}} \\ R(g_i) \leq \mu_{\text{max}} \end{cases}. \quad (23)$$

Правило (критерий) (23) проверки оптимальности решения используется в логическом блоке 6 рекурсивной процедуры расчета

оптимальных значений технических характеристик измерительного средства СТЗ РТК.

На рисунке 1 представлена процедура расчета оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК для конкретного варианта подсистемы распознавания.



Рис. 1. Процедура расчета оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК для конкретного варианта подсистемы распознавания

Характеристики подсистемы распознавания задаются в блоках 2 и 3 и не меняются в процессе расчета оптимальных значений характеристик измерительного средства. Результатом работы блока 3 являются оценки вероятностей решения задач распознавания  $\hat{P}_k$  СТЗ РТК с измерительным средством  $g_i$ . В блоках 4 и 5 производится расчет (оценка) частных критериев оптимальности в соответствии с (13), (14) и (16). Полученные оценки частных критериев проверяются в блоке 6 на соответствие (23). В случае если (23) выполняется, то измерительное средство  $g_i$  включается в область решений  $G_p$ , в противном случае происходит коррекция характеристик  $g_i$  в блоке 7. Коррекция характеристик  $g_i$  производится путем последовательного перебора возможных значений  $\{x\}_i$ . Так как  $g_i$  может удовлетворять (23) при различных значениях  $\{x\}_i$ , то после включения  $g_i$  в область решений  $G_p$ , перебор значений  $\{x\}_i$  продолжается до исключения всех вариантов. В блоке 9 из сформированной области решений  $G_p$  выбирается оптимальное в заданной технико-экономической концепции решение  $g_{opt}$ .

**5. Схема компромисса для оценки оптимальных ТТХ перспективного измерительных средств РТК.** Выбор варианта решения (т.е.  $g_{opt}(Y_j)$ ) из области  $G_p$  осуществляется исходя из схемы компромисса и зависит от квалификации эксперта.

Для повышения достоверности экспертных оценок выбраны схемы компромисса для различных концепций технико-экономической политики, используемых для создания сложных технических систем [28, 31, 44-46].

Предложенная схема (рисунок 2) позволяет организовать систему поддержки решения при выборе экспертом схемы компромисса для нахождения оптимального решения из области  $G_p$ .

На рисунке 2 представлены два варианта технико-экономической политики заказчика. Первый вариант — поддержание РТК на должном уровне и недопущение критического отставания от конкурентов. При этом варианте технико-экономической политики заказчик при минимальных финансовых затратах и технологическом риске хочет получить минимально достаточный для выполнения своих задач технический результат. При этом варианте политики значимость частных критериев может быть одинакова, то есть  $w_1 = w_2 = w_3$ , или

частные критерии стоимости и риска будут являться более значимыми, чем частный критерий эффективности. В этом случае в блоке 9 рисунка 1 целесообразно использовать лексикографическую схему компромисса, схему последовательных уступок или схему на основе линейной свертки [44-46].



Рис. 2. Схема выбора компромисса при решении задачи оптимизации в зависимости от концепции технико-экономической политики

Второй вариант политики — обеспечение технологического преимущества над конкурентами. В этом варианте частный критерий эффективности является наиболее значимым. Поэтому в блоке 9 целесообразно использовать схемы на базе метода главного критерия [44-46], последовательных уступок или лексикографическую схему.

Во всех вариантах политики, в том числе и в комбинированных, конкретные значения коэффициентов важности частных критериев  $w_1, w_2, w_3$  выбираются исходя из требуемых соотношений между ценой, риском и эффективностью. Наиболее универсальными являются лексикографическая схема и схема последовательных уступок.

**6. Заключение.** Робототехника является активно развивающейся отраслью науки и техники. Система технического зрения — одна из ключевых систем любого робототехнического комплекса. Ошибки при формировании требований к СТЗ могут привести к низкой эффективности РТК или к необоснованному повышению стоимости

этой системы. Анализ существующих работ в этой области позволяет утверждать, что единый подход к обоснованию требований к СТЗ РТК как системе «средства измерения — распознавание» не рассмотрен.

Проведенные исследования показали, что для формирования требований к измерительным средствам СТЗ РТК целесообразно использовать метод на основе рекурсивной многокритериальной оптимизации, заключающийся:

— в двухэтапной процедуре сужения области поиска оптимальных значений характеристик измерительного средства СТЗ РТК на основе математического аппарата прогнозирования параметров технических систем и формирования области компромиссных решений с использованием новых синтезированных: критерия, допущений и утверждения;

— в выборе из сформированной области поиска оптимального решения с учетом схемы компромисса, соответствующей заданной концепции техническо-экономической политики заказчика.

Разработанный методический аппарат планируется использовать при формировании требований к СТЗ РТК специального и двойного назначения.

### Литература

1. Колесников Н.Е., Кошелева Т.Н. Промышленные роботы и их комплексы как важнейшая форма высокопроизводительных рабочих мест // Экономика и управление. 2014. № 10(108). С. 29–32.
2. Хрипунов С.П., Благодаряцев И.В., Чиров Д.С. Военная робототехника: современные тренды и векторы развития // Тренды и управление. 2015. № 4. С. 410–422.
3. Латиов В.С. и др. Перспективы разработки автономных наземных робототехнических комплексов специального военного назначения // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 1(174). С. 156–168.
4. Мотиенко А.И., Ронжин А.Л., Павлюк Н.А. Современные разработки аварийно-спасательных роботов: возможности и принципы их применения // Научный вестник НГТУ. 2015. Том 60. № 3. С. 147–165.
5. Ермишин К.В., Ющенко А.С. Коллаборативные мобильные роботы – новый этап развития сервисной робототехники // Робототехника и техническая кибернетика. 2016. № 3(12). С. 3–9.
6. Mohameda Z., Capi G. Development of a New Mobile Humanoid Robot for Assisting Elderly People // Procedia Engineering. 2012. vol. 41. pp. 345–351.
7. Сенчик К.Ю., Харламов В.В., Грязнов Н.А., Лопота А.В. О перспективах применения робототехники в медицине // Труды международной научно-технической конференции «Экстремальная робототехника». Санкт-Петербург: Изд-во «Политехника-сервис». 2015. С. 40–43.
8. Мошкин В.И., Петров А.А., Титов В.С., Якушенков Ю.Г. Техническое зрение роботов // М.: Машиностроение. 1990. 272 с.
9. Шапиро Л., Стокман Дж. Компьютерное зрение // Бинوم. 2006. 752 с.
10. Boguslavsky A.A., Sokolov S.M. The real time Vision System for small-sized target tracking // Int. J. Computing Science and Mathematics. 2007. vol. 1. no. 1. pp. 115–127.

11. *Колочкин В.Я., Нгуен К.М.* Методика обоснования требований к системам технического зрения промышленных робототехнических комплексов // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2015. №7. С. 198–205.
12. *Егоров И.В., Лачугин Д.В.* Оптимизация параметров системы технического зрения на базе трех камер // Вестник СГТУ. 2012. № 1(64). Вып. 2. С. 393–397.
13. *Клоков А.В., Якубов В.П., Шпилов С.Э., Юрченко В.И.* Разработка системы технического зрения для роботов на основе радиовидения с использованием фокусирующих линз Люнеберга // Труды СПИИРАН. 2016. Вып. 2(45). С. 130–140.
14. *Аникин В.А. и др.* Облик выносной системы технического зрения на базе БЛА для робототехнических мобильных наземных комплексов // Известия ЮФУ. Технические науки. 2014. №3(152). С. 70–77.
15. *Волосатова Т.М., Марченков А.М., Чичварин Н.В.* Разработка комбинированной системы технического зрения мобильных роботов // Материалы Всероссийской научно-технической конференции молодых ученых, аспирантов и студентов. 2016. С. 355–358.
16. *Михайлов Б.Б.* Техническое зрение мобильных роботов // Труды научно-технической конференции-семинара «Техническое зрение в системах управления мобильного объекта-2010». 2010. Вып. 4. С. 191–201.
17. *Андреев В.П., Пряничников В.Е.* Системы технического зрения мобильных роботов с супервизорным сетевым управлением // Механика, управление и информатика. ИКИ РАН. 2012. №8. С.58–61.
18. *Желтов С.Ю., Визильтер Ю.В.* Перспективы интеллектуализации систем управления ЛА за счет применения технологий машинного зрения // Труды МФТИ. 2009. Том 1. №4. С. 164–181.
19. *Tao L, Matuszewski B.J.* Robust deformable shape reconstruction from monocular video with manifold forests // Machine Vision and Applications. 2016. vol. 27. Issue 6. pp 801–819.
20. *Pu Y.-R., Chen Y.-J., Lee S.-H.* Fire recognition based on correlation of segmentations by image processing techniques // Machine Vision and Applications. 2015. vol. 26. Issue 7. pp 849–856.
21. *Cubero S. et al.* Advances in Machine Vision Applications for Automatic Inspection and Quality Evaluation of Fruits and Vegetables // Food and Bioprocess Technology. 2011. vol. 4. Issue 4. pp 487–504.
22. *Panfilov P.B., Korolev S.V.* Integration of 3D dynamic models being created by 3D machine vision system into telerobotics applications // Automation and Remote Control. 2011. vol. 72. Issue 5. pp 1102–1113.
23. *Полтавский А.В.* Оптимизация характеристик когерентных систем обнаружения объектов на основе имитационного моделирования // Двойные технологии. 2013. № 1(62). С. 43–49.
24. *Полтавский А.В.* Математическое моделирование в формировании облика сложной системы // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. 2012. № 175. С. 130–141.
25. *Губонин Н.С.* Оптимизация по Парето при проектировании сложных информационных систем // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. 2012. № 4. С. 7–12.
26. *Денисов А.В.* Моделирование оптико-электронных систем космического назначения // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2015. Т. 58. № 11. С. 882–889.
27. *Бусленко Н.П.* Моделирование сложных систем // М: Наука. 1968. 356 с.
28. *Чиров Д.С.* Методический подход к обоснованию технических характеристик комплексов радиомониторинга для решения задач распознавания источников радиоизлучения // Т-Comm. 2011. № 11. С. 85–87.

29. *Чиров Д.С., Терешонок М.В., Елсуков Б.А.* Метод и алгоритмы оптимизации технических характеристик комплексов радиомониторинга // Т-Comm. 2014. Т. 8. № 10. С. 88–92.
30. *Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю.* Проблемы технического зрения в современных авиационных системах // Техническое зрение в системах управления мобильными объектами-2010: Труды научно-технической конференции-семинара: КДУ. 2011. Вып. 4. С. 11–44.
31. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач // М.: Наука. 1982. 39 с.
32. *Ногин В.Д.* Принятие решения в многокритериальной среде: количественный подход // М.: ФизматИсТ. 2005. 144 с.
33. *Сорокин В.А.* Развитие методологии ценообразования как ключевая задача в повышении оснащенности Вооруженных Сил РФ вооружением, военной и специальной техникой // Вооружение и экономика. 2008. № 2(2). С. 19–31.
34. *Гольдштейн Г.Я.* Стратегический инновационный менеджмент: тенденции, технологии, практика: монография // Таганрог: Изд-во ТРТУ. 2002. 179 с.
35. *Альмиуллер Г.С.* О прогнозировании развития технических систем // Баку. 1975. 12 с.
36. *Bennet C.A., Winterstein S.H., Kent R.E.* Image Quality and Target Recognition, Human Factors. 1967. vol. 9. pp. 5–32.
37. *Горелик А.Л., Скрипкин В.А.* Методы распознавания: 2-е изд. // М.: Высшая школа. 1984. 207 с.
38. *Прэнт У.* Цифровая обработка изображений: пер. с англ. // М.: Мир. 1982. Кн. 2. 480 с.
39. *Тропченко А.А.* Методы повышения робастности распознавания в мультимодальных биометрических системах // Известия ВУЗов. Приборостроение. 2014. Т. 57. № 4. С. 20–23.
40. *Гулевиц С.П., Веселов Ю.Г., Прядкин С.П.* Описание изображений сложных наземных объектов в задаче распознавания образов // Наука и Образование. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2012. № 11. С. 239–260.
41. *Аджемов С.С., Терешонок М.В., Чиров Д.С.* Распознавание видов цифровой модуляции радиосигналов с использованием нейронных сетей // Вестник Московского ун-та. Сер. 3. Физика и Астрономия. 2015. № 1. С. 23–28.
42. *Лиокумович Д.С., Силуянова М.В.* Планирование и управление производством при повышении качества и конкурентоспособности сложных технических систем // Электротехнические и информационные комплексы и системы. 2012. № 3. Т. 8. С. 18–24.
43. *Дедков В.К.* Принципы формирования критериев и показателей эффективности функционирования сложных технических систем // Надежность и качество сложных систем. 2013. № 4. С. 3–8.
44. *Ногин В.Д.* Проблема сужения множества Парето: подходы к решению // Искусственный интеллект и принятие решений. 2008. №1. С. 98–112.
45. *Кини Р.Л., Райфа Х.* Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения // М.: Радио и связь. 1981. 560 с.
46. *Штойер Р.* Многокритериальная оптимизация: теория, вычисления, приложения // М.: Наука. 1982. 504 с.

**Чиров Денис Сергеевич** — д-р техн. наук, доцент, заместитель начальника научно-исследовательского испытательного центра (исследования создания робототехнических комплексов военного назначения), ФГБУ Главный научно-исследовательский испытательный центр робототехники Министерства обороны Российской Федерации (ГНИИЦ РТ МО РФ). Область научных интересов: распознавание образов и анализ сцен, высокоинформативные средства измерений, искусственные нейронные сети, системы

связи и передачи информации. Число научных публикаций — 102. den-chirov@yandex.ru; ул. Профсоюзная, 84/32, Москва, 119160; р.т.: +7(495)330-8809, Факс +7(495)330-8809.

**Чертова Ольга Георгиевна** — научный сотрудник, ФГБУ Главный научно-исследовательский испытательный центр робототехники Министерства обороны Российской Федерации (ГНИИЦ РТ МО РФ). Область научных интересов: системы связи и передачи информации, методы оптимизации сложных технических систем. Число научных публикаций — 6. olya-932007@yandex.ru; ул. Профсоюзная, 84/32, Москва, 119160; р.т.: +7(495)330-8809, Факс: +7(495)330-8809.

**Потапчук Татьяна Николаевна** — младший научный сотрудник, ФГБУ Главный научно-исследовательский испытательный центр робототехники Министерства обороны Российской Федерации (ГНИИЦ РТ МО РФ). Область научных интересов: теория вероятности, системы измерения, математическая статистика. Число научных публикаций — 2. gniizrt@mail.ru; ул. Профсоюзная, 84/32, Москва, 119160; р.т.: +7(495)330-8809, Факс: +7(495)330-8809.

D.S. CHIROV, O.G. CHERTOVA, T.N. POTAPCHUK  
**METHODS OF STUDY REQUIREMENTS FOR THE COMPLEX  
 ROBOTIC VISION SYSTEM**

---

*Chirov D.S., Chertova O.G., Potapchuk T.N. Methods of Study Requirements for the Complex Robotic Vision System.*

**Annotation.** The article presents a methodology for substantiation of requirements for the technical vision system of a robotic complex. A technical vision system of the robotic complex is viewed as a combination of two subsystems: measurement and recognition. To implement the methodology we developed methods for calculating partial optimality criteria for substantiation of the technical requirements and evaluation of search area of the optimal values of measuring instruments characteristics of the technical vision system of a robotic complex; a recursive procedure for choosing the optimal values of measuring instruments characteristics of the technical vision system; a scheme of trade-off for evaluating the optimal technical requirements for advanced measurement instruments of the technical vision system in different technical and economical conceptions.

The search for optimal solution is done according to partial optimality criteria: recognition efficiency, the cost and risks of creating measuring instruments. For creating the recursive procedure based on formulated assumptions and assertions, a criterion, which provides the search of Pareto-optimal solutions, was synthesized. The developed methodology takes into account the existing (more suitable) technical and economical conceptions of creating a robotic complex while choosing trade-offs.

**Keywords:** robotic complex, technical vision, recognition, measuring instruments, methods of optimization, trade-offs, recursive procedure.

---

**Chirov Denis Sergeevich** — Ph.D., Dr. Sci., associate professor, deputy head of research center, Chief Research and Testing Center of Robotics of the Ministry of Defense. Research interests: pattern recognition and scene analysis, highly informative measuring instruments, artificial neural networks, communications systems and information transfer. The number of publications — 102. den-chirov@yandex.ru; 84/32, Profsojuznaya street, Moscow, 119160; office phone: +7(495)330-8809, Fax: +7(495)330-8809.

**Chertova Olga Georgievna** — researcher, Chief Research and Testing Center of Robotics of the Ministry of Defense. Research interests: communication systems, information and communication technology, optimization techniques. The number of publications — 6. olya-932007@yandex.ru; 84/32, Profsojuznaya street, Moscow, 119160; office phone: +7(495)330-8809, Fax: +7(495)330-8809.

**Potapchuk Tatiana Nikolaevna** — junior researcher, Chief Research and Testing Center of Robotics of the Ministry of Defense. Research interests: theory of probability, measurement systems, mathematical statistics. The number of publications — 2. gniizrt@mail.ru; 84/32, Profsojuznaya street, Moscow, 119160; office phone: +7(495)330-8809, Fax: +7(495)330-8809.

## References

1. Kolesnikov N.E., Kosheleva T.N. [Industrial robots and their complexes as the most important form of high-performance workplaces]. *Jekonomika i upravlenie – Economics and Management*. 2014. vol. 10(108). pp. 29–32. (In Russ.).

2. Hripunov S.P., Blagodarjashhev I.V., Chirov D.S. [Military Robotics: modern trends and development vectors]. *Trendy i upravlenie – Trend and management*. 2015. vol. 4. pp. 410–422. (In Russ.).
3. Lapshov V.S. et al. [Prospects for the development of autonomous robotic systems ground special military]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2016. vol. 1(174). pp. 156–168. (In Russ.).
4. Motienko A.I., Ronzhin A.L., Pavljuk N.A. [Modern development of rescue robots: opportunities and principles of their application]. *Nauchnyj vestnik NGTU – Scientific Bulletin of NSTU*. 2015. Issue. 60. vol. 3. pp. 147–165. (In Russ.).
5. Ermishin K.V., Jushhenko A.S. [Collaborative mobile robots - a new stage of development of the service robotics]. *Robototehnika i tehničeskaja kibernetika – Robotics and Technical Cybernetics*. 2016. vol. 3(12). pp. 3–9. (In Russ.).
6. Mohameda Z., Capi G. Development of a New Mobile Humanoid Robot for Assisting Elderly People. *Procedia Engineering*. 2012. vol. 41. pp.345–351.
7. Senchik K.Ju., Harlamov V.V., Grjaznov N.A., Lopota A.V. [On the prospects of the use of robotics in medicine]. *Jekstremal'naja robototehnika: Trudy mezhdunarodnoj nauchno-tehničeskoj konferencii* [Extreme Robotics: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference]. Sankt-Peterburg: Izd-vo «Politehnika-servis». 2015. pp. 40–43. (In Russ.).
8. Moshkin V.I., Petrov A.A., Titov V.S., Jakushenkov Ju.G. *Tehničeskoe zrenie robotov* [The technical vision of robots]. M.: Mashinostroenie. 1990. 272 p. (In Russ.).
9. Shapiro L., Stokman Dzh. *Komp'juternoe zrenie* [Computer vision]. Binom. 2006. 752 p. (In Russ.).
10. Boguslavsky A.A., Sokolov S.M. The real time Vision System for small-sized target tracking. *Int. J. Computing Science and Mathematics*. 2007. vol. 1. no. 1. pp. 115–127.
11. Koljuchkin V.Ja., Nguen K.M. [Methods of study requirements for the systems of technical vision of industrial robot systems]. *Nauka i Obrazovanie. MGTU im. N.Je. Bauman. Jelektron. Zhurn – Science and Education: Scientific Publication of BMSTU*. 2015. vol. 7. pp. 198–205. (In Russ.).
12. Egorov I.V., Lachugin D.V. [Optimization parameters vision system on the basis of the three cameras]. *Vestnik SGTU – Vestnik Saratov State Technical University*. 2012. vol. 1(64). no. 2. pp. 393–397. (In Russ.).
13. Klokov A.V., Jakubov V.P., Shipilov S.Je., Jurchenko V.I. [Development of a Technical Vision System for Robots Based on Radio-Wave Imaging Using a Luneburg Focusing Lens]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 2(45). pp. 130–140. (In Russ.).
14. Anikin V.A. et al. [Look remote vision system based on unmanned aircraft to land mobile robotic complexes]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Engineering Sciences*. 2014. vol. 3(152). pp. 70–77. (In Russ.).
15. Volosatova T.M., Marchenkov A.M., Chichvarin N.V. [Development of a combined vision system of mobile robots]. *Materialy Vserossijskoj nauchno-tehničeskoj konferencii molodyh uchenyh, aspirantov i studentov* [Proceedings of the scientific-technical conference of young scientists and students]. 2016. pp. 355–358. (In Russ.).
16. Mihajlov B.B. [Vision Systems Mobile Robots]. *Tehničeskoe zrenie v sistemah upravlenija mobil'nogo ob'ekta-2010: Trudy nauchno-tehničeskoj konferencii-seminara* [The technical vision of a mobile object management system-2010: Proceedings of the scientific and technical conference-workshop]. 2010. vol. 4. pp. 191–201. (In Russ.).
17. Andreev V.P., Prjanichnikov V.E. [Vision systems of mobile robots with the supervisory network management]. *Mehanika, upravlenie i informatika – Mechanics, Control and Informatics*. 2012. IKI RAN. vol. 8. pp.58–61. (In Russ.).

18. Zheltov S.Ju., Vizil'ter Ju.V. [Prospects for the intellectualization of aircraft control systems through the application of machine vision technology]. *Trudy MFTI – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2009. vol. 1. no. 4. pp. 164–181. (In Russ.).
19. Tao L, Matuszewski B.J. Robust deformable shape reconstruction from monocular video with manifold forests. *Machine Vision and Applications*. 2016. vol. 27. Issue 6. pp. 801–819.
20. Pu Y.-R., Chen Y.-J., Lee S.-H. Fire recognition based on correlation of segmentations by image processing techniques. *Machine Vision and Applications*. November 2015. vol. 26. Issue 7. pp. 849–856.
21. Cubero S. et al. Advances in Machine Vision Applications for Automatic Inspection and Quality Evaluation of Fruits and Vegetables. *Food and Bioprocess Technology*. 2011. vol. 4. Issue 4. pp. 487–504.
22. Panfilov P.B., Korolev S.V. Integration of 3D dynamic models being created by 3D machine vision system into telerobotics applications. *Automation and Remote Control*. 2011. vol. 72. Issue 5. pp. 1102–1113.
23. Poltavskij A.V. [Optimizing the performance of coherent detection systems objects based on simulation]. *Dvojnye tehnologii – Dual technology*. 2013. vol. 1(62). pp. 43–49. (In Russ.).
24. Poltavskij A.V. [Mathematical modeling of the formation of a complex system image]. *Nauchnyj vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta grazhdanskoj aviacii – Scientific Bulletin of Moscow State Technical University of Civil Aviation*. 2012. vol. 175. pp. 130–141. (In Russ.).
25. Gubonin N.S. [Pareto optimization in the design of complex information systems]. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika – Instruments and Systems: Monitoring, Control, and Diagnostics*. 2012. vol. 4. pp. 7–12. (In Russ.).
26. Denisov A.V. [Simulation of optoelectronic systems for space purposes]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2015. vol. 58. no. 11. pp. 882–889. (In Russ.).
27. Buslenko N.P. *Modelirovanie slozhnyh system* [Modeling of Complex Systems]. Moscow: Nauka. 1968. 356 p. (In Russ.).
28. Chirov D.S. [The methodical approach to the substantiation of the technical characteristics of the systems for radio monitoring solutions emitters recognition problems]. *T-Comm*. 2011. vol. 11. pp. 85–87. (In Russ.).
29. Chirov D.S., Tereshonok M.V., Elsukov B.A. [Method and algorithms for optimization of technical characteristics of radio monitoring systems]. *T-Comm*. 2014. vol. 8. no. 10. pp. 88–92. (In Russ.).
30. Vizil'ter Ju.V., Zheltov S.Ju. [Problems of vision systems in modern aircraft systems]. *Tehničeskoe zrenie v sistemah upravljenija mobil'nymi ob'ektami-2010: Trudy nauchno-tehničeskaj konferencii-seminara* [Vision Systems in mobile objects control systems 2010: Proceedings of the scientific and technical conference-seminar.]. M.: KDU. 2011. vol. 4. pp. 11–44. (In Russ.).
31. Podinovskij V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimal'nye reshenija mnogokriterial'nyh zadach* [Pareto-optimal solutions for multiobjective problems]. Moscow: Nauka. 1982. 39 p. (In Russ.).
32. Nogin V.D. *Prinjatije reshenija v mnogokriterial'noj srede: kolichestvennyj podhod* [Decision-making in multicriteria environment: a quantitative approach]. M.: FizmatIsT. 2005. 144 p. (In Russ.).
33. Sorokin V.A. [Development of the methodology of pricing as a key task in improving the equipment of the Russian Armed Forces armament, military and special equipment]. *Vooruzhenie i jekonomika – Weapons and Economy*. 2008. vol. 2(2). pp. 19–31. (In Russ.).

34. Gol'dshtejn G.Ja. *Ctrategicheskij innovacionnyj menedzhment: tendencii, tehnologii, praktika: monografija* [The strategic innovation management: trends, technologies, practices]. Taganrog: Izd-vo TRTU. 2002. 179 p. (In Russ.).
35. Al'tshuller G.S. *O prognozirovanii razvitija tehniceskikh sistem* [About forecasting the development of technical systems]. Baku. 1975. 12 p. (In Russ.).
36. Bennet C.A., Winterstein S.H., Kent R.E. Image Quality and Target Recognition, *Human Factors*. 1967. vol. 9. pp. 5–32.
37. Gorelik A.L., Skripkin V.A. *Metody raspoznavanija*: 2-e izd. [Methods of recognition: 2<sup>nd</sup> edition]. M.: Vysshaja shkola. 1984. 207 p. (In Russ.).
38. Prjett U. *Cifrovaja obrabotka izobrazhenij* [Digital Image Processing]. Moscow: Mir. 1982. vol. 2. 480 p. (In Russ.).
39. Tropchenko A.A. [Methods to improve the robustness of recognition in multimodal biometric systems]. *Izvestija VUZov. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2014. Issue. 57. vol. 4. pp. 20–23. (In Russ.).
40. Gulevich S.P., Veselov Ju.G., Prjadkin S.P. [Description of complex images of ground objects in pattern recognition problem]. *Nauka i Obrazovanie. MGТУ im. N.Je. Baumana. Jelektron. Zhurn – Science and Education: Scientific Publication of BMSTU*. 2012. vol. 11. pp. 239–260. (In Russ.).
41. Adzhemov S.S., Tereshonok M.V., Chirov D.S. [Type recognition of the digital modulation of radio signals using neural networks]. *Vestnik Moskovskogo un-ta. Ser. 3. Fizika i Astronomija – Moscow University Physics Bulletin*. 2015. vol. 1. pp. 23–28. (In Russ.).
42. Liokumovich D.S., Silujanova M.V. [Planning and management of production while increasing the quality and competitiveness of complex technical systems]. *Jelektrotehnicheskie i informacionnye komplekсы i sistemy – Electrotechnical Systems and Complexes*. 2012. vol. 3. Issue 8. pp. 18–24. (In Russ.).
43. Dedkov V.K. [The principles of the criteria and indicators of the functioning of complex technical systems]. *Nadezhnost' i kachestvo slozhnyh sistem – Reliability & Quality of Complex Systems*. 2013. vol. 4. pp. 3–8. (In Russ.).
44. Nogin V.D. [Pareto set constriction problem: approaches to solving]. *Iskusstvennyj intellekt i prinjatje reshenij – Artificial intelligence and decision-making*. 2008. vol. 1. pp. 98–112. (In Russ.).
45. Kini R.L., Rajfa X. *Prinjatje reshenij pri mnogih kriterijah: predpochtenija i zameshhenija* [Decision-making in many criteria: preference and substitution]. Moscow: Radio i svjaz'. 1981. 560 p. (In Russ.).
46. Shtojer R. *Mnogokriterial'naja optimizacija: teorija, vychislenija, prilozhenija* [Multicriterial optimization: theory, computation, applications]. Moscow: Nauka. 1982. 504 p. (In Russ.).

О.И. Смоктий

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ  
ЯРКОСТИ ПЛОСКОГО ОДНОРОДНОГО СЛОЯ НА ОСНОВЕ  
ПРИНЦИПА ЗЕРКАЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ И РЕШЕНИЙ  
ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

*Смоктий О.И.* Численное моделирование коэффициентов яркости плоского однородного слоя на основе принципа зеркального отображения и решений линейных сингулярных интегральных уравнений.

**Аннотация.** На основе принципа зеркального отображения и соответствующих решений модифицированных линейных сингулярных интегральных уравнений проведено численное моделирование единой функции внешнего поля излучения и фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины на его внешних границах. Показана эффективность этих уравнений при использовании метода угловой дискретизации в задачах численного моделирования полей излучения системы «атмосфера — подстилающая поверхность». Указанный новый подход позволяет обобщить основные результаты численного радиационного моделирования в частном случае полубесконечного однородного слоя. В этой связи рассмотрены основные математические аспекты и вычислительные особенности численной реализации метода угловой дискретизации. Вследствие линейности используемых базовых интегральных уравнений проведенный анализ можно обобщить на случай скалярных и поляризованных полей излучения при учете многократного анизотропного рассеяния излучения и его отражения от произвольной горизонтально-однородной подстилающей поверхности.

**Ключевые слова:** принцип зеркального отображения, плоский однородный слой, коэффициенты яркости, фотометрические инварианты, единая функция, основная краевая задача, линейные сингулярные интегральные уравнения, регуляризация, численное моделирование, метод дискретизации, характеристические корни, отражающая подстилающая поверхность.

**1. Введение.** До недавнего времени численное моделирование полей излучения плоского однородного слоя произвольной оптической толщины  $\tau_0$  проводилось в рамках традиционных представлений об их пространственно-угловой симметрии только на его внешних границах и на основе известной теоремы оптической обратимости для индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$ , где  $\gamma$  — угол рассеяния [1].

Вместе с тем, как было впервые показано автором [2], проблема пространственно-угловой симметрии внешних и внутренних полей излучения указанного слоя не ограничивается ее классическим рассмотрением [3-5]. Оказалось, что поле излучения данного слоя обладает скрытым внутренним свойством «зеркальной» пространственно-угловой симметрии относительно его середины ( $\tau_0/2$ ). Указанное свойство симметрии определяется общим принципом зеркального отображения, сформу-

лированным в [6] для новых структурных функций теории переноса излучения — фотометрических инвариантов, которые обладают свойством инвариантности на симметричных уровнях  $(\tau_0, \tau_0 - \tau)$  в зеркальных направлениях визирования  $(\theta, \pi - \theta)$ . С математической точки зрения существование этих функций определяется только оптической однородностью рассматриваемого слоя и свойствами пространственно-угловой симметрии (инвариантности) соответствующих решений симметризованной краевой задачи теории переноса излучения при групповых линейных преобразованиях интенсивности излучения типа сдвига по оптической глубине  $(\tau \Rightarrow \tau_0 - \tau)$  и вращения линии визирования  $\theta \Rightarrow \pi - \theta$ . При этом новые фотометрические структуры и свойства их инвариантности в рамках упомянутых выше групповых линейных преобразований и локальной теоремы оптической обратимости [5] расширяют традиционные представления о пространственно-угловой симметрии полей излучения природных сред, позволяя модифицировать исходную несимметризованную форму классической краевой задачи теории переноса излучения [4] и приводя ее к фотометрически симметризованному виду [2]. При этом, как будет показано ниже, для реализации указанного подхода и связанных с ним преимуществ наиболее удобной математической формой представления исходного интегро-дифференциального уравнения переноса излучения является не само это уравнение, а адекватные ему линейные сингулярные интегральные уравнения [7]. Ниже на базе принципа зеркального отображения (симметрии) и численных решений регуляризованных линейных сингулярных интегральных уравнений рассмотрена реализация метода угловой дискретизации, а также его алгоритмические особенности для нахождения фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ , ограниченного снизу произвольно отражающей горизонтально-однородной подстилающей поверхностью.

**2. Принцип зеркального отображения для коэффициентов яркости плоского однородного слоя.** В качестве модели природной среды, в которой происходят процессы поглощения и многократного рассеяния солнечных фотонов, рассмотрим плоский однородный слой конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ , ограниченный снизу горизонтально-однородной подстилающей поверхностью, отражающей падающее на нее излучение по произвольному анизотропному закону  $Y$ . Направление распространения фотонов на текущей оптической глубине  $\tau$  будем задавать углом  $\theta = \arccos \eta$ , отсчитываемым от направления внутренней нормали к слою в сторону увеличения  $\tau$ , зенитным расстоянием Солнца

$\theta_0 = \arccos \xi$  и азимутом  $(\varphi - \varphi_0)$ . В дальнейшем, не уменьшая общности рассмотрения, азимут Солнца  $\varphi_0$  примем равным нулю. Интенсивность излучения на оптической глубине  $\tau$  обозначим через  $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ . Поляризацией и рефракцией излучения будем пренебрегать.

Заданными базовыми оптическими параметрами рассматриваемого слоя являются вероятность выживания фотона  $\Lambda$  при элементарном акте рассеяния (альбедо частицы) и индикатриса рассеяния  $x(\cos \gamma)$ , где  $\gamma$  — угол рассеяния определяются соотношению:

$$\cos \gamma = \pm \eta \xi + \sqrt{(1 - \eta^2)(1 - \xi^2)} \cos \varphi, \quad \eta \in [-1, +1], \quad \xi \in [0, 1], \quad (1)$$

$$\varphi \in [0, 2\pi].$$

Первоначально рассмотрим поле скалярного излучения плоского однородного слоя без отражающего дна на его нижней границе  $\tau = \tau_0$  (рисунок 1а).

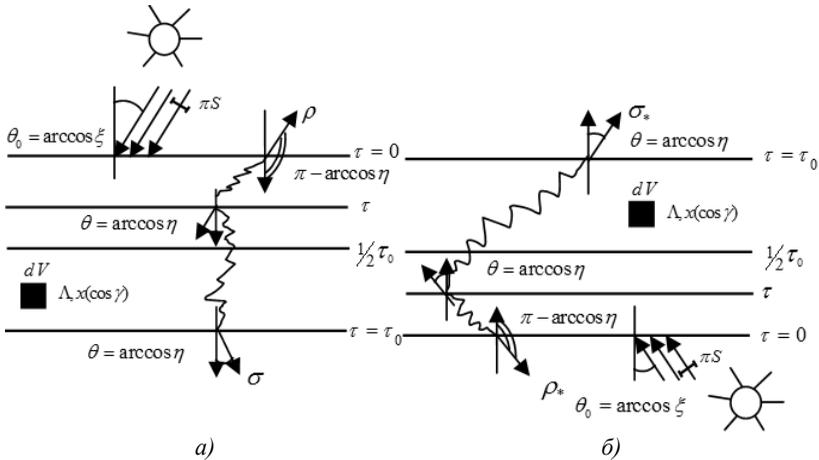


Рис. 1. Исходное (а) и «зеркальное» (б) поля скалярного излучения, отраженного и пропущенного плоским однородным слоем конечной оптической толщины  $\tau_0$

Далее, в частном случае полей излучения на внешних границах плоского однородного слоя  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  введем коэффициенты диффузного отражения  $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$  и пропускания  $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$  согласно соотношениям:

$$I(0, -\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = S\xi\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0), \eta > 0, \xi \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2)$$

$$I(\tau_0, \eta, \xi, \varphi, \tau_0) = S\xi\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0), \eta > 0, \xi \in [0, 1], \varphi \in [0, 2\pi], \quad (3)$$

где  $\pi S$  — освещенность прямым солнечным излучением площадки, расположенной перпендикулярно к нему на уровне верхней границы слоя  $\tau = 0$ . Кроме того, для уменьшения числа независимых угловых переменных  $(\eta, \xi, \varphi)$  в исходной задаче представим индикатрису рассеяния  $x(\cos\gamma)$ , интенсивность излучения  $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$ , коэффициенты яркости  $\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$  и  $\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0)$  в виде соответствующих отрезков стандартных рядов Фурье:

$$x(\eta, \xi, \varphi) = \wp^0(\eta, \xi) + 2 \sum_{m=1}^{M_1} \wp^m(\eta, \xi) \cos m\varphi; \quad (4)$$

$$I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0) = I^0(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^{M_2} I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi; \quad (5)$$

$$\rho(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = \rho^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^{M_3} \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi; \quad (6)$$

$$\sigma(\eta, \xi, \varphi, \tau_0) = \sigma^0(\eta, \xi, \tau_0) + 2 \sum_{m=1}^{M_4} \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \cos m\varphi. \quad (7)$$

В дальнейшем в качестве общего значения числа азимутальных гармоник в (4-7) будем выбирать величин  $M = \max\{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ .

Рассмотрим теперь азимутальные гармоники коэффициентов диффузного отражения  $\rho^m$  и пропускания  $\sigma^m$  в задаче, «зеркальной» (рисунок 1б) по отношению к исходной задаче (рисунок 1а). Объединяя соответствующие коэффициенты яркости  $(\rho^m, \sigma^m)$  и  $(\rho^*_m, \sigma^*_m)$  в обеих задачах для излучения, выходящего из слоя на уровне его нижней ( $\tau = \tau_0$ ) и верхней ( $\tau = 0$ ) границ, имеем следующие соотношения (рисунок 2а):

$$\tau = 0 \Rightarrow \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^*_m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, \dots, M, \quad (8)$$

$$\tau = \tau_0 \Rightarrow \rho^*_m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, \dots, M. \quad (9)$$

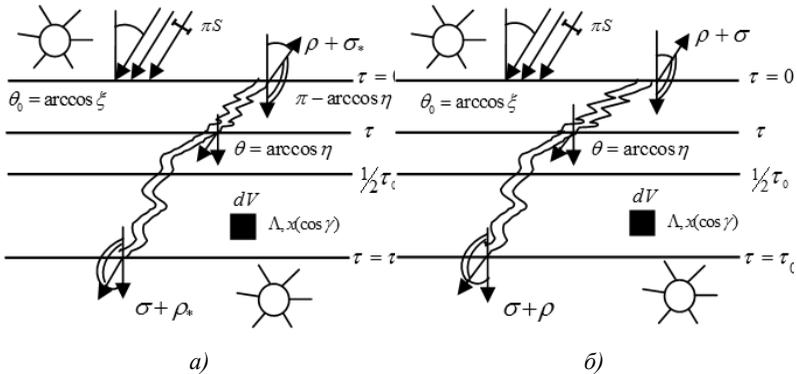


Рис. 2. Объединенные исходное (а) и «зеркальное» (б) поля скалярного излучения, отраженного и пропущенного плоским однородным слоем конечной оптической толщины  $\tau_0$  в задаче, симметризованной по коэффициентам яркости и освещению прямым солнечным излучением

Далее, пользуясь оптической однородностью рассматриваемого слоя, имеем базовые соотношения фотометрической эквивалентности для коэффициентов яркости исходного (рисунок 1а) и «зеркального» (рисунок 1б) полей излучения:

$$\sigma_*^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \rho_*^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0). \quad (10)$$

Подставляя затем (10) в (8-9), получаем, что фотометрические инвариантные величины  $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $R_-^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , определяемые для оптически однородного плоского слоя согласно соотношениям (рисунок 2б):

$$\begin{aligned} R_+^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \\ R_-^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) - \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad m=0,1,\dots,M, \end{aligned} \quad (11)$$

не меняются по абсолютной величине при замене исходного поля излучения на его «зеркальное» отображение и наоборот. Другими словами, величины  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  при наличии известного локального свойства их симметрии при перестановке угловых переменных  $\eta \leftrightarrow \xi$ :

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv R_{\pm}^m(\xi, \eta, \tau_0), \quad m=0,1,\dots,M. \quad (12)$$

приобретают в масштабе всего слоя дополнительное свойство пространственно-угловой симметрии на его границах  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  при замене диффузно-отраженного излучения на диффузно-пропущенное излучение и наоборот. Именно:

$$\begin{aligned} R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) &= \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \\ &\equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \equiv \pm \left[ \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) \right]. \end{aligned} \quad (13)$$

Заметим, что симметризация положений внешних источников излучения относительно середины рассматриваемого слоя ( $\tau_0/2$ ) в исходной задаче (рисунок 1а) не имеет принципиального значения для существования фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , а является только физическим приемом наглядного проявления их инвариантных свойств (13) на эвристическом уровне. Таким образом, соотношения (13) определяют в формальной математической форме основное физическое содержание принципа зеркального отображения (симметрии) для азимутальных гармоник фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m$  и коэффициентов яркости  $(\rho^m, \sigma^m)$  плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ . Именно, сумма или разность азимутальных гармоник коэффициентов диффузного отражения  $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и пропускания  $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$  плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$  не меняются по абсолютной величине в зеркальных направлениях визирования  $(\eta, -\eta)$  и при замене на его внешних границах  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  диффузно-отраженного излучения на диффузно-пропущенное излучение и наоборот.

**3. Модификация основной краевой задачи теории переноса излучения.** Существование фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  как в частном случае внешних полей излучения на границах  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$  плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ , так и в общем случае фотометрических инвариантов  $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$ , формируемых внутренними полями излучения на произвольной оптической глубине  $\tau$  согласно соотношениям:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = I^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm I^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (14)$$

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \pm I_{\pm}^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [-1, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad (15)$$

порождает проблему их адекватного включения в математический аппарат классической теории многократного анизотропного рассеяния света [3-5]. Одновременно возникает проблема соответствующего формального математического описания новых фотометрических величин в терминах решений основной краевой задачи, определяемой исходным интегро-дифференциальным уравнением переноса излучения при заданных граничных условиях. Как нетрудно показать, в общем случае скалярного поля излучения инвариантная (симметризованная) форма основной краевой задачи теории переноса излучения для фотометрических инвариантов  $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$  при отсутствии отражающего дна  $Y = 0$  имеет вид [8]:

$$\eta \frac{\partial_{\tau}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)}{\partial \tau} = -I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) + B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m=0, 1, \dots, M \quad (16)$$

при граничных условиях

$$I_{\pm}^m(0, \eta, \xi, \tau_0) = I_{\pm}^m(\tau_0, -\eta, \xi, \tau_0) = 0, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (17)$$

Аналогично (14) азимутальные гармоники для инвариантов функции источников  $B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$  определяются следующим образом:

$$B_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = B^m(\tau_0 - \tau, -\eta, \xi, \tau_0) \pm B^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2} \int_{-1}^1 \wp^m(\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau, \eta', \xi, \tau_0) d\eta', \quad (18)$$

$$R_{+}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (19)$$

$$R_{-}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \rho^m(\eta, \xi, \tau_0) - \sigma^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad m=0, 1, \dots, M,$$

где функции источников  $B_{\pm,1}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$  рассчитываются по точным формулам для однократно рассеянного излучения:

$$B_{\pm,1}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda S}{4} \left[ \wp^m(-\eta, \xi) e^{-\frac{\tau_0 - \tau}{\xi}} \pm \wp^m(\eta, \xi) e^{-\frac{\tau}{\xi}} \right], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (20)$$

Отметим, что в отличие от классической (несимметризованной) формы основной краевой задачи, в которой независимые угловые переменные  $(\eta, \xi)$  и параметр  $\tau_0$  принадлежат интервалам  $\eta \in [-1, 1]$ ,

$\xi \in [0, 1]$  и  $\tau \in [0, \tau_0]$ , в ее симметризованном виде (16-18) вследствие свойств инвариантности (15) и (19), они изменяются в более узких интервалах:  $\eta \in [0, 1]$ ,  $\xi \in [0, 1]$  и  $\tau \in [0, \tau_0]$  или альтернативно  $\eta \in [-1, 1]$ ,  $\xi \in [0, 1]$ ,  $\tau \in [0, \tau_0/2]$ . Кроме того, использование концепции фотометрических инвариантов при численном решении симметризованной краевой задачи (16-18) позволяет дополнительно повысить эффективность основных методов и алгоритмов их расчетов, уменьшая объемы расчетного времени и оперативной памяти ЭВМ в 2,5-3 раза [8]. В дальнейшем для численного моделирования азимутальных гармоник коэффициентов яркости  $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , а также их фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , будут выбраны следующие интервалы изменения угловых переменных  $(\eta, \xi)$  и параметра:  $\eta \in [0, 1]$ ,  $\xi \in [0, 1]$  и  $\tau \in [0, \tau_0]$ .

Формальные решения неоднородных дифференциальных уравнений (16) при граничных условиях (17) имеют вид:

$$I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0) = \int_0^{\tau} B_{\pm}^m(\tau', \eta, \xi, \tau_0) e^{\mp \eta \frac{\tau - \tau'}{\xi}} \frac{d\tau'}{\eta}, \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m=0, 1, \dots, M. \quad (21)$$

Подставляя (18) в (21), получаем при  $\tau = \tau_0$  для фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  после очевидных преобразований, использующих соотношения (18), угловую симметрию индикатрисы рассеяния  $\zeta^m(-\eta, -\eta') = \zeta^m(\eta, \eta')$  и свойство инвариантности (15), линейные интегральные уравнения Фредгольма II рода:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{2S\xi} \int_0^{\tau_0} \left\{ \int_0^1 \left[ \zeta^m(\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau', \eta', \xi, \tau_0) + \zeta^m(-\eta, \eta') I_{\pm}^m(\tau', -\eta', \xi, \tau_0) \right] d\eta' + \right. \\ \left. + \frac{S}{2} \left[ \zeta^m(-\eta, \xi) e^{-\frac{\tau_0 - \tau'}{\xi}} \pm \zeta^m(\eta, \xi) e^{\frac{\tau'}{\xi}} \right] \right\} e^{\mp \eta \frac{\tau_0 - \tau'}{\xi}} \frac{d\tau'}{\eta},$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau' \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (22)$$

Из уравнения (22) следует, что для нахождения численных значений функций  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , определяемых только в двух точках  $\tau = 0$  и  $\tau = \tau_0$ , необходимо провести трудоемкое интегрирование более сложных функций  $I_{\pm}^m(\tau, \eta, \xi, \tau_0)$  по текущей оптической глубине  $\tau$  в пределах

всего интервала ее изменения  $[\tau \in \tau_0]$ . Естественно, что подобная вычислительная процедура снижает эффективность применения принципа зеркального отображения и инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  в прикладных задачах оптики природных сред. С целью избежать указанного интегрирования по  $\tau$  в расчетных схемах радиационного моделирования необходимо использовать другую альтернативную форму линейного представления исходного уравнения переноса излучения (16), отличную от (22). Очевидно, что основное требование, предъявляемое к подобной альтернативной форме, состоит в том, что она должна в полной мере обеспечивать преимущества, связанные с использованием принципа зеркального отображения и фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  [8]. Такую альтернативную форму для нахождения азимутальных гармоник фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  легко получить в виде двух отдельных линейных сингулярных интегральных уравнений на базе очевидных линейных алгебраических преобразований исходной системы этих уравнений, указанной в [4]:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) T^m(\eta) = \frac{\Lambda}{2} \int_0^1 \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) A^m(\eta, \eta') \eta'}{\eta' - \eta} d\eta' \mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi) A^m(\eta, -\eta') \eta'}{\eta' + \eta} d\eta' + R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (23)$$

$$\eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad m = 0, 1, \dots, M,$$

где функции  $T^m(\eta)$  равны:

$$T^m(\eta) = 1 + \frac{\Lambda}{2} \eta \int_{-1}^1 \frac{A^m(\eta, \eta') \eta'}{\eta' - \eta} d\eta', \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (24)$$

Функции  $R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  в (23) определяются согласно точному соотношению:

$$R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0) = A^m(\eta, -\xi) \rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm A^m(\eta, \xi) \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad (25)$$

где азимутальные гармоники коэффициентов диффузного отражения  $\rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и пропускания  $\sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0)$  находятся по строгим формулам для однократно рассеянного излучения:

$$\rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4(\eta + \xi)} \left[ 1 - e^{-\tau_0(1/\eta + 1/\xi)} \right], \quad \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\Lambda}{4(\eta - \xi)} \left[ e^{-\tau_0/\eta} - e^{-\tau_0/\xi} \right]. \quad (26)$$

Полиномиальные ядерные функции  $A^m(\eta, \eta')$ , играющие важную роль в общей аналитической теории многократного анизотропного рассеяния света, исследованы в [4] на основе полиномов Соболева  $\mathfrak{R}_{im}^m(\eta)$ ,  $i = m, m+1, \dots, M$  и присоединенных полиномов Лежандра  $P_n^m(\eta)$ . Эти функции, зависящие от вида индикатрисы рассеяния  $x(\cos\gamma)$ , номера ее азимутальных гармоник  $m$  и вероятности выживания фотона  $\Lambda$ , будут рассчитаны ниже для модельных оптических параметров однородного слоя в рамках реализации метода угловой дискретизации.

**4. Регуляризованная форма линейных сингулярных интегральных уравнений.** Необходимым этапом использования линейных сингулярных интегральных уравнений (23-24) в задачах численного радиационного моделирования является их предварительная регуляризация. Действительно, эти уравнения можно очевидным образом регуляризовать после проведения простых линейных операций, в результате которых сингулярные члены в их правых и левых частях сокращаются. Используя указанные преобразования, получаем регуляризованную форму линейных сингулярных интегральных уравнений (23-24) в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \hat{T}^m(\eta) &= \frac{\Lambda}{2} \int_0^1 A^m(\eta, \eta') R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) d\eta' + \\
 &+ \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 A^m(\eta, \eta') \frac{R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) - R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)}{\eta' - \eta} d\eta' \mp \\
 &\mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \int_0^1 \frac{A^m(\eta, -\eta') R_{\pm}^m(\eta', \xi, \tau_0) \eta' d\eta'}{\eta' + \eta} + R_{\pm,1}^m(\eta, \xi, \tau_0), \\
 \eta &\in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M,
 \end{aligned} \tag{27}$$

где функции  $\hat{T}^m(\eta)$  определяются согласно выражению:

$$\hat{T}^m(\eta) = \begin{cases} 1 - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 A^0(\eta, -\eta') \frac{d\eta'}{\eta + \eta'}, & m=0 \\ 1 - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A^m(\eta', \eta')}{\eta' + \eta} d\eta' + \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 \frac{A^m(\eta', \eta') - A^m(\eta, \eta')}{\eta' - \eta} d\eta', & m > 0. \end{cases} \tag{28}$$

Заметим, что в уравнениях (27-28) угловая переменная  $\theta_0 = \arccos \xi$ , наряду с  $\Lambda$  и  $\tau_0$ , играет роль независимого параметра, и

следовательно, в случае численного моделирования фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  достаточно использовать только одну угловую переменную, а именно угол направления визирования  $0 \leq \theta = \arccos \eta \leq \pi/2$ .

Перейдем теперь к изложению основного содержания используемого численного метода и его алгоритмических особенностей. Данный метод состоит в сведении рассматриваемой исходной задачи к системам линейных алгебраических уравнений, получаемых после дискретизации интегралов и подынтегральных функций в интегральных уравнениях (27-28) согласно выбранным квадратурам. Аналогично методу дискретных ординат [9] заменим интегральные члены в уравнениях (27-28) квадратурами Гаусса и используем соответствующие формулы численного дифференцирования. Подчеркнем, что сами по себе эти вычислительные процедуры являются стандартными операциями в методах численного анализа [10]. Однако, как будет показано ниже, использование именно их в рамках численного моделирования решений симметризованных линейных интегральных уравнений (27-28) приводит к эффективному алгоритму, автоматически учитывающему дополнительные соотношения, необходимые для устранения возможной неединственности их решений.

Представим интегральные члены в уравнениях (27-28) согласно квадратурной формуле Гаусса:

$$\int_0^1 h^m(\eta) d\eta \approx \sum_{i=1}^N \alpha_i^m h_i^m, \quad (29)$$

где  $h_i^m = h^m(\eta_i)$ ,  $m = 0, 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , а  $\alpha_i$  и  $\eta_i$  являются весами и узлами квадратуры (29) соответственно. Тогда вместо исходного интегрального уравнения (27) для величин  $R_{\pm}^m(\eta_i, \xi, \tau_0) = R_{\pm, i}^m$  имеем следующее линейное дискретное представление:

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \hat{I}^m(\eta) = \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, \eta_i) R_{\pm, i}^m + \frac{\Lambda}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, \eta_i) \times \frac{R_{\pm, i}^m - R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)}{\eta_i - \eta} \mp \frac{\Lambda}{2} e^{-\tau_0/\eta} \sum_{i=1}^N \alpha_i^m A^m(\eta, -\eta_i) R_{\pm, i}^m \frac{\eta_i}{\eta_i + \eta} + R_{1, \pm}^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (30)$$

Последовательно полагая в (30) для угловых величин  $\eta = \eta_n$ ,  $n = 1, \dots, N$ , получаем соответствующую систему линейных алгебраических уравнений  $N$ -го порядка относительно искомым дискретных значений  $R_{\pm,i}^m = R_{\pm}^m(\eta_i, \xi, \tau_0)$ , а именно:

$$R_{\pm,n}^m \hat{T}_n^m = \frac{\Lambda}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq n}}^N \alpha_i^m \left[ A^m(\eta_n, \eta_i) R_{\pm,i}^m + A^m(\eta_n, \eta_i) (R_{\pm,i}^m - R_{\pm,n}^m) \frac{\eta_n}{\eta_i - \eta_n} \mp \right. \\ \left. \mp e^{-\tau_0/\eta_n} \frac{A^m(\eta_n, -\eta_i) R_{\pm,i}^m \eta_i}{\eta_i + \eta_n} \right] + R_{1,\pm,n}^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (31)$$

где  $\hat{T}_n^m = \hat{T}^m(\eta_n)$  и  $R_{1,\pm,n}^m = R_{1,\pm}^m(\eta_n, \xi, \tau_0)$ .

Подчеркнем, что применение указанного алгоритма для численных решений первоначальной системы линейных сингулярных интегральных уравнений, полученной в [4] для коэффициентов яркости  $\rho^m$  и  $\sigma^m$ , приводит к системам дискретных линейных алгебраических уравнений типа (31), ранг которых в два раза больше, то есть  $2N$ .

Отметим, что особенностями суммирования в (31) является наличие членов с четко выраженной неопределенностью, именно:

$$(R_{\pm,i}^m - R_{\pm,n}^m) / (\eta_i - \eta_n), \quad (32)$$

которые при совпадении индексов дискретизации  $i = n$  необходимо заменять выражениями численного дифференцирования для частных производных функций  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  по угловой переменной  $\eta$ . Для этого воспользуемся известными трехчленными формулами ( $n=3$ ) численного дифференцирования непрерывной функции  $f(x)$  в случае равноотстоящих узлов  $f(\bar{x}_i) = f_i$ ,  $\bar{x}_i \Rightarrow \bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}_0 = \Delta$  [10]:

$$f_0' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (-3f_0 + 4f_1 - f_2) + \frac{(\Delta\bar{x})^2}{3} f'''(\bar{x}), f_1' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (-f_0 + f_2) - \frac{(\Delta\bar{x})^2}{6} f'''(\bar{x}), \\ f_2' = \frac{1}{2\Delta\bar{x}} (f_0 - 4f_1 + 3f_2) + \frac{(\Delta\bar{x})^2}{3} f'''(\bar{x}). \quad (33)$$

Применяя формулы (33), окончательно получаем вместо (31) систему линейных алгебраических уравнений  $N$ -го порядка относительно неизвестных дискретных величин  $R_{\pm,i}^m$ :

$$\sum_{i=1}^N \beta_{ni}^m R_{\pm,i}^m = R_{1,\pm,n}^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (34)$$

Коэффициенты  $\beta_{ni}^m$  в (34) выражаются очевидным образом через узлы  $\eta_i$  и веса  $\alpha_i$ ; квадратурной формулы (29), а также через дискретные значения ядерных функций  $A^m(\eta_n, \pm\eta_i)$  при  $m = 0, 1, \dots, M$ . Ввиду громоздкости конечных выражений для коэффициентов  $\beta_{ni}^m$  в данной работе они не приводятся.

**5. Устранение неединственности численных решений линейных регуляризованных сингулярных интегральных уравнений.** Существенным моментом в алгоритме получения единственных решений исходных сингулярных линейных интегральных уравнений (23-24) и их регуляризованной формы (27-28) является наличие или отсутствие у характеристических уравнений корней  $k_m$ , общее количество которых не превышает  $(M + 1)$  [3]:

$$T^m(\eta) = T^m(1/k_m) = 0, \quad 0 \leq k_m < 1, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (35)$$

Если характеристические уравнения (35) не имеют корней  $k_m$ , то решения линейных интегральных уравнений (23-24) и (27-28) являются единственными и проблем в их нахождении не возникает. Если же характеристические корни  $k_m$  существуют, то указанные уравнения имеют не единственные решения.

Отметим, что проблема существования корней  $k_m$  в случае модельных аппроксимирующих атмосферных индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$  с прикладной точки зрения рассмотрена в [11]. Кроме того, там предложен эффективный алгоритм нахождения их количества и численных значений для индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$ , содержащих произвольное, но конечное число членов в их разложениях по полиномам Лежандра  $P_n(\cos\gamma)$ .

Для устранения неединственности решений интегральных уравнений (23-24) и (27-28) первоначально рассмотрим случай, когда характеристические уравнения (35) имеют корни  $k_m \in [0, 1)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . В

данном случае, как отмечено выше, указанные уравнения имеют неединственные решения, и для выделения решений, имеющих физический смысл, необходимо сконструировать дополнительные интегральные соотношения, которым также должны удовлетворять регулярные решения  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  этих уравнений.

С целью получения этих интегральных соотношений рассмотрим отдельно наличие характеристических корней  $k_m$  при  $m \geq 1$  и  $m = 0$ . Пусть первоначально  $m \geq 1$  и  $k_m > 0$ . Тогда, подставляя значение  $\eta = 1/k_m$  в уравнения (23-24) или (27-28) и обобщая результаты [4], находим, что их единственные регулярные решения  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , имеющие физический смысл, должны удовлетворять дополнительным соотношениям следующего вида:

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda}{2} k_m \int_0^1 A^m \left( \frac{1}{k_m}, \eta' \right) R_{\pm}^m(\eta', \xi) \frac{\eta' d\eta'}{1 - k_m \eta'} \pm \frac{\Lambda}{2} k_m e^{-k_m \tau_0} \times \\ & \times \int_0^1 A^m \left( \frac{1}{k_m}, -\eta' \right) R_{\pm}^m(\eta', \xi) \frac{\eta' d\eta'}{1 + k_m \eta'} = R_{1,\pm}^m \left( \frac{1}{k_m}, \xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (36)$$

Используя затем квадратурную формулу (29), вместо (36) получаем систему дискретных линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^m R_{\pm,i}^m = \tilde{R}_{1,\pm}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (37)$$

где величины  $\varepsilon_i^m$  определяются следующим образом:

$$\varepsilon_i^m = \frac{\Lambda}{2} k_m \alpha_i^m \eta_i \left[ \frac{A^m \left( \frac{1}{k_m}, \eta_i \right)}{1 - k_m \eta_i} \pm e^{-k_m \tau_0} \frac{A^m \left( \frac{1}{k_m}, -\eta_i \right)}{1 + k_m \eta_i} \right], \quad \tilde{R}_{1,\pm}^m = R_{1,\pm}^m \left( \frac{1}{k_m}, \xi \right), \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (38)$$

Совместное рассмотрение (34) и (37) позволяет выразить в исходных системах алгебраических уравнений (34) одну из  $N$  неизвестных функций  $R_{\pm,i}^m$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  с помощью (37), используя остальные

ные  $(N-1)$  неизвестных функций, что автоматически приводит к понижению ранга систем (34) ровно на 1. Таким образом, эта операция позволяет простым образом устранить неединственность дискретных решений указанных систем (34) и тем самым избежать исследования подобной сложной проблемы для непрерывных решений исходных линейных сингулярных (23-24) и регуляризованных (27-28) интегральных уравнений.

Действительно, если в (37-38) имеем  $\varepsilon_N \neq 0$ , то из (37) получаем соотношение:

$$R_{\pm, N}^m = \frac{\tilde{R}_{1, \pm}^m}{R_{\pm, N}^m} - \frac{1}{\varepsilon_N^m} \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i^m R_{\pm, i}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (39)$$

Таким образом, (34), (37) и (39) преобразуются в систему линейных дискретных алгебраических уравнений с меньшим рангом  $(N-1)$ , а именно:

$$\sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\beta}_{ni}^m R_{\pm, i}^m = \tilde{R}_{1, \pm, n}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (40)$$

где величины  $\tilde{\beta}_{ni}^m$  определяются следующим образом:

$$\tilde{\beta}_{ni}^m = \beta_{ni}^m - \beta_{nN}^m \frac{\varepsilon_i^m}{\varepsilon_N^m}, \quad \tilde{R}_{1, \pm, n}^m = R_{\pm, n}^m - \tilde{R}_{1, \pm}^m \frac{\beta_{nN}^m}{\varepsilon_N^m}, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (41)$$

Пусть теперь  $m=0$  и характеристический корень  $k_m=0$  ( $m=0 \wedge \Lambda=1$ ). Тогда получаем, что дополнительные соотношения, необходимые для устранения неединственности решений системы уравнений (34), имеют вид:

$$2 \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \xi) \eta d\eta + \frac{2(1-\delta_{\pm})}{\left(1-\frac{x_1}{3}\right)\tau_0} \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \xi) \eta^2 d\eta^2 = 1 \pm e^{-\frac{\tau_0}{\xi}} - (1-\delta_{\pm}) \xi \frac{1-e^{-\frac{\tau_0}{\xi}}}{(1-x_1/3)\tau_0}, \quad m=0 \quad (42)$$

где  $\delta_{\pm} = \pm 1$ . Используя далее квадратурную формулу (29) вместо (42) находим систему линейных дискретных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N \varepsilon_i^m R_{\pm}^m = \tilde{R}_{1,\pm}^m, \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (43)$$

где величины  $\varepsilon_i^m$  и  $\tilde{R}_{1,\pm}^m$  определяются следующим образом:

$$\varepsilon_i = \alpha_i \eta \left[ 1 + \frac{1-\delta}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0} \eta \right], \quad \tilde{R}_{1,\pm}^m = \frac{1}{2} \left[ 1 \mp e^{\frac{\tau_0}{\xi}} - (1-\delta) \xi \frac{1 - e^{-\frac{\tau_0}{\xi}}}{\left(1 - \frac{x_1}{3}\right) \tau_0} \right], \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (44)$$

Использование дополнительных интегральных соотношений (43) для устранения неединственности дискретных решений исходных систем уравнений (34) аналогично рассмотренному выше случаю  $m \geq 1$  для  $R_{+,i}^m$  и  $R_{-,i}^m$ .

**6. Единая функция для фотометрических инвариантов коэффициентов яркости.** Замечательная особенность фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  состоит в возможности построения на их основе новой конструкции классической теории многократного рассеяния света — единой фотометрической функции  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  для коэффициентов диффузного отражения  $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и пропускания  $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ . Эта функция позволяет одновременно и независимо определять коэффициенты яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$  из решения только одного (вместо двух) линейного или нелинейного интегрального уравнения, которому она удовлетворяет.

В [12] единая фотометрическая функция  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$  была построена с помощью простых линейных преобразований известных структурных формул для азимутальных гармоник коэффициентов ярко-

сти  $\rho^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , определяемых функциями Амбарцумяна [4]. Используя линейные интегральные уравнения (23) и определение единых функций  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$  согласно соотношениям:

$$\begin{aligned} E^m(\eta, \xi, \tau_0) &= (\eta + \xi)\rho^m(\eta, \xi, \tau_0) + (\eta - \xi)\sigma^m(\eta, \xi, \tau_0) = \\ &= \eta R_+^m(\eta, \xi, \tau_0) + \xi R_-^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \xi \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (45)$$

получаем для них после несложных преобразований искомые линейные сингулярные интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} E^m(\eta, \xi, \tau_0) T^m(\eta) &= (\eta + \xi) A^m(\eta, -\xi) \rho_1^m(\eta, \xi, \tau_0) + (\xi - \eta) A^m(\eta, \xi) \sigma_1^m(\eta, \xi, \tau_0) - \\ &= \frac{\Lambda}{2} \eta \int_0^1 E^m(\eta'', \xi, \tau_0) A^m(\eta, \eta'') \frac{d\eta''}{\eta - \eta''} + \frac{\Lambda}{2} \eta e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} \int_0^1 E^m(\eta'', \xi, \tau_0) A^m(\eta, -\eta'') \frac{d\eta''}{\eta + \eta''} + \\ &+ \frac{\Lambda}{2} \xi \int_0^1 \frac{\xi E^m(\eta'', \xi, \tau_0) - \eta'' E^m(\xi, \eta'', \tau_0)}{\xi^2 - \eta''^2} \left[ A^m(\eta, \eta'') - e^{-\frac{\tau_0}{\eta}} A^m(\eta, -\eta'') \right] d\eta'', \\ \eta &\in [0, 1], \xi \in [0, 1], m = 0, 1, \dots, M. \end{aligned} \quad (46)$$

Линейные интегральные уравнения (46) по своей структуре аналогичны уравнениям, рассмотренным выше для фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ . Они также могут быть решены после их регуляризации численным методом угловой дискретизации при сохранении всех указанных выше особенностей его реализации. В частности, при наличии у уравнений (35) характеристических корней  $k_m$  проблема неединственности численных решений интегральных уравнений (46) при  $m = 0$  и  $m \geq 1$  рассматривается отдельно на основе дополнительных интегральных соотношений, получение которых аналогично (37) и (43).

Располагая информацией об единой фотометрической функции  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ , которая является несимметричной функцией своих угловых переменных  $\eta$  и  $\xi$ , легко получить на основе (45) следующие выражения для величин  $\rho^m, \sigma^m, R_+^m$  и  $R_-^m, m = 0, 1, \dots, M$ :

$$\rho(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{E^m(\eta, \xi, \tau_0) + E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{2(\eta + \xi)}, \quad \sigma(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{E^m(\eta, \xi, \tau_0) + E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{2(\xi - \eta)}, \quad (47)$$

$$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\xi E^m(\eta, \xi, \tau_0) - \eta E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{\xi^2 - \eta^2}, \quad R^m(\eta, \xi, \tau_0) = \frac{\eta E^m(\eta, \xi, \tau_0) + \xi E^m(\xi, \eta, \tau_0)}{\xi^2 - \eta^2}. \quad (48)$$

**7. Результаты численного моделирования фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m$  и единой функции  $E^m$ .** Совершенно очевидно, что для достижения высокой точности расчетов ( $\geq 10^{-5}$ – $10^{-6}$ ) фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  по методу угловой дискретизации [13] или релаксационно-итерационным алгоритмам (метод Гаусса–Зайделя) [14] необходимым условием является быстрая сходимость дискретных решений системы уравнений (34) по сетке угловых переменных  $(\eta_i, \xi_k)$  и обеспечение их устойчивого поведения в случае увеличения числа узлов  $\eta_i$  и весов  $\alpha_i$  в квадратурной формуле Гаусса (29) [15]. В этой связи важное значение приобретает учет знакопеременного характера осциллирующих ядерных функций  $A^m(\eta, \xi)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  при  $\eta \Rightarrow 1$  и  $\xi \Rightarrow 1$ . Кроме того, важен учет у этих функций градиентных значений при  $m \geq 0$  и необходимость определения в данном экстремальном случае корней  $k_m$  характеристического уравнения (35) для всех  $m = 0, 1, \dots, M$ . Наконец, в случае  $m \leq 1$  следует принимать во внимание сложное поведение фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  при увеличении их номеров азимутальных гармоник ( $m \gg 1$ ). Учет всех указанных факторов приводит к существенному увеличению числа узлов  $\eta_i$  квадратурной формулы Гаусса (29) на интервале  $\eta_i \in [0, 1]$  от нескольких десятков до сотен, особенно в случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$ . В свою очередь, это обуславливает значительное увеличение ранга  $N$  исходных дискретных систем линейных алгебраических уравнений (34), уменьшая устойчивость и скорость сходимости их численных решений. С целью избежать негативного влияния указанных факторов в дальнейшем вместо

первоначальных фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  будем использовать их модифицированную форму с более плавно меняющейся угловой зависимостью от  $(\eta, \xi)$  согласно соотношению:

$$\tilde{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = \left[ R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) - R_{1,\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) \right] (\eta + \xi), \quad m = 0, 1, \dots, M. \quad (49)$$

Разумеется, соответственно новой структуре (49) очевидным образом меняются и дополнительные интегральные соотношения (36) и (42) в применяемой выше вычислительной схеме.

Для получения численных решений линейных интегральных уравнений (27-28) и (46) необходимо задать репрезентативные модели оптических параметров плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ . Ниже для расчетов функций  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$  была выбрана замкнутая в оптическом смысле аэрозольная модель земной атмосферы Элтермана, соответствующая в интервале длин волн  $\lambda = 400\text{--}800$  нм метеорологической дальности видимости  $V = 25$  км. Для последующего численного радиационного моделирования использовались также адекватные этой аэрозольной модели индикатрисы рассеяния Хеньи — Гринштейна:

$$x(\cos \gamma) = \frac{1 - g^2}{(1 + g^2 - 2g \cos \gamma)^{3/2}}, \quad |g| \leq 1 \quad (50)$$

и аппроксимирующие их (после использования соотношений подобия) трехчленные индикатрисы рассеяния:

$$x(\cos \gamma) = 1 + x_1 P_1(\cos \gamma) + x_2 P_2(\cos \gamma), \quad x_n = (2n+1)g^n \leq 2n+1, \quad n=0, 1, \dots, M. \quad (51)$$

На рисунке 3 представлена общая блок-схема численной реализации метода угловой дискретизации, использованная при нахождении фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  с учетом их модификации (49), а также при расчетах единой фотометрической функции

$E^m(\eta, \xi, \tau_0)$  для системы «атмосфера — подстилающая поверхность» в видимой области спектра  $\lambda = 400\text{--}800$  нм.

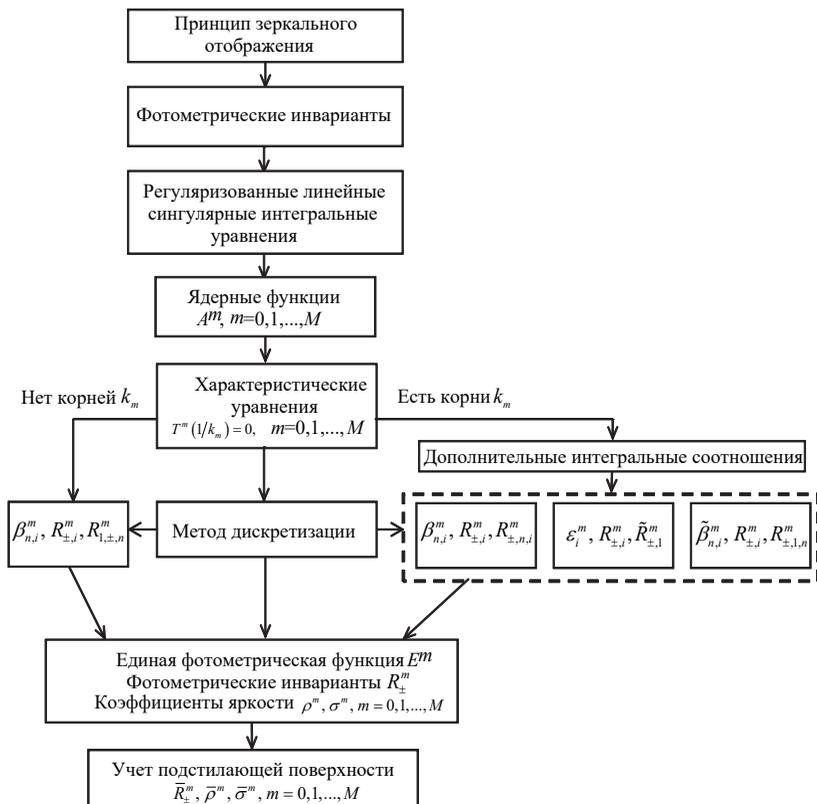


Рис. 3. Блок-схема численной реализации принципа зеркальной симметрии и метода угловой дискретизации

В реальном случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$ , когда  $M \gg 1$ , параметр  $g \approx 0,8\text{--}0,9$  и необходимо учитывать для них большое число азимутальных гармоник  $\xi^m$ , ядерные функции  $A^m(\eta, \xi)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  находились из точных линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода [4]:

$$A^m(\eta, \xi) = \xi^m(\eta, \xi) - \frac{\Lambda}{2} \eta \int_{-1}^1 \frac{[\xi^m(\eta, \xi)(1-\eta^2)^{m/2} - \xi^m(\eta', \xi)(1-\eta'^2)^{m/2}] A^m(\eta', \xi)}{\eta - \eta'} \frac{d\eta'}{(1-\eta'^2)^{m/2}}. \quad (52)$$

Интегральные уравнения (52) решались численно методом угловой дискретизации согласно процедурам, изложенным выше при нахождении фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ . На рисунке 3 представлена блок-схема численной реализации принципа зеркальной симметрии и метода угловой дискретизации.

На рисунке 4 представлены значения функции  $A^m(\eta, \xi)$  при  $m = 0$  в зависимости от угловых переменных  $(\eta, \xi)$  для оптических параметров аэрозольной земной атмосферы  $g = 0,850$  и  $\Lambda = 0,918$ . Осциллирующее поведение функции  $A^0(\eta, \xi)$  вблизи  $\eta \approx 1$  и  $\xi \approx 1$  является характерным при выборе оптимального числа узлов  $\eta_i$  в квадратурной формуле (29), обеспечивающего заданную точность ( $10^{-4} - 10^{-5}$ ) расчетов функций  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$  для  $m = 0, 1, \dots, M$ .

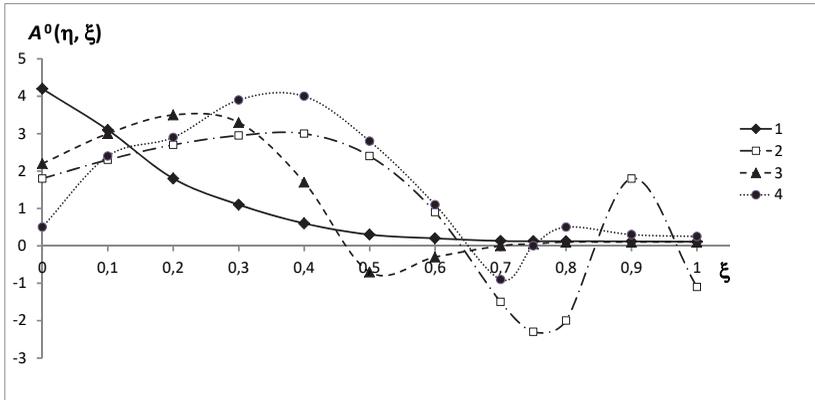


Рис. 4. Значения ядерной функции  $A^0(\eta, \xi)$  в зависимости от угловых переменных  $(\eta, \xi)$  для  $g = 0,850$  и  $\Lambda = 0,918$ : 1 –  $\eta = 0,2$ ; 2 –  $\eta = 0,5$ ; 3 –  $\eta = 1$ ; 4 –  $\eta = 0,8$

Располагая данными о функциях  $A^m(\eta, \xi)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ , в случае сильно вытянутых аэрозольных индикатрис рассеяния  $x(\cos\gamma)$  были рассчитаны характеристические корни  $k_m$  согласно алгоритму,

указанному в [11]. В таблице 1 представлены их значения, соответствующие оптическим параметрам аэрозольной земной атмосферы  $g = 0,850$  и  $\Lambda = 0,918$ .

Таблица 1. Характеристические корни  $k_m$  для оптических параметров  $g = 0,850$ ,  $\Lambda = 0,918$  и  $m = 0, 1, 2$

Номер азимутальной гармоники	0	1	$m \geq 2$
Характеристические корни $k_m$	0,3495 0,9953	0,9641	-

Согласно классическим рекомендациям [4] при наличии нескольких характеристических корней  $k_m$ , например, из таблицы 1 следует, что их два, для устранения неединственности решений уравнений (31) необходимо использовать дополнительные соотношения (36) или (42) для их наименьших значений.

В таблицах 2 и 3 представлены значения фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и единой функции  $E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , рассчитанные по методу угловой дискретизации при использовании модифицированной формы  $\tilde{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  для  $m = 0, 1, 2$  и значений оптических параметров аэрозольной атмосферы  $x_1 = 1,475$ ,  $x_2 = 1,524$ ,  $\Lambda = 0,907$  и  $\tau_0 = 0,334$  в видимой области спектра  $\lambda = 400\text{--}800$  нм. При построении данных таблицы 2 использовалась возможность их компактного представления на основе угловой перестановочной симметрии инвариантов для  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  согласно (12): в ее верхней диагональной части указаны значения  $R_{+}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , а в нижней — значения  $R_{-}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ . Для числовых данных, представленных по диагонали в виде дробей, числитель соответствует значениям  $R_{+}^m(\eta, \eta, \tau_0)$ , а знаменатель — значениям  $R_{-}^m(\eta, \eta, \tau_0)$ .

Для обеспечения сходимости полученных численных решений по угловой сетке переменных  $(\eta_i, \xi_k)$  и достижения их устойчивости в пределах заданной точности ( $10^{-4}\text{--}10^{-5}$ ) число узлов  $N$  квадратурной формулы (29) варьировалось согласно условию  $50 \leq N \leq 200$ . Для числовых данных, представленных в таблицах 2 и 3, оптимальное число узлов согласно данным таблицы 4 составляет  $N \approx 30\text{--}40$ .

Таблица 2. Численные значения фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$

$R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , $m = 0, 1, 2$	$R_{\pm}^0(\eta, \xi, \tau_0)$			$R_{\pm}^1(\eta, \xi, \tau_0)$			$R_{\pm}^2(\eta, \xi, \tau_0)$		
	$\xi \backslash \eta$	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5
0,1	<u>2,6859</u> 1,4265	1,1019	0,3708	<u>1,2098</u> 0,7080	0,5075	0,1640	<u>0,8463</u> 0,5483	0,3069	0,0499
0,5	0,0679	<u>0,5501</u> -0,1307	0,2832	-0,0003	<u>0,2376</u> -0,1492	0,0771	0,0529	<u>0,1248</u> 0,0052	0,0204
0,9	-0,0714	-0,1644	<u>0,3045</u> -0,1899	-0,0381	-0,0908	<u>0,0251</u> -0,0533	0,0096	0,0004	<u>0,0033</u> 0,0001

Таблица 3. Численные значения единой фотометрической функции

$$E^m(\eta, \xi, \tau_0), m = 0, 1, 2$$

$E^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m = 0, 1, 2$	$E^0(\eta, \xi, \tau_0)$		$E^1(\eta, \xi, \tau_0)$		$E^2(\eta, \xi, \tau_0)$	
	$\xi \backslash \eta$	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1
0,1	0,41124	-0,02712	0,19178	-0,01604	0,13946	0,00940
0,5	0,55774	-0,00636	0,25372	-0,04272	0,15874	0,01560
0,9	0,32658	0,10314	0,14426	-0,02540	0,04540	0,00306

Таблица 4. Сходимость численных решений  $R_{\pm, N}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, 2$  в зависимости от числа узлов  $N$  дискретизации и угла визирования  $\eta$ :  $\xi = 0,1$ ,  $\Lambda = 0,907$ ,  $x_1 = 1,475$ ,  $x_2 = 1,524$ ,  $\tau_0 = 0,334$

$R_{\pm, N}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m = 0, 1, 2$	$R_{\pm, N}^0(\eta, 0, 1, \tau_0)$		$R_{\pm, N}^1(\eta, 0, 1, \tau_0)$		$R_{\pm, N}^2(\eta, 0, 1, \tau_0)$		Среднее время расчетов
	$N \backslash \eta$	0,1	0,9	0,1	0,9	0,1	
20	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3716</u> -0,0715	<u>1,2214</u> 0,7078	<u>0,1683</u> -0,0344	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	6 сек
30	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3709</u> -0,0715	<u>1,2109</u> 0,7078	<u>0,1657</u> -0,0339	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	11 сек
40	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3709</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7079	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	17 сек
50	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3708</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7080	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	24 сек
точные решения	<u>2,6858</u> 1,4265	<u>0,3708</u> -0,0715	<u>1,2098</u> 0,7080	<u>0,1640</u> -0,0334	<u>0,8463</u> 0,5483	<u>0,0499</u> 0,0049	~20 мин

Числовые данные таблицы 4 представлены в виде дробей, в числителе которых указаны значения  $R_+^m$ , а в знаменателе — значения  $R_-^m$  для  $m = 0, 1, 2$ . Точные решения, приведенные в этой таблице, получены на основе результатов [5].

Таблица 5. Устойчивость численных решений  $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$  в зависимости от уровня возмущения  $\delta_*$  оптических параметров:  $\xi = 0,1$ ,  $\Lambda = 0,907$ ,  $x_1 = 1,475$ ,  $x_2 = 1,524$ ,  $\tau_0 = 0,334$

$R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$ $m=0,1,2$	$R_+^0(\eta, 0, 1, \tau_0)$			$R_+^1(\eta, 0, 1, \tau_0)$			$R_+^2(\eta, 0, 1, \tau_0)$		
$\delta$ $\eta$	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9	0,1	0,5	0,9
0	2,6859	1,1019	0,3708	1,2098	0,5075	0,1640	0,8463	0,3069	0,0499
1	2,6501	1,0909	0,3708	1,1832	0,5075	0,1601	0,8340	0,3069	0,0499
5	2,4945	1,0130	0,3719	1,0970	0,4675	0,1412	0,7817	0,2771	0,0437
10	2,2683	0,8916	0,3856	0,9875	0,4006	0,1215	0,6833	0,2411	0,0385

Данные таблицы 5 иллюстрируют уровень устойчивости численных решений  $R_+^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, 2$  в зависимости от уровня возмущения  $\delta_*$  (%) оптических параметров среды:  $\tilde{\Lambda} \Rightarrow \Lambda + \delta_* \Lambda$ ,  $\tilde{x}_1 \Rightarrow x_1 + \delta_* x_1$ ,  $\tilde{x}_2 \Rightarrow x_2 + \delta_* x_2$ ,  $\tilde{\tau}_0 \Rightarrow \tau_0 + \delta_* \tau_0$ .

**8. Учет подстилающей поверхности на уровне нижней границы плоского однородного слоя.** Ниже представлено аналитическое решение важной прикладной задачи, связанной с расчетом азимутальных гармоник фотометрических инвариантов  $\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  при наличии подстилающей поверхности, расположенной на уровне нижней границы ( $\tau = \tau_0$ ) плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ . В этом случае решение указанной проблемы основывается на использовании классических систем точных линейных интегральных уравнений Фредгольма II рода, полученных для составляющих функции  $\bar{R}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , а именно азимутальных гармоник коэффициентов яркости  $\bar{\rho}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  и  $\bar{\sigma}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  при наличии горизонтально-однородного отражающего дна в несимметризованной теории переноса излучения [4]. Вводя соответствующие фотометрические инварианты  $\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0)$  согласно определению:

$$\bar{R}_\pm^m(\eta, \xi, \tau_0) = \bar{\rho}^m(\eta, \xi, \tau_0) \pm \bar{\sigma}^m(\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta \in [0, 1], \quad \xi \in [0, 1], \quad \tau \in [0, \tau_0], \quad m = 0, 1, \dots, M, \quad (53)$$

получаем для их нахождения вместо систем линейных интегральных уравнений отдельные линейные интегральные уравнения Фредгольма II рода:

$$\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) = R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0) + \bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0) e^{\frac{\tau_0}{n}} + 2 \int_0^1 R_{\pm}^m(\eta, \eta', \tau_0) \bar{\beta}^m(\eta', \xi, \tau_0) \eta' d\eta', \quad (54)$$

$\eta \in [0, 1], \xi \in [0, 1], \tau < \infty, m = 0, 1, \dots, M.$

Азимутальные гармоники коэффициента отражения  $\bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  неортоотропной подстилающей поверхности определяются в (54) согласно точному соотношению:

$$S_{\xi} \bar{\beta}^m(\eta, \xi, \tau_0) = I_{\text{пов}}^m(-\eta, \xi, \tau_0), \quad \eta > 0, \xi \in [0, 1], \tau_0 < \infty, m = 0, 1, \dots, M, \quad (55)$$

где функции  $I_{\text{пов}}^m(-\eta, \xi, \tau_0)$  являются азимутальными гармониками яркости горизонтально-однородного отражающего дна для произвольного закона отражения  $Y^m(\eta, \eta')$  и считаются заданными. Таким образом, численные значения искомым величин  $\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$  находятся из уравнений (54-55) простым интегрированием по текущему углу  $\theta' = \arccos \eta'$  в случае произвольно заданного закона отражения  $Y^m(\eta, \eta')$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  для горизонтально-однородной подстилающей поверхности и заранее рассчитанных фотометрических инвариантов  $R_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$  при ее отсутствии ( $Y^m \equiv 0$ ). Отметим, что численные расчеты величин  $\bar{R}_{\pm}^m(\eta, \xi, \tau_0)$ , проведенные по формулам (54-55) для различных функций отражения  $Y^m(\eta, \eta')$ , показали существенное влияние степени неортоотропности горизонтально-однородной подстилающей поверхности по сравнению с ее ортоотропной моделью [16].

**9. Заключение.** Проведенное на основе решений линейных сингулярных интегральных уравнений и принципа зеркального отображения определение фотометрических инвариантов коэффициентов яркости плоского однородного слоя конечной оптической толщины  $\tau_0 < \infty$ , ограниченного снизу произвольным горизонтально-однородным отражающим дном, показали эффективность применения метода угловой дискретизации в задачах численного моделирования внешних полей из-

лучения системы «атмосфера — подстилающая поверхность». В частном случае полубесконечной среды  $\tau_0 = \infty$  обоснование подобного подхода ранее было детально рассмотрено в [11]. Отметим также, что проведенный выше анализ в силу линейности используемых базовых интегральных уравнений может быть обобщен на случай внутренних полей скалярного и поляризованного излучения при учете многократного анизотропного рассеяния фотонов и их отражения от произвольной горизонтально-однородной подстилающей поверхности. При этом использование модифицированных Фурье-разложений индикатрис рассеяния  $\chi(\cos\gamma)$  и интенсивностей излучения  $I(\tau, \eta, \xi, \varphi, \tau_0)$  [17–19] совместно с усовершенствованными вариантами многосеточных релаксационно-итерационных алгоритмов [20–22] позволяет ускорить сходимость дискретных решений соответствующих линейных алгебраических систем высокого ранга ( $N \gg 1$ ) и одновременно повысить их устойчивость в задачах численного моделирования полей излучения природных сред.

### Литература

1. Сушкевич Т.А. Математические модели переноса излучения // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005. 664 с.
2. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle // Proc. of IRS'2000, Current Problems in Atmospheric Radiation IRS'2000. Hampton. USA. A. Deepak Publ. Co. 2001. pp. 341–344.
3. Chandrasekhar S. Radiative transfer // Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
4. Sobolev V.V. Light scattering in planetary atmosphere // Oxford: Pergamon Press. 1975. 254 p.
5. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications // New York, Academic Press. 1980. 739 p.
6. Смоктий О.И. Общий принцип зеркальной симметрии и инвариантные свойства полей поляризованного излучения природных сред // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Том 2. С. 333–340.
7. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих средах. Стандартные методы расчета / Под ред. Ж. Ленобль // Л.: Гидрометеиздат. 1990. 264 с.
8. Smokty O.I. Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle // Proc. of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13). Berlin. Springer. 2013. pp. 1–17.
9. Jeong U., Kim J. Development of the MATALB version of DISORT for atmospheric research purposes // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 215–219.
10. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы // М.: БИНОМ. 2004. 636 с.
11. Смоктий О.И., Аниконов А.С. Рассеяние света в средах большой оптической толщины // СПб.: Наука. 2008. 440 с.
12. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation field for strongly elongated phase functions // Proc. of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'2016). Berlin. Springer. 2016. pp. 110–128.

13. *Hamre B., Stamnes S., Stamnes K., Stamnes J.J.* C-DISORT: A versatile tool for radiative transfer in coupled media like the atmosphere-ocean system // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 926–926.
14. *Yuan J.Y., Zontini D.D.* Comparison theorems of preconditioned Gauss–Seidel methods for M-matrices // Applied Mathematics and Computation. 2012. vol. 219. pp. 1947–1957.
15. *Doicu A., Efremenko D., Loyola D.* Acceleration of the discrete ordinates method for nadir viewing geometries // Proc. of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 81–85.
16. *Смоктый О.И.* Теория образования слабых спектральных линий в атмосфере, ограниченной снизу горизонтально-однородной подстилающей поверхностью // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2015. №5. Том 51. С. 550–561.
17. *Olver S.* On the convergence rate of a modified Fourier series // Mathematics of Computation. 2009. vol. 78. pp. 1629–1645.
18. *Adcock B.* Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions // Mathematics of Computation. 2011. vol. 80. pp. 225–261.
19. *Li W.* Alternative Fourier series expansions with accelerated convergence // Applied Mathematics. 2016. vol. 7. no. 15. pp. 1824–1845.
20. *Press W., Flannery B., Teukolsky S., Vetterling W.* Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version) // Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.
21. *Nazari A.M., Zia Borujeni S.* A modified precondition in the Gauss-Seidel method // Advances in Linear Algebra & Matrix Theory. 2012. vol. 2. no. 3. pp. 31–37.
22. *Ishida I.* Development of solution scheme applying the multigrid method for three-dimensional radiative transfer // Proc. IRS'2012, Current Problems of Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 220–224.

**Смоктый Олег Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор, Заслуженный деятель науки РФ, академик Международной Академии Астронавтики (Франция), главный научный сотрудник лаборатории прикладной информатики и проблем информатизации общества, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: теория переноса излучения, моделирование полей излучения в задачах дистанционного зондирования Земли из космоса, космическая геоинформатика. Число научных публикаций — 280. [soi@ias.spb.su](mailto:soi@ias.spb.su); 14-я линия В.О., 39, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7-(812)-328-44-50.

O.I. SMOKTY

## NUMERICAL MODELING OF UNIFORM SLAB BRIGHTNESS COEFFICIENTS BASED ON THE MIRROR REFLECTION PRINCIPLE AND LINEAR SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS SOLUTIONS

---

*Smokty O.I. Numerical Modeling of Uniform Slab Brightness Coefficients based on the Mirror Reflection Principle and Linear Singular Integral Equations Solutions.*

**Abstract.** Based on the mirror reflection principle and solutions of modified linear singular integral equations, the numerical modeling of the unified exit function of the outside radiation field and photometrical invariants of brightness coefficients for a uniform slab of finite optical thickness has been carried out. The efficacy of applying the angular discretization method for problems of numerical modeling of outer radiation fields in the «atmosphere — underlying surface» system has been proved. This new approach allows generalizing the basic results in the particular case of a semi-infinite uniform slab. In this connection the main mathematical aspects and computational peculiarity of the numerical realization of the angular discretization method have been considered. Due to linearity of the used basic integral equations, the conducted analysis can be generalized to the case of scalar and polarized inner radiation fields taking into account the multiple anisotropic scattering of photons and their reflection from an arbitrary horizontally uniform underlying surface.

**Keywords:** mirror reflection principle, uniform slab, brightness coefficients, photometrical invariants, unified exit function, main boundary problem, linear singular integral equations, regularization, numerical modeling, discretization method, characteristic roots, reflecting underlying surface.

---

**Smokty Oleg Ivanovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, Honored Scientist of Russian Federation, Full Member of the International Academy of Astronautics (France), chief researcher at the Laboratory of Applied Informatics and Problems of Society Informatization, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: radiative transfer theory, radiation field modeling in problems of the earth remote sensing from space, geoinformatics. The number of publications — 280. soi@iiias.spb.su; 39,14th Line VO, 199178 St. Petersburg, Russia; office phone: +7-(812)-328-44-50.

### References

1. Sushkevich T.A. *Matematicheskie modeli perenosa izluchenija* [Mathematical models of radiation transfer]. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. 2005. 664 p. (In Russ.).
2. Smokty O.I. Development of radiative transfer theory methods on the base of mirror symmetry principle. Proceedings of IRS'2000, Current Problems in Atmospheric Radiation IRS'2000. Hampton. USA. A. Deepak Publ. Co. 2001. pp. 341–344.
3. Chandrasekhar S. Radiative transfer. Oxford: Oxford Univ. Press. 1950. 394 p.
4. Sobolev V.V. Light scattering in planetary atmosphere. Oxford: Pergamon Press. 1975. 254 p.
5. van de Hulst H.G. Multiple light scattering: Tables, Formulas and Applications. New York, Academic Press. 1980. 739 p.
6. Smokty O.I. [General mirror symmetry principle and invariant's properties of environment polarimetric radiation fields]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2005. vol. 2(34). pp. 333–340. (In Russ.).

7. *Perenos radiacii v rasseivajushhiih i pogloshhajushhiih sredah. Standartnye metody rascheta. Pod red. Zh. Lenobl'* [Radiative transfer in scattering and absorbing atmospheres: Standard computational procedures. Edited by Lenoble J.]. L.: Gidrometeoizdat. 1990. 264 p. (In Russ.).
8. Smokty O.I. Improvements of methods of radiation fields numerical modeling on the basis of mirror reflection principle. Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'13). Berlin. Springer. 2013. pp. 1–17.
9. Jeong U., Kim J. Development of the MATABL version of DISORT for atmospheric research purposes. Proceedings of IRS'2012, Current Problems in Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 215–219.
10. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Laboratorija znanii. 2004. 636 p. (In Russ.).
11. Smokty O.I., Anikonov A.S. *Rassejanie sveta v sredah bol'shoy opticheskoy tolshhiny* [Light Scattering in Media with Large Optical Depth]. St. Petersburg: Nauka. 2008. 440 p. (In Russ.).
12. Smokty O.I. Analytical spatial-angular structure of uniform slab radiation field for strongly elongated phase functions. Proceedings of Computational Sci. and Applications, part V (ICCSA'2016). Berlin. Springer. 2016. pp. 110–128.
13. Hamre B., Stamnes S., Stamnes K., Stamnes J.J. C-DISORT: A versatile tool for radiative transfer in coupled media like the atmosphere-ocean system. Proceedings of Current Problems in Atmospheric Radiation (IRS'2012). American Institute of Physics. 2013. pp. 926–926.
14. Yuan J.Y., Zontini D.D. Comparison theorems of preconditioned Gauss–Seidel methods for M-matrices. *Applied Mathematics and Computation*. 2012. vol. 219. pp. 1947–1957.
15. Doicu A., Efremenko D., Loyola D. Acceleration of the discrete ordinates method for nadir viewing geometries. Proceedings of Current Problems in Atmospheric Radiation (IRS'2012). American Institute of Physics. 2013. pp. 81–85.
16. Smokty O.I. [Theory of weak spectral lines formation in an atmosphere bounded from below by a horizontally homogeneous underlying surface]. *Izvestiya rossiiskoi akademii nauk, Fizika atmosfery i okeana – Izvestiya, Atmospheric and oceanic physics*. 2015. vol. 5. pp. 550–561. (In Russ.).
17. Olver S. On the convergence rate of a modified Fourier series. *Mathematics of Computation*. 2009. vol. 78. pp. 1629–1645.
18. Adcock B. Convergence acceleration of modified Fourier series in one or more dimensions. *Mathematics of Computation*. 2011. vol. 80. pp. 225–261.
19. Li W. Alternative Fourier series expansions with accelerated convergence. *Applied Mathematics*. 2016. vol. 7. no. 15. pp. 1824–1845.
20. Press W., Flannery B., Teukolsky S., Veerferling W. Numerical Recipes. The art of Scientific Computing (Fortran Version). Cambridge: Cambridge Univ. Press. 1989. 702 p.
21. Nazari A.M., Zia Borujeni S. A modified precondition in the Gauss-Seidel method. *Advances in Linear Algebra & Matrix Theory*. 2012. vol. 2. no. 3. pp. 31–37.
22. Ishida I. Development of solution scheme applying the multigrad method for three-dimensional radiative transfer. Proceedings of IRS'2012, Current Problems of Atmospheric Radiation. American Institute of Physics. 2013. pp. 220–224.

И.С. Полянский  
**ВЕКТОРНЫЙ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В  
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

---

*Полянский И. С.* **Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике.**

**Аннотация.** В статье разработан векторный барицентрический метод, предлагаемый для решения внутренней задачи электродинамики — решение уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области с заданными граничными условиями. Разработанный метод относится к методам прямого решения краевых и начально-краевых задач математической физики, основой для формирования которых служат результаты, полученные В. Ритцем, И.Г. Бубновым и Б.Г. Галеркиным. Основная идея метода заключается в обобщении процедуры аппроксимации векторного потенциала, реализуемой полиномами лагранжевого типа. Аппроксимирующий полином формируется в барицентрической системе координат для всей области анализа в целом без ее разбиения на элементарные подобласти. Предполагается, что область анализа является областью с кусочно-линейной границей, а размерность барицентрической системы координат определяется числом вершин анализируемой области. С учетом ряда особенностей реализация векторного барицентрического метода выполнена как в частотной, так и во временной областях. Рассмотрено решение задачи управления электромагнитным полем в приближении векторного барицентрического метода.

**Ключевые слова:** векторный барицентрический метод, барицентрические координаты, векторный потенциал, уравнение Гельмгольца.

---

**1. Введение.** В условиях бурного развития производительности современных средств вычислительной техники и систем автоматизированного проектирования актуален вопрос, связанный с разработкой эффективных методов математического моделирования СВЧ структур, экспериментальное исследование электромагнитного поля (ЭМП) которых является весьма сложной и дорогостоящей процедурой.

Известные научные труды [1-5] освящают отдельные результаты в указанной области, выполняя исследование СВЧ структур прямыми (метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод матрицы линий передачи), непрямыми (метод моментов) и асимптотическими (методы физической оптики, геометрической теории дифракции и пр.) методами решения краевых задач электродинамики. Отличительной и наиболее привлекательной чертой прямых методов является их универсальность — возможность анализировать практически любую структуру. В связи с привлекательностью относительно указанной универсальности среди прямых методов в большинстве современных САПР моделирования высокочастотных электромагнитных полей (Ansis-Ansoft HFSS, CST Microwave Studio Suite, QWAVE QuickWave3D, Remcom XFDTD, EMSS-SA FEKO, Russian R&D Center

LG Electronics RFS и др. [6]) наибольшее распространение получил метод конечных элементов [1]. При этом платой за универсальность являются большие вычислительные и емкостные затраты. С точки зрения пользователя последнее приводит к существенному недостатку — необходимо больше времени для анализа [7]. Это обусловлено тем, что все прямые методы так или иначе связаны с разбиением области анализа или некоторой проводящей поверхности на большое число одинаковых подобластей простой формы. Подобный недостаток в ряде случаев затрудняет решение задач, связанных с проектированием СВЧ структур.

Для устранения указанного недостатка и в дополнение к прямым методам вычислительной электродинамики в работе [8] предложен барицентрический метод для решения скалярных волновых уравнений. Как известно, большинство задач электродинамики допускают решение волновых уравнения относительно оценки распределения в области анализа  $\Omega$  продольных составляющих напряженностей электрического  $\dot{E}_z$  и магнитного  $\dot{H}_z$  полей [3]. При этом поперечные составляющие ЭМП  $\dot{E}_x, \dot{E}_y$  и  $\dot{H}_x, \dot{H}_y$  могут быть выражены через  $\dot{E}_z$  и  $\dot{H}_z$ . Однако в ряде случаев возникает потребность в непосредственном расчете распределения векторного ЭМП в  $\Omega$ . Подобный расчет предполагает решение векторных волновых уравнений. Необходимость векторного решения связана с заданием требуемых граничных условий [1], когда, например, обеспечение непрерывности тангенциальных составляющих ЭМП на границе раздела разнородных сред невозможно по одной лишь продольной компоненте.

Цель статьи заключается в разработке векторного барицентрического метода (ВБМ) в дополнение к прямым методам решения внутренних задач электродинамики.

## 2. Векторный барицентрический метод в частотной области.

Рассмотрим численное решение ВБМ однородного векторного уравнения Гельмгольца:

$$\nabla^2 \vec{A} + k^2 \vec{A} = \vec{0}, \quad (1)$$

в области анализа  $\Omega$ , заданной последовательность неповторяющихся вершин  $P_1, P_2, \dots, P_N$  и ограниченной ломаной  $\Gamma$ .

В выражении (1)  $k$  — волновое число в среде распространения;  $\vec{A}$  — векторный потенциал, задающий значения или векторов

напряженности электрического  $\vec{E}$  и магнитного полей  $\vec{H}$  в зависимости от заданных граничных условий, или вектор Герца [1].

Решение задачи (1) выполняется в соответствии с принципом минимума потенциала запасенной энергии:

$$F(\vec{A}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{A}) \cdot (\nabla \times \vec{A}) - k^2 (\vec{A} \cdot \vec{A}) d\Omega \rightarrow \min. \quad (2)$$

Суть ВБМ заключается в задании векторного аппроксимирующего полинома для всей области анализа  $\Omega$  в целом без ее разбиения на элементарные подобласти. Аппроксимирующий полином формируется в  $N$ -мерной барицентрической системе координат  $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$ , которая для  $\Omega$  вводится по правилам [15] и применяется в качестве аппроксимации Ритца для сведения (2) к системе линейных уравнений.

*Теорема 1.* Функция  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ , задающая

аппроксимацию порядка  $m$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) потенциала  $\vec{A}$  в векторном уравнении Гельмгольца (1), при

$$\vec{\beta}_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \vec{\Theta}_j(P), \quad (3)$$

является аппроксимацией Ритца.

В аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$   $A_i$  —

аппроксимационные коэффициенты в  $i$ -х узловых точках при аппроксимации векторного потенциала  $\vec{A}(P)$  для  $P \in \Omega$ .

В выражении (3)  $\hat{\alpha}_i^j(P)$  — вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра–Лагранжа [10] относительно  $j$ -ой вершины  $\Omega$ , заданный через сдвинутые полиномы Лагранжа  $\hat{R}_{i_k}(P)$ :

$$\hat{\alpha}_i^j(P) = \hat{R}_{i_j}(P) \prod_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^N R_{i_{j'}}(P);$$

$$\hat{R}_{i_j}(P) = \begin{cases} \frac{1}{(i_j - 1)!} \prod_{h=1}^{i_j-1} (m\zeta_j(P) - h), & \text{if } 2 \leq i_j \leq m; \\ 1, & \text{if } i_j = 1. \end{cases} \quad (4)$$

$\bar{\Theta}_j(P)$  — краевые базисные векторные функции Неделека относительно  $j$ -ой вершины  $\Omega$ , задаваемые через дифференциальные формы Уитни [11]:

$$\bar{\Theta}_j(P) = (\zeta_j(P) \nabla \zeta_{j+1}(P) - \zeta_{j+1}(P) \nabla \zeta_j(P)) |P_{j+1} - P_j|; \quad (5)$$

$i$  — мультииндекс из множества  $M_m$  [9]:

$$M_m = \left\{ i = (i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_N) : i_j \in \mathbb{Z}, i_j \geq 0, \sum_{j \in [1; N]} i_j = m \right\}. \quad (6)$$

В выражении (4)  $R_{i_{j'}}(P) = \prod_{k=1}^{i_{j'}} [(m\zeta_{j'}(P) - k + 1)/k]$  при  $i_{j'} > 0$ ,

$R_0(P) = 1$  — полином Лагранжа [3, 8].

*Доказательство.* Из [1, 10-14] известно, что векторные функции (5) для симплекса являются краевыми базисными функциями. Из свойств гармонических барицентрических координат (БК) [15] следует, что векторные функции (5) для произвольного многоугольника  $\Omega$  являются краевыми базисными функциями.

Предположим, что в  $\Omega$  для барицентрической системы координат в точках  $\zeta_j^h = h/m$  ( $h = \overline{1, m}$ ), расположенных на расстоянии  $1/m$ , определены значения некоторого скалярного потенциала  $\Phi_i$ . Тогда интерполяционный многочлен Лагранжа, задающий аппроксимацию этого потенциала  $\Phi(P)$  в  $P \in \Omega$ , будет определен суммой  $\Phi(P) = \sum_{i \in M_m} \Phi_i \alpha_i(P)$ , где  $\alpha_i(P)$  — базисный полином:

$$\alpha_i(P) = \prod_{h_1=0}^{i_1-1} \prod_{h_2=0}^{i_2-1} \dots \prod_{h_N=0}^{i_N-1} \left[ \frac{\zeta_1(P) - \zeta_1^{h_1}}{\zeta_1^{i_1} - \zeta_1^{h_1}} \cdot \frac{\zeta_2(P) - \zeta_2^{h_2}}{\zeta_2^{i_2} - \zeta_2^{h_2}} \cdot \dots \cdot \frac{\zeta_N(P) - \zeta_N^{h_N}}{\zeta_N^{i_N} - \zeta_N^{h_N}} \right] \quad (7)$$

при этом, если  $i_j - 1 < 0$ , то сомножителем под знаком произведения является 1.

Представим  $\alpha_i(P)$  соотношением:

$$\alpha_i(P) = \prod_{j=1}^N R_{i_j}(P); \quad R_{i_j}(P) = \prod_{h=0}^{i_j-1} \frac{\zeta_j(P) - \zeta_j^h}{\zeta_j^{i_j} - \zeta_j^h}. \quad (8)$$

Учитывая, что  $\zeta_j^h = h/m$ , преобразуем  $R_{i_j}(P)$  к виду:

$$R_{i_j}(P) = \prod_{h=0}^{i_j-1} \frac{\zeta_j(P) - h/m}{i_j/m - h/m} = \prod_{h=1}^{i_j} \frac{m\zeta_j(P) - h + 1}{h}. \quad (9)$$

Предположим, что  $\alpha_i(P)$  гармоническая функция, тогда по теореме о среднем справедливо тождество:

$$\prod_{j=1}^N R_{i_j}(P) = \prod_{j=1}^N \left[ \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{i_j}(\zeta') dS(\zeta') \right], \quad (10)$$

которое выполняется при:

$$R_{i_j}(P) = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} R_{i_j}(\zeta') dS(\zeta'). \quad (11)$$

Справедливость (11) с учетом (9) следует из равенства:

$$\frac{m}{h} \zeta_j(P) - 1 + \frac{1}{h} = \frac{1}{|B_P^r|} \int_{\partial B_P^r} \left( \frac{m}{h} \zeta_j(\zeta') - 1 + \frac{1}{h} \right) dS(\zeta'). \quad (12)$$

Выражение (12) при применении нетрудных преобразований определяет требование того, что БК  $\zeta_j(P)$  гармонические, что соответствует [15]. Следовательно, исходное предположение и

тождества (10) верно и функция  $\Phi(P) = \sum_{i \in M_m} \Phi_i \alpha_i(P)$  гармоническая и для заданного порядка  $m$  базисного полинома  $\alpha_i(P)$  является аппроксимацией Рунта в  $\Omega$ .

С учетом определения в [10] предела  $\lim_{i_j \rightarrow 0} \hat{R}_{i_j}(P)/i_j = (m\zeta_j)^{-1}$  от сдвинутого полинома Лагранжа и выявленных свойств интерполяционной формы  $\alpha_i(P)$  для гармонических БК определим расширение краевых базисных функций  $\bar{\Theta}_j(P)$  для узловых точек, расположенных на ребре  $e_j = (P_j, P_{j+1})$  области  $\Omega$ , соотношением:

$$\bar{\beta}_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \bar{\Theta}_j(P). \quad (13)$$

Заметим, что с учетом свойств БК [15] интерполяционной формы  $\alpha_i(P)$  и функции (5) для  $j$ -го ребра следует:

$$\frac{P_{j+1} - P_j}{|P_{j+1} - P_j|} \cdot \sum_{\substack{i \in M_m \\ i_j \neq 0}} \bar{\beta}_i(P) = 1; \quad (14)$$

$$\nabla \times \sum_{i \in M_m} \frac{\bar{\beta}'_i(P)}{J_i} = \sum_{j=1}^N (\nabla \zeta_j(P)) \times (\nabla \zeta_{j+1}(P)) = \text{const}; \quad (15)$$

$$\nabla \cdot \sum_{i \in M_m} \frac{\bar{\beta}'_i(P)}{J_i} = 0, \quad (16)$$

где

$$\bar{\beta}'_i(P) = \sum_{\substack{j=1 \\ i_j > 0}}^N \hat{\alpha}_i^j(P) \frac{\bar{\Theta}_j(P)}{|P_{j+1} - P_j|}; \quad J_i = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{j=1}^N \frac{i_j}{m} P_j \in \Gamma; \\ N, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (17)$$

Тождества (14-16) обеспечивают отсутствие ложных решений [1] векторного уравнения Гельмгольца (1) при использовании

аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ . Таким образом, для произвольной

узловой точки многоугольника  $\Omega$  справедливо расширение краевых базисных функций  $\vec{\Theta}_j(P)$  соотношением (3), что и требовалось доказать. ■

На рисунке 1 отражено графическое представление векторного поля, описываемого векторной базисной функцией  $\vec{\Theta}_1(P)$  внутри треугольника, квадрата и пятиугольника.

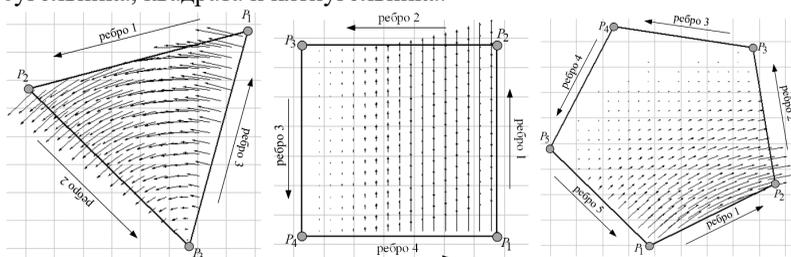


Рис. 1. Представление векторной базисной функции  $\vec{\Theta}_1(P)$  внутри треугольника, четырехугольника и пятиугольника

На рисунке 2 отражено графическое представление векторного поля, описываемого расширенными векторными базисными функциями  $\vec{\beta}_i(P)$  внутри пятиугольника для различных узловых точек при  $m = 2$ .

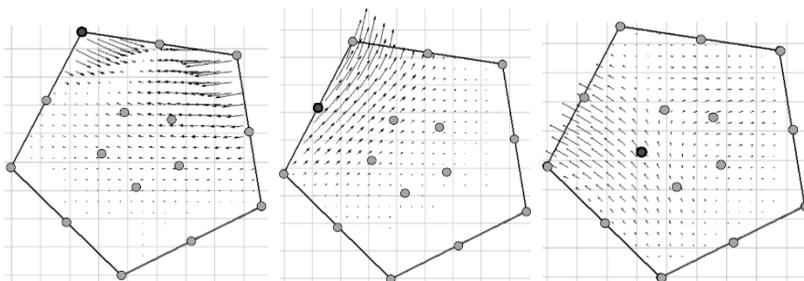


Рис. 2. Представление расширенных векторных базисных функций  $\vec{\beta}_i(P)$  внутри пятиугольника при  $m = 2$

Подстановка аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$  в

выражение (2) дает возможность получить новый функционал в матричной форме:

$$F(\vec{A}) = (\vec{A} \mathbf{S} \vec{A}^T - k^2 \vec{A} \mathbf{T} \vec{A}^T) / 2, \quad (18)$$

где  $\vec{A}$  — вектор коэффициентов разложения в аппроксимации  $\vec{A}(P) = \sum_{i \in M_m} A_i \vec{\beta}_i(P)$ ;  $\mathbf{S} = (s_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{T} = (t_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$  — квадратные матрицы размерностью  $|M_m| \times |M_m|$ , элементы которых определяются соответствующими выражениями:

$$s_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \vec{\beta}_i) \cdot (\nabla \times \vec{\beta}_j) d\Omega; \quad i, j \in M_m, \quad (19)$$

$$t_{i,j} = \int_{\Omega} \vec{\beta}_i \vec{\beta}_j d\Omega; \quad i, j \in M_m. \quad (20)$$

В выражениях (19), (20) значения  $\vec{\beta}_i$  для заданных координат точки  $P \in \Omega$  задаются соотношением (3).

Определение экстремума (2) выполняется сведением задачи (18) к системе линейных уравнений:

$$\mathbf{S} \vec{A} - k^2 \mathbf{T} \vec{A} = \vec{0}, \quad (21)$$

полученной путем дифференцирования  $\partial F(\vec{A}) / \partial A_i$ .

Решение системы уравнений (21) относительно  $\vec{A}$  определяет приближенное значение векторного потенциала в  $i$ -х узлах аппроксимации Рунца при сведении (21) к известной задаче на собственные числа и собственные векторы [3]:

$$\det(\mathbf{A} - k^2 \mathbf{E}) = 0; \quad (\mathbf{A} - k^2 \mathbf{E}) \vec{A} = \vec{0}, \quad (22)$$

где  $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{S}$ ;  $\mathbf{E}$  — единичная матрица размера  $|M_m| \times |M_m|$ .

**3. Векторный барицентрический метод во временной области.** Рассмотренное в предыдущем пункте решение уравнения

Гельмгольца (1) в приближении векторного барицентрического метода выполняет решение уравнений Максвелла в приближении метода комплексных амплитуд. Получаемые соотношения справедливы для ЭМП, подчиняющемуся гармонической зависимости от времени. В случае, когда, например, амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) сигнала источника возбуждения моделируемого СВЧ устройства отличается от монохроматического сигнала, оценка истинных составляющих ЭМП в частотной области может быть выполнена взвешенным суммированием составляющих напряженностей электрического и магнитного поля, рассчитанных на различных частотах [2]. Такой подход может быть не всегда удобен с точки зрения вычислительных затрат, особенно для широкополосных сигналов и сигналов с АЧХ сложной формы. Более того, такой подход затрудняет решение задач управления при оценке распределение мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного поля в заданной области анализа в конкретный момент времени  $t$ . Оценка мгновенных составляющих ЭМП с учетом [1] может быть сведена к решению уравнения второго порядка, заданного для напряженности электрического поля  $\vec{E}$  относительно поля электрического типа:

$$\nabla \times (\mu_r^{-1} \nabla \times \vec{E}) + \sigma \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon_r \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}, \quad (23)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $\mu_0$  — магнитная постоянная;  $\epsilon_r$  и  $\mu_r$  — относительные диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно;  $\sigma$  — электропроводимость;  $\vec{J}$  — плотность электрического тока.

Подставив в (23) аппроксимацию векторного потенциала вида  $\vec{E}(P, t) = \sum_{i \in M_m} A_i(t) \vec{\beta}_i(P)$ , где  $A_i(t)$  — значения коэффициентов разложения  $\vec{E}(P, t)$  в  $i$ -х узловых точках в момент времени  $t$ , сведем дифференциальное уравнение второго порядка к решению системы дифференциальных уравнений (СДУ), представленной в матричном виде:

$$\mathbf{S}\vec{A}(t) + \mathbf{U}\dot{\vec{A}}(t) + \mathbf{T}\ddot{\vec{A}}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (24)$$

где  $\mathbf{S} = (s_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{U} = (u_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$ ,  $\mathbf{T} = (t_{i,j})_{|M_m| \times |M_m|}$  — квадратные матрицы при:

$$s_{i,j} = \int_{\Omega} (\nabla \times \bar{\gamma}_i) \cdot (\mu_r^{-1} \nabla \times \bar{\gamma}_j) d\Omega; \quad (25)$$

$$u_{i,j} = \mu_0 \int_{\Omega} \sigma \bar{\gamma}_i \cdot \bar{\gamma}_j d\Omega; \quad t_{i,j} = c^{-2} \int_{\Omega} \epsilon_r \bar{\gamma}_i \cdot \bar{\gamma}_j d\Omega.$$

$\mathbf{F}(t) = (\bar{f}(t)_i)_{|M_m|}$  — вектор-столбец при:

$$\bar{f}_i(t) = -\mu_0 v(t) \int_{\Omega} \bar{\gamma}_i \bar{J} d\Omega, \quad (26)$$

где  $v(t)$  — некоторая функция входного сигнала возбуждения при

представлении  $\frac{\partial \bar{J}(t)}{\partial t} = v(t) \bar{J}$ ;  $\bar{A}(t) = (A_i(t))_{|M_m|}$ ;  $\dot{\bar{A}}(t) = \left( \frac{\partial A_i(t)}{\partial t} \right)_{|M_m|}$ ;

$\ddot{\bar{A}}(t) = \left( \frac{\partial^2 A_i(t)}{\partial t^2} \right)_{|M_m|}$ ;  $t \in [t_0, t_1]$ ;  $[t_0, t_1]$  — отрезок времени анализа.

Сведем полученную систему (24) к СДУ первого порядка, введя дополнительные переменные  $\bar{Y}(t) = \dot{\bar{A}}(t)$ ;  $\dot{\bar{Y}}(t) = \ddot{\bar{A}}(t)$ , к виду:

$$\dot{\bar{Y}}(t) = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{F}(t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t)], \quad (27)$$

Решение задачи (27) предполагается выполнять численно с использованием современных методов разделения систем обыкновенных дифференциальных уравнений для построения экономичных явных схем типа Рунге — Кутты [16] для заданных начальных условиях  $\bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*$ .

В целом заданная постановка задачи (27) анализа ЭМП позволяет сформировать задачу оптимального управления ЭМП, например, в виде:

$$t_1 - t_0 \rightarrow \min; \quad \dot{\bar{Y}}(t) = \mathbf{T}^{-1} [\mathbf{F}(v,t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t)]; \quad (28)$$

$$\bar{Y}(t) = \dot{\bar{A}}(t); \quad \bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*; \quad \dot{\bar{A}}(t_0) = \dot{\bar{A}}_0^*; \quad \bar{A}(t_1) = \bar{A}_1^*,$$

где  $\bar{A}_i^* = (A_{i,i}^*)_{|M_m|}$  — требуемые значения векторного потенциала в узлах аппроксимации.

Решение задачи (28) выполним с учетом принципа максимума Понтрягина [17]. Функцию Гамильтона определим в виде:

$$H(\bar{Y}, v, \bar{\Psi}) = -\bar{\Psi}(t) \left\{ \mathbf{T}^{-1} \left[ \mathbf{F}(v, t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t) \right] \right\}, \quad (29)$$

где  $\bar{\Psi}(t) = (\Psi_i(t))_{|M_m|}$  — вспомогательный вектор импульсов управления.

С учетом (28), (29) итоговая задача управления ЭМП сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{Y}}(t) &= \mathbf{T}^{-1} \left[ \mathbf{F}(v, t) - \mathbf{S}\bar{A}(t) - \mathbf{U}\bar{Y}(t) \right] + \bar{\lambda}(t) \otimes (\bar{A}_1^* - \bar{A}(t)); \\ \bar{Y}(t) &= \dot{\bar{A}}(t); \quad \dot{\bar{\Psi}}(t) = (-\mathbf{T}^{-1}\mathbf{U})^T \bar{\Psi}(t), \end{aligned} \quad (30)$$

для заданных начальных условий  $\bar{A}(t_0) = \bar{A}_0^*$ ,  $\dot{\bar{A}}(t_0) = \dot{\bar{A}}_0^*$ .

В выражении (30)  $\dot{\bar{\Psi}}(t) = \left( \frac{\partial \Psi_i(t)}{\partial t} \right)_{|M_m|}$ ;  $\otimes$  — оператор поэлементного произведения векторов;  $\bar{\lambda}(t) = (\lambda_i(t))_{|M_m|}$  — вектор множителей Лагранжа.

**4. Результаты вычислительных экспериментов.** В качестве примера применения ВБМ в частотной области рассмотрим распределение составляющих напряженности электрического поля (рисунок 3а) и оценки критической частоты  $f_{кр}$  для основного типа волны ( $H_{10}$ ) в Н-волноводе с параметрами:  $l = 357,24$  мм,  $c = 134,06$  мм,  $a = 301,87$  мм,  $h = 321,51$  мм. Оценка точности ВБМ выполнена в сравнении с векторным методом конечных элементов (ВМКЭ) при определении зависимости ошибки нахождения  $f_{кр}$  от порядка аппроксимации  $m$ . Результат представлен на рисунке 3б.

Примеры распределения тангенциальной составляющей напряженности ЭМП для ТЕ типов волн в раскрыве прямоугольного волновода, полученные аналитическим решением [18], ВБМ, ВМКЭ представлены на рисунках 4 и 5.

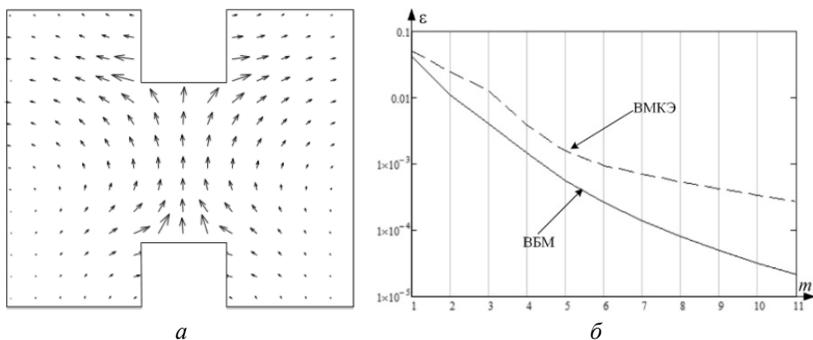


Рис. 3. Анализ электромагнитного поля в Н-волноводе:  $a$  — распределение волны  $H_{10}$ ;  $b$  — зависимость ошибки оценки  $f_{кр}$  от  $m$

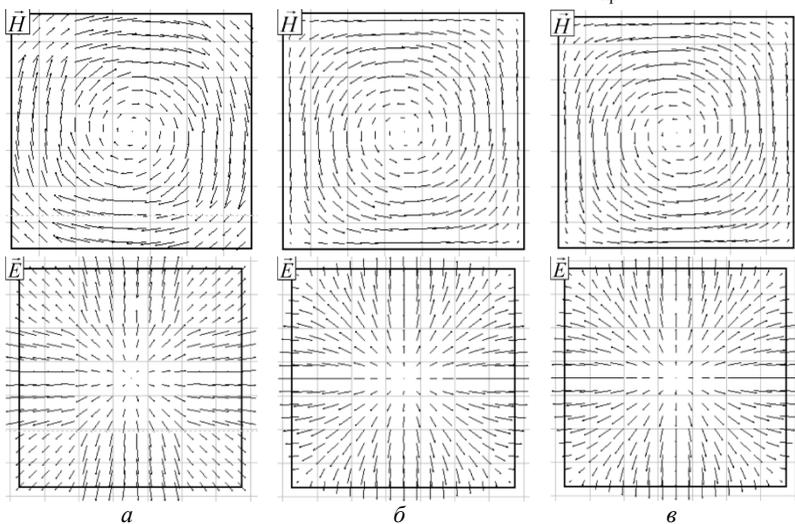
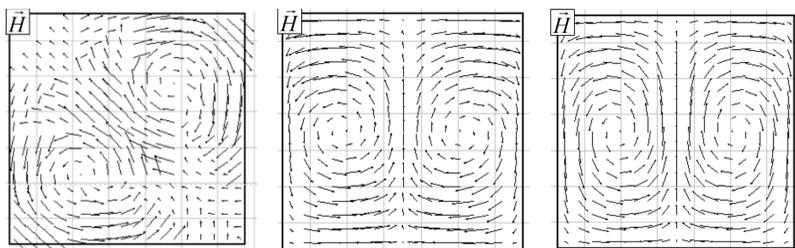


Рис. 4. Пример распределения тангенциальной составляющей  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  полей  $TE_{11}$  типа в раскрытие прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ ( $a$ ), ВБМ ( $b$ ) при  $|M_m| = 25$  и аналитическим решением ( $v$ )



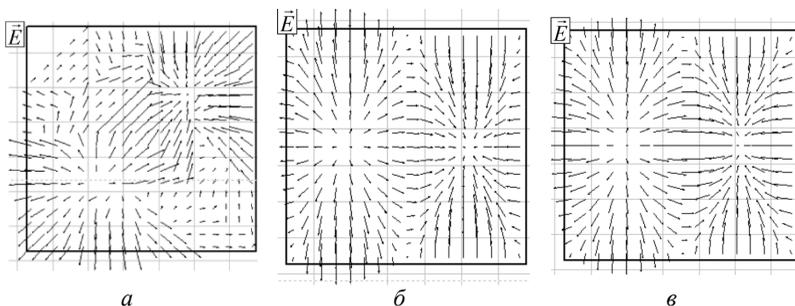
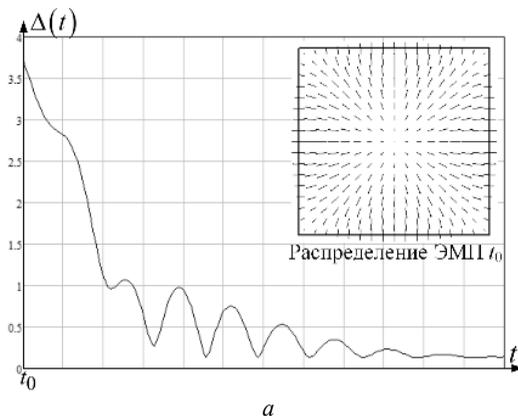


Рис. 5. Пример распределения тангенциальной составляющей  $\vec{H}$  и  $\vec{E}$  полей ТЕ<sub>21</sub> типа в раскрыве прямоугольного волновода, рассчитанный ВМКЭ (а), ВБМ (б) при  $|M_m| = 25$  и аналитическим решением (в)

Для заданного решения волнового уравнения ВБМ во временной области рассмотрим задачу оптимального управления ЭМП, формируемом в раскрыве прямоугольного волновода, для различных значений порядка аппроксимации  $m$ . На рисунке ба представлена

зависимость  $\Delta(t) = \sqrt{\iint_{\Omega} (\vec{E}(x, y, t) - \vec{E}_{\text{тр}}(x, y, t))^2 dx dy}$  — отклонение

реализуемого  $\vec{E}(x, y, t)$  в раскрыве прямоугольного волновода от требуемого  $\vec{E}_{\text{тр}}(x, y, t)$  на интервале времени  $[t_0, t_1]$  при  $m = 4$  и  $v(t) = \sin(2\pi t)$ . На рисунке бб представлена зависимость  $\Delta(t_1)$  от  $m$ .



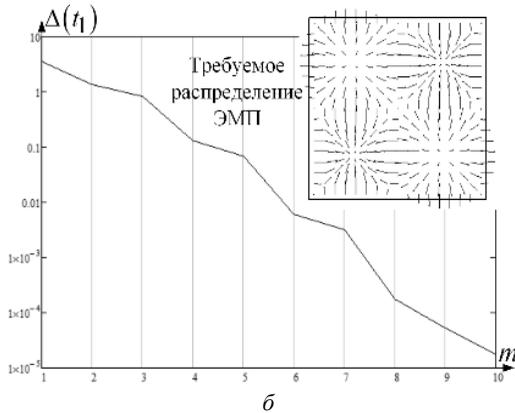


Рис. 6. Отклонение реализуемого ЭМП в раскрыве прямоугольного волновода от требуемого:  $a$  – на интервале времени управления для  $m = 4$ ;  $b$  –  $\Delta(t_1)$  от  $m$

**5. Заключение.** Из полученных результатов численной оценки (рисунки 3-5) следует, что ВБМ позволяет повысить точность численного решения векторных волновых уравнений при одинаковой размерности аппроксимирующего полинома в сравнении с ВМКЭ.

Заданные зависимости (23-29) определяют пример решения задачи оптимального управления ЭМП в области анализа  $\Omega$  с кусочно-линейной границей в целом без ее разбиения на конечные элементы в приближении ВБМ во временной области. Повышение точности решения достигается увеличением порядка аппроксимации  $m$  (рисунок 6). В целом разработанный векторный барицентрический метод имеет широкую прикладную направленность, поскольку может быть также использован в решении задач механики деформируемого твердого тела, теплопроводности, гидродинамики и пр. Векторный барицентрический метод может стать хорошим дополнением или альтернативой к численным методам решения краевых задач математической физики.

### Литература

1. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012. 432 с.
2. Russer P. Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering / Edited by C.F. Balanis // N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 p.
3. Архипов Н.С., Полянский И.С., Сомов А.М. Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн // М.: Горячая линия телеком. 2017. 226 с.
4. Christopoulos C. The Transmission-Line Modeling Method // Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
5. Gibson W.C. The Method of Moments in Electromagnetics: 2nd Edition // N.-Y. : Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.

6. *Григорьев А.Д.* Современные программные средства моделирования высокочастотных электромагнитных полей // Радиотехника и электроника. 2014. № 8(59). С. 804–808.
7. *Банков С.Е., Курушин А.А.* Электродинамика и техника СВЧ для пользователей САПР // М.: Солон-Пресс. 2008. 276 с.
8. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Барицентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
9. *Родионов В.И.* О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в числовом анализе // Вестник удмуртского университета. Матем. Мех. Компьют. науки. 2010. № 4. С. 146–153.
10. *Graglia R.D., Wilton D.R., Peterson A.F.* Higher-order interpolatory vector bases for computational electromagnetics // IEEE transactions on antennas and propagation. 1997. vol. 45(3). pp. 329–342.
11. *Nedelec J.C.* Mixed finite elements in R3 // Numer. meth. 1980. vol. 35. pp. 315–341.
12. *Graglia R.D., Lombardi D.* Singular higher order complete vector bases for finite methods // IEEE transactions on antennas and propagation. 2004. vol. 52(7). pp. 1672–1685.
13. *Davidson D.B.* High-order (LT/QN) vector finite elements for waveguide analysis // Aces Journal. 2002. vol. 17(1). pp. 1–10.
14. *Graglia R.D., Peterson A.F.* Higher-order techniques in computational electromagnetics // Series on Electromagnetism in Information and Communication. Published by SciTech Publishing, an imprint of the IET. 2016. 392 p.
15. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Труды СПИИРАН. 2016. №6(49). С. 32–48.
16. *Olemskoy I.V., Eremin A.S., Kovrizhnykh N.A.* Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations // Appl. Math. Sci. 2017. vol. 11. no. 1. pp. 31–38.
17. *Cassel K.W.* Variational Methods with Applications in Science and Engineering // Cambridge University Press. 2013. 433 p.
18. *Ida N.* Engineering Electromagnetics: 3rd Edition // N.-Y.: Springer Cham Heidelberg. 2015. 1046 p.

**Полянский Иван Сергеевич** — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения. Число научных публикаций — 115. [van341@mail.ru](mailto:van341@mail.ru); Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(953) 618-71-00.

I.S. POLANSKY  
**VECTOR BARYCENTRIC METHOD IN COMPUTATIONAL  
 ELECTRODYNAMICS**

---

*Polansky I.S. Vector Barycentric Method in Computational Electrodynamics.*

**Abstract.** A vector barycentric method for solving the internal problem of electrodynamics, i.e. solving Maxwell's equations or their respective wave equations in a bounded computational domain with prescribed boundary conditions is considered. The developed method refers to the method of direct solution of the boundary value problems of mathematical physics, the basis for the formation of which are the results obtained by V. Ritz, I.G. Bubnov and B.G. Galerkin. The basic idea of the method lies in the synthesis of a procedure of the vector potential approximation, done by the polynomials of the Lagrange type. The approximating polynomial is formed in the barycentric coordinate system for the entire region of analysis as a whole without partitioning into elementary sub-areas. It is assumed that the scope of analysis is a region with a piecewise linear boundary, and the dimension of the barycentric coordinate system is determined by the number of vertices of the analyzed region. The vector barycentric method is implemented both in the frequency and time domains. The solution to the problem of controlling the electromagnetic field in the approximation of the vector barycentric method is considered.

**Keywords:** vector barycentric method, barycentric coordinates, vector potential, the Helmholtz equation.

---

**Polansky Ivan Sergejevich** — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping. The number of publications — 112. van341@mail.ru; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(953) 618-71-00.

### References

1. Grigorev A.D. *Metody vychislitel'noj elektrodinamiki* [Methods for computational electrodynamics]. Moscow : FIZMATLIT. 2012. 432 p. (In Russ.).
2. Russer P. *Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering*. Edited by C.F. Balanis. N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 pp.
3. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Somov A.M. *Analiz i strukturno-parametricheskij sintez zerkal'nyh antenn* [Analysis of structural-parametric synthesis of reflector antennas]. Moscow: Hotline Telekom. 2017. 226 p. (In Russ.).
4. Christopoulos C. *The Transmission-Line Modeling Method*. Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
5. Walton C. Gibson. *The Method of Moments in Electromagnetics: 2nd Edition*. N.-Y.: Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.
6. Grigorev A.D. [Modern software tools for modeling high-frequency electromagnetic fields]. *Radiotekhnika i elektronika – Technology and electronics*. 2014. vol. 8(59). pp. 804–808. (In Russ.).
7. Bankov S.E., Kurushin A.A. *Elektrodinamika i tehnika SVCh dlja polzovatelej SAPR* [Electrodynamics and microwave techniques for CAD users]. Moscow: Solon-Press. 2008. 276 p. (In Russ.).
8. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Stepanov D.E. [Barycentric method in problems of analysis of the field in a regular waveguide with arbitrary cross section]. *Antenny – Antenna*. 2015. vol. 1(212). pp. 32–40. (In Russ.).

9. Rodionov V.I. [Finite element method for radio engineers and electrical engineers]. *Vestnik udmurtskogo universiteta. Matem. Meh. Kompjut. nauki. – The Bulletin of Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer Science.* 2010. vol 4. pp. 146–153. (In Russ.).
10. Graglia R.D., Wilton D.R., Peterson A.F. Higher-order interpolatory vector bases for computational electromagnetics. *IEEE transactions on antennas and propagation.* 1997. vol. 45(3), pp. 329–342.
11. Nedelec J.C. Mixed finite elements in R3. *Numer. meth.* 1980. vol. 35. pp. 315–341.
12. Graglia R.D., Lombardi D. Singular higher order complete vector bases for finite methods. *IEEE transactions on antennas and propagation.* 2004. vol. 52(7). pp. 1672–1685.
13. Davidson D.B. High-order (LT/QN) vector finite elements for waveguide analysis. *Aces Journal.* 2002. vol. 17(1). pp. 1–10.
14. Graglia R.D., Peterson A.F. Higher-order techniques in computational electromagnetics. Series on Electromagnetism in Information and Communication. Published by SciTech Publishing, an imprint of the IET. 2016. 392 p.
15. Polansky I.S. [Barycentric coordinates of Poisson–Riemann]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2016. vol 6(49). pp. 32–48. (In Russ.).
16. Olemskoy I.V., Eremin A.S., Kovrizhnykh N.A. Embedded methods of order six for special systems of ordinary differential equations. *Appl. Math. Sci.* 2017. vol. 11. no. 1. pp. 31–38.
17. Cassel K.W. Variational Methods with Applications in Science and Engineering. Cambridge University Press. 2013. 433 p.
18. Ida N. Engineering Electromagnetics: 3rd Edition. N.-Y.: Springer Cham Heidelberg. 2015. 1046 p.

---

Signed to print 27.03.2017

Printed in Publishing center GUAP, 67, B. Morskaya, St. Petersburg, 190000, Russia

---

The journal is registered in Russian Federal Agency for Communications  
and Mass-Media Supervision, certificate ПИ № ФС77-41695 dated August 19, 2010 г.  
Subscription Index 29393, Russian Post Catalog

---

Подписано к печати 27.03.2017. Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 14,8. Заказ № 108.

Тираж 150 экз., цена свободная

Отпечатано в Редакционно-издательском центре ГУАП, 190000, Санкт-Петербург, Б. Морская, д. 67

---

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи  
и массовых коммуникаций,  
свидетельство ПИ № ФС77-41695 от 19 августа 2010 г.

Подписной индекс 29393 по каталогу «Почта России»

## РУКОВОДСТВО ДЛЯ АВТОРОВ

Взаимодействие автора с редакцией осуществляется через личный кабинет на сайте журнала «Труды СПИИРАН» <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru>. При регистрации авторам рекомендуется заполнить все предложенные поля данных.

Подготовка статьи ведется с помощью текстовых редакторов MS Word 2007 и выше. Объем основного текста – от 15 до 25 страниц включительно. Формат страницы документа – А5 (148 мм ширина, 210 мм высота); ориентация – портретная; все поля – 20 мм. Верхний и нижний колонтитулы страницы – пустые. Основной шрифт документа – Times New Roman, основной кегль (размер) шрифта – 10 pt. Переносы разрешены. Абзацный отступ устанавливается размером в 10 мм. Межстрочный интервал – одинарный. Номера страниц не проставляются.

В основную часть допускается помещать рисунки, таблицы, листинги и формулы. Правила их оформления подробно рассмотрены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов».

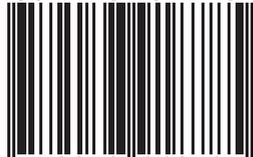
### AUTHOR GUIDELINES

Interaction between each potential author and the Editorial board is realized through the personal account on the website of the journal "Proceedings of SPIIRAS" <http://www.proceedings.spiiras.nw.ru>. At the registration the authors are requested to fill out all data fields in the proposed form.

The submissions should be prepared using MS Word 2007 text editor or higher versions, at that, only manuscripts in \*.docx format will be considered. The text of the paper in the main part of it should be from 15 – 25 pages of A5 size that is 210 X 148 mm; orientation – portrait; all margins – 20 mm. The font of the main paper text is Times New Roman of 10 pt font size. The pages' headers and footers should be empty; indentation – 10 mm; line spacing – single; pages are not numbered; hyphenations are allowed.

Certain figures, tables, listings and formulas are allowed in the main section, and their typography is considered by the paper template in more detail in journal web.

ISSN 2078-9181



9 772078 918785 >

