УДК 519.6 **DOI** 10.15622/sp.2019.18.6.1491-1514

Ю.А. Бычков, Е.Б. Соловьева, С.В. Щербаков

АНАЛИТИЧЕСКИ-ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ЗАДАННЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ ПОГРЕШНОСТЯМИ

Бычков Ю.А., Соловьева Е.Б., Щербаков С.В. **Аналитически-численный алгоритм вычисления корней алгебраических уравнений с заданными предельными погрешностями.**

Аннотация. Предложен алгоритм вычисления приближенных значений корней алгебраических уравнений с заданными предельными абсолютными погрешностями. Математическую основу алгоритма составляет аналитически-численный метод решения нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений с нестационарными коэффициентами. Аналитически-численный метод относится к классу одношаговых непрерывных методов переменного порядка с адаптивной процедурой выбора шага расчета, формализованной оценкой погрешности производимых вычислений на каждом шаге и погрешности, накапливаемой в ходе расчета. Предлагаемый алгоритм вычисления приближенных значений корней алгебраического уравнения с заданными предельными абсолютными погрешностями состоит из двух этапов. Результатом выполнения первого этапа служат числовые интервалы, содержащие неизвестные точные значения корней алгебраического уравнения. На втором этапе вычисляем приближенные значения этих корней с заданными предельными абсолютными погрешностями. В качестве примера использования предложенного алгоритма приведено нахождение корней алгебраического уравнения пятого порядка с тремя различными значениями предельной абсолютной погрешности.

На основе полученных результатов сделаны следующие выводы. Предложенный алгоритм позволяет выделить числовые интервалы, содержащие неизвестные точные значения корней. Знание этих интервалов дает возможность вычисления приближенных значений корней с любой заданной предельной абсолютной погрешностью. Результативность алгоритма, то есть гарантия достижения поставленной цели не зависит от выбора начальных условий. Алгоритм не итерационный, поэтому число шагов расчета, которое необходимо для выделения числового интервала, содержащего неизвестное точное значение какого-либо из корней алгебраического уравнения, всегда ограничено. Алгоритм при поиске определенного корня алгебраического уравнения вычислительно полностью автономен.

Ключевые слова: алгебраическое уравнение, нелинейное дифференциальное уравнение, аналитически-численный метод, приближенное значение корня.

1. Введение. Задача решения алгебраических уравнений обладает самостоятельным научным интересом и широким кругом применения. Она мотивирует разработку новых и совершенствование уже имеющихся алгоритмов ее решения, например итерационных методов высокого порядка сходимости [1-7] (в частности для нахождения кратных корней [8-16]), эволюционных [17] и адаптивных [18] алгоритмов, методов нелинейной регрессии [19, 20] и экстраполяции [21, 22]. Сравнительный анализ используемых численных методов решения алгебраических уравнений выявляет следующие их недостатки.

Во-первых, отсутствуют указания к выбору начального приближенного значения искомого корня алгебраического уравнения, успех которого во многом определяет не только объем последующих вычислений, но и сходимость всей процедуры расчета.

Во-вторых, расчетные схемы методов, как правило, итерационные и не содержат критерия самоостанова, связанного с заданной предельной абсолютной погрешностью расчета приближенного значения корня алгебраического уравнения.

В-третьих, отсутствуют результативные процедуры оценок, возникающих в ходе расчета погрешностей. Это не позволяет контролировать степень удаления вычисляемых приближенных значений корня от его неизвестного точного значения. В результате о их близости можно судить лишь по уровню невязки алгебраического уравнения относительно вычисленного приближенного значения корня.

Предлагается свободный от указанных недостатков алгоритм вычисления с заданными предельными абсолютными погрешностями приближенных значений корней алгебраических уравнений.

Решаемое алгебраическое уравнение имеет следующий вид:

$$A(p) = p^N - \sum_{n=1}^{N} A^*_{N-n} p^{N-n} = \sum_{n=1}^{N_m} \left(p - \lambda_n\right)^{M_n} = 0, \qquad (1)$$

где N — порядок уравнения; A^*_{N-n} — коэффициенты уравнения; N_m — число корней с учетом их кратности; M_n — кратность корня λ_n.

В качестве математической основы предлагаемого алгоритма используется аналитически-численный метод решения обыкновенных нелинейных интегрально-дифференциальных уравнений с нестационарными коэффициентами [23, 24]. Существенное отличие предлагаемого метода от всех широко используемых методов в том, что он контролирует и оценивает абсолютную погрешность найденного приближенного значения корня алгебраического уравнения. Преимущества алгоритма заключаются в следующем. Статическая задача решения алгебраического уравнения эквивалентно преобразуется в динамическую задачу решения дифференциального уравнения. Эту динамическую задачу решает аналитически-численный метод, который в силу одного из своих основных достоинств позволяет найти не только приближенное значение корня, но и указать границы области, в которой находится его точное недосягаемое значение. Границами области можно управлять, что в результате позволяет найти значение корня с любой заданной точностью. Предлагаемый вычислительный алгоритм может быть реализован программно в виде некоторого универсального вычислительного инструмента. Однако это самостоятельная задача, ее постановка и решение находятся за рамками данной работы.

Решение нелинейных алгебраических уравнений с высокой точностью на основе аналитически-численный метода важно в прецизионной технике, где главной целью является точность обработки сигналов (информации), достигаемая, например, в пространстве траекторий. В качестве примера укажем синтез блоков управления для робототехнических систем, которые обеспечивают точность движения манипуляторов, согласованное перемещение конечностей роботов и так далее.

У аналитически-численного метода есть ограничения, например организация перехода через точки ветвления при поиске близких по числовым значениям корней может привести к некоторым алгоритмическим проблемам, определяющим необходимость реализации итерационных процедур расчета.

Решение поставленной задачи аналитически-численным методом связано с предварительным формированием для уравнения (1) его динамического аналога в виде известным образом соответствующего ему дифференциального уравнения. Далее для такого дифференциального уравнения формируем сопряженное ему дифференциальное уравнение, значения решений которого при определенном значении независимой переменной совпадают с корнями λ_n, n=1, 2, …, N уравнения (1). Этим предложениям отвечает последовательность преобразований, определяющих содержание предлагаемого алгоритма решения поставленной задачи.

Для примера рассмотрим наиболее простой случай, когда все корни уравнения (1) некратные и вещественные, то есть M_n=1, N_m=N и n=1, 2, …, N. Задачу поиска корней уравнения (1) в этом случае сопровождает рассмотрение однозначно определенной аналитической функции $x(t)$, которая эквивалентно описывает решаемую задачу:

$$x(t)=\sum_{n=0}^{N} A_n^* t^n \,,\; A_N^*=1, t\in R; \tag{2}$$

$$x(t)\big|_{t=\lambda_n}=x\left(\lambda_n\right)=0, \quad n=1,2,\ldots,N. \tag{3}$$

Для однозначной аналитической функции $x(t)$, описываемой выражением (2), существует многозначная обратная функция $t(x)$. Переход к многозначной функции $t(x)$ сводит задачу поиска корней λ_n, n=1, 2, …, N уравнения (1) к вычислению N значений многозначной функции $t(x)$ при значении независимой переменно x=0. Обратная для аналитической функции $x(t)$ функция $t(x)$ определяет по отношению к корням λ_n, n=1, 2, …, N уравненияа (1) следующие равенства, эквивалентные равенствам (3):

$$t(x)\big|_{x=0}=t(0)=\lambda_n, \quad n=1,2,\ldots,N. \tag{4}$$

Процедура построения функции $t(x)$, обратной для известной аналитической функции $x(t)$, в общем случае пока не доступна формализации и алгоритмизации. Возможен, однако, следующий прием.

Доступно определению обыкновенное дифференциальное уравнение, решением которого служит описываемая выражением (2) однозначная аналитическая функция $x(t)$. Для этого дифференциального уравнения можно сформировать сопряженное ему обыкновенное дифференциальное уравнение, решением которого служит функция $t(x)$, обратная функции $x(t)$ [25, 26]. Взаимосвязь между функциями $x(t)$ и $t(x)$ в отношении корней λ_n, n=1, 2, …, N уравнения (1), описываемая равенствами (3) и (4), определяет логику и математическое содержание предлагаемого алгоритма вычисления приближенных значений этих корней. Основу алгоритма составляет направленная замена исходной алгебраической задачи новой дифференциальной задачей, решение $t(x)$ которой удовлетворяет соотношениям (4). Несмотря на кажущееся усложнение задачи, предлагаемая замена позволяет достичь качественно новых результатов в сравнении с широко используемыми численными методами решения алгебраических уравнений.

2. Краткая характеристика аналитически-численного метода. Аналитически-численный метод относится к классу одношаговых непрерывных методов переменного порядка с адаптивной процедурой выбора шага расчета, формализованной оценкой погрешности производимых вычислений на каждом шаге и погрешности, накапливаемой в ходе расчета [23, 24]. Метод предназначен для поиска решений следующих обыкновенных интегрально-дифференциальных уравнений с нестационарными коэффициентами:

$$\mathbf{A}(D, D^{-1})\mathbf{x}(t) = \mathbf{G}(D, D^{-1})\mathbf{f}(t) + \mathbf{H}(\mathbf{x}, \mathbf{f}, t), \tag{5}$$

где D — оператор обобщенного дифференцирования по независимой переменной t, D^{-1} — оператор интегрирования с переменным верхним пределом t и нижним пределом, который определяет левая граница текущего интервала интегрирования; $\mathbf{A}(D, D^{-1})$ и $\mathbf{G}(D, D^{-1})$ — квадратная, размером $L_x{\times}L_x$, и прямоугольная, размером $L_x{\times}L_f$, матрицы с полиномиальными от D и D^{-1} элементами; $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$ — матрицы-столбцы искомых решений и внешних воздействий (заданных аналитических функций); $\mathbf{H}(x, f, t)$ — матрица-столбец со строками в виде сумм произведений, сомножители которых есть нестационарные коэффициенты, классические производные любого порядка и интегралы любой кратности, начиная с нулевого (нулевой), от искомых решений и (или) внешних воздействий, в произвольных дробно-рациональных степенях.

Расчетная схема аналитически-численного метода поиска в заданном ограниченном интервале времени $[t_0; T]$ решений $x_r(t)$, $r=1, 2, \ldots, L_x$ уравнения (5) при заданных предначальных условиях, основываясь на неравномерной дискретизации независимой переменной t, в каждом интервале расчета состоит из двух частей: аналитической и численной.

Математическую основу аналитической части метода составляют аппараты обобщенных функций, интегрального преобразования Лапласа и степенных рядов [27-32]. Использование аппарата обобщенных функций обусловлено возможным наличием в искомых решениях уравнения (5) дифференцируемых разрывов первого рода. Из этого вытекает необходимость выделения и последующего описания в решении сингулярной и регулярной составляющих. Сингулярная составляющая искомого решения по определению имеет замкнутую форму описания в виде суммы импульсных функций соответствующих порядков и в каких-либо иных представлениях не нуждается. Регулярная составляющая решения, имея произвольную форму описания, нуждается в унификации своего представления с учетом корректного отражения в таком представлении характерных свойств и качественных особенностей искомых решений уравнения (5).

Для унификации математического базиса расчетной схемы метода описание регулярной составляющей должно отвечать следующим требованиям:

– приводить описание нелинейной части $\mathbf{H}(x, f, t)$ уравнения (5) к единому и пригодному для последующих преобразований виду;

– выявлять существующие в решении особые точки;

– описывать получаемое приближенное решение в математической и информационной взаимосвязи с существующим и неизвестным точным решением уравнения (5).

Желательно также, чтобы унифицированное представление регулярной составляющей решения было не только формальным, но и информационно содержательным.

Перечисленным требованиям отвечает представление регулярной составляющей искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ в форме функционально-степенного ряда [23, 24]. Во-первых, подстановка в уравнение (5) вместо искомых решений их регулярных составляющих, описываемых соответствующими степенными рядами, тождественно изменяет произвольное описание элементов матрицы нелинейной части $\mathbf{H}(x, f, t)$ этого уравнения на определенное и унифицированное, на описание по целым степеням независимой переменной t. Во-вторых, знание радиуса сходимости степенного ряда для регулярной составляющей искомого решения обусловливает выявление особой точки этого решения, включая однозначную идентификацию ее местоположения по независимой переменной t. В-третьих, в пределах радиуса сходимости степенной ряд превращается в ряд Тейлора и сходится абсолютно и равномерно к разложенной в него аналитической функции, то есть к регулярной составляющей решения. Заменяя при практических вычислениях ряд Тейлора его частичной суммой, можно сформировать описание возникающей при этом вычислительной погрешности и затем организовать процедуру ее оценки. Наконец, описание регулярной составляющей решения рядом Тейлора не только формально, но и информационно содержательно ввиду известного математического содержания его коэффициентов.

Отметим, что корректное формирование сингулярной составляющей решения и правильное вычисление начальных значений регулярной составляющей решения в точках ее разрывов первого рода по известным предначальным значениям возможно с помощью обобщенного интегрального преобразования Лапласа [23, 24]. Использование интегрального преобразования Лапласа для поиска решения уравнения (5) становится допустимым после описания элементов матрицы $\mathbf{H}(x, f, t)$ нелинейной части уравнения (5) степенными рядами относительно независимой переменной t.

Процедура аналитической части аналитически-численного метода на основе указанного математического аппарата сводится к следующему. При известных для текущего интервала расчета $[t_{k-1};\ t_k]$ предначальных условиях входящие в матрицу $\mathbf{H}(x, f, t)$ нелинейной части уравнения (5) искомые решения замещаем регулярными составляющими, которые формально описываем соответствующими степенными рядами. Коэффициенты этих степенных рядов неизвестны. Описанные таким образом искомые решения, а также при необходимости предварительно разложенные в степенные ряды нестационарные коэффициенты и внешние воздействия подставляем в соответствующие описания элементов матрицы $\mathbf{H}(x, f, t)$. Подстановку выполняем так, чтобы в матрице $\mathbf{A}(D,\ D^{-1})$ линейной части уравнении (5) были выделены по крайней мере старшие операторы дифференцирования по всем искомым решениям. В результате описание уравнения (5) относительно точек разложения искомых решений, нестационарных коэффициентов и внешних воздействий в соответствующие степенные ряды будет преобразовано к новой форме. Эта новая форма описания сопряжена с изменением только характера описания элементов матрицы $\mathbf{H}(x, f, t)$. Результатом такого изменения служит замена описаний всевозможных нелинейных и нестационарных зависимостей унифицированным описанием в виде степенных рядов относительно времени t. Вследствие этого уравнение (5) будет приведено к виду, пригодному для применения обобщенного интегрального преобразования Лапласа. Преобразовав сформированное уравнение по Лапласу, получим линейную относительно изображений искомых решений систему алгебраических уравнений. Решения этой системы уравнений определяем по формуле Крамера и раскладываем их в соответствующие ряды Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Коэффициенты главных и правильных частей этих рядов Лорана вычисляем с помощью предложенных в [23, 24] формул. Переведя сформированные ряды Лорана во временную область, для искомых решений $x_r(t)$, $r=1, 2, \ldots, L_x$, уравнения (5) получим описания в виде обобщенных функций. Коэффициенты сингулярных и регулярных составляющих этих решений теперь известны. Регулярные составляющие решений в правой полуокрестности точек с абсциссой, совпадающей с началом текущего интервала расчета $[t_{k-1}; t_k]$, будут описаны соответствующими степенными рядами.

Итак, результатом выполнения в текущем интервале расчета $[t_{k-1}; t_k]$ аналитической части метода для искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ уравнения (5) служит следующее его описание [23, 24]:

$$x_l(t) = x_l^-(t) + x_l^+(t) = \sum_{j=0}^{-J_l} S_{l.j}\ \delta_j(t) + \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i}\ t^i / i!\,, \tag{6}$$

где $x_l^-(t)$ и $x_l^+(t)$ — сингулярная и регулярная составляющие искомого решения $x_l(t)$; $\delta_j(t)$ — определенные в точке, начальной для текущего интервала расчета, импульсные функции от нулевого до J_l-го порядка включительно; $S_{l.j}$ — весовые коэффициенты импульсных функций; $R_{l.j}$ — коэффициенты разложения регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ в степенной ряд в правой полуокрестности начальной для текущего интервала расчета точке.

Сингулярную составляющую $x_l^-(t)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$, если она существует, определяем в аналитической части метода. Погрешность вычисления ее коэффициентов $S_{l.j}$ определяет погрешность расчета предначальных условий для текущего шага расчета [23, 24]. Регулярную составляющую решения $x_l^+(t)$ после выполнения аналитической части метода описывает следующий степенной ряд:

$$x_l^+(t) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i} t^i / i!,\ l \in [1, L_x]. \tag{7}$$

Для вычисления в дискретные моменты времени $t=t_k$, $t_k=t_{k-1}+h_k$, $k=1, 2, \ldots, K$ из заданного интервала исследования $[t_0; T]$ приближенных значений $x_l^+(t_k; I_l)$ регулярной составляющей x_l^+ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ предназначена численная часть метода. Процедуру численной части метода в текущем интервале расчета $[t_{k-1}; t_k]$ начинаем с выбора величины шага расчета $h=h_k$, которая не должна превышать радиусов сходимости сформированных для описания регулярных составляющих решений $x_r^+(t)$ степенных рядов (7) при $l=r$.

Выбор величины текущего шага расчета сопровождает ряд взаимосвязанных условий. Во-первых, величина шага расчета должна обеспечивать численную устойчивость всей вычислительной процедуры, обусловливая устойчивое накопление погрешности в ходе расчета. Во-вторых, непосредственно влияя на уровень погрешности производимых вычислений, длина шага должна обеспечивать соответствие заданному предельному показателю возникающей при расчетах погрешности. В-третьих, регламентируя уровень неравномерной дискретизации независимой переменной t, величина шага должна соответствовать скорости фактического изменения динамических показателей регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомых решений $x_r(t)$, $r=1, 2, \ldots, L_x$, обеспечивая получение приближенных значений этих составляющих решений на оптимальной сетке по времени. В качестве таких динамических показателей регулярных составляющих решений $x_r^+(t)$ логично рассматривать коэффициенты сформированных для их описания степенных рядов (7), при $l=r$.

Процедура выбора величины шага расчета, удовлетворяющей приведенным условиям, описана в [23, 24]. В основе этой процедуры лежит исследование сходимости числовых мажорант степенных рядов (7), $l=r$, сформированных для регулярных составляющих решений $x_r^+(t)$. Условия сходимости этих числовых мажорант регламентируют ограничения величины шага расчета, которые обеспечивают непревышение интервала сходимости указанных степенных рядов. Выбранная таким образом величина шага, гарантируя сходимость степенных рядов (7), $l=r$ к разложенным в них аналитическим функциям $x_r^+(t)$, определяет протяженность интервала времени, в пределах которого эти составляющие решений существуют и могут быть описаны рядами Тейлора. При этом все имеющиеся в регулярных составляющих искомых решений разрывы второго рода будут гарантированно выявлены, и обеспечены условия их последующего корректного выделения [23, 24].

Дополняя сказанное, отметим, что выбранная величина шага расчета h обеспечивает необходимое согласование показателей естественной динамики регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомых решений $x_r(t)$,

r=1, 2, …, L_x. Точное числовое значение регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ при выбранной величине шага расчета h определяет следующий, полученный из степенного ряда (7) при t=h, числовой ряд:

$$x_l^+(h) = \sum_{i=0}^{\infty} R_{l.i} h^i \,/\, i!,\ l \in [1, L_x]. \tag{8}$$

При практических вычислениях числовой ряд (8) замещаем частичной суммой его первых I_l членов. Такая частичная сумма, определяя в результате выполнения текущего шага расчета h приближенное значение $x_l^+(h;\ I_l)$ регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1; L_x]$ имеет следующее описание:

$$x_l^+(h; I_l) = \sum_{i=0}^{I_l} R_{l.i} h^i \,/\, i!. \tag{9}$$

Заметим, что выбором необходимого значения порядка I_l частичной суммы, оценивая модуль остаточного члена числового ряда (7), t=h можно контролировать погрешность расчета.

Остаточный член числового ряда (7), t=h при замене на текущем шаге расчета h=h_k этого числового ряда частичной суммой (9) определяет локальную погрешность расчета. Эта погрешность явным образом зависит от величины текущего шага расчета h=h_k и значения I_l. Выбранная величина h=h_k позволяет составить формулы для вычисления верхней оценки $|\Delta x_l^+(h;\ I_l)|$ абсолютной локальной погрешности расчета. Эти формулы приведены в работах [23, 24]. Знание верхней оценки $|\Delta x_l^+(h;\ I_l)|$ позволяет после выполнения текущего шага расчета h=h_k выделить границы числового интервала, содержащего неизвестное точное значение $x_l^+(h)$ суммы $x_l^+(t)$ числового ряда (7) при t=h. Этот числовой интервал описывает следующее двойное неравенство:

$$x_l^+(h; I_l) - \left|\Delta x_l^+(h; I_l)\right| \le x_l^+(h) \le x_l^+(h; I_l) + \left|\Delta x_l^+(h; I_l)\right|,\ h \in [t_0; T]. \tag{10}$$

Ограниченность числовых показателей двойного неравенства (8), отражая устойчивость процесса накопления погрешности в пределах шага, позволяет организовать, начиная со второго шага, процедуру определения оценки полной (накопленной) погрешности расчета. Рекуррентная формула для вычисления верхней оценки $|\Delta x_l^+(t_k;\ I_l)|$ абсолютной полной погрешности расчета приближенного значения $x_l^+(t_k;\ I_l)$ регулярной составляющей $x_l^+(t)$ искомого решения $x_l(t)$, $l \in [1;\ L_x]$ приведена в работах [23, 24]. Знание верхней оценки $|\Delta x_l^+(t_k; I_l)|$ позволяет определить границы числового интервала, содержащего неизвестное точное значение $x_l^+(t_k)$ регулярной составляющей решения $x_l^+(t)$ в дискретный момент времени $t=t_k$. Этот числовой интервал описывает следующее двойное неравенство:

$$x_l^+(t_k; I_l) - \left|\Delta x_l^+(t_k; I_l)\right| \le x_l^+(t_k) \le x_l^+(t_k; I_l) + \left|\Delta x_l^+(t_k; I_l)\right|. \qquad (11)$$

Выполнив текущий шаг расчета $h=h_k$ ось ординат смещаем вправо на его длину. После этого описанную вычислительную процедуру аналитически-численного метода повторяем, начиная с его аналитической части. В качестве предначальных условий для следующего шага расчета принимаем вычисленные на предыдущем шаге приближенные значения регулярных составляющих решений и их производных.

Вычисленные с оптимальным шагом дискретизации независимой переменной t приближенные значения $x_l^+(t_k; I_l)$, $l=r$ регулярных составляющих $x_r^+(t)$ искомых решений $x_r(t)$, $r=1, 2, \ldots, L_x$ и сформированные двойные неравенства (11) $l=r$ образуют итоговые числовые показатели расчета аналитически-численным методом. Двойные неравенства (11) $l=r$ описывают качественное отличие аналитически-численного метода от известных численных методов решения обыкновенных нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений и обосновывают выбор этого метода для решения поставленной задачи.

3. Алгоритм вычисления приближенных значений корней алгебраического уравнения с заданной предельной абсолютной погрешностью. Предлагаемый алгоритм решения поставленной задачи состоит из двух этапов. Результатом выполнения первого этапа служат числовые интервалы, содержащие неизвестные точные значения λ_n корней алгебраического уравнения. На втором этапе вычисляем приближенные значения этих корней с заданными предельными абсолютными погрешностями $\varepsilon(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)\ \varepsilon_2(\lambda)\ \ldots\ \varepsilon_N(\lambda)]$.

Первый этап. Выделение числовых интервалов, содержащих точные значения корней алгебраического уравнения.

Дифференциальное уравнение, решением которого служит функция $x(t)$, описываемая выражением (2) и удовлетворяющая соотношениям (3), таково:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \sum_{n=1}^{N} a_n t^{n-1}; \\ \dot{t} &= 1, \end{aligned} \qquad (12)$$

где $a_n=nA_n^*$; $a_N=N$; $x(t)\big|_{t=t_0} = x(t_0) = t_0$; $\dot{x}(t)$ — производная по переменной времени t.

Нелинейное дифференциальное уравнение, сопряженное дифференциальному уравнению (12), решением которого служит функция $t(x)$, обратная для функции $x(t)$, таково [25, 26]:

$$\frac{dt(x)}{dx}=\left(\sum_{n=1}^{N}a_n t^{n-1}(x)\right)^{-1}; \quad x'=\mp 1. \tag{13}$$

где x' — производная по переменной x.

Решением системы нелинейных дифференциальных уравнений (13) при заданном начальном условии $t(x_0)=t_0$ служит многозначная функция $t(x)$, обратная для известной функции $x(t)$. Отметим, что в зависимости от выбора начальных условий $t(x_0)=t_0$ искомым решением $t(x)$ является одна из N возможных ветвей многозначной функции $t(x)$.

Знак начального значения независимой переменной $x=x_0$, $x_0=x(t_0)$ устанавливает знак шага расчета h_x при поиске решения системы нелинейных дифференциальных уравнений (13) аналитически-численным методом. Расчет осуществляем от начального значения независимой переменной $x=x_0$ до конечного $x=0$, поэтому правая часть второго из уравнений этой системы содержит знаки «$\mp$», указывая на возможность положительного либо отрицательного шага расчета h_x. Выделение числовых интервалов, каждый из которых содержит неизвестное точное значение λ_n, $n=1, 2, ..., N$ одного из корней уравнения (1), сопряжено с упорядочением задания начальных условий $x=x_0$, $x_0=x(t_0)$ для направленного перебора N ветвей неоднозначного решения $t(x)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений (13). Для решения такой задачи необходимы: знание точек ветвления многозначной функции $t(x)$; организация корректного перехода через эти точки в ходе пошагового расчета [23, 24]. Используя известные формулы Коши, Монтеня, Кармайкла и Мейсона [6], можно вычислить верхнюю $|\lambda_{su}|$ и нижнюю $|\lambda_{in}|$ оценки абсолютных значений λ_n, $n=1, 2, ..., N$ корней уравнения (1). Эти оценки определяют границы числового интервала, содержащего неизвестные точные значения λ_n, $n=1, 2, ..., N$ всех корней уравнения (1). Чтобы сократить объем вычислительной работы, решение поставленной задачи целесообразно начать с максимального или минимального по модулю корня. Для этого из двух возможных начальных условий $t_0=\mp|\lambda_{su}|$ или $t_0=\mp|\lambda_{in}|$ выбираем то, которое определяет минимальное по модулю начальное значение независимой переменной $x=x_0$, $x_0=x(t_0)$ вычисленное по формуле (2).

Выбрав начальное условие $t_0=t(x_0)$, $x_0=x(t_0)$, в зависимости от знака этого условия, с положительным или отрицательным шагом расчета h_x приступаем к поиску решения $t(x)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений (13) аналитически-численным методом. В результате для искомого решения $t(x)$ при $x=0$ выделяем числовой интервал, содержащий согласно равенствам (4) неизвестное точное значение максимального или минимального по модулю корня уравнения (1).

Выделенный числовой интервал с учетом принятых обозначений описывает аналогичное (11) следующее двойное неравенство:

$$t\left(0;I_t\right)-\left|\Delta t\left(0;I_t\right)\right|\le t\left(0\right)\le t\left(0;I_t\right)+\left|\Delta t\left(0;I_t\right)\right|, \tag{14}$$

где I_t — порядок полинома Тейлора, определяющего на шаге расчета h_x приближенное значение $t(x;\, I_t)$, $x=0$ искомого решения $t(x)$ системы нелинейных дифференциальных уравнений (13).

Двойное неравенство (14) содержит первый из корней уравнения (1), максимальный или минимальный по модулю. Его сопровождают следующие пояснения: $t(0;\, I_t)=\lambda_1(0;\, I_1)$ — приближенное значение первого, максимального или минимального по модулю корня уравнения (1); $|\Delta t(0;\, I_t)|=|\Delta\lambda_1(0;\, I_1)|$ — верхняя оценка абсолютной полной погрешности расчета приближенного значения $t(0;\, I_t)=\lambda_1(0;\, I_1)$ этого корня уравнения (1). Во вновь введенном обозначении двойное неравенство (14) приобретает следующий вид:

$$\lambda_1\left(0;I_1\right)-\left|\Delta\lambda_1\left(0;I_1\right)\right|\le\lambda_1\le\lambda_1\left(0;I_1\right)+\left|\Delta\lambda_1\left(0;I_1\right)\right|. \tag{15}$$

Получение двойного неравенства, аналогичного (15), для следующего второго корня $\lambda_2(0;\, I_2)$ уравнения (1) начинаем с выбора нового начального условия $t_0=t(x_0)$, $x_0=x(t_0)$. Оно должно принадлежать другой ветви многозначной функции $t(x)$. Для этого необходимо следующим образом определить точку ветвления функции $t(x)$.

Задав начальное условие $t_0=\lambda_1(0;\, I_1)$, $x_0=x(t_0)$, приступаем к поиску решения $t(x)$ уравнения (13) аналитически-численным методом, сохраняя тот знак шага расчета h_x, который был взят для составления двойного неравенства (14). Численный расчет продолжаем до значения независимой переменной $x=x^*$, при достижении которой выполняются следующие предельные соотношения:

$$\lim_{x\to x^*}\left|h_x\right|=0;\quad \lim_{x\to x^*}\frac{dt\left(x;I_t\right)}{dx}=\infty. \tag{16}$$

Символы «0» и «∞» в (16) определяются используемым вычислительным комплексом. Так как в точке ветвления претерпевает разрыв второго рода первая производная от многозначной функции $t(x)$, а величина шага расчета h_x не превосходит радиуса сходимости степенного ряда для искомого решения $t(x)$ уравнения (13), то выполнение предельных соотношений (16) информирует о приближении по x к точке ветвления многозначной функции $t(x)$ [23, 24]. По аналогии с двойным неравенством (14) в точке с абсциссой $x=x^*$, находящейся в непосредственной близости от абсциссы точки ветвления искомого решения $t(x)$, числовой интервал, который содержит неизвестное точное значение этого решения, описывает с учетом принятых обозначений следующее двойное неравенство:

$$t\left(x^*;I_t\right)-\left|\Delta t\left(x^*;I_t\right)\right|\le t\left(x^*\right)\le t\left(x^*;I_t\right)+\left|\Delta t\left(x^*;I_t\right)\right|. \qquad (17)$$

Новое начальное условие, принадлежащее другой ветви многозначной функции $t(x)$ и необходимое для выделения числового интервала, содержащего неизвестное точное значение следующего второго корня $\lambda_2(0; I_2)$ уравнения (1), вычисляем так:

$$t_0=t\left(x^*;I_t\right)\pm\Delta t;\quad x_0=x\left(t_0\right), \qquad (18)$$

где Δt — некоторая произвольная малая величина.

Выбор знака «+» или «–» в первом неравенстве (16) регламентирует условие сохранения того же характера изменения функции $t(x)$, который был при формировании двойного неравенства (17).

Задав в соответствии с равенствами (18) новое начальное условие и определив в зависимости от знака начального значения независимой переменной $x=x_0$ знак шага расчета h_x, приступаем к поиску решения $t(x)$ уравнения (11) в интервале $[x_0; 0]$ аналитически-численным методом. В результате при значении независимой переменной $x=0$ выделяем числовой интервал, содержащий согласно равенствам (4) неизвестное точное значение следующего второго корня $\lambda_2(0; I_2)$ уравнения (1). Выделенный числовой интервал описывает двойное неравенство (15) при соответствующей замене индекса «1» на индекс «2».

Далее описанный вычислительный алгоритм повторяем, последовательно выделяя числовые интервалы, которые содержат неизвестные точные значения λ_n, $n=1, 2, \ldots, N$ остальных корней уравнения (1).

Завершая изложение вычислительного алгоритма первого этапа, заметим: если при переходе через какую-либо точку ветвления многозначной функции $t(x)$ величина Δt окажется неконтролируемо больше, чем интервал по t между соседними корнями уравнения (1), то общее число выделенных числовых интервалов окажется меньше N. Тогда, задавая меньшие значения Δt в равенствах (18), надо повторить расчеты с целью выделения остальных числовых интервалов.

Второй этап. Вычисление приближенных значений корней λ_n, n=1, 2, …, N *алгебраического уравнения* (1) *с заданной предельной абсолютной погрешностью* $\varepsilon(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)\ \varepsilon_2(\lambda)\ \dots\ \varepsilon_N(\lambda)]$.

Для первого корня известен числовой интервал, описываемый двойным неравенством (15) и содержащий его неизвестное точное значение. Выбрав принадлежащее двойному неравенству (15) приближенное значение $\lambda_1^{[1]}(0; I_1)$ первого корня $\lambda_1(0; I_1)$ и приняв его в качестве начального условия $t_0=\lambda_1^{[1]}(0; I_1)$, $x_0=x(t_0)$, в интервале независимой переменной $[x_0; 0]$ приступаем к поиску решения $t(x)$ уравнения (13) аналитически-численным методом. Знак шага расчета h_x определяет знак начального значения $x_0=x(t_0)$ независимой переменной x, обеспечивая достижение этой переменной ее конечного значения x=0. Результатом расчета при x=0 служит числовой интервал, описываемый двойным неравенством (14) и содержащий неизвестное точное значение первого корня $\lambda_1(0; I_1)$ уравнения (1). Протяженность вновь выделенного числового интервала вследствие уменьшения числа шагов, необходимых для расчета в интервале $[x_0; 0]$, будет меньше размера числового интервала, выделенного после выполнения первого этапа алгоритма. Выбрав затем новое приближенное значение $\lambda_1^{[2]}(0; I_1)$ первого корня $\lambda_1(0; I_1)$, который принадлежит новому выделенному числовому интервалу, определяем новое начальное условие $t_0=\lambda_1^{[2]}(0; I_1)$, $x_0=x(t_0)$ и повторяем расчет в интервале $[x_0; 0]$. Расчет повторяем до тех пор, пока протяженность требуемого интервала расчета $[x_0; 0]$ по x не станет меньше, чем длина первого и единственного шага h_x. Как следует из двойного неравенства (10), при выполнении единственного шага расчета h_x выбором порядка I_t полинома Тейлора, используемого для вычисления приближенного значения $t(x; I_t)$, x=0, искомого решения $t(x)$ всегда можно добиться выполнения следующего двойного неравенства:

$$\left|t(0)-t\left(0;I_t\right)\right|\le\left|\Delta t\left(h_x;I_t\right)\right|\le\varepsilon_1(\lambda),\qquad(19)$$

где $|\Delta t(h_x; I_t)|$ — верхняя оценка абсолютной локальной погрешности расчета, вычисленная с учетом принятых обозначений по формулам, приведенным в работах [23, 24]; $\varepsilon_1(\lambda)$ — заданная предельная абсолютная погрешность вычисления приближенного значения $t(0; I_1)=\lambda_1(0; I_1)$ первого корня λ_1 алгебраического уравнения (1).

Из двойного неравенства (19) с учетом обозначений, сопровождающих переход от двойного неравенства (14) к двойному неравенству (15), следует:

$$\left|\lambda_1 - \lambda_1\left(0; I_1\right)\right| \le \varepsilon_1(\lambda). \tag{20}$$

Неравенство (20) описывает результат вычисления приближенного значения $t(0; I_t)=\lambda_1(0; I_1)$ первого корня λ_1 алгебраического уравнения (1) с заданной предельной абсолютной погрешностью $\varepsilon_1(\lambda)$. Для остальных корней уравнения (1) вычислительный алгоритм решения поставленной задачи аналогичен.

Дополняя сказанное, отметим особенности решения поставленной задачи в тех случаях, когда среди корней уравнения (1) есть кратные и (или) комплексные сопряженные.

Если среди корней уравнения (1) есть кратные, то исходное комбинированное описание (2), (3) задачи решения уравнения (1) предварительно преобразуем к следующему необходимому виду:

$$y(t) = \frac{x(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{\sum\limits_{n=0}^{N} A_n^* t^n}{\sum\limits_{n=1}^{N} a_n t^{n-1}}, \quad t \in R; \tag{21}$$

$$y(t)\Big|_{t=\lambda_n} = y\left(\lambda_n\right) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, N_{mu}. \tag{22}$$

Функция $y(t)$, описываемая двойным равенством (21), такова, что сформированное на ее основе алгебраическое уравнение $y(t)=0$ имеет те же корни, что и исходное уравнение (1), но кратность этих корней равна единице [23, 24]. Используя описанный выше вычислительный алгоритм для (21), (22) решаем задачу вычисления с заданной предельной абсолютной погрешностью приближенных значений корней уравнения (1).

Если среди искомых корней уравнения (1) есть комплексные сопряженные, то подстановкой в выражение (2) вместо вещественной переменной t комплексной переменной $s=u+jv$ взамен исходной однозначной аналитической функции $x(t)$ рассматриваем функцию $z(s)=b(u,v) + jg(u,v)$, где $b(u,v)$, $g(u,v)$ — функции, образующие вещественную и мнимую части переменной $z(s)$ соответственно. Решение поставленной задачи в этом случае сводится к решению следующей системы алгебраических уравнений:

$$b(u,v) = 0; \quad g(u,v) = 0. \tag{23}$$

Вектор-функция $\mathbf{s}(z)=[u(b,g)\ v(b,g)]^T$, обратная для исходной вектор-функции, двумя компонентами которой служат вещественная и мнимая части функции $z(s)=b(u,v)+jg(u,v)$, является решением двух систем обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которые формируем на основе системы алгебраических уравнений (23) в соответствии с алгоритмом, изложенным в работах [23, 24]. Для поиска решений этих двух систем дифференциальных уравнений, которые при b=0 и g=0 совпадают с решениями системы алгебраических уравнений (23), используем описанный выше вычислительный алгоритм.

4. Пример расчета. Вычисление с заданной предельной абсолютной погрешностью $\varepsilon(\lambda)=1\cdot10^{-3}$; $1\cdot10^{-6}$; $1\cdot10^{-12}$ приближенных значений корней алгебраического уравнения пятой степени.

Задача решения заданного алгебраического уравнения в форме (2), (3) имеет следующее описание:

$$x(t)=t^5+15t^4+83t^3+225t^2+274t+120; \tag{24}$$

$$x(t)\big|_{t=\lambda_n}=x\left(\lambda_n\right)=0, \quad n=\overline{1,5}. \tag{25}$$

Первый этап. Нахождение числовых интервалов, содержащих точные значения корней алгебраического уравнения (24).

В форме (11) система обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, решением которых служит функция $t(x)$, обратная известной функции $x(t)$ и описываемой выражением (24), имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}\frac{dt(x)}{dx}=\left(5t^4(x)+60t^3(x)+249t^2(x)+450t(x)+274\right)^{-1}; \\ x'=\mp1.\end{gathered} \tag{26}$$

Используя известные результаты алгебры, установили, что искомые корни уравнения (25) вещественные, отрицательные и некратные [27-32]. Вычисленные по формуле Коши верхняя $|\lambda_{su}|$ и нижняя $|\lambda_{in}|$ оценки модулей этих неизвестных корней λ_n таковы:

$$\left|\lambda_{su}\right|=1+\max\{120;274;225;83;15\}=275;$$

$$\left|\lambda_{in}\right|=\frac{120}{120+\max\{1;15;83;225;274\}}=0.30456.$$

Все корни λ_n, $n=\overline{1,5}$ лежат внутри числового по t интервала $[-|\lambda_{su}|; -|\lambda_{in}|]$. Подставив известные значения оценок λ_{su}, λ_{in} в выражение (24), получим:

$$x_0 = x\left(-\left|\lambda_{su}\right|\right) = -1.4486858 \cdot 10^{12};$$
$$x_0 = x\left(-\left|\lambda_{in}\right|\right) = 55.2123.$$

Поскольку $|x(-|\lambda_{su})| \gg |x(-|\lambda_{in})|$, то выделение числовых интервалов, содержащих неизвестные точные значения искомых корней λ_n, $n=\overline{1,5}$, целесообразно начать с минимального по модулю корня алгебраического уравнения (25). Задали начальное условие $t_0=-|\lambda_{in}|=-0.30456$, $x_0=x(t_0)=55.2123$ и, учитывая знак x_0, выбрали $\text{sgn}(h_x)=-1$. В интервале $[x_0; 0]$ аналитически-численным методом решили систему дифференциальных уравнений (26). В результате для первого минимального по модулю корня λ_1 выделили числовой интервал, содержащий его неизвестное точное значение. Выделенный интервал описывает двойное неравенство (15), которое в рассматриваемом случае приобрело следующие числовые показатели:

$$-1.0087450066 - 0.066844865 \le \lambda_1 \le -1.0087450066 + 0.066844865. \qquad (27)$$

Используя двойное неравенство (27), выбрали начальное условие $t_0=\lambda_1(0; I_1)=-1.0087450066$, $x_0=x(t_0)$ и продолжили поиск решения $t(x)$ уравнения (26). В результате нашли абсциссу точки ветвления $x=x^*$, соответствующую предельным соотношениям (16). Совершив в соответствии с равенством (16) переход на очередную ветвь многозначной функции $t(x)$ выделили числовой интервал, который содержит неизвестное точное значение следующего второго корня λ_2 алгебраического уравнения (23). Описанный вычислительный алгоритм повторили для остальных корней.

Результаты расчета, проведенного на первом этапе с заданным предельным уровнем абсолютной локальной погрешности $\varepsilon(\lambda)=1\cdot10^{-5}$, приведены в таблице 1.

В таблице 1 использованы следующие обозначения: t_0, $x_0=x(t_0)$ — начальные условия для поиска решения $t(x)$; $\lambda_n(0; I_n)$ — приближенные значения корней; $|\Delta\lambda_n(0; I_n)|$ — верхние оценки абсолютных полных погрешностей расчета приближенных значений корней; $t(x^*; I_t)$ — ординаты точек в непосредственной близости от точек ветвления многозначной функции $t(x)$; Δt — произвольная малая величина, необходимая для перехода на очередную ветвь многозначной функции $t(x)$; $\text{sgn}(h_x)$ — знак шага расчета h_x в интервале $[x_0; 0]$.

Таблица 1. Результаты выделения одномерных интервалов, содержащих неизвестные точные значения корней алгебраического уравнения (24)

n	t_0	$x_0 = x(t_0)$	$\lambda_n(0;I_n)$	$\lvert \Delta\lambda_n(0;I_n) \rvert$	$t(x^*;I_t)$ / Δt	$\operatorname{sgn} h_x$
1	–0.3046	55.2123	–1.00874501	0.06684865	–1.3546 / –0.0054	–1
2	–1.36	3.631045	–1.99993460	0.05395789	–2.4557 / –0.0443	+1
3	–2.5	1.406251	–2.98898512	0.02754328	–3.5424 / –0.0076	–1
4	–3.55	–1.418453	–4.00207918	0.03875414	–4.6443 / –0.0057	+1
5	–4.65	3.63081	–4.99865317	0.05047823	–	–1

Выделенные и описываемые при соответствующей замене индексов двойными неравенствами вида (27) числовые интервалы содержат точные значения $\lambda_n=-n$ корней алгебраического уравнения (24).

Второй этап. Вычисление с заданной предельной абсолютной погрешностью $\varepsilon(\lambda)=[\varepsilon_1(\lambda)\ \varepsilon_2(\lambda)\ \ldots\ \varepsilon_N(\lambda)]^T$ приближенных значений корней λ_n алгебраического уравнения (24).

Выбрав принадлежащее двойному неравенству (27) приближенное значение первого корня, например $\lambda_1^{[1]}(0;\ I_1)=-1.00874501$, и задав начальное условие $t_0=\lambda_1^{[1]}(0;\ I_1)$, $x_0=x(t_0)$, в интервале $[x_0;\ 0]$ аналитически-численным методом решили уравнения (26). Результатом стал новый более узкий числовой интервал, содержащий неизвестное точное значение первого корня λ_1 и описываемый двойным неравенством (15) с новыми числовыми показателями. Выбрав принадлежащее выделенному числовому интервалу новое приближенное значение первого корня $\lambda_1^{[2]}(0;\ I_1)$ и задав новое начальное условие $t_0=\lambda_1^{[2]}(0;\ I_1)$, $x_0=x(t_0)$ в интервале $[x_0;\ 0]$, повторили расчет. Затем расчет повторяли до тех пор, пока он не был сведен к выполнению единственного шага. При одношаговом расчете, выбирая соответствующий порядок метода I_n, обеспечили выполнение неравенства (20), вычислив в итоге приближенное значение $\lambda_n(0;\ I_n)$, $n=1$ первого корня λ_1 алгебраического уравнения (24) с предельной абсолютной погрешностью $\varepsilon_1(\lambda)$. Таким же образом вычислили приближенные значения всех остальных корней λ_n, $n=\overline{2,5}$.

Результаты расчета на втором этапе сведены в таблице 2. В таблице 2 использованы обозначения из таблицы 1. Корни уравнения (24) представлены в седьмом столбце таблицы 2 соответственно заданным предельным абсолютным погрешностям $\varepsilon(\lambda)$, которые указаны в начале пункте 4.

Таблица 2. Вычисление с заданной предельной абсолютной погрешностью корней алгебраического уравнения (24)

n	t_0	$x_0,\times 10^{-3}$	$h_x,\times 10^{-3}$	$\varepsilon_n(\lambda)$	I_n	$\lambda_n(0;I_n)$	$\left\|\Delta\lambda_n(h_x;I_n)\right\|$
1	–0.99991545	0.204003	–0.204003	$1\cdot 10^{-3}$	6	–1.00004531	0.826272×10^{-3}
				$1\cdot 10^{-6}$	9	–1.00000012	0.302883×10^{-6}
				$1\cdot 10^{-12}$	14	–1.00000000	0.814897×10^{-12}
2	–1.99993466	–0.396021	0.396021	$1\cdot 10^{-3}$	6	–2.00005138	0.952531×10^{-3}
				$1\cdot 10^{-6}$	9	–2.00000021	0.605752×10^{-6}
				$1\cdot 10^{-12}$	15	–2.00000000	0.100361×10^{-12}
3	–2.99996518	0.140225	–0.140225	$1\cdot 10^{-3}$	6	–3.00004121	0.678810×10^{-3}
				$1\cdot 10^{-6}$	9	–3.00000017	0.908165×10^{-6}
				$1\cdot 10^{-12}$	15	–3.00000000	0.150545×10^{-12}
4	–4.00207918	12.495	–12.495	$1\cdot 10^{-3}$	6	–3.99999857	0.452618×10^{-3}
				$1\cdot 10^{-6}$	10	–3.99999997	0.705432×10^{-6}
				$1\cdot 10^{-12}$	15	–4.00000000	0.392155×10^{-12}
5	–4.99865317	–31.122	–31.122	$1\cdot 10^{-3}$	7	–4.99995678	0.805343×10^{-3}
				$1\cdot 10^{-6}$	10	–4.99999937	0.918324×10^{-6}
				$1\cdot 10^{-12}$	14	–5.00000000	0.103112×10^{-12}

Как видно из таблицы 2, при уменьшении уровня предельной абсолютной погрешности расчета $\varepsilon_n(\lambda)$, $n\in[1;\,5]$ на девять порядков порядок метода увеличивается всего лишь в 2–2.5 раза.

5. Заключение. Отметим следующие особенности предложенного алгоритма, отличающие его от широко используемых.

Во-первых, алгоритм позволяет выделять числовые интервалы, содержащие неизвестные точные значения корней. Знание таких интервалов определяет возможность вычисления приближенных значений корней с любой заданной предельной абсолютной погрешностью.

Во-вторых, результативность алгоритма, то есть гарантия достижения поставленной цели не зависит от выбора «удачных» или «близких» начальных условий — достаточно вычислить лишь верхнюю $|\lambda_{su}|$ и нижнюю $|\lambda_{in}|$ оценки неизвестных точных значений корней алгебраического уравнения.

В-третьих, алгоритм на первом этапе не итерационный, поэтому число шагов расчета, необходимое для выделения числового интервала, который содержит неизвестное точное значение какого-либо из корней λ_n, n=1, 2, …, N алгебраического уравнения, всегда ограничено.

В-четвёртых, алгоритм при поиске определенного корня алгебраического уравнения вычислительно полностью автономен, что исключает неконтролируемый «дрейф» погрешности и взаимовлияние погрешностей, сопровождающих поиск различных корней.

Литература

1. *Ugboh J.A., Esuabana I.M.* Marching Method: A New Numerical Method for Finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations // American Journal of Computational and Applied Mathematics. 2019. vol. 9(1). pp. 6–11.
2. *Petkovica M.S., Petkovic L.D., Dzunic J.* On an Efficient Simultaneous Method for Finding Polynomial zeros // Applied Mathematics Letters. 2014. vol. 28. pp. 60–65.
3. *Nedzhibov G.H.* A Derivative-Free Iterative Method for Simultaneously Computing an Arbitrary Number of Zeros of Nonlinear Equations // Computers and Mathematics with Applications. 2012. vol. 63. no. 7. pp. 1185–1191.
4. *Khamisov O.V.* Finding Roots of Nonlinear Equations Using the Method of Concave Support Functions // Mathematical Notes. 2015. vol. 98. no. 3-4. pp. 484–491.
5. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.* Вычислительные методы: учеб. пособие // СПб.: Лань. 2014.
6. *Hamming R.W.* Numerical Method for Scientists and Engineers // New York: Dover Publications Inc. 1987. 752 p.
7. *Воронова М.Е., Симакова М.Н., Симаков Е.Е.* Методы решения нелинейных уравнений // Юный ученый. 2016. № 3. С. 102–105.
8. *Alharbi A.R. et al.* Higher Order Numerical Approaches for Nonlinear Equations by Decomposition Technique // IEEE Access. 2019. vol. 7. pp. 44329–44337.
9. *Zafar F., Cordero A., Quratulain R., Torregrosa J.R.* Optimal Iterative Methods for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations Using Free Parameters // Journal of Mathematical Chemistry. 2017. vol. 56. pp. 1884–1891.
10. *Akram S., Zafar F., Yasmin N.* An Optimal Eighth-Order Family of Iterative Methods for Multiple Roots // Mathematics. 2019. vol. 7. no. 8. pp. 672.
11. *Behl R., Cordero A., Motsa S.S., Torregrosa J.R.* An Eighth-order Family of Optimal Multiple Root Finders and its Dynamics // Numerical Algorithms. 2018. vol. 77. no. 4. pp. 1249–1272.
12. *Soleymani F., Babajee D.K.R., Lotfi T.* On a Numerical Technique for Finding Multiple Zeros and its Dynamic // Journal of the Egyptian Mathematical Society. 2013. no. 21. no. 3. pp. 346–353.
13. *Winkler J.R., Lao X., Hasan M.* The Computation of Multiple Roots of a Polynomial // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2012. vol. 236. no. 14. pp. 3478–3497.
14. *Yun B.I.* A Derivative Free Iterative Method for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations // Applied Mathematics Letters. 2009. vol. 22. no. 12. pp. 1859–1863.
15. *Jaiswal J.P.* An Optimal Order Method for Multiple Roots in Case of Unknown Multiplicity // Algorithms. 2016. vol. 9. no. 1. pp. 10.
16. *Тубольцев М.Ф., Маторин С.И., Тубольцева О.М.* Эвристический компьютерный алгоритм вычисления кратных корней нелинейного уравнения // Научные ведомости БелГУ. Серия: Экономика. Информатика. 2015. Вып. 34. № 7(204). С. 78–83.
17. *Liao Z. et al.* Solving Nonlinear Equations System With Dynamic Repulsion-Based Evolutionary Algorithms // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems. 2018. vol. 7. pp. 1–12.
18. *Gong W., Wang Y., Cai Z., Wang L.* Finding Multiple Roots of Nonlinear Equation Systems via a Repulsion-Based Adaptive Differential Evolution // IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems. 2018. vol. 5. pp. 1–15.

19. *Neamvonk J., Phuenaree B., Neamvonk A.* A New Method for Finding Root of Nonlinear Equations by Using Nonlinear Regression // Asian Journal of Applied Sciences. 2015. vol. 3. no. 6. pp. 818–822.
20. *Yang X.J., Machado J.A.T., Srivastava H.M.* A New Numerical Technique for Solving the Local Fractional Diffusion Equation: Two-dimensional Extended Differential Transform Approach // Applied Mathematics and Computation. 2016. vol. 274. pp. 143–151.
21. *Kalitkin N.N., Kuzmina L.V.* Calculation of Roots and There Multiplicity for Nonlinear Equation // Mathematical Models and Computer Simulations. 2011. vol. 3. no. 1. pp. 65–80.
22. *Kalitkin N.N., Kuzmina L.V.* The Method of Seconds with Extrapolation for Accurate Calculation of Manifold Roots // Mathematical Models and Computer Simulations. 2011. vol. 23. no. 6. pp. 33–58.
23. *Бычков Ю.А. и др.* Математическое моделирование и анализ нелинейных систем // СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2015. 302 с.
24. *Бычков Ю.А., Соловьева Е.Б., Щербаков С.В.* Непрерывные и дискретные нелинейные модели динамических систем // СПб.: Лань. 2018. 420 с.
25. *Gofen A.M.* Fast Taylor-Series Expansion and the Solution of the Cauchy Problem // USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1982. vol. 22. no. 5. pp. 74–88.
26. *Гофен А.М.* Интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений методом Тейлора и проблема шага // М.: ИПИ АН СССР. 1991. 29 с.
27. *Козин Р.* Программирование алгоритмов численных методов линейной алгебры // New York: LAP Lambert Academic Publishing. 2014. 188 с.
28. *Волков Е.А.* Численные методы: учеб. пособие // СПб.: Лань. 2008. 248 с.
29. *Grewal B.S.* Numerical Methods in Engineering and Science C, C++, and MATLAB // Dulles: Mercury Learning and Information LLC. 2018. 1597 p.
30. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2018. 640 с.
31. *Калиткин Н.Н.* Численные методы: учеб. пособие // СПб.: БХВ-Петербург. 2014. 592 с.
32. *Турчак Л.И., Плотников П.В.* Основы численных методов // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2003. 304 с.

Бычков Юрий Александрович — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра теоретических основ электротехники института фундаментального инженерного образования, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»). Область научных интересов: математическое моделирование динамических систем, численные методы. Число научных публикаций — 260. rimelena@yahoo.com; ул. Профессора Попова, 5, 197376, Санкт-Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812)-346-17-96.

Соловьева Елена Борисовна — д-р техн. наук, профессор, действительный член Академии электротехнических наук РФ, заведующий кафедрой, кафедра теоретических основ электротехники института фундаментального инженерного образования, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (СПбГЭТУ "ЛЭТИ"). Область научных интересов: математическое моделирование и синтез нелинейных динамических систем, поведенческое моделирование на основе многомерных полиномов и нейронных сетей, цифровая обработка сигналов. Число научных публикаций — 250. selenab@hotbox.ru; ул. Профессора Попова, 5, 197376, Санкт-Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812)-346-17-96.

Щербаков Сергей Валерьевич — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра теоретических основ электротехники института фундаментального инженерного образования, Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» имени В. И. Ульянова (Ленина) (СПбГЭТУ «ЛЭТИ»). Область научных интересов: математическое моделирование динамических систем, численные методы. Число научных публикаций — 120. gz43@pskovsobranie.ru; ул. Профессора Попова, 5, 197376, Санкт-Петербург, Российская Федерация; р.т.: +7(812)-346-17-96.

DOI 10.15622/sp.2019.18.6.1491-1514

Y.A. BYCHKOV, E.B. SOLOVYEVA, S.V. SCHERBAKOV

ANALYTICAL-NUMERICAL CALCULATION ALGORITHM OF ERRORS OF ALGEBRAIC EQUATIONS ROOTS WITH SPECIFIED LIMITS

Bychkov Y.A., Solovyeva E.B., Scherbakov S.V. **Analytical-Numerical Calculation Algorithm of Algebraic Equations Roots with Specified Limits of Errors.**

Abstract. This paper proposes an algorithm for calculating approximate values of roots of algebraic equations with a specified limit of absolute errors. A mathematical basis of the algorithm is an analytical-numerical method of solving nonlinear integral-differential equations with non-stationary coefficients. The analytical-numerical method belongs to the class of one-step continuous methods of variable order with an adaptive procedure for choosing a calculation step, a formalized estimate of the error of the performed calculations at each step and the error accumulated during the calculation. The proposed algorithm for calculating the approximate values of the roots of an algebraic equation with specified limit absolute errors consists of two stages. The results of the first stage are numerical intervals containing the unknown exact values of the roots of the algebraic equation. At the second stage, the approximate values of these roots with the specified limit absolute errors are calculated. As an example of the use of the proposed algorithm, defining the roots of the fifth-order algebraic equation with three different values of the limiting absolute error is presented.

The obtained results allow drawing the following conclusions. The proposed algorithm enables to select numeric intervals that contain unknown exact values of the roots. Knowledge of these intervals facilitates the calculation of the approximate root values under any specified limiting absolute error. The algorithm efficiency, i.e., the guarantee of achieving the goal, does not depend on the choice of initial conditions. The algorithm is not iterative, so the number of calculation steps required for extracting a numerical interval containing an unknown exact value of any root of an algebraic equation is always restricted. The algorithm of determining a certain root of the algebraic equation is computationally completely autonomous.

Keywords: Algebraic Equation, Nonlinear Differential Equation, Analytical-Numerical Method, Approximate Root Value.

Bychkov Yuri Alexandrovich — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of Theoretical Electrical Engineering of Institute of Fundamental Engineering Education, Saint Petersburg Electrotechnical University 'LETI'. Research interests: mathematical modeling of dynamic systems, numerical methods. The number of publications — 260. rimelena@yahoo.com; 5, Professor Popov str., 197376, St. Petersburg, Russian Federation; office phone: +7(812)-346-17-96.

Solovyeva Elena Borisovna — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Full Member of Russian Academy of Electrical Engineering Sciences, Head of Department, Department of Theoretical Electrical Engineering of Institute of Fundamental Engineering Education, Saint Petersburg Electrotechnical University 'LETI'. Research interests: mathematical modeling and synthesis of nonlinear dynamic systems, behavioral modeling based on multidimensional polynomials and neural networks, digital signal processing. The number of publications — 250. selenab@hotbox.ru; 5, Professor Popov str., 197376, Sankt-Peterburg, Russian Federation; office phone: +7(812)-346-17-96.

Scherbakov Sergei Valerievich — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of Theoretical Electrical Engineering of Institute of Fundamental Engineering Education, Saint Petersburg Electrotechnical University 'LETI'. Research interests: mathematical modeling of dynamic systems, numerical methods. The number of publications — 120. gz43@pskovsobranie.ru; 5, Professor Popov str., 197376, St. Petersburg, Russian Federation; office phone: +7(812)-346-17-96.

References

1. Ugboh J.A., Esuabana I.M. Marching Method: A New Numerical Method for Finding Roots of Algebraic and Transcendental Equations. *American Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2019. vol. 9(1). pp. 6–11.
2. Petkovica M.S., Petkovic L.D., Dzunic J. On an Efficient Simultaneous Method for Finding Polynomial zeros. *Applied Mathematics Letters*. 2014. vol. 28. pp. 60–65.
3. Nedzhibov G.H. A Derivative-Free Iterative Method for Simultaneously Computing an Arbitrary Number of Zeros of Nonlinear Equations. *Computers and Mathematics with Applications*. 2012. vol. 63. no. 7. pp. 1185–1191.
4. Khamisov O.V. Finding Roots of Nonlinear Equations Using the Method of Concave Support Functions. *Mathematical Notes*. 2015. vol. 98. no. 3-4. pp. 484–491.
5. Amosov A.A., Dubinskij Ju.A., Kopchenova N.V. *Vychislitel'nye metody: uchebnoe posobie* [Computational Methods: tutorial]. SPb: Lan'. 2014. (In Russ.).
6. Hamming R.W. Numerical Method for Scientists and Engineers. New York: Dover Publications Inc. 1987. 752 p.
7. Voronova M.E., Simakova M.N., Simakov E.E. [Methods for solving nonlinear equations]. *Junyj uchenyj – Young scientist*. 2016. vol. 3. pp. 102–105. (In Russ.).
8. Alharbi A.R. et al. Higher Order Numerical Approaches for Nonlinear Equations by Decomposition Technique. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 44329–44337.
9. Zafar F., Cordero A., Quratulain R., Torregrosa J.R. Optimal Iterative Methods for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations Using Free Parameters. *Journal of Mathematical Chemistry*. 2017. vol. 56. pp. 1884–1891.
10. Akram S., Zafar F., Yasmin N. An Optimal Eighth-Order Family of Iterative Methods for Multiple Roots. *Mathematics*. 2019. vol. 7. no. 8. pp. 672.
11. Behl R., Cordero A., Motsa S.S., Torregrosa J.R. An Eighth-order Family of Optimal Multiple Root Finders and its Dynamics. *Numerical Algorithms*. 2018. vol. 77. pp. 1249–1272.
12. Soleymani F., Babajee D.K.R., Lotfi T. On a Numerical Technique for Finding Multiple Zeros and its Dynamic. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*. 2013. no. 21. pp. 346–353.
13. Winkler J.R., Lao X., Hasan M. The Computation of Multiple Roots of a Polynomial. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2012. vol. 236. no. 14. pp. 3478–3497.
14. Yun B.I. A Derivative Free Iterative Method for Finding Multiple Roots of Nonlinear Equations. *Applied Mathematics Letters*. 2009. vol. 22. no. 12. pp. 1859–1863.
15. Jaiswal J.P. An Optimal Order Method for Multiple Roots in Case of Unknown Multiplicity. *Algorithms*. 2016. vol. 9. no. 1. pp. 10.
16. Tubol'cev M.F., Matorin S.I., Tubol'ceva O.M. [Heuristic computer algorithm for calculating multiple roots of a nonlinear equation]. *Nauchnye vedomosti BelGU. Serija: Jekonomika. Informatika – Belgorod State University Scientific Bulletin*. 2015. vol. 34. no. 7(204). pp. 78–83. (In Russ.).
17. Liao Z. et al. Solving Nonlinear Equations System With Dynamic Repulsion-Based Evolutionary Algorithms. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems*. 2018. vol. 7. pp. 1–12.
18. Gong W., Wang Y., Cai Z., Wang L. Finding Multiple Roots of Nonlinear Equation Systems via a Repulsion-Based Adaptive Differential Evolution. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics: Systems*. 2018. vol. 5. pp. 1–15.
19. Neamvonk J., Phuenaree B., Neamvonk A. A new method for finding Root of Nonlinear Equations by using Nonlinear Regression. *Asian Journal of Applied Sciences*. 2015. vol. 3. no. 6. pp. 818–822.
20. Yang X.J., Tenreiro J.A., Srivastava H.M. A new numerical technique for solving the local fractional diffusion equation: Two-dimensional extended differential transform approach. *Applied Mathematics and Computation*. 2016. vol. 274. pp. 143–151.

21. Kalitkin N.N., Kuzmina L.V. Calculation of Roots and There Multiplicity for Nonlinear Equation. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. vol. 3. no. 1. pp. 65–80.
22. Kalitkin N.N., Kuzmina L.V. The Method of Seconds with Extrapolation for Accurate Calculation of Manifold Roots. *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2011. vol. 23. no. 6. pp. 33–58.
23. Bychkov Ju.A. et al. *Matematicheskoe mo-delirovanie i analiz nelinejnyh sistem. Mathematische model-lierung und analyse nichtlinearer systems* [Mathematical modeling and analysis of nonlinear systems]. Saint-Petersburg: Izd-vo SPbGETU "LETI". 2015. 302 p. (In Russ.).
24. Bychkov Ju.A., Solov'eva E.B., Shherbakov S.V. *Nepreryvnye i diskretnye nelinejnye modeli dinamicheskih sistem* [Continuous and discrete nonlinear models of dynamic systems]. SPb: Lan'. 2018. 420 p. (In Russ.).
25. Gofen A.M. Fast Taylor-Series Expansion and the Solution of the Cauchy Problem. *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 1982. vol. 22. no. 5. pp. 74–88.
26. Gofen A.M. *Integrirovanie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij metodom Tejlora i problema shaga* [Integration of ordinary differential equations by the Taylor method and the step problem]. Moscow: IPI AN SSSR. 1991. 29 p. (In Russ.).
27. Kozin R. *Programmirovanie algoritmov chislennyh metodov linejnoj algebry* [Programming algorithms for the numerical methods of linear algebra]. New York: LAP Lambert Academic Publishing. 2014. 188 p. (In Russ.).
28. Volkov E.A. *Chislennye metody: uchebnoe posobie* [Numerical methods: tutorial]. SPb: Lan'. 2008. 248 p. (In Russ.).
29. Grewal B.S. Numerical Methods in Engineering and Science C, C++, and MATLAB. Dulles: Mercury Learning and Information LLC. 2018. 1597 p.
30. Bahvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobel'kov G.M. *Chislennye metody* [Numerical methods]. Moscow: BINOM. Laboratorija znanij. 2018. 640 p. (In Russ.).
31. Kalitkin N.N. *Chislennye metody: uchebnoe posobie* [Numerical methods: tutorial]. SPb.: BHV-Peterburg. 2014. 592 p. (In Russ.).
32. Turchak L.I., Plotnikov P.V. *Osnovy chislennyh metodov* [Fundamentals of numerical methods]. M.: FIZMATLIT. 2003. 304 p. (In Russ.).