

С.Н. ЧУКАНОВ
**СРАВНЕНИЕ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОБЪЕКТОВ МЕТОДАМИ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТОПОЛОГИИ**

Чуканов С.Н. Сравнение изображений объектов методами вычислительной топологии.

Аннотация. Используя алгоритмы вычислительной топологии, рассмотрены методы сравнения изображений объектов, которые представлены множествами точек. Предложены алгоритмы построения множеств вещественных баркодов для сравнения изображений объектов. Нахождение баркодов форм объектов позволяет изучать как непрерывные, так и дискретные структуры, что делает их использование полезным в вычислительной топологии. Отличительной особенностью использования предложенных методов сравнения по отношению к методам алгебраической топологии является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения вещественных баркодов является изучение инвариантов больших объемов данных. Предлагается метод, который объединяет технологии построения баркодов с внедренной негеометрической информацией (цвет, момент времени формирования, давление пера), представленной в виде функций от симплицидальных комплексов. Для этого баркоды расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации. Представленная структура расширенных баркодов повышает эффективность методов персистентных гомологий при сравнении изображений и распознавании образов. Предложена модификация метода Вассерштейна для нахождения расстояния между изображениями путем введения негеометрической информации о расстояниях между изображениями, обусловленной неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях; предложенные алгоритмы формирования расширенных баркодов изображений являются инвариантными к преобразованиям вращения и переноса. Рассмотрен метод определения расстояния между множествами точек, представляющими кривые, с учетом ориентации отрезков кривых. В работе используются понятия алгебраической и вычислительной топологии, теории лиевых групп, диффеоморфных преобразований.

Ключевые слова: распознавание образов, диффеоморфные преобразования, персистентные гомологии, расстояние Вассерштейна.

1. Введение. Существуют различные методы решения задачи сравнения форм исходного изображения и терминального (целевого) изображения [1-3]. Для анализа деформаций изображения от исходного к целевому в [4, 5] рассматривается группа диффеоморфизмов, а деформация рассматривается как геодезическая (кратчайший путь) между исходным и целевым изображениями. Задача сравнения исходного и целевого изображений решается на основе метода построения минимизируемого функционала [4, 5], характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой. Для решения задачи сравнения применяется метод частиц-ориентиров [6].

В случае анализа формы объекта используются геометрические, спектральные и топологические характеристики объекта. Геометрические характеристики объекта могут изменяться при диффеоморфных деформациях. Характеристики формы, определяемые топологическими методами, не зависят от координатного представления рассматриваемой формы и инвариантны по отношению к диффеоморфным преобразованиям. Основные методы топологии заключаются в создании сжатых комбинаторных представлений форм (например, триангуляции) и измерении формы объекта с помощью гомологических сигнатур.

В работе применяются алгоритмы построения множеств персистентных баркодов [7, 8] для сравнения диффеоморфных изображений, которые определяются вещественными значениями, принимаемыми персистентными гомологиями. Нахождение персистентных баркодов форм объектов позволяет изучать как непрерывные, так и дискретные структуры, что делает их использование полезным в вычислительной топологии. Отличительной особенностью использования персистентных гомологий по отношению к методам алгебраической топологии [9, 10] является получение большего количества информации о форме объекта. Важным направлением применения персистентных гомологий является изучение инвариантов больших объемов данных.

В дополнение к геометрической информации, существует широкий спектр негеометрической информации, которая ассоциируется с симплексами, представляющими изображение (цвет, момент времени формирования, давление пера и т.д.) и не описывается персистентной гомологией. Желательно иметь математическую основу для систематического внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания. Для этого предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях, который объединяет технологии персистентных гомологий с внедренной негеометрической информацией, представленной в виде функций от симплицальных комплексов. Для это баркоды персистентных гомологий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации. Предлагаемая структура расширенных баркодов с использованием когомологий повышает эффективность методов персистентных гомологий.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается метод Леонида Вассерштейна модифицировать и в формулу для расстояния между изображениями, определяемого по баркодам персистентных гомологий, ввести негеометрическую информацию о расстоянии между изображениями,

обусловленную неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов.

2. Гамильтонова механика точечных ориентиров изображения. Представление диффеоморфного отображения изображений можно рассмотреть как эволюцию точечных ориентиров (наиболее важных точек) изображения на основе гамильтоновой механики. Рассмотрим параметризацию формы изображения с помощью частиц — точечных ориентиров. Пусть $q_i(t); i=1, \dots, N$ используется для обозначения вектора положения i -й частицы и $p_i(t); i=1, \dots, N$ соответствующего вектора импульса в момент времени t . Если формально принять, что импульсы и скорости частиц связаны соотношением: $p_i = \mathcal{L} \cdot v_i$, где \mathcal{L} — линейный обратимый оператор (в механике соответствует инертной массе), то обратное соотношение: $v_i = \mathcal{L}^{-1} \cdot p_i = \mathcal{K} p_i$. Скалярное произведение векторов p_i и v_i , соответствующее метрике С.Л. Соболева [11], можно представить в виде: $\langle p_i, v_i \rangle_{L^2} = \langle \mathcal{L} v_i, v_i \rangle_{L^2}$. Для оператора: $\mathcal{L} = \text{id} - \alpha \nabla^2$ в пространстве $\Omega = \mathbb{R}^2$ — обратным оператором формально является оператор: $\mathcal{K} = \mathcal{L}^{-1}$, который можно аппроксимировать скалярной функцией Гаусса [3]:

$$K(q_i - q_j) = \beta e^{-\alpha^{-2}(q_i - q_j)^T (q_i - q_j)}.$$

Построим минимизируемый функционал, который соответствует деформации изображения, представленного совокупностью точечных ориентиров в виде:

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j \right\} dt.$$

Минимизация J_0 должна осуществляться по значениям векторов q_i, q_j и p_i, p_j . Но значения векторов q_i, q_j определяются начальными значениями $q_i(0), q_j(0)$, поэтому минимизация осуществляется по начальным неизвестным значениям векторов $p_i(0), p_j(0)$. Задачу минимизации J_0 можно представить как задачу оптимального управления, связанную с гамильтонианом:

$$H_0(q, p) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_i^T K(q_i - q_j) p_j.$$

Если гамильтониан системы принять в форме (с учетом J_0):

$$H(q, p) = H_0(q, p) + \sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2 = H_0(q, p) + \sigma^2 \sum_{i=1}^N p_i^2,$$

то уравнения Гамильтона для производных компонент $\dot{p} = (\dot{p}_1, \dots, \dot{p}_N)$, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_N)$ примут вид:

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{j=1}^N p_j^T \nabla_{q_i} K(q_i - q_j) p_j, \\ \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} = \sum_{j=1}^N K(q_i - q_j) p_j + \sigma^2 p_i. \end{aligned} \tag{1}$$

В функции Гамильтона $H(q, p)$ вводится штраф $\sigma^{-2} \sum_{i=1}^N (\dot{q}_i - v_i(q))^2$ при наличии рассогласования $(\dot{q}_i - v_i(q))$.

3. Расстояние между множествами точек. Пусть даны два множества точек, представляющие кривые, $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^d$ (для плоских кривых $d = 2$). Сформируем функцию Гаусса $K: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $K(q_i, q_j) = \exp\left(-\left(q_i - q_j\right)^T \left(q_i - q_j\right) \alpha^{-2}\right)$ со свойством $K(q_i, q_i) = 1, \forall q_i \in (Q_1 \cup Q_2)$ и при увеличении $\left(q_i - q_j\right)^T \left(q_i - q_j\right)$ функция $K(q_i, q_j)$ уменьшается. Квадрат расстояния между множествами Q_1 и Q_2 равно [12]:

$$d^2(Q_1, Q_2) = \sum_{q_1 \in Q_1} \sum_{q_1' \in Q_1} K(q_1, q_1') + \sum_{q_2 \in Q_2} \sum_{q_2' \in Q_2} K(q_2, q_2') - 2 \sum_{q_1 \in Q_1} \sum_{q_2 \in Q_2} K(q_1, q_2).$$

Для учета ориентации отрезков кривых определим квадрат расстояния между двумя формами, моделируемыми с использованием касательных к точкам кривых. Квадрат расстояния между множествами $q_1^1, q_1^2, \dots, q_1^N \in Q_1$ и $q_2^1, q_2^2, \dots, q_2^N \in Q_2$ с учетом ориентации отрезков кривых можно определить из соотношения:

$$\begin{aligned}
 d^2 = & \sum_{q_1(i) \in Q_1} \sum_{q_1(j) \in Q_1} \eta_{q_1(i)}^T K(c_{q_1(i)}, c_{q_1(j)}) \eta_{q_1(j)} + \\
 & + \sum_{q_2(i) \in Q_2} \sum_{q_2(j) \in Q_2} \eta_{q_2(i)}^T K(c_{q_2(i)}, c_{q_2(j)}) \eta_{q_2(j)} - \\
 & - 2 \sum_{q_1(i) \in Q_1} - \sum_{q_2(j) \in Q_2} \eta_{q_1(i)}^T K(c_{q_1(i)}, c_{q_2(j)}) \eta_{q_2(j)},
 \end{aligned}$$

где $c_{q_k(i)} = (q_k(i) + q_k(i+1))/2$ — центры отрезков кривой между точками $q_k(i)$ и $q_k(i+1)$, $\eta_{q_k(i)} = (q_k(i+1) - q_k(i))/2$ — касательные векторы отрезков кривой в центрах $c_{q_k(i)}$, $k=1,2$, $i, j=1, \dots, N$.

Касательные векторы отрезков кривых учитывают ориентацию кривых. Недостатком данного метода нахождения квадрат расстояния между множествами точек, представляющими кривые, является отсутствие инвариантности по отношению к евклидовым преобразованиям координат точек.

4. Построение комплекса Вьеториса — Рипса. На основе оценивания функционала J_0 можно построить алгоритм распознавания изображений [11], но этот алгоритм требует проведение предварительной нормализации изображения и не является инвариантным по отношению преобразованиям координат. Поэтому алгоритмы распознавания, инвариантные по отношению преобразованиям координат (coordinate-free), являются актуальными [13, 14]; к таким алгоритмам относятся алгоритмы вычислительной топологии [15-17].

Для сравнения изображений, представленных множеством точечных ориентиров, предлагается построение комплекса Вьеториса — Рипса из точечных облаков этих ориентиров. Рассмотрим построение симплициальных комплексов из точечных облаков вложенных в \mathbb{R}^d . Пусть задано множество точечных ориентиров $S = \{q_1, \dots, q_k\}; q_i \in \mathbb{R}^2$. Комплекс Вьеториса — Рипса $R(r)$ представляет собой симплициальный комплекс, построенный на множестве точек S ; комплекс Вьеториса — Рипса имеет симплекс тогда, когда все пары точек находятся на расстоянии, не превышающем $2r$: $R(r) = \{\sigma = S \mid \|q_i - q_j\| \leq 2r, \forall i, j\}$.

При $r=0$ числа Бетти множества k точек равны: $\beta_0 = k; \beta_i = 0, i \geq 1$; характеристика Эйлера: $\chi = \beta_0$. При диффеоморфных преобразованиях множества k точек эти топологические характеристики не изменяются. При изменении $r \in \mathbb{R}^+$ значения чисел Бетти и характеристик Эйлера сформированного комплекса Вьеториса — Рипса изменяются при соответствующих диффеоморфных преобразованиях. Существуют точки появления r_b (birth) и точки исчезновения r_d (death) нетривиальных классов гомологий [15] и соответствующих чисел Бетти и характеристик Эйлера [9]. Горизонтальные полуинтервалы в 2D полуплоскости $\{[b_i \dots d_i] \mid d_i \geq b_i \geq 0\}$ называются баркодами (здесь i — номер баркода). Баркоды, числа Бетти и характеристики Эйлера для точечных облаков можно определить с помощью пакета JavaPlex [18].

Персистентная гомология сохраняет следы появления b_i и исчезновения d_i классов гомологии вдоль фильтрации симплициального комплекса, обусловленной сортировкой $\{x_1 < x_2 < \dots < x_l\}$, которая включает в себя информацию о гомологии каждого фиксированного симплициального комплекса при фильтрации $\{X(x_i)\}$. Группы гомологий $H_k(X(x_i))$ могут быть представлены в виде векторных пространств. Карта включения, связывающая группы, индуцирует последовательность линейных преобразований на векторных пространствах:

$$H_k(X(x_0)) \rightarrow H_k(X(x_1)) \rightarrow \dots \rightarrow H_k(X(x_l)).$$

Если существует функционал $\mathcal{Y}(\mathcal{X})$, который принимает значения на цепи \mathcal{X} , что можно записать в виде $\mathcal{Y}(\mathcal{X}) = \langle \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle$, то определение кограничного оператора $d_n : C^{n-1} \rightarrow C^n$ принимает форму определения сопряженного линейного оператора:

$$\langle d_n \mathcal{Y}, \mathcal{X} \rangle = \langle \mathcal{Y}, \partial_n \mathcal{X} \rangle, \mathcal{X} \in C_n, \mathcal{Y} \in C^{n-1}; d_{n+1} d_n = 0.$$

Определим группы n -мерных коциклов: $Z^n = \text{Ker}(d_n)$; и n -мерных кограниц: $B^n = \text{Im}(d_{n-1})$. Факторгруппа $H^n = Z^n / B^n$

называется n -мерной группой когомологий коцепного комплекса. Для персистентных когомологий можно построить диаграмму [20, 21]:

$$H^k(X(x_0), \mathbb{R}) \leftarrow H^k(X(x_1), \mathbb{R}) \leftarrow \dots \leftarrow H^k(X(x_l), \mathbb{R}).$$

Из теоремы универсальности коэффициентов [9] для когомологий следует, что изоморфизм между группой гомологий $H_k(X)$ и группой когомологий $H^k(X, \mathbb{R})$. Это свойство означает, что персистентные гомологии и персистентные когомологии имеют одинаковые баркоды.

Пример 1. Приведем пример построения комплекса Вьеториса — Рипса для четырех облаков точек с центрами в вершинах $q_1 = (0,1), q_2 = (-1,0), q_3 = (0,-1), q_4 = (1,0)$ при $r = 1.0$, $r = 1.5$ и $r = 2.5$ с указанием чисел Бетти и характеристик Эйлера.

На рисунках 1a, 1b и 1c приведены точечные облака для случаев $r = 1.0$, $r = 1.5$ и $r = 2.5$ соответственно.

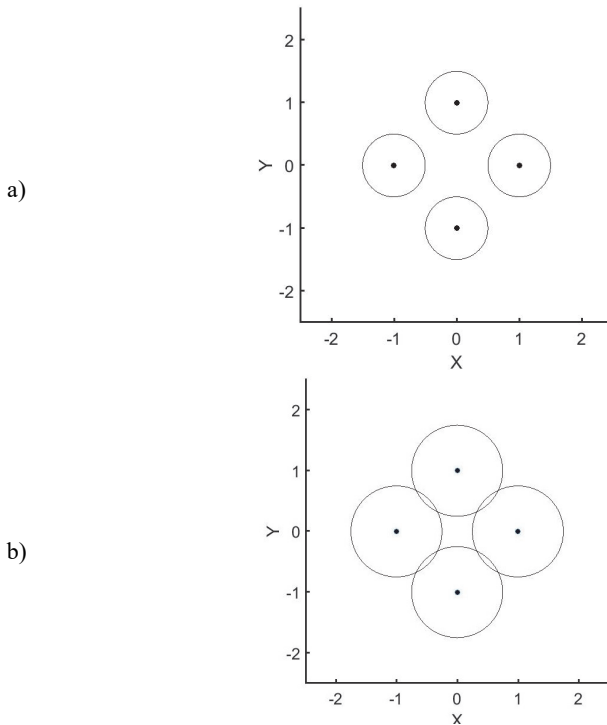


Рис. 1. Точечные облака для случая: а) $r = 1.0$; б) $r = 1.5$

(с)

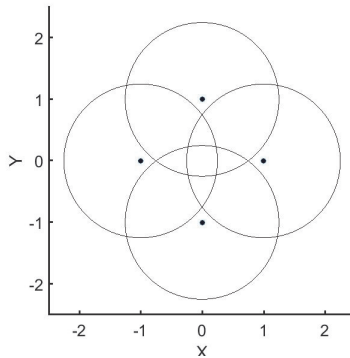


Рис. 1. Точечные облака для случая: с) $r = 2.5$

На рисунках 2а, 2б и 2с приведены сформированные комплексы Вьеториса — Рипса для случаев $r = 1.0$, $r = 1.5$ и $r = 2.5$ соответственно.

Для сформированного комплекса Вьеториса — Рипса можно определить числа Бетти β_0, β_1 и характеристики Эйлера χ :

- для случая $r = 1.0$: $\beta_0 = 4, \beta_1 = 0$; $\chi = 4$;
- для случая $r = 1.5$: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1$; $\chi = 0$;
- для случая $r = 2.5$: $\beta_0 = 1, \beta_1 = 0$; $\chi = 1$.

Для полученного комплекса Вьеториса — Рипса можно получить следующие баркоды: в размерности 0: $3[0 \dots 1.414]$; $[0 \dots \infty)$; в размерности 1: $[1.414 \dots 2)$. □

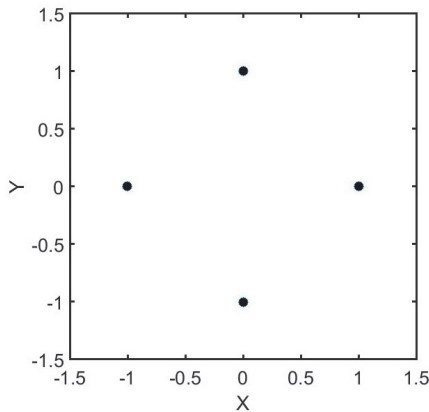
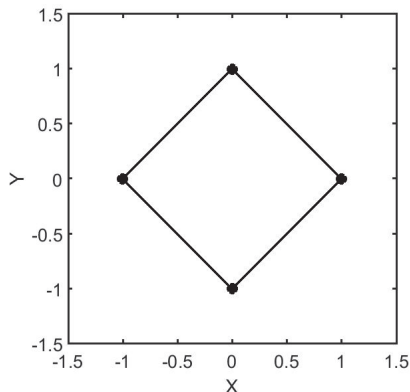
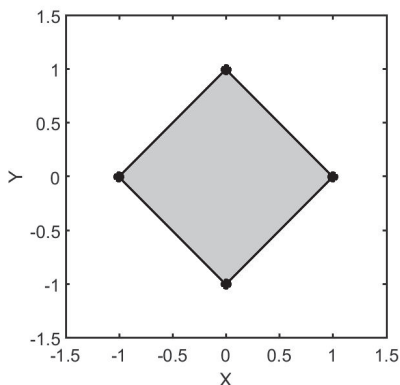


Рис. 2а. Комплекс Вьеториса — Рипса для случая $r = 1.0$


 Рис. 2b. Комплекс Вьеториса — Рипса для случая $r = 1.5$

 Рис. 2c. Комплекс Вьеториса — Рипса для случая $r = 2.5$

5. Модифицированное расстояние Вассерштейна. С учетом когомологий на симплексах (точках, отрезках, треугольниках ...) в работе предлагается расширить баркоды соответствующими значениями коцепей. Расширенный баркод может быть представлен тремя элементами: значением появления баркода b (birth), значением исчезновения баркода d (death) и значением функции на заданной цепи симплекса f . Для заданных расширенных баркодов одинаковой размерности: $B = \{\{b_i, d_i, f_i\}_{i \in I}\}$; $B' = \{\{b'_j, d'_j, f'_j\}_{j \in J}\}$, где $j \in J$ — номер симплекса, полученный отображением симплекса с номером $i \in I$: $j = \varphi(i)$, можно вычислить расстояние между B и B' , аналогичное

расстоянию Вассерштейна. Определяем расстояния между двумя соответствующими баркодами: $[b, d]$ и $[b', d']$:

$\Delta_b([b, d], [b', d']) = \max\{|b - b'|, |d - d'|\}$, и расстояние между функциями

f_i и f'_j : $\Delta_f(f, f') = \left| (d - b)^{-1} \int_b^d f(x) dx - (d' - b')^{-1} \int_{b'}^{d'} f'(x) dx \right|$. При

$f(x) = \text{const}; f'(x) = \text{const}$ можно записать:

$$\Delta_f(f_i, f'_j) = |f_i - f'_j|. \quad (2)$$

Определим расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений (расстояние Вассерштейна):

$$d_{W,2}(B, B') = \left(\sum_{i \in I} \left(\Delta_b([b_i, d_i], [b'_{\varphi(i)}, d'_{\varphi(i)}]) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (3)$$

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов:

$$d_f(B, B') = \left(\sum_{i \in I} \left(\Delta_f(f_i, f'_{\varphi(i)}) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Модифицированное расстояние Вассерштейна можно определить из соотношения для евклидовой метрики:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = \left(\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B')^2 + \mu_f \cdot d_f(B, B')^2 \right)^{1/2}, \quad (5)$$

где μ_b — весовой параметр для $d_{W,2}(B, B')$ и μ_f — весовой параметр для $d_f(B, B')$.

Приведем пошаговый алгоритм определения расстояния Вассерштейна для сравнения симплицальных комплексов изображений объектов.

1. Задать координаты точек множества ориентиров $S = \{q_1, \dots, q_k\}$.

2. Найти матрицы взаимных расстояний между точками q_i и q_j , $i, j = 1 \dots k$.

3. На множестве S сформировать симплициальный комплекс Вьеториса — Рипса $R(r)$ для заданного значения $r \in \mathbb{R}$.

4. Определить точки появления r_b (birth) и точки исчезновения r_d (death) нетривиальных классов гомологий и соответствующих чисел Бетти и характеристик Эйлера.

5. Сформировать баркоды симплициального комплекса исходного изображения $B = \{\{b_i, d_i, f_i\}\}_{i \in I}$ и симплициального комплекса терминального изображения $B' = \{\{b'_j, d'_j, f'_j\}\}_{j \in J}$.

6. Определить расстояния между двумя соответствующими баркодами исходного и терминального изображений: $[b, d)$ и $[b', d')$:

$$\Delta_b([b, d), [b', d')) = \max\{|b - b'|, |d - d'|\}.$$

7. Определить расстояние Вассерштейна между изображениями по формуле (2).

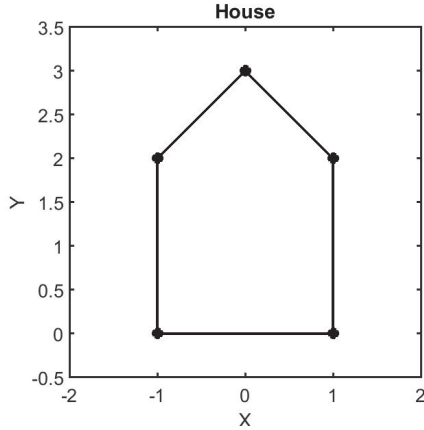
8. Для нахождения модифицированного расстояния Вассерштейна определить расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений соответствующих симплексов по формуле (3).

9. Определить модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями по формуле (4).

Пример 2. Рассмотрим объект из 5 точек $\text{points_House} = [-1, 0; 1, 0; 1, 2; 0, 3; -1, 2]$ (в нотации JavaPlex), аналогичный примеру «House example» из [11] и объект из 5 точек $\text{points_House1} = [1, 3; -1, 3; -1, 1; 0, 0; 1, 1]$, полученный вращением относительно точки $[0 \ 0]$ на угол π с переносом на вектор $[0 \ 3]$. На рисунках 3а и 3б представлены изображения объектов House и House1.

На рисунках 4а и 4б представлены баркоды персистентных гомологий изображений объектов House и House1.

a)



b)

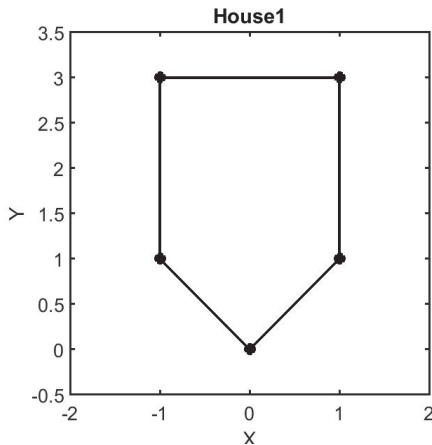


Рис. 3. Изображение объекта: а) House; б) House1

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов исходного и терминального изображений House и House1: $d_{W,2}(B, B') = 0$, то есть гомологические характеристики объектов House и House1 совпадают.

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции в соответствии с таблицей 1. Значение функции для объекта House возрастает при обходе против часовой стрелки; для объекта House1 — возрастает при обходе по часовой стрелке.

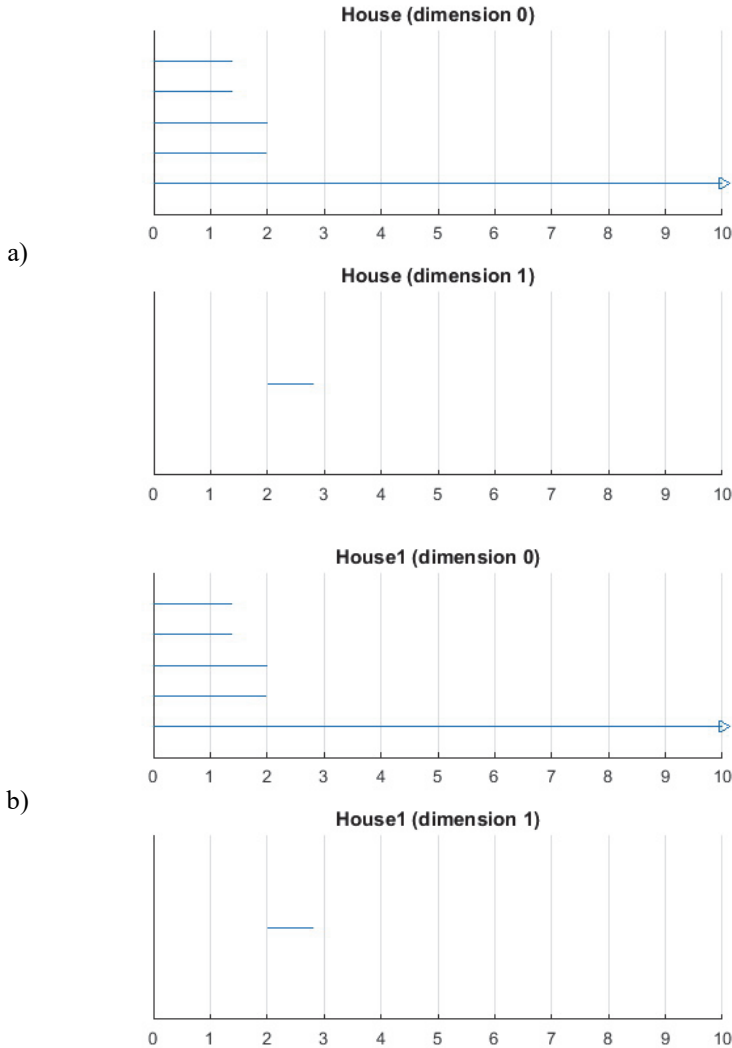


Рис. 4. Баркоды персистентных гомологий изображений объекта: а) House; б) House1

Модифицированное расстояние Вассерштейна между объектами House и House1 в этом случае равно расстоянию, обусловленному неравенствами функций исходного и терминального изображений:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_f(B, B') = 4,47; \mu_b = 1, \mu_f = 1. \square$$

Таблица 1. Соответствие между точками и значениями функций

№ точки	Координаты точки \mathcal{X} объекта House	Значение функции f	Координаты точки $\varphi(\mathcal{X})$ объекта House1	Значение функции f'
1	$[-1 \ 0]^T$	$f(1)=1$	$[1 \ 3]^T$	1
2	$[1 \ 0]^T$	$f(2)=2$	$[-1 \ 3]^T$	5
3	$[1 \ 2]^T$	$f(3)=3$	$[-1 \ 1]^T$	4
4	$[0 \ 3]^T$	$f(4)=4$	$[0 \ 0]^T$	3
5	$[-1 \ 2]^T$	$f(5)=5$	$[1 \ 1]^T$	2

Пример 3. Рассмотрим пример сравнения подписей Наполеона, сформированных в 1809 и 1814 годах [11], на основе определения модифицированного расстояния Вассерштейна между ними при различных динамических темпах написания подписи. Сформируем объекты из 32 точек `points_1809` и `points_1814`.

На рисунках 5а и 5б представлены изображения подписей Наполеона 1809 и 1814 годов.

На рисунках 6а и 6б представлены баркоды персистентных гомологий изображений подписей Наполеона 1809 и 1814 годов, полученные с использованием пакета JavaPlex [18].

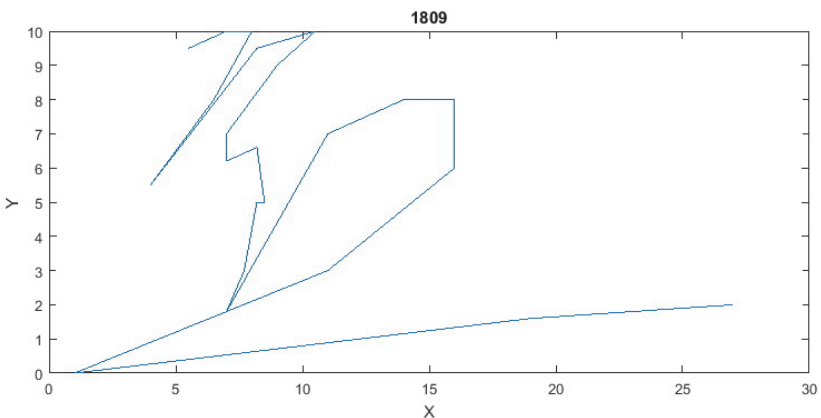


Рис. 5а. Изображение подписи Наполеона 1809 года

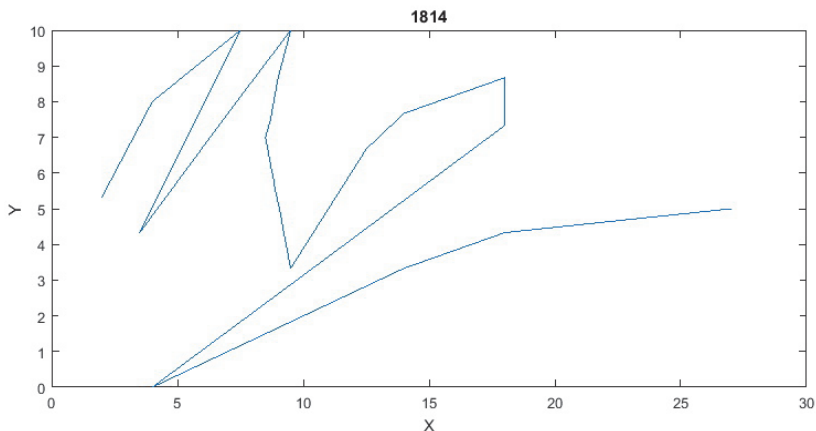


Рис. 5б. Изображение подписи Наполеона 1814 года

Расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами границ баркодов нулевой размерности подписей 1809 и 1814 годов: $d_{W,2}(B, B') = 8,17$.

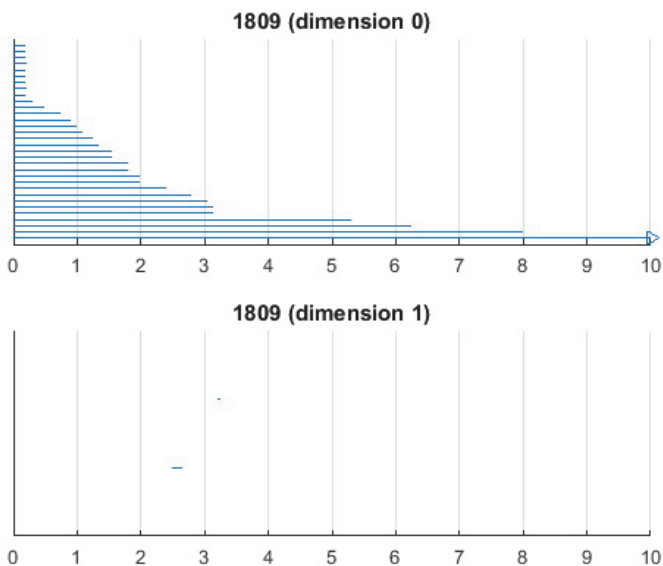


Рис. 6а. Баркоды персистентных гомологий изображения подписи Наполеона 1809 года

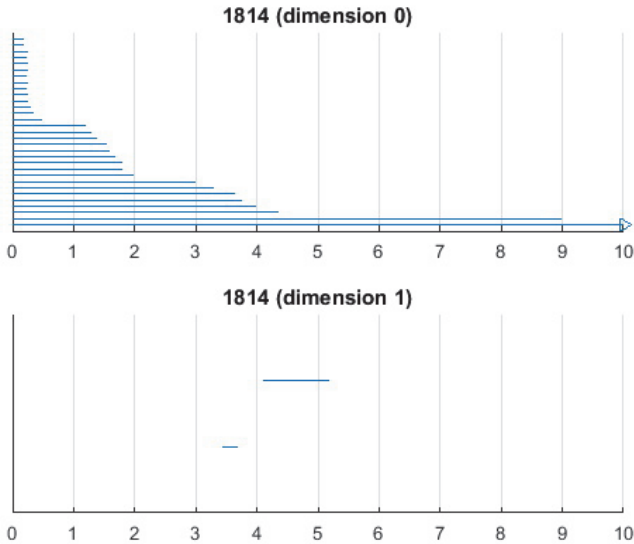


Рис. 6b. Баркоды персистентных гомологий изображения подписи Наполеона 1814 года

Поставим в соответствие каждому симплексу нулевой размерности (точке) значение функции — момент времени написания этой точки. Если обе подписи формировались равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд, то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений: $d_f(B, B') = 0$. Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при $\mu_b = 1, \mu_f = 1$ в этом случае равно расстоянию между изображениями, обусловленному неравенствами границ баркодов: $d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = d_{W,2}(B, B') = 8,17$. Если подпись 1809 года формировалась равномерно (с нулевым ускорением) в течение 2 секунд (скорость 0,0645 точек/с), а подпись 1814 года формировалась ускоренно (с ускорением 0,004162 точек/с²) в течение 2 секунд (начальная скорость 0,002 точек/с), то расстояние между изображениями, обусловленное неравенствами функций исходного и терминального изображений составляет: $d_f(B, B') = 2,03$. Модифицированное расстояние Вассерштейна между изображениями подписей 1809 и 1814 годов при $\mu_b = 1, \mu_f = 1$ в этом случае равно:

$$d_{MW}(\mu_b, \mu_f, B, B') = (\mu_b \cdot d_{W,2}(B, B') + \mu_f \cdot d_f(B, B'))^{1/2} = 8,42. \quad \square$$

Сравним метод на основе построения минимизируемого функционала и метод на основе нахождения расстояния Вассерштейна между баркодами.

Превосходство метода сравнения изображений на основе построения минимизируемого функционала заключается в следующем: возможность построения оптимальной траектории диффеоморфного отображения с формированием любого количества промежуточных форм; возможность построения метаморфозиса, при котором исходное и терминальное изображения не являются диффеоморфными и имеют разные топологические характеристики. Основным недостатком метода является низкая эффективность обучения: при количестве точек изображений более 100 длительность процесса обучения может превысить 1000 секунд (при использовании CPU Intel Pentium Dual-Core).

Преимущества метода сравнения изображений на основе нахождения расстояния Вассерштейна между баркодами заключаются в следующем: инвариантность метода по отношению к вращению и переносу изображений; повышение эффективности по отношению к методу на основе построения минимизируемого функционала на два порядка, если эффективность определяется количеством вычислительных операций или длительности решения задачи на ЭВМ. При количестве точек изображений, равном 16, и делении кривой изображения на 200 отрезков длительности решения задачи составляет 1-2 секунды. Основной недостаток метода — невозможность определения траектории эволюции изображения от начального к терминальному.

6. Формирование сглаженного коцикла. Гладкость функций от симплексов может быть измерена лапласианом. Рассмотрим граф, ассоциированный с X_k , где каждый k -симплекс представлен узлом и существует ребро, если два k -симплекса имеют непустое пересечение. Определим элементы весовой матрицы $W = (w_{ij})$ как:

$$w_{ij} = \begin{cases} v(\sigma_i)v(\sigma_j), & \text{если } \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $v(\sigma_i)$ — размер σ_i , например площадь 2-симплекса. Взвешенный граф лапласиан графа \mathcal{L}_W определяется из соотношения [19]:

$$\mathcal{L}_{w_i, j} = \begin{cases} 1 - \frac{w_{ij}}{w_i}, & \text{если } i = j, w_i \neq 0, \\ -\frac{w_{ij}}{\sqrt{w_i w_j}}, & \text{если } \sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset, i \neq j, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6)$$

где $w_i = \sum_j w_{ij}$. Гладкий коцикл $\bar{\omega}$ может быть получен решением задачи:

$$\bar{\alpha} = \arg \min_{\alpha \in C^{k-1}(X, \mathbb{R})} \|\mathcal{L}_W(\hat{\omega} + d\alpha)\|^2. \quad (7)$$

Коцикл $\hat{\omega} \in C^k(X, \mathbb{R})$ не всегда является точным. На основе построения гладкого точного коцикла $\bar{\omega} = \hat{\omega} + d\alpha \in C^k(X, \mathbb{R})$ симплициального комплекса решением задачи (7) можно построить такой коцикл $\bar{\alpha} \in C^{k-1}(X, \mathbb{R})$, что действие кограничного оператора d_{k-1} ($d_{k-1}: C^{k-1} \rightarrow C^k$) на $\bar{\alpha}$ приводит к $\bar{\omega}$: $d_{k-1}\bar{\alpha} = \bar{\omega}$.

Пример 4. Рассмотрим симплициальный комплекс X с пятью вершинами (v_0, v_1, v_2, v_3, v_4) и пятью ребрами (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4) единичной длины. 1-коцепь $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$ является вещественным коциклом; значения функций на ребрах: $\hat{\omega}(e_0) = 1$, $\hat{\omega}(e_1) = \hat{\omega}(e_2) = \hat{\omega}(e_3) = \hat{\omega}(e_4) = 0$. Так как $\omega_1 = [1, 0, 0, 0, 0]^T$ не является точной ($\omega \neq d_0\alpha; \forall \alpha \in C^0(X, \mathbb{R})$), то найдем такую 0-коцепь $\bar{\alpha} \in C^0(X, \mathbb{R})$, которая решает задачу минимизации (7). Весовая матрица равна:

$$w_{ij} = v(\sigma_i)v(\sigma_j) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}; w_0 = w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = 3$$

при $v(\sigma_i) = 1, \forall i = 0, \dots, 4$. Матрица Лапласа \mathcal{L}_W , определенная из соотношения (6), равна:

$$\mathcal{L}_W = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решая задачу (7), получим сглаженный коцикл $\bar{\omega}_1 = \hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1 = [0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]^T$ с 0-коцепью $\bar{\alpha}_1 = [1.0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8]^T$; $d\bar{\alpha}_1 = [-0.8, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2]^T$, который минимизирует $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2$, так как: $\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1) = [0, 0, 0, 0, 0]^T$, и $\|\mathcal{L}_W(\hat{\omega}_1 + d\bar{\alpha}_1)\|_2^2 = 0$.

Аналогично для 1-коцепи $\omega_2 = [0, 0, 0, 0, 1]^T \in C^1(X, \mathbb{R})$ получим 0-коцепь $\bar{\alpha}_2 = [0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0]^T$. Расстояние между ω_1 и ω_2 (см. (4)): $d_{f_1} = \sqrt{2}$; между $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$: $d_{f_0} = \sqrt{0.8}$. \square

7. Заключение. Рассмотрена задача сравнения начального и терминального изображений, которая решается на основе построения минимизируемого функционала, характеризующего эволюцию диффеоморфного преобразования изображения от начального до терминального, и штрафа за отклонение траектории изображения от требуемой траектории.

В работе применяются алгоритмы построения множеств полуинтервалов вещественных баркодов персистентных гомотопий для сравнения диффеоморфных изображений объектов. Использование персистентных гомотопий позволяет повысить количество информации о форме объекта.

Достоинство метода сравнения изображений на основе построения минимизируемого функционала заключается в возможности построения оптимальной траектории диффеоморфного отображения. Преимущество метода сравнения изображений на основе нахождения расстояния Вассерштейна между баркодами определяется инвариантностью метода по отношению к вращению и переносу изображений и повышению эффективности по отношению к методу на

основе построения минимизируемого функционала на два-три порядка, если эффективность определяется количеством вычислительных операций.

Для внедрения как геометрической, так и негеометрической информации в единые топологические описания предлагается метод, основанный на персистентных когомологиях. Баркоды персистентных гомотопий расширяются функциями от симплексов для представления разнородной информации.

Для нахождения расстояния между изображениями при распознавании образов предлагается модифицировать метод Вассерштейна и в формулу для расстояния между изображениями, определяемого по баркодам персистентных гомотопий, ввести негеометрическую информацию о расстояния между изображениями.

Важным направлением применения персистентных (ко)гомотопий является изучение инвариантов больших объемов данных.

Литература

1. *Trounev A., Younes L.* Metamorphoses through lie group action // *Foundations of Computation Mathematics.* 2005. vol. 5. no. 2. pp. 173–198.
2. *Charon N., Charlier B., Trounev A.* Metamorphoses of functional shapes in Sobolev spaces // 2016. arXiv preprint arXiv: 1608.01832. 46 p.
3. *Younes L., Arrate F., Miller M.I.* Evolutions equations in computational anatomy // *NeuroImage.* 2009. vol. 45. no. 1. pp. S40–S50.
4. *Younes L.* Diffeomorphic Learning // 2018. arXiv preprint arXiv: 1806.01240. 17 p.
5. *Zhang M., Fletcher P.T.* Fast Diffeomorphic Image Registration via Fourier-Approximated Lie Algebras // *International Journal of Computer Vision.* 2018. vol. 127. no. 1. pp. 61–73.
6. *Marsland S., McLachlan R.I.* A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration // *Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging.* 2007. pp. 396–407.
7. *Carlsson G.* Topological pattern recognition for point cloud data // *Acta Numerica.* 2014. vol. 23. pp. 289–368.
8. *Kerber M.* Persistent Homology: State of the Art and Challenges // *International Mathematische Nachrichten.* 2016. vol. 231. no. 15-33. pp. 1.
9. *Hatcher A.* Algebraic topology // Cambridge UP. 2002. 544 p.
10. *Deo S.* Algebraic topology // Springer Nature Singapore Private Limited. 2018. 351 p.
11. *Leichter S.V., Chukanov S.N.* Comparing images based on their diffeomorphic transformation // *Computer Optics.* 2018. vol. 42. no. 1. pp. 96–104.
12. *Durrleman S. et al.* Deformetrics: morphometry of shape complexes with space deformations // *Neuroimage.* 2014. vol. 101. pp. 35–49.
13. *Chukanov S.N., Ulyanov D.V.* Formation of invariants in the visualization of vector fields based on the construction of the homotopy operator // *Computer Optics.* 2012. vol. 36. no. 4. pp. 622–626.
14. *Chukanov S.N.* Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems // *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing.* 2011. vol. 47. no. 2. pp. 151–155.
15. *Edelsbrunner H.* A Short Course in Computational Geometry and Topology // Springer. 2014. 110 p.

16. *Edelsbrunner H., Virk Z., Wagner H.* Topological Data Analysis in Information Space // 2019. arXiv preprint arXiv: 1903.08510.pdf. 18 p.
17. *Potierovich L., Rosen D., Samvelyan K., Zhang J.* Topological Persistence in Geometry and Analysis // 2016. arXiv preprint arXiv: 1904.04044.pdf. 127 p.
18. *Adams H., Tausz A.* JavaPlex Tutorial. URL: http://www.math.colostate.edu/~adams/research/javaplex_tutorial.pdf. 2011. 20 p. (дата обращения: 10.07.2018).
19. *Chung F.R., Graham F.C.* Spectral graph theory // American Mathematical Society. 1997. 207 p.
20. *Cang Z., Wei G.* Persistent cohomology for data with multicomponent heterogeneous information. 2018. arXiv preprint arXiv: 1807.11120. 25 p.
21. *de Silva V., Morozov D., Vejdemo-Johansson M.* Persistent cohomology and circular coordinates // Discrete and Computational Geometry. 2011. vol. 45. no. 4. pp. 737–759.

Чуканов Сергей Николаевич — д-р техн. наук, профессор, ведущий научный сотрудник, лаборатория методов преобразования и представления информации, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал (ОФ ИМ СО РАН). Область научных интересов: системы управления летательными аппаратами, распознавание образов. Число научных публикаций — 78. ch_sn@mail.ru; ул. Певцова, 13, 644043, Омск, Российская Федерация; р.т.: +7(3812)236-739; факс: +7(3812) 23-45-84.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № №18–07–00526 и 18–08–01284) и при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.5.1., проект № 0314-2019-0020.

S.N. CHUKANOV
**COMPARISON OF OBJECTS' IMAGES BASED ON
COMPUTATIONAL TOPOLOGY METHODS**

Chukanov S.N. Comparison of Objects' Images based on Computational Topology Methods.

Abstract. The paper considers methods for comparison of objects' images represented by sets of points using computational topology methods. The algorithms for construction of sets of real barcodes for comparison of objects' images are proposed. The determination of barcodes of object forms allows us to study continuous and discrete structures, making it useful in computational topology. A distinctive feature of the use of the proposed comparison methods versus the methods of algebraic topology is obtaining more information about objects' form. An important area of application of real-valued barcodes is studying invariants of big data. Proposed method combines the technology of barcodes construction with embedded non-geometrical information (color, time of formation, pen pressure), represented as functions of simplicial complexes. To do this, barcodes are expanded with functions from simplexes to represent heterogeneous information. The proposed structure of extended barcodes increases the effectiveness of persistent homology methods when comparing images and pattern recognition. A modification of the Wasserstein method is proposed for finding the distance between images by introducing non-geometric information about the distances between images, due to inequalities of the functions of the source and terminal images of the corresponding simplexes. The geometric characteristics of an object can change with diffeomorphic deformations; the proposed algorithms for the formation of expanded image barcodes are invariant to rotation and translation transformations. We considered a method for determining the distance between sets of points representing the curves, taking into account an orientation of curves' segments. The article is intended for a reader who is familiar with basic concepts of algebraic and computational topology, the theory of Lie groups, and diffeomorphic transformations.

Keywords: Pattern Recognition, Diffeomorphic Transformations, Persistent Homology, Wasserstein Distance.

Chukanov Sergey Nikolayevich — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Leading Researcher, Laboratory of Methods for Transformation and Representation of Information, Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences. Research interests: spacecraft control systems, pattern recognition. The number of publications — 78. ch_sn@mail.ru; 13, Pevtsova str., 644043, Omsk, Russian Federation; office phone: +7(3812)236-739; fax: +7(3812) 23-45-84.

Acknowledgements. The research is supported by the RFBR (projects no. 18–07–00526, no. 18–08–01284) and the Basic Research Program of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences No. I.5.1., project No. 0314-2019-0020.

References

1. Trouvé A., Younes L. Metamorphoses through lie group action. *Foundations of Computation Mathematics*. 2005. vol. 5. no. 2. pp. 173–198.
2. Charon N., Charlier B., Trouvé A. Metamorphoses of functional shapes in Sobolev spaces. 2016. arXiv preprint arXiv: 1608.01832. 46 p.
3. Younes L., Arrate F., Miller M.I. Evolutions equations in computational anatomy. *NeuroImage*. 2009. vol. 45. no. 1. pp. S40–S50.
4. Younes L. Diffeomorphic Learning. 2018. arXiv preprint arXiv: 1806.01240. 17 p.

5. Zhang M., Fletcher P.T. Fast Diffeomorphic Image Registration via Fourier-Approximated Lie Algebras. *International Journal of Computer Vision*. 2018. vol. 127. no. 1. pp. 61–73.
6. Marsland S., McLachlan R.I. A Hamiltonian particle method for diffeomorphic image registration. Biennial International Conference on Information Processing in Medical Imaging. 2007. pp. 396–407.
7. Carlsson G. Topological pattern recognition for point cloud data. *Acta Numerica*. 2014. vol. 23. pp. 289–368.
8. Kerber M. Persistent Homology: State of the Art and Challenges. *International Mathematische Nachrichten*. 2016. vol. 231. no. 15-33. pp. 1.
9. Hatcher A. Algebraic topology. Cambridge UP. 2002. 544 p.
10. Deo S. Algebraic topology. Springer Nature Singapore Private Limited. 2018. 351 p.
11. Leichter S.V., Chukanov S.N. Comparing images based on their diffeomorphic transformation. *Computer Optics*. 2018. vol. 42. no. 1. pp. 96–104.
12. Durrleman S. et al. Deformetrics: morphometry of shape complexes with space deformations. *Neuroimage*. 2014. vol. 101. pp. 35–49.
13. Chukanov S.N., Ulyanov D.V. Formation of invariants in the visualization of vector fields based on the construction of the homotopy operator. *Computer Optics*. 2012. vol. 36. no. 4. pp. 622–626.
14. Chukanov S.N. Constructing invariants for visualization of vector fields defined by integral curves of dynamic systems. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2011. vol. 47. no. 2. pp. 151–155.
15. Edelsbrunner H. A Short Course in Computational Geometry and Topology. Springer. 2014. 110 p.
16. Edelsbrunner H., Virk Z., Wagner H. Topological Data Analysis in Information Space. 2019. arXiv preprint arXiv: 1903.08510.pdf. 18 p.
17. Polterovich L., Rosen D., Samvelyan K., Zhang J. Topological Persistence in Geometry and Analysis. 2016. arXiv preprint arXiv: 1904.04044.pdf. 127 p.
18. Adams H., Tausz A. JavaPlex Tutorial. URL: http://www.math.colostate.edu/~adams/research/javaplex_tutorial.pdf. 2011. 20 p. (дата обращения: 10.07.2018).
19. Chung F.R., Graham F.C. Spectral graph theory. American Mathematical Society. 1997. 207 p.
20. Cang Z., Wei G. Persistent cohomology for data with multicomponent heterogeneous information. 2018. arXiv preprint arXiv: 1807.11120. 25 p.
21. de Silva V., Morozov D., Vejdemo-Johansson M. Persistent cohomology and circular coordinates. *Discrete and Computational Geometry*. 2011. vol. 45. no. 4. pp. 737–759.