

И.К. РОМАНОВА
**МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ
ДЕФОРМИРОВАННЫХ УДЛИНЕННЫХ ТЕЛ НА ОСНОВЕ
ВАРИАЦИЙ УГЛОВЫХ СКОРОСТЕЙ КРЕНА**

Романова И.К. Моделирование устойчивости движения деформированных удлиненных тел на основе вариаций угловых скоростей крена.

Аннотация. Рассмотрен класс движущихся объектов, представляющих собой тела вращения, претерпевшие по тем или иным причинам необратимые деформации корпуса.

Актуальность исследуемой задачи обусловлена как потребностью изучения динамики таких объектов, так и недостаточностью уже проведенных исследований, которые в основном сосредоточены на изучении эффектов аэроупругости или массовой асимметрии и не затрагивают динамику тел с необратимыми деформациями.

Сформулирована проблема устойчивости движения, в том числе в процессе взаимодействия продольного и бокового движений деформированного тела. Особое внимание уделено движению искривленного тела при наличии вращения по углу крена и выявлению критических угловых скоростей крена. Отмечено, что для случая пассивного движения возможны три причины такого взаимодействия: аэродинамическое, кинематическое, инерционное.

Разработан теоретический подход, учитывающий особенности геометрии деформированных тел, который позволил в рамках практических исследований определить допустимые уровни деформации и их связь с параметрами движения деформированных тел.

Анализ устойчивости проводился на основе критериев устойчивости решений системы, описывающей движение тела, согласно критерию Рауса — Гурвица. Определены параметры тела, которые в той или иной степени влияют на устойчивость движения. Отмечен более сложный вид кривой границы устойчивости для данной угловой скорости по крену, чем простая гипербола.

Также показана возможность прямого решения нелинейного относительно определяющих параметров уравнения, что позволит получать зависимости критических угловых скоростей крена и диапазонов устойчивости от этих параметров.

Математическое моделирование на основе разработанных методик, проведенное для прямого и искривленного тел, показало, что искривление тела существенно влияет на смещение линий производных моментов тангажа по углу атаки и моментов рыскания по углу скольжения относительно границ устойчивости. Определен диапазон угловых скоростей по крену, в котором наблюдается потеря устойчивости для искривленного тела. Проанализировано влияние вариаций угловой скорости и относительного изменения производной коэффициента момента рыскания по углу скольжения на значение определяющего коэффициента из условий устойчивости для прямого и искривленного тел. Показано, как искривление тела приводит к сдвигу седловой точки. Изучено влияние изменения числа Маха на коэффициент характеристического уравнения, который определяет устойчивость движения системы по критерию Рауса — Гурвица.

Ключевые слова: математическое моделирование динамики полета, устойчивость движения, асимметричные тела.

1. Введение. Рассматривается класс движущихся объектов, представляющих собой тела вращения, которые по тем или иным

причинам претерпели деформацию корпуса (рисунок 1). Примером таких объектов могут служить тела, которые в процессе полета подверглись влиянию со стороны других тел.

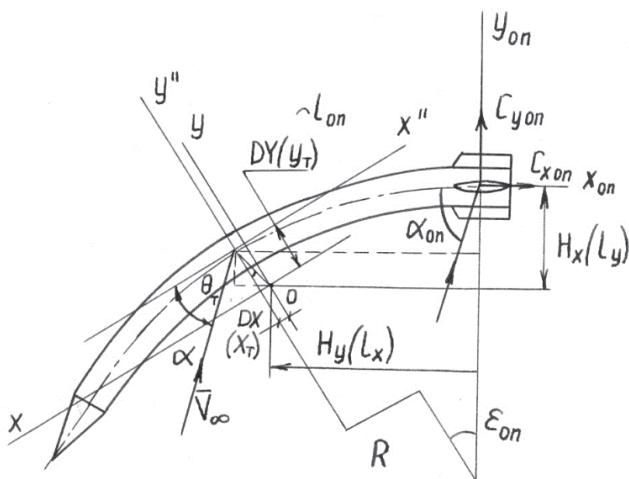


Рис.1. Общий вид деформированного тела и системы координат

В статьях [1, 2] были заложены теоретические основы исследований динамики таких асимметричных тел. В статье [3] проведена систематизация видов деформаций, определены способы их описания, выявлены определяющие параметры динамики деформированных тел. Введено понятие эквивалентных геометрических параметров разных форм. За основной вариант принята деформация, выраженная в искривлении оси цилиндрической части тела с постоянным радиусом кривизны R (рисунок 1). Представления деформаций в безразмерном виде связаны с отнесением к радиусу цилиндрического участка (или в более общем случае миделева сечения) исходного тела. Тогда безразмерные радиус кривизны, отнесенный к радиусу миделева сечения R_m , и кривизна запишутся так: $\bar{R} = R / R_m$; $\bar{K} = 1 / \bar{R}$. Проведен сравнительный анализ влияния деформаций на аэродинамические характеристики тел. Моделированию деформированных тел также посвящена работа [4]. Проведенные исследования стали основой для решения задачи оценки влияния деформаций на параметры движения тел, которая и является предметом настоящей статьи.

Актуальность поставленной задачи отражена в целом ряде работ. Так, в [5] отмечается важность проблемы моделирования динамики асимметричных вращающихся по углу крена ракет. В [6] указано, что в настоящее время в сообществе баллистиков мало аналитических инструментов, которые могут помочь при проектировании и оценке эффективности аэродинамически асимметричных снарядов.

В рамках общей задачи оценки влияния деформаций на параметры движения тел следует выделить несколько направлений исследований:

- общая задача моделирования пространственного движения тела сложной формы;
- исследование устойчивости движения летательных аппаратов, в том числе по углу крена;
- совместное решение задачи исследования устойчивости деформированных тел двух видов: с упругими и необратимыми деформациями и асимметриями.

Общая задача моделирования пространственного движения тела сложной формы является предметом исследования в [7]. Статья [8] посвящена описанию разработанной модели движения тела с шестью степенями свободы по баллистической траектории и может использоваться для проверки проектных показателей, рабочих параметров и коррекций траектории. В статье [9] предлагается модель траектории полета для нового типа вращающегося снаряда с семью степенями свободы. В [10] предложен иерархический ряд моделей, каждая из которых соответствует конкретной задаче исследований неуправляемого и управляемого движения летательных аппаратов.

Исследование устойчивости движения тел, в том числе по углу крена, является одной из центральных проблем в анализе и проектировании. В [11] описываются проведенные междисциплинарные фундаментальные исследования, которые включают анализ конструкции, динамику, динамическую устойчивость, аэроупругую устойчивость и траекторный анализ полета ракет и снарядов. В [12] отмечена проблема снижения устойчивости при деформациях летательных аппаратов в виде тонких удлиненных тел. В [13] рассматриваются проблемы устойчивости, включая движение по углу крена, в том числе для тел с массовой асимметрией. В [9] изучается устойчивость движения вращающегося снаряда с семью степенями свободы.

Статья [14] посвящена численным экспериментам, в которых исследуется статическая и гироскопическая устойчивости. В [15]

оценивается устойчивость характеристик ракеты по отношению к углу атаки управляющих поверхностей. В статье [16] описано влияние аэродинамических моментов на зенитную ракету во время полета. Разложение общего аэродинамического момента на управляющий, демпфирующий и стабилизационный позволяет проанализировать их влияние на зенитную ракету. В [17] исследуется устойчивость упругой деформированной ракеты. В [18] рассматриваются проблемы потери устойчивости во вращательных движениях на основе 6-степенной модели пространственного движения.

Целый ряд работ исследует влияние повреждений на изменение характеристик устойчивости движения тел: [5, 6, 19, 20].

Решение задачи моделирования устойчивости деформированных тел может быть рассмотрено для двух групп объектов: с упругими и необратимыми деформациями и асимметриями.

Исследование проблемы аэроупругости предполагает решение целого ряда задач, в том числе разработку моделей аэродинамики и динамики движения, оценку устойчивости и формирование алгоритмов управления. В [11] рассматривается целый комплекс проблем движения тел, включая эффекты аэроупругости, с использованием теории тонкого тела. В [12] проводятся сравнения аэродинамических коэффициентов для упругого и твердого тел, рассчитанных с помощью пакета ANSYS. Отмечается, что формы тел зависят от чисел Маха и близки к параболе. Особое внимание обращает на себя проблема снижения устойчивости при деформациях, которая также отмечена и в других работах. Статья [21] посвящена экспериментальным исследованиям динамических характеристик, в частности сравнительному анализу аэродинамических характеристик твердого и упругого тел. Представлена визуализация эффектов аэроупругости. В [22] рассмотрены статическая и динамическая аэроупругие неустойчивости и проблемы устойчивости из-за несносности тяги. Отмечено, что решение аэроупругих задач в основном выполняется с помощью линейных аэроупругих моделей, поддерживаемых нелинейной аэродинамикой из испытаний в аэродинамической трубе или вычислительной гидродинамикой. Проблемы устойчивости упругого удлиненного тела рассмотрены в [23]. В [24] отмечается, что в реальной практике аэроупругость играет важную роль в определении баллистической эффективности ракеты. Работа [25] посвящена статической аэроупругости удлиненного тела. Проблемы аэроупругости для удлиненных тел рассматриваются в [26]. Важным обнаруженным фактом является то, что упругую деформацию новых

тел с большим удлинением нельзя проигнорировать в связи с увеличением скорости полета и высокой маневренности. Аэроупругость влияет и на сдвиг центра давления вперед, тем самым ослабляя запас устойчивости. Способы моделирования эффектов упругости представлены в [17].

Решение задачи моделирования устойчивости тел с необратимыми деформациями и асимметриями также рассмотрено в целом ряде работ. В [27] исследуются малые изменения поверхности тел вращения в виде ряда Фурье и их влияние на угол крена. Отмечается сложность задачи моделирования по углу крена неуправляемых летательных аппаратов, близких по форме к телам вращения. В [28] приведены результаты теоретического исследования динамики полета проворачивающегося осесимметричного тела, стабилизируемого аэродинамическими косоповерхностями. Тело также имеет асимметрии, выраженные в смещении центра масс от геометрической оси тела, эксцентриситете тяги, а также относительно большом отклонении угла установки одной из аэродинамических поверхностей от среднего значения угла установки. Статья [13] исследует массовую асимметрию снаряда и коаксиальную ошибку. Показано, что массовая асимметрия оказывает большое влияние на коэффициент затухания движения снаряда по углу крена. В [29] изучается поведение снаряда с внутренней массовой асимметрией.

Асимметрия, связанная с повреждением элементов движущегося в атмосфере тела, представлена в работах [5, 6, 20]. Асимметрия может быть также специальной, например, в [30] изучается введение принудительной асимметрии крыла.

Проведенный обзор показал актуальность задачи оценки влияния деформаций на параметры движения тел. Следует отметить, что в рассмотренных работах практически не исследуется динамика объектов со значительной необратимой деформацией. Выделим также важный методический аспект, отраженный в работе [31]: для исследования процессов, которые могут возникнуть в нелинейных системах, простое компьютерное моделирование является инструментом, способным привести к неправильным выводам. Для получения достоверных результатов моделирования следует аналитически исследовать условие единственности предельного решения либо применить аналитико-численные методы, позволяющие найти скрытые колебания.

Предметной областью настоящей статьи является проблема оценки влияния необратимых деформаций тел на динамику их движения. В рамках общей проблемы конкретная задача статьи

заключается в разработке методики оценки влияния деформаций на устойчивость движения деформированных тел и ее применению в практических исследованиях, конкретизирующих степень влияния и условия сохранения устойчивости. Следует подчеркнуть, что объект исследований данной статьи ранее не рассматривался. Расчеты аэродинамических коэффициентов сил и моментов проводились на основании разработанной автором методики, изложенной в статьях [1, 2].

2. Методика исследований устойчивости деформированных тел. Рассмотрим аспекты проблемы устойчивости в процессе взаимодействия продольного и бокового движений деформированного тела. Особое внимание уделим движению искривленного тела при наличии вращения по углу крена и выявим наличие критических угловых скоростей крена.

Исходные уравнения движения центра масс запишутся так [10]:

$$\begin{aligned} m \left(\frac{dV_x}{dt} + \omega_y V_z - \omega_z V_y \right) &= R_x + G_x; \\ m \left(\frac{dV_y}{dt} + \omega_z V_x - \omega_x V_z \right) &= R_y + G_y; \\ m \left(\frac{dV_z}{dt} + \omega_x V_y - \omega_y V_x \right) &= R_z + G_z, \end{aligned}$$

где V_x, V_y, V_z — проекции скорости V ; R_x, R_y, R_z — проекции аэродинамических сил, G_x, G_y, G_z — проекции силы тяжести на связанные оси, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции вектора угловой скорости на связанные оси координат $Oxyz$, m — масса тела.

Проекции скорости полета выражаются через углы атаки α и скольжения β :

$$\begin{aligned} V_x &= V \cos \alpha \cos \beta; \\ V_y &= -V \sin \alpha \cos \beta; \\ V_z &= V \sin \beta. \end{aligned}$$

Для тела, имеющего вертикальную плоскость симметрии, уравнения вращательного движения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 J_x \frac{d\omega_x}{dt} - J_{xy} \frac{d\omega_y}{dt} + (J_z - J_y)\omega_y\omega_z + J_{xy}\omega_x\omega_z &= M_{R_x}; \\
 J_y \frac{d\omega_y}{dt} - J_{xy} \frac{d\omega_x}{dt} + (J_x - J_z)\omega_z\omega_x - J_{xy}\omega_y\omega_z &= M_{R_y}; \\
 J_z \frac{d\omega_z}{dt} - J_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) + (J_y - J_x)\omega_x\omega_y &= M_{R_z},
 \end{aligned}$$

где J_x, J_y, J_z, J_{xy} — моменты инерции относительно осей координат $Oxyz$, $M_{R_x}, M_{R_y}, M_{R_z}$ — проекции на оси связанной системы координат полного момента внешних сил.

Входящие в правые части уравнений движения центра масс и вращательного движения силы и моменты записываются через соответствующие аэродинамические коэффициенты сил и моментов:

$$\begin{aligned}
 R_x &= c_x q S; \quad M_x = m_x q S l_T; \quad M_{R_x} = M_x + M_{P_x}; \\
 R_y &= c_y q S; \quad M_y = m_y q S l_T; \quad M_{R_y} = M_y + M_{P_y}; \\
 R_z &= c_z q S; \quad M_z = m_z q S l_T, \quad M_{R_z} = M_z + M_{P_z},
 \end{aligned}$$

где $q = \rho V^2 / 2$ — скоростной напор, ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь тела, l_T — характерная длина тела, c_x, c_y, c_z , m_x, m_y, m_z — аэродинамические коэффициенты сил и моментов, M_x, M_y, M_z — моменты от аэродинамических сил, $M_{P_x}, M_{P_y}, M_{P_z}$ — моменты, связанные с силами тяги двигателя (если имеется).

Для представления аэродинамических коэффициентов сил и моментов используются следующие зависимости от параметров движения:

$$\begin{aligned}
 c_x &= c_{x0} + c_x(\alpha); \\
 c_y &= c_{y0} + c_y^\alpha \alpha; \\
 c_z &= c_z^\beta \beta; \\
 m_x &= m_{x0}^\beta \beta + m_x^{\alpha\beta} \alpha \beta + m_x^{\omega x} \omega_x + m_x^{\omega y} \omega_y; \\
 m_y &= m_y^\beta \beta + m_y^{\omega x} \omega_x + m_y^{\omega y} \omega_y; \\
 m_z &= m_z(\alpha) + m_z^{\omega z} \omega_z,
 \end{aligned}$$

где c_{x0} — коэффициент продольной силы при нулевом угле атаки, c_{y0} , c_y^α — коэффициент нормальной силы при нулевом угле атаки и производная этого коэффициента по углу атаки, c_z^β — производная коэффициента боковой силы по углу скольжения, $m_{x0}^\beta, m_x^{\alpha\beta}, m_x^{\omega_x}, m_x^{\omega_y}, m_y^\beta, m_y^{\omega_x}, m_y^{\omega_y}, m_z^{\omega_z}$ — производные коэффициентов моментов по соответствующим параметрам движения.

Если определить угловое движение тела относительно оси OZ (изменения ω_z, α) как продольное, а относительно осей OX и OY (изменения $\omega_x, \omega_y, \beta, \gamma$) как боковое, то в случае пространственного движения тела можно говорить о взаимодействии или взаимосвязи продольного и бокового движений. Для случая пассивного движения возможны три причины такого взаимодействия: аэродинамическое, кинематическое, инерционное.

Аэродинамическое взаимодействие движений проявляется при наличии зависимости аэродинамических производных устойчивости бокового движения от параметров продольного движения, в первую очередь, от угла атаки α и аэродинамических производных продольного движения от параметров бокового движения (например, от угла скольжения β). Особенно существенна зависимость аэродинамических характеристик бокового движения от угла атаки.

Для углов атаки и скольжения используются следующие формулы:

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha; \beta = \beta_0 + \Delta\beta,$$

где α_0, β_0 — начальные углы атаки и скольжения для выбранного интервала движения, $\Delta\alpha, \Delta\beta$ — приращения углов атаки и скольжения на исследуемом интервале. Далее в рамках линеаризации уравнений движения для простоты будем опускать знак приращения Δ , так что в последующих формулах α, β — не сами углы, а их приращения.

Трактовка начальных углов атаки и скольжения соответствует рисунку 1. Наличие местных углов атаки и скольжения искривленного тела, а также влияние искривления на производные по угловым скоростям отражена в методике [1, 2]. Отклонения углов принимаются небольшими (до 10-12 градусов).

Расчеты коэффициента относительной плотности тела μ , безразмерные угловые скорости $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$ и безразмерные моменты инерции i_x, i_y, i_z проводятся по следующим зависимостям:

$$\begin{aligned}\mu &= 2m / (\rho S l_T); \\ \bar{\omega}_x &= \omega_x l_T / (2V); \bar{\omega}_y = \omega_y l_T / (2V); \bar{\omega}_z = \omega_z l_T / (2V); \\ i_x &= J_x / [m(0.5l_T)^2]; i_y = J_y / [m(0.5l_T)^2]; i_z = J_z / [m(0.5l_T)^2].\end{aligned}$$

Дополнительно рассчитываются коэффициенты, характеризующие соотношения моментов инерции с учетом возможных несимметрий тела:

$$A = \frac{J_y - J_x}{J_z}; B = \frac{J_z - J_x}{J_y}; C = \frac{J_z - J_y}{J_x}; C_1 = \frac{J_{xy}}{J_x}; B_1 = \frac{J_{xy}}{J_y}; A_1 = \frac{J_{xy}}{J_z}.$$

Коэффициенты аэродинамических моментов удобнее представлять в безразмерном виде, так что:

$$\bar{m}_x = m_x / i_x; \bar{m}_y = m_y i_y; \bar{m}_z = m_z i_z.$$

В диапазоне небольших приращений углов α, β (до 10-12 градусов) зависимости производных аэродинамических коэффициентов моментов $m_x^\beta(\alpha), m_y^\beta(\alpha)$ могут быть представлены с помощью следующих формул, которые учитывают аэродинамическое взаимодействие:

$$m_{xs}^\beta = m_x^\beta + m_x^{\alpha\beta} \cdot \alpha; m_{ys}^\beta = m_y^\beta + m_y^{\alpha\beta} \cdot \alpha.$$

Для получения большей общности уравнения движения представляют в безразмерном виде, вводя масштаб времени τ_m :

$$\tau_m = m / (\rho S V).$$

Для решения поставленной задачи исходные уравнения линеаризуют с учетом принятых представлений коэффициентов сил и моментов. Результатом является следующая система дифференциальных уравнений вращательного движения, в которой также используется выражение производной скорости движения центра масс с учетом

лобового сопротивления тела, что весьма важно для исследования деформированных тел. Расчет по методике [1-2] и многовариантные анализы статьи [3] показали наличие ненулевого момента тангажа искривленного тела \bar{m}_{z0} даже при нулевом угле атаки α_0 :

$$\begin{aligned}
 \alpha' - \mu \bar{\omega}_z + \mu \beta \bar{\omega}_x &= -\frac{1}{2} c_{y0} + \left(-\frac{1}{2} c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) \alpha + \frac{2g\tau_m^2}{l_T \mu} \cos \vartheta \cos \gamma; \\
 \bar{\omega}_z' + A \mu \bar{\omega}_x \bar{\omega}_y &= \bar{m}_{z0} + \bar{m}_z^\alpha \alpha + \left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) \bar{\omega}_z + \bar{m}_z^\beta \beta; \\
 \beta' - \mu \bar{\omega}_y - \mu \alpha \bar{\omega}_x &= \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) \beta + \frac{2g\tau_m^2}{l_T \mu} \cos \vartheta \sin \gamma; \\
 \bar{\omega}_y' - B \mu \bar{\omega}_x \bar{\omega}_z - B_1 \bar{\omega}_x' &= \\
 \bar{m}_{ys}^\beta \beta + \left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} + B_1 \bar{\omega}_z \mu \right) \bar{\omega}_y + \left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_x} - B_1 \frac{c_x}{2} \right) \bar{\omega}_x; \\
 \bar{\omega}_x' + C \mu \bar{\omega}_y \bar{\omega}_z - C_1 \bar{\omega}_y' &= \\
 \bar{m}_{xs}^\beta \beta + \left(\bar{m}_x^{\bar{\omega}_x} + \frac{c_x}{2} - C_1 \bar{\omega}_z \mu \right) \bar{\omega}_x + \left(\bar{m}_x^{\bar{\omega}_y} - C_1 \frac{c_x}{2} \right) \bar{\omega}_y.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь ϑ и γ — углы тангажа и крена соответственно, g — ускорение силы тяжести, символом " ' " здесь и далее обозначена производная по времени d/dt . Отметим еще раз, что система (1) линеаризована относительно текущего угла атаки α_0 .

В систему (1), строго говоря, следует добавить уравнения для углов тангажа и крена:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vartheta}{dt} &= \omega_z; \\
 \frac{d\gamma}{dt} &= \omega_x - \operatorname{tg} \vartheta (\omega_y \cos \gamma - \omega_z \sin \gamma)
 \end{aligned}$$

Заметим, что углы тангажа и крена используются в правой части системы (1) в виде тригонометрических функций, умноженных на ускорение силы тяжести g . Для этих составляющих проведем специальный анализ.

Кинематическое взаимодействие имеет место при одновременном изменении углов атаки и скольжения, происходящим с определенным запаздыванием, которое связано с инерционностью

тела. Члены, определяющие кинематическое взаимодействие, входят в уравнения α', β' в виде произведений $\beta\omega_x, \alpha\omega_x$. Инерционное взаимодействие проявляется в уравнениях моментов (уравнения для производных по времени $\bar{\omega}'_z, \bar{\omega}'_y, \bar{\omega}'_x$) через члены, содержащие произведения угловых скоростей вида $A\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y, B\bar{\omega}_x\bar{\omega}_z, C\bar{\omega}_y\bar{\omega}_z$. Физический смысл этих членов состоит в том, что они учитывают появление центробежных инерционных моментов при вращении тела относительно оси, не совпадающей с главной осью инерции.

Рассмотрим движение искривленного тела при наличии вращения по углу крена. Для этого обратимся к системе (1), полученной при ряде допущений, главное из которых — малость приращений углов атаки и скольжения.

Расчеты показали, что для рассматриваемого случая в этой системе можно сделать еще ряд допущений, основанных на моделировании полной системы уравнений пространственного движения. Во-первых, за исследуемый обычно промежуток времени ω_x меняется мало вследствие небольшого демпфирующего момента $M_x^{\omega_x}$, так что последнее уравнение для $\bar{\omega}'_x$ можем отбросить, в четвертом же уравнении положим $\bar{\omega}'_x = 0$. Расчет коэффициентов C_1 показал, что их тоже можно отбросить при соответствующем выборе системы связанных координат. Гравитационными членами также можно пренебречь (расчеты показали, что член в первом уравнении из (1), связанный с g , меньше в 60-100 раз по сравнению с остальными членами). Окончательно получим систему четырех дифференциальных уравнений для производных по безразмерному времени переменных $\alpha, \beta, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$, которые описывают пространственное движение исследуемого тела в окрестности небольших приращений α, β при отсутствии сильных изменений скорости вращения по углу крена за рассматриваемый промежуток времени.

$$\alpha' = \mu\bar{\omega}_z - \mu\beta\bar{\omega}_x - \frac{1}{2}c_{y0} + \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2}\right)\alpha;$$

$$\bar{\omega}'_z = \bar{m}_{z0} + \bar{m}_z^\alpha \alpha + \left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2}\right)\bar{\omega}_z + \bar{m}_z^\beta \beta - A\mu\bar{\omega}_x\bar{\omega}_y;$$

$$\beta' = \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2}\right)\beta + \mu\bar{\omega}_y + \mu\alpha\bar{\omega}_z;$$

$$\bar{\omega}'_y = \bar{m}_{ys}^\beta \beta + \left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} + B_1\bar{\omega}_z\mu\right)\bar{\omega}_y + \left(\bar{m}_x^{\bar{\omega}_y} - B_1\frac{c_x}{2}\right)\bar{\omega}_x + B\mu\bar{\omega}_x\bar{\omega}_z.$$

Эту систему можно свести к двум дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\begin{aligned}
 & \alpha'' + \left[-\left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) - \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) \right] \alpha' + \\
 & + \left[-\mu \bar{m}_z^\alpha + \left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) - A\mu^2 \bar{\omega}_x^2 - \left(\frac{c_x}{2} \right)' \right] \alpha + \\
 & + [A\mu \bar{\omega}_x + \mu \bar{\omega}_x] \beta' + \\
 & + \left\{ - \left[\left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) \mu \bar{\omega}_x + \mu \bar{\omega}_z^\beta + A\mu \bar{\omega}_x \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) \right] \right\} \beta + \\
 & + \left[-\mu \bar{m}_{z0} - \left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) \frac{c_{y0}}{2} \right] = 0;
 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
 & \beta'' + \left[-\left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} \right) - \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) \right] \beta' + \\
 & + \left[-\left(\frac{c_x}{2} \right)' - \mu \bar{m}_{ys}^\beta + \left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} \right) \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) - B\mu^2 \bar{\omega}_x^2 \right] \beta + \\
 & + [-\mu \bar{\omega}_x - B\mu \bar{\omega}_x] \alpha' + \left[\left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} \right) \mu \bar{\omega}_x + \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) B\mu \bar{\omega}_x \right] \alpha + \\
 & + \left[-\mu \left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_x} - B_1 \frac{c_x}{2} \right) \bar{\omega}_x - B\mu \bar{\omega}_x \frac{c_{y0}}{2} \right] = 0.
 \end{aligned}$$

Главная особенность этих уравнений связана с влиянием осевой несимметрии, что проявляется в наличии свободных членов. Свободные члены определяют частное решение неоднородных дифференциальных уравнений и характеризуют систематическую составляющую. Система (2) может быть представлена с помощью коэффициентов $a_{ij}, i = 1, 2; j = 0, 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned}
 \alpha'' &= a_{11}\alpha' + a_{12}\beta' + a_{13}\alpha + a_{14}\beta + a_{10}; \\
 \beta'' &= a_{21}\alpha' + a_{22}\beta' + a_{23}\alpha + a_{24}\beta + a_{20};
 \end{aligned}$$

или, если ввести:

$$y_1 = \alpha; y_2 = \beta,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_3; \quad \frac{dy_2}{d\tau} = y_4; \\ \frac{dy_3}{d\tau} &= a_{11}y_3 + a_{12}y_4 + a_{13}y_1 + a_{14}y_2 + a_{10}; \\ \frac{dy_4}{d\tau} &= a_{21}y_3 + a_{22}y_4 + a_{23}y_1 + a_{24}y_2 + a_{20}. \end{aligned}$$

Анализ коэффициентов a_{ij} показал, что некоторыми членами в выражениях для них можно пренебречь, так что окончательно имеем:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + c_x - \frac{1}{2}c_y^\alpha; \\ a_{12} &= -\mu\bar{\omega}_x(1+A); \\ a_{13} &= \mu\bar{m}_z^\alpha + A\mu^2\bar{\omega}_x^2; \\ a_{14} &= \left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2}\right)\mu\bar{\omega}_x + A\mu\bar{\omega}_x\left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2}\right); \\ a_{10} &= \mu\bar{m}_{z0}; \quad a_{21} = \mu\bar{\omega}_x(1+B); \quad a_{22} = \bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_z^\beta}{2} + c_{xa}; \\ a_{23} &= -\left[\left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2}\right)\mu\bar{\omega}_x + \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2}\right)B\mu\bar{\omega}_x\right]; \\ a_{24} &= \mu\bar{m}_y^\beta + B\mu^2\bar{\omega}_x^2; \quad a_{20} = \mu\bar{m}_y^{\bar{\omega}_x}\bar{\omega}_x + B\mu\bar{\omega}_x\frac{c_{y0}}{2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Получена система дифференциальных уравнений с постоянными в случае $\omega_x = const$ и \bar{m}_y^β и не зависящими от α коэффициентами. Характеристическое уравнение соответствующей однородной системы:

$$K^4 + K^3D_3 + K^2D_2 + KD_1 + D_0 = 0, \tag{4}$$

где

$$D_0 = a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}; D_1 = a_{11}a_{24} + a_{13}a_{22} - a_{14}a_{21} - a_{23}a_{12};$$

$$D_2 = -a_{24} + a_{11}a_{22} - a_{13} - a_{21}a_{12}; D_3 = -a_{22} - a_{11}.$$

Решение системы (2) с учетом (3) и (4) будет состоять из общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы:

$$\alpha = y_1 = \bar{y}_1 + y_1^* = C_1 A_1^1 e^{K_1 t} + C_2 A_1^2 e^{K_2 t} +$$

$$+ C_3 A_1^3 e^{K_3 t} + C_4 A_1^4 e^{K_4 t} + y_1^*; \quad (5)$$

$$\beta = y_2 = \bar{y}_2 + y_2^* = C_1 A_2^1 e^{K_1 t} + C_2 A_2^2 e^{K_2 t} +$$

$$+ C_3 A_2^3 e^{K_3 t} + C_4 A_2^4 e^{K_4 t} + y_2^*,$$

где

$$A_1^i = 1; A_2^i = -f_{11}(K_i) / f_{12}(K_i);$$

$$A_3^i = K_i A_1^i; A_4^i = K_i A_2^i;$$

$$f_{11}(K_i) = K_i^2 - a_{11}K_i - a_{13};$$

$$f_{12}(K_i) = -a_{12}K_i - a_{14}.$$

Частное решение y_1^*, y_2^* в (5) определяется в зависимости от вида правой части. В нашем случае для $\bar{y}_x \approx const$ это постоянные, то есть $y_1^* = Y_1 = const; y_2^* = Y_2 = const$. Соответственно, производные будут равны нулю. С учетом этого из основной неоднородной системы (2) после постановки неизвестных и их производных из частного решения получим:

$$y_1^* = (a_{20}a_{14} - a_{10}a_{24}) / (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}); \quad (6)$$

$$y_2^* = (a_{10}a_{23} - a_{13}a_{20}) / (a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}).$$

Таким образом, решение системы (2) может быть получено аналитически по (6). Коэффициенты C_i из (5) — произвольные постоянные, находятся после подстановки решения в исходную систему и использовании заданных начальных условий. Чисто

аналитическое решение представляет известные трудности для анализа в силу его достаточной громоздкости, так что наиболее целесообразно решать систему с использованием ЭВМ, однако некоторые качественные выводы о влиянии отдельных параметров можно сделать. Обратимся к исходной системе (1). Из нее следует, что вращение тела с некоторой угловой скоростью крена $\bar{\omega}_x$, принятой на рассматриваемом небольшом отрезке времени постоянной, привело к взаимосвязи движений по углу атаки и скольжения, степень которой возрастает пропорционально квадрату угловой скорости крена. При малых угловых скоростях крена уравнения с точностью до величин второго порядка разделяются на независимые уравнения для углов атаки и скольжения.

Принципиально важным является вопрос об устойчивости движения тела. Анализ устойчивости проводится на основе критериев устойчивости решений системы, описывающей движение тела. Если характеристическое уравнение однородной части системы (2) имеет вид (4), то, согласно критерию Рауса — Гурвица, система будет устойчива, если выполняются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} D_3 > 0; D_2 > 0; D_1 > 0; D_0 > 0; \\ R = D_3(D_2 D_1 - D_3 D_0) - D_1^2 > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Проанализируем знаки коэффициентов характеристического уравнения, определяемых (4) и (3). Оказывается, что при условии статической устойчивости по углам α, β : производной продольной статической устойчивости $\bar{m}_z^\alpha < 0$, и производной поперечной статической устойчивости $\bar{m}_y^\beta < 0$ и наличии демпфирования $\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} < 0; \bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} < 0$ коэффициенты D_1, D_2, D_3 всегда положительны. Некоторую отрицательную составляющую вносит наличие c_x , входящего в члены, пропорциональные $-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2}$. Однако расчеты показали, что в этих выражениях первые члены намного превышают вторые, поэтому наличие c_x не может повлиять на изменение знаков D_1, D_2, D_3 в (7). Расчеты показывают, что при этом и R обычно больше 0.

Более подробно остановимся на рассмотрении коэффициента D_0 . Из (3) и (4) получим:

$$D_0 = \left[\bar{m}_z^\alpha + A\mu\bar{\omega}_x^2 \right] \left[\bar{m}_y^\beta + B\mu\bar{\omega}_x^2 \right] + \bar{\omega}_x^2 \left[\left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} \right) + B \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) \right] \cdot \left[\left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) + A \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) \right]. \quad (8)$$

Входящие в выражения для D_0 (3) значения переменных, при которых D_0 больше нуля, при выполнении остальных условий, будут условиями устойчивости решения системы (2). Рассмотрим, во-первых, какие параметры могут в принципе меняться.

Параметры $A = (J_y - J_x) / J_z$ и $B = (J_z - J_x) / J_y$ — близкий к А, — безразмерные, но зависят от удлинения и искривления тела, то есть $A = A(\bar{K}, \bar{l}_y, \bar{l}_k)$; $B = B(\bar{K}, \bar{l}_y, \bar{l}_k)$, где \bar{K} в общем случае вектор коэффициентов, с помощью которых описывается искривление оси. Параметр μ может быть приближенно представлен:

$$\mu \approx 2\rho_T / \rho.$$

Это параметр зависит от соотношения плотностей материала тела и среды движения, где ρ_T — плотность материала тела. Для конкретной среды (например, определенной высоты в атмосфере) этот параметр будет изменяться при изменении материала тела. Для заданных материала и среды, то есть при неизменном μ , могут изменяться исходные параметры геометрии тела — \bar{l}_y, \bar{l}_k — удлинения конической (носовой) и цилиндрической частей. Это приводит к изменению аэродинамических коэффициентов. Наконец, данное тело в данной среде может подвергаться тем или иным деформациям, что приведет к изменению аэродинамических коэффициентов и инерционных параметров A, B . Тело, которое подверглось некоторой деформации, может начинать двигаться с разными, искусственно созданными или вызванными особенностями формы угловыми скоростями $\bar{\omega}_x$. Напомним, что рассматривается диапазон небольших приращений углов атаки и скольжения. Если мы представим уравнение границы устойчивости согласно вышеизложенному $D_0 = 0$, где D_0 — определяется по (8), то получим после подстановки следующее уравнение:

$$X_1 Y_1 = -K, \quad (9)$$

где

$$X_1 = X + A\mu\bar{\omega}_x^2; X = \bar{m}_z^\alpha; Y_1 = Y + B\mu\bar{\omega}_x^2; Y = \bar{m}_y^\beta;$$

$$K = K_0\bar{\omega}_x^2;$$

$$K_0 = \left[\left(\bar{m}_y^{\bar{\omega}_y} + \frac{c_x}{2} \right) + B \left(-\frac{1}{2}c_y^\alpha + \frac{c_x}{2} \right) \right] \cdot \left[\left(\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + \frac{c_x}{2} \right) + A \left(\frac{c_z^\beta}{2} + \frac{c_x}{2} \right) \right].$$

Уравнение границы устойчивости также можно записать в виде:

$$\begin{aligned} (X + a_1\bar{\omega}_x^2)(Y + b_1\bar{\omega}_x^2) + c_1\bar{\omega}_x^2 &= 0; \\ a_1 = A\mu; b_1 = B\mu; c_1 = K_0. \end{aligned} \quad (10)$$

Анализ уравнений (9), (10) показывает, что они представляют собой уравнения гипербол для случая $\bar{\omega}_x \approx const$ в координатах X, Y , то есть для разных производных статической устойчивости $\bar{m}_z^\alpha, \bar{m}_y^\beta$ коэффициенты в последнем уравнении с учетом проведенного анализа могут быть представлены как функции:

$$\begin{aligned} X &= f(\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \bar{x}_{цм}); Y = f(\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \bar{x}_{цм}); \\ a_1 &= f(\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \rho, \rho_T, \bar{x}_{цм}); \\ b_1 &= f(\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \rho, \rho_T, \bar{x}_{цм}); \\ c_1 &= f(\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \bar{x}_{цм}). \end{aligned}$$

Хотя перечисленные коэффициенты зависят от нескольких параметров, влияние последних различно. Для данного материала и среды a_1, b_1 достаточно слабо меняются при изменении \bar{K} (кривизны тела). Следует заметить, что если варьировать отдельные параметры, от которых зависит X, Y , такие как $\bar{l}_y, \bar{l}_\kappa, \bar{K}, \bar{x}_{цм}$, то, строго говоря, будут меняться и коэффициенты a_1, b_1, c_1 , так что кривая границы устойчивости для данного $\bar{\omega}_x$ будет иметь более сложный вид, чем гипербола. В пределе, когда меняются только совокупные X, Y , а a_1, b_1, c_1 меняются слабо, кривая (10) представляет собой гиперболу с асимптотами:

$$X = \bar{m}_z^\alpha = -a_1\bar{\omega}_x^2; Y = \bar{m}_y^\beta = -b_1\bar{\omega}_x^2;$$

или:

$$\bar{\omega}_{x\alpha} = \sqrt{-\bar{m}_z^\alpha / A\mu}; \quad \bar{\omega}_{x\beta} = \sqrt{-\bar{m}_z^\beta / B\mu}. \quad (11)$$

Коэффициент $c_1 \bar{\omega}_x^2$ определяет положение «основания» гиперболы: чем больше c_1 , то есть чем лучше демпфирование, тем больше диапазон («площадь») устойчивых параметров.

Из соотношения (11) следует, что критические скорости крена по углам α, β прямо пропорциональны производным устойчивости и обратно пропорциональны относительной плотности тела и инерционным параметрам A, B . Если теперь будем менять значение $\bar{\omega}_x$, то получим семейство кривых уравнения (10) — в пределе гипербол. Интерес представляет уравнение огибающей этого семейства кривых. Для вывода его используют два условия. Во-первых, огибающая проходит через точки семейства кривых, то есть для нее справедливо уравнение (11). Но, естественно, не все точки огибающих входит в конкретное уравнение для одной кривой. Вторым условием является то, что она касается всех кривых семейства, каждой в своей точке. Из уравнений касательных к двум близко расположенным кривым семейства $y = f(x, \lambda_1)$ и $y = f(x, \lambda_2)$, где λ_1, λ_2 — параметры, определяемые угловой скоростью, можем получить и уравнение огибающей $y = \phi(x)$. Для этого составляем систему:

$$\begin{aligned} f'(x_1, \lambda_1) &= \phi'(x_1); \quad f'(x_2, \lambda_2) = \phi'(x_2); \\ f(x_1, \lambda_1) &= \phi(x_1); \quad f(x_2, \lambda_2) = \phi(x_2), \end{aligned}$$

где

$$x_1 \rightarrow x_2; \lambda_1 \rightarrow \lambda_2$$

или:

$$x_2 = x_1 + \Delta x; \lambda_2 = \lambda_1 + \Delta \lambda.$$

Рассмотрим близкие к друг другу точки касания: $\Delta x \rightarrow 0; \Delta \lambda \rightarrow 0$. Разложив в ряд соотношения с x_2, λ_2 , получим условие касания, которое в совокупности с уравнением кривой семейства даст систему для определения положения огибающей:

$$\partial f(x, \lambda) / \partial \lambda = 0; \quad y = f(x, \lambda) \quad (12)$$

В нашем случае система (12) будет иметь вид:

$$y = -c_1\lambda / (x + a_1\lambda) - b_1\lambda; \partial y / \partial \lambda = 0,$$

откуда

$$-c_1x / (x + a_1\lambda)^2 = b_1,$$

где $\lambda = \bar{\omega}_x^2$.

Исключив λ , получим уравнение огибающей:

$$y = (-1 / a_1) \left[\sqrt{-b_1x} \pm \sqrt{c_1} \right]^2$$

или:

$$y = (-1 / a_1) \left[\sqrt{-b_1x} \pm \sqrt{c_1} \right]^2. \quad (13)$$

Из уравнения (13) следует, что можно построить ряд огибающих y в зависимости от коэффициента c_1 , причем чем больше c_1 , то есть чем лучше демпфирование, тем «шире» площадь, охватываемая кривой, то есть больше диапазон устойчивости. Этот вывод согласуется с выводом, сделанным при анализе отдельных гипербол.

Как уже отмечалось, сложная зависимость всех коэффициентов в уравнении (10) от определяющих параметров приводит к тому, что реальные кривые для одинаковых $\bar{\omega}_x$ не имеют форму гипербол. Поэтому для заданных конкретных форм тела лучше анализировать интегральную характеристику $D_0(\bar{\omega}_x^2)$. Можно построить таким образом ряд кривых для заданных определяющих параметров исходной геометрии $\bar{l}_u, \bar{l}_k, \bar{x}_{um}$, деформации \bar{K} . Обработка этих кривых или, наконец, прямое решение нелинейного относительно определяющих параметров уравнения (10) позволяет получать зависимости критических угловых скоростей крена и диапазонов устойчивости от этих параметров.

Для конкретного деформированного тела были рассчитаны в соответствии с методиками все аэродинамические характеристики. На рисунках 2 и 3 показано влияние деформаций на важнейшие производные коэффициентов приведенных моментов $\bar{m}_z^\alpha, \bar{m}_y^\beta$, на рисунках 4 и 5 показано влияние деформаций на производные коэффициентов сил c_y^α, c_z^β , которые присутствуют в уравнениях 2-11.

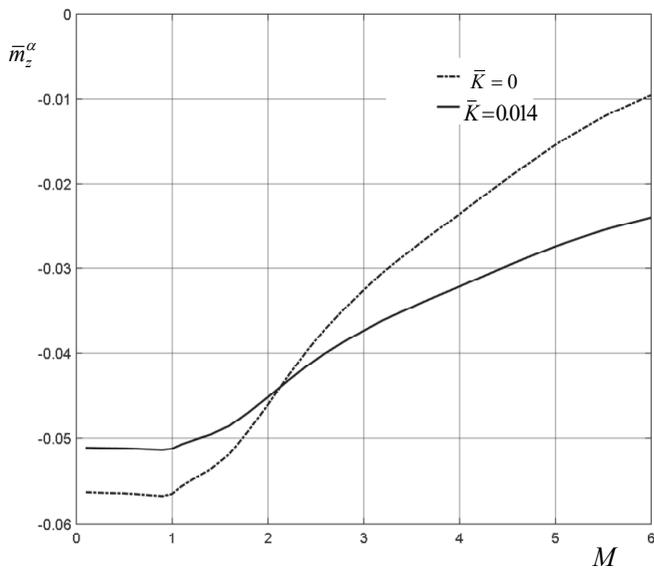


Рис. 2. Зависимость производной продольной статической устойчивости \bar{m}_z^α от числа Маха для прямого и деформированного тела

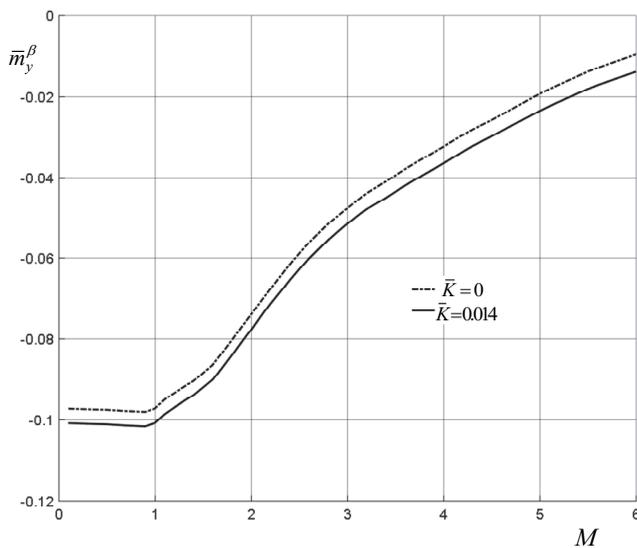
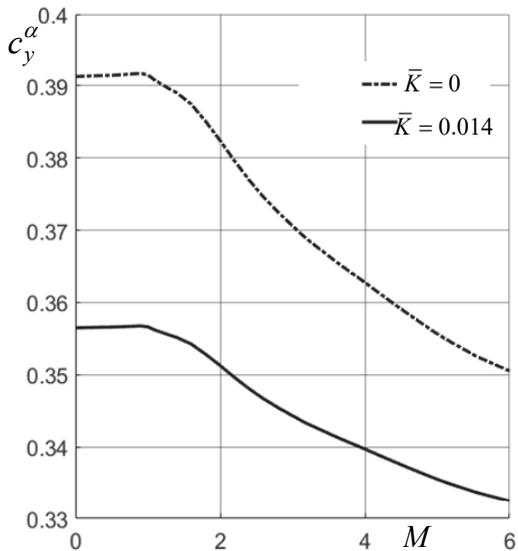
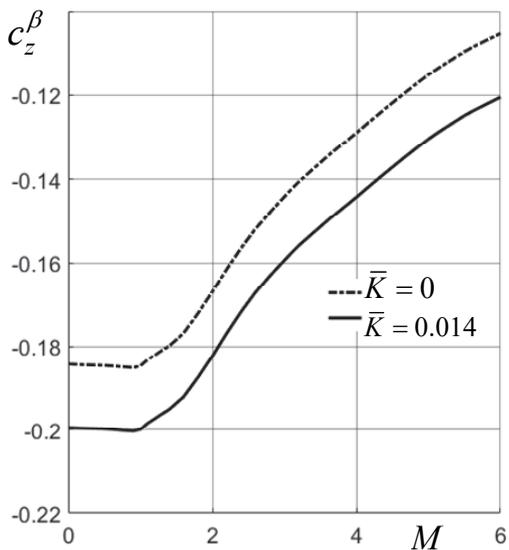


Рис. 3. Зависимость путевой статической устойчивости \bar{m}_y^β от числа Маха прямого и деформированного тела



a)



b)

Рис. 4. Зависимости коэффициентов c_y^α (а) и c_z^β (б) от числа Маха для прямого и деформированного тела

На рисунках 5 и 6 представлены зависимости границ устойчивости прямого тела и деформированного тела с показателем относительной кривизны $\bar{K} = 0.0141$.

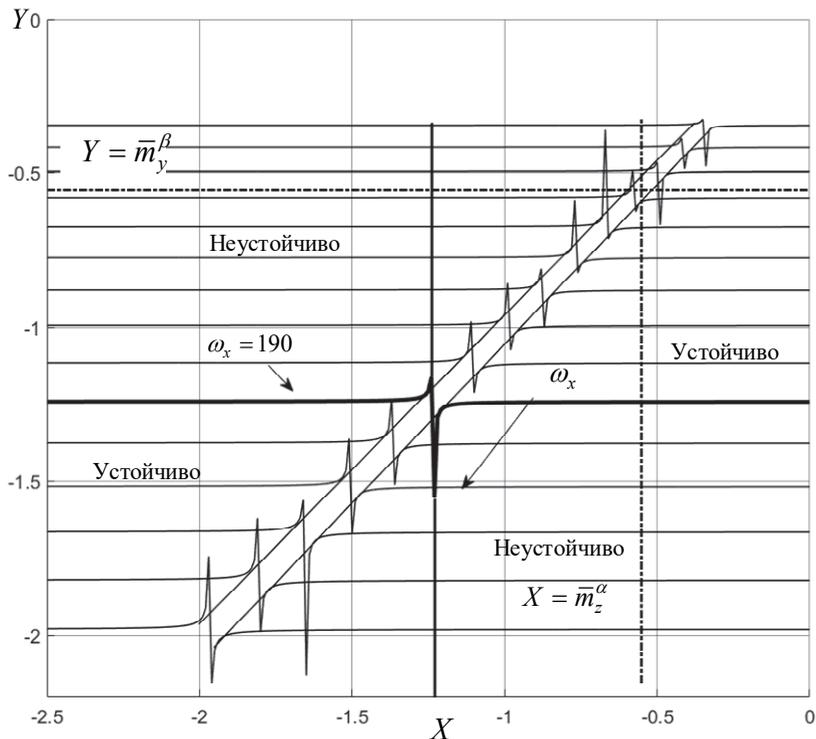


Рис. 5. Границы устойчивости для прямого тела

Анализ показал, что искривление тела оказывает существенное влияние на смещение линий $X = \bar{m}_z^\alpha = -a_1 \bar{\omega}_x^2$; $Y = \bar{m}_y^\beta = -b_1 \bar{\omega}_x^2$; по сравнению с прямым телом, которое остается внутри границ устойчивости при вариациях угловых скоростей по крену.

Для прямого тела при вариациях угловой скорости сохраняется устойчивость движения, хотя запас устойчивости имеет минимум (см. рисунок 7).

Для искривленного тела существует диапазон частот вращения по углу крена, внутри которого движение становится неустойчивым. Для данного искривленного тела влияние изменения угловой скорости на коэффициент $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ показано на рисунке 8.

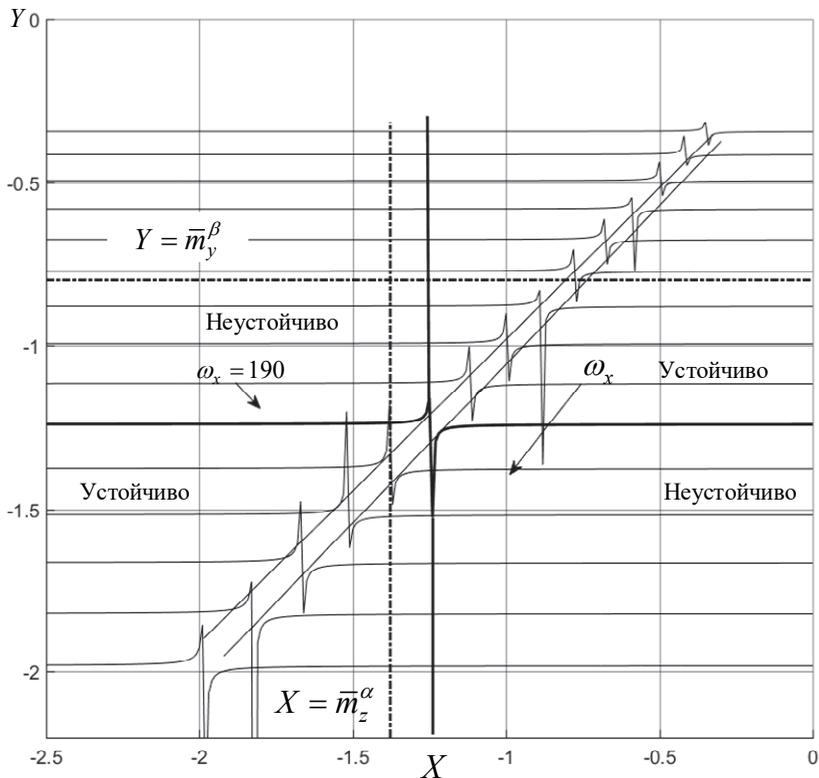


Рис. 6. Границы устойчивости для искривленного тела с показателем относительной кривизны $\bar{K} = 0.0141$

Из рисунка 8 видно, что для искривленного тела в отличие от прямого имеется диапазон угловых скоростей от 155 до 196.8, в котором наблюдается потеря устойчивости.

На рисунках 9. и 10 показано влияние вариаций угловой скорости и относительного изменения \bar{m}_y^β на значение коэффициента $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ в виде линий уровня для прямого и искривленного тела соответственно.

Как следует из рисунков 9 и 10, искривление тела приводит к сдвигу седловой точки в сторону увеличения угловой скорости и увеличения по абсолютной величине производной \bar{m}_y^β .

Совместное влияние числа Маха и угловой скорости на коэффициент D_0 для прямого и искривленного тела показано на рисунках 11 и 12.

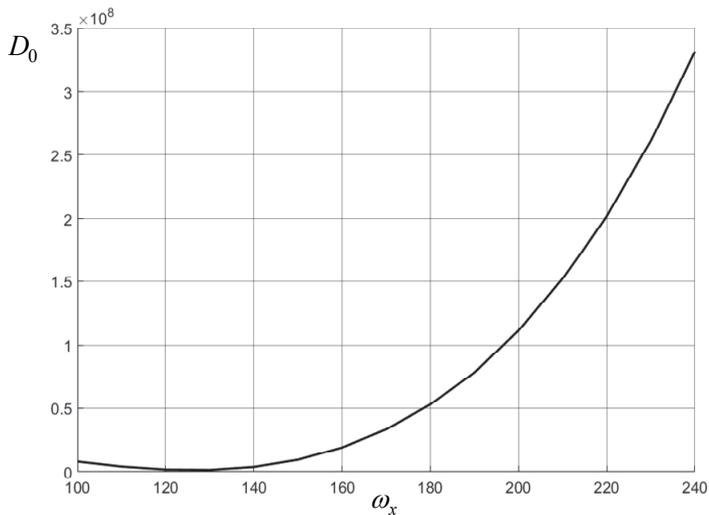


Рис. 7. Влияние изменения угловой скорости на коэффициент $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для прямого тела

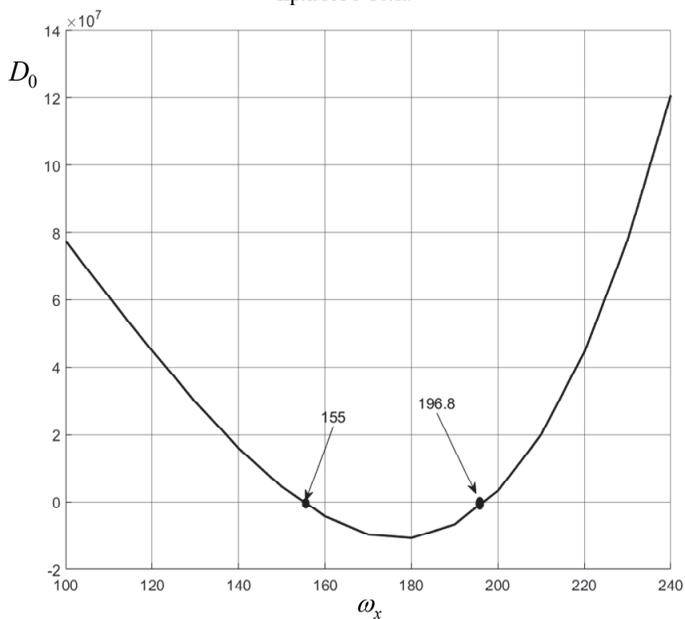


Рис. 8. Влияние изменения угловой скорости на коэффициент $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для искривленного тела

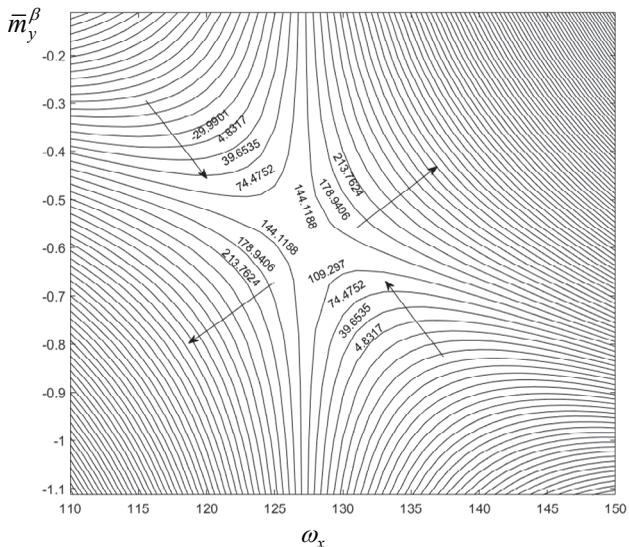


Рис. 9. Влияние вариаций угловой скорости и относительного изменения \bar{m}_y^β на значение коэффициента $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для прямого тела

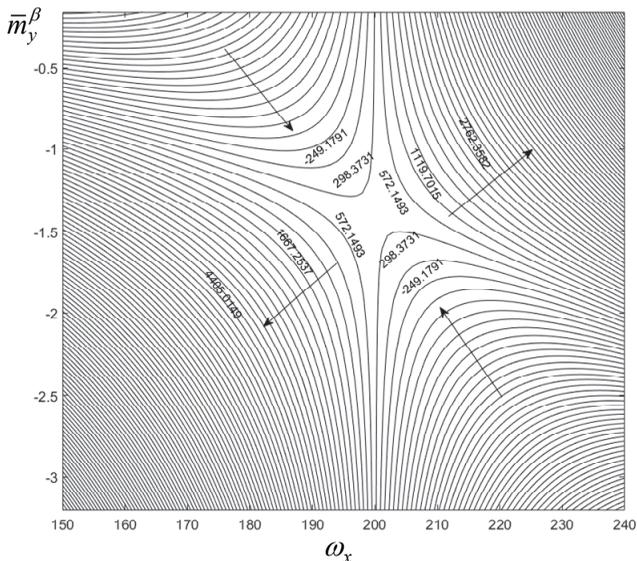


Рис. 10. Влияние вариаций угловой скорости и относительного изменения \bar{m}_y^β на значение коэффициента $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для искривленного тела

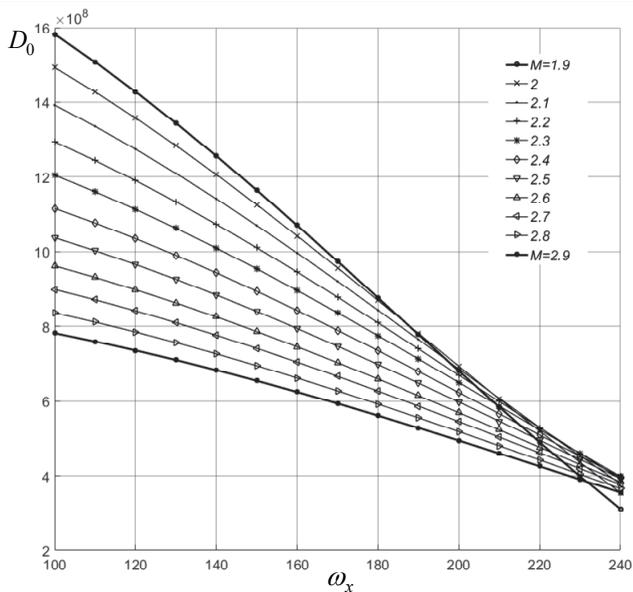


Рис. 11. Совместное влияние числа Маха и угловой скорости на коэффициент $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для прямого тела

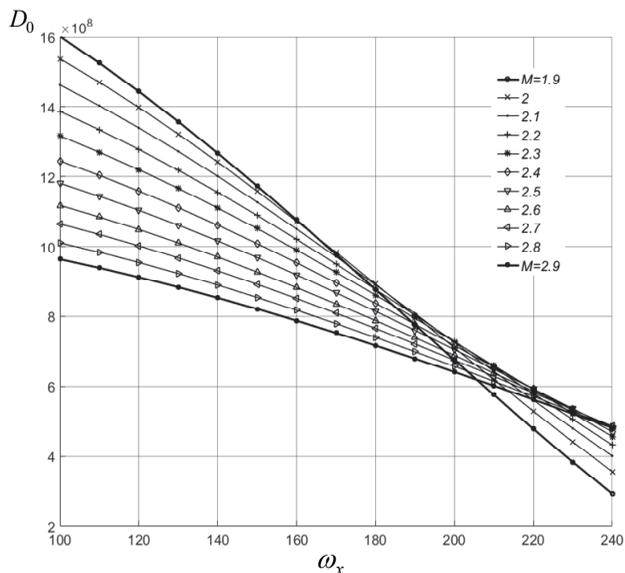


Рис. 12. Совместное влияние числа Маха и угловой скорости на коэффициент $D_0(\bar{\omega}_x^2)$ для искривленного тела

Сравнение рисунков 11 и 12 показывает, что искривление тела приводит к сдвигу точки равных коэффициентов D_0 при вариациях числа Маха влево.

3. Заключение. Изложены теоретические основы расчета устойчивости движения деформированных тел. Показано, как построить кривые, по которым можно оценить устойчивость движения по углу крена. Также представлена возможность прямого решения нелинейного относительно определяющих параметров уравнения, что позволит получать зависимости критических угловых скоростей крена и диапазонов устойчивости от этих параметров.

Численные расчеты, проведенные для прямого и искривленного тел показали, что искривление тела существенно влияет на смещение линий $X = \bar{m}_z^\alpha = -a_1 \bar{\omega}_x^2$; $Y = \bar{m}_y^\beta = -b_1 \bar{\omega}_x^2$; по сравнению с прямым телом, которое остается внутри границ устойчивости при вариациях угловых скоростей по крену.

Для искривленного тела в отличие от прямого существует диапазон частот вращения по углу крена, внутри которого движение становится неустойчивым. При этом запас устойчивости для прямого тела также имеет свой минимум.

Искривление тела приводит к сдвигу седловой точки в сторону увеличения угловой скорости и увеличения по абсолютной величине путевой статической устойчивости \bar{m}_y^β .

При вариациях числа Маха искривление тела приводит к сдвигу точки равных коэффициентов D_0 влево.

Основные расчетные формулы для практического применения связаны с построением областей устойчивости/неустойчивости по зависимостям (9)-(11) для разных угловых скоростей крена, что показано на рисунках 5 и 6. По формуле (8) строятся зависимости для D_0 при вариациях угловой скорости (рисунки 7, 8). Применение (8) позволяет провести анализ совместного влияния угловой скорости и производной боковой устойчивости \bar{m}_y^β (рисунки 9, 10), а также совместного влияния числа Маха и угловой скорости по крену (рисунки 11, 12) на коэффициент D_0 .

Указанные графики построены для вариаций угловой скорости от 100 до 300 рад/сек, чисел Маха от 2 до 3, основных углов атаки и скольжения от 0 до 40 градусов и вариаций этих углов от 0 до 12 градусов.

Направление дальнейших исследований связано с анализом для заданных конкретных форм тела интегральной характеристики $D_0(\bar{\omega}_x^2)$, в том числе построением ряда кривых для заданных определяющих

параметров исходной геометрии $\bar{l}_y, \bar{l}_k, \bar{x}_{цм}$, деформации \bar{K} . Обработка этих кривых или прямое решение нелинейного относительно определяющих параметров уравнения (10) позволит получать зависимости критических скоростей крена и диапазонов устойчивости от этих параметров конкретных деформированных тел.

Литература

1. Романова И.К., Соловьев В.С. Исследование особенностей аэродинамики искривленных тел // Наука и образование: Электронное научное издание. 2011. № 11. 26 с.
2. Романова И.К., Соловьев В.С. Разработка матричного метода описания геометрии и расчета аэродинамических характеристик тел с произвольно искривленной осью // Наука и образование: Электронное научное издание. 2012. № 11. 18 с.
3. Романова И.К. Соловьев В.С. Параметрические исследования динамики некоторых видов деформированных тел // Вопросы оборонной техники. Серия 16: Технические средства противодействия терроризму. 2016. № 7-8. С. 82–89.
4. Романова И.К. Редукция нелинейных моделей движения тел сложной формы // Наука и образование: Электронное научное издание. 2013. № 11.
5. Sun H., Yu J, Zhang S. The Control of Asymmetric Rolling Missiles Based on Improved Trajectory Linearization Control Method // Journal of Aerospace Technology and Management. 2016. vol. 8. no. 3. pp. 319–327.
6. Dykes J., Costello M., Fresconi F., Cooper G. Periodic projectile linear theory for aerodynamically asymmetric projectiles // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering. 2014. vol. 228. no. 11. pp. 2094–2107.
7. Бюшгенс Г.С., Студнев П.В. Динамика пространственного движения сверхзвуковых самолетов // М.: Машиностроение. 1983. 320 с.
8. Xu Y., Wang Z., Gao B. Six-Degree-of-Freedom Digital Simulations for Missile Guidance and Control // Mathematical Problems in Engineering. 2015. vol. 2015. 11 p.
9. Guan J., Yi W. Modeling of Dual-Spinning Projectile with Canard and Trajectory Filtering // International Journal of Aerospace Engineering. 2018. vol. 2018. 8 p.
10. Романова И.К. Математические модели управляемого движения летательных аппаратов // М.: МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2014. 112 с.
11. Hodges D.H. A New Approach to Aeroelastic Response, Stability and Loads of Missiles and Projectiles // Final Report, U.S. Army Research Office Grant 40448-EG. 44 p. URL: <http://www.researchgate.net/publication/235079207> (дата обращения: 28.01.2019).
12. Abbas L.K., Chen D., Rui X. Numerical Calculation of Effect of Elastic Deformation on Aerodynamic Characteristics of a Rocket // International Journal of Aerospace Engineering. 2014. vol. 2014. 11 p.
13. Chen D., Abbas L.K., Rui X., Wang G. Numerical simulation of a spinning stabilized projectile aerodynamic characteristics effected by structure errors // Acta Aerodynamica Sinica. 2014. vol. 32. no. 5. pp. 705–711.
14. Gkritzapis D.N., Panagiotopoulos E.E. Accurate Computation of the Trajectory of the Spin and Fin-Stabilized Projectiles // International Journal of Mathematics and Computers in Simulation. 2009. vol. 3. no. 2. pp. 73–80.
15. Balakrishna B., Sowjanya G. Stability Characteristics of missile due to maneuvering in all six Degree of freedom using CFD simulations // International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology. 2013. Issue 9. vol. 2. pp. 4449–4457.

16. *Lipták P., Jozefek M.* Moments having effect on a flying missile // *Science & Military Journal*. 2010. vol. 5. no. 1. pp. 51–57.
17. *Brejão L.F., da Fonseca Brasil R.M.L.R.* A 2-DOF model of an elastic rocket structure excited by a follower force // *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. vol. 911. no. 1. pp. 012020.
18. *Malik B., Akhtar S., Masud J.* Aircraft spin characteristics with high-alpha yawing moment asymmetry // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2018. vol. 232. no. 15. pp. 2793–2806.
19. *Ogunwa T., Abdullah E.J.* Flight dynamics and control modelling of damaged asymmetric aircraft // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. vol. 152. no. 1. pp. 012022.
20. *Nguyen N., Krishnakumar K., Kaneshige J., Nespeca P.* Dynamics and Adaptive Control for Stability Recovery of Damaged Asymmetric Aircraft // *AIAA Guidance, navigation, and control Conference and Exhibit*. 2006. pp. 6049.
21. *Yi W., Sun D., Tan J., Yuan D.* Experimental research on aeroelasticity of a large length to diameter ratio projectile // *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. 2012. vol. 19. pp. 270–275.
22. *Tihomirov D., Raveh D.E.* Nonlinear Aerodynamic Effects on Static Aeroelasticity of Flexible Missiles // *AIAA Scitech 2019 Forum*. 2019. pp. 0486.
23. *Kitson R.C., Cesnik C.E.* Multidisciplinary Effects on High-Speed Vehicle Performance and Stability // *2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. 2018. pp. 1208.
24. *Kiran K., Cholleti E.R.* Static Aeroelastic Analysis on Two Stage Rocket Body // *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*. 2015. vol. 4. Issue 11. pp. 388–395.
25. *Dongyang C., Abbas L.K., Xiaoting R., Guoping W.* Aerodynamic and static aeroelastic computations of a slender rocket with all-movable canard surface // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2018. vol. 232. no. 6. pp. 1103–1119.
26. *Hua R.H., Ye Z.Y., Wu J.* Effect of elastic deformation on flight dynamics of projectiles with large slenderness ratio // *Aerospace Science and Technology*. 2017. vol. 71. pp. 347–359.
27. *Мокин Ю.А.* Влияние малых углов атаки и скольжения на момент крена при гиперзвуковом обтекании тел вращения // *Теплофизика и аэромеханика*. 2009. Т. 16. № 1. С. 37–42.
28. *Комиссаренко А.И., Максимов Ф.А.* Особенности динамики полета тела при наличии асимметрий // *XL Академические чтения по космонавтике*. 2015. С. 288–288.
29. *Fresconi F., Guidos B., Celmins I., Hathaway W.* Flight Behavior of an Asymmetric Body through Spark Range Experiments using Roll-Yaw Resonance for Yaw Enhancement // *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. 2016. pp. 0782.
30. *Tong L., Ji H.* Multi-body dynamic modelling and flight control for an asymmetric variable sweep morphing UAV // *The Aeronautical Journal*. 2014. vol. 118. no. 1204. pp. 683–706.
31. *Андреевский Б.Р. и др.* Локализация скрытых колебаний в системах управления полетом // *Труды СПИИРАН*. 2016. Вып. 6(49). С. 5–31.

Романова Ирина Константиновна — канд. техн. наук, доцент, доцент, кафедра робототехнических систем и мехатроники, Московский государственный технический университет имени Н. Э. Баумана (МГТУ им. Н.Э. Баумана). Область научных интересов: динамика и управление движением беспилотных летательных аппаратов, многокритериальная оптимизация, анализ данных, методы математического моделирования мехатронных систем, применение программных комплексов в моделировании систем. Число научных публикаций — 30. marti2003@yandex.ru; ул. 2-я Бауманская, 5/1, 105005, Москва, Российская Федерация; р.т.: +7(499)2636195; факс: +7(499)2636114.

I.K. ROMANOVA
**SIMULATION OF MOTION STABILITY OF DEFORMED
ELONGATED BODIES BASED ON VARIATIONS OF ANGULAR
VELOCITIES IN ROLL**

Romanova I.K. Simulation of Motion Stability of Deformed Elongated Bodies Based on Variations Of Angular Velocities in Roll.

Abstract. The class of moving objects, which are bodies of revolution, which for some reason have undergone irreversible deformations of the hull, is considered.

The immediacy of the problem being studied has to do both with the need to study the dynamics of such objects and the insufficiency of the studies already conducted, which are mainly focused on the study of the effects of aeroelasticity or mass asymmetry and do not affect the dynamics of bodies with irreversible deformations.

The problem of the motion stability of the considered objects, including the process of interaction of the longitudinal and lateral movements of the deformed body, is formulated. Particular attention is paid to the movement of the curved body with rotation about the roll and the identification of the presence of critical roll velocities. It is noted that for the case of passive movement there are three possible reasons for this interaction: aerodynamic, kinematic, inertial.

A theoretical approach has been developed that takes into account the specific features of the geometry of deformed bodies. The approach made it possible in practical studies to determine the allowable deformation levels and its relationship with the motion parameters of deformed bodies.

The stability analysis was carried out based on the stability criteria of the system solutions describing the body movement according to the Routh – Hurwitz criterion. The body parameters, which have a varying degree of influence on the stability of movement, are determined. In a more general case, the curve of the stability boundary for a given angular velocity in roll will have a more complex form than a simple hyperbola.

The possibility of obtaining a direct solution to a nonlinear to the determining parameters equation is also shown. It will make it possible to obtain the dependences of the critical heel velocities and stability ranges on these parameters.

Mathematical modeling based on the developed techniques, carried out for direct and curved bodies, showed that the body curvature has a significant effect on the displacement of the lines of derivative pitch moments in the angle of attack and the moment of sliding in the angle of slip relative to the limits of stability. The range of angular velocities for the roll is determined, in which a loss of stability is observed for the curved body. The effect of variations in the angular velocity and the relative change in the derivative of the yaw moment coefficient in the slip angle on the value of the determining factor from the stability conditions for the direct and curved bodies is analyzed. It is shown how the curvature of the body leads to a shift of the saddle point. The effect of a change in the Mach number on the determining coefficient of characteristic equations is analyzed.

Keywords: Mathematical Modeling of Flight Dynamics, Motion Stability, Asymmetric Bodies.

Romanova Irina Konstantinovna — Ph.D., Associate Professor, Associate Professor, Robotic Systems and Mechatronics Department, Bauman Moscow State Technical University (BMSTU). Research interests: dynamics and motion control of unmanned aerial vehicles, multi-criteria optimization, data analysis, methods of mathematical modeling of mechatronic systems, the use of software systems in modeling systems. The number of publications — 30. marti2003@yandex.ru; 5/1, Baumanskaya 2-ya str., 105005, Moscow, Russian Federation; office phone: +7(499)2636195; fax: +7(499)2636114.

References

1. Romanova I.K., Soloviev V.S. [Studying special features of aerodynamics of curved bodies]. *Nauka i obrazovanie: Elektronnoe nauchnoe izdanie – Science and Education: Electronic Wcientific and Technical Journal*. 2011. vol. 11. 26 p. (In Russ.).
2. Romanova I.K., Soloviev V.S. [Method of calculating aerodynamic characteristics of bodies with arbitrarily curved axis]. *Nauka i obrazovanie: Elektronnoe nauchnoe izdanie – Science and Education: Electronic Wcientific and Technical Journal*. 2012. vol. 11. 18 p. (In Russ.).
3. Romanova I.K., Soloviev V.S. [Parametrical researches of dynamics of some types of the deformed bodies]. *Voprosy oboronnoj tekhniki. Seriya 16: Tekhnicheskie sredstva protivodejstviya terrorizmu – Military Enginery. Series 16: Counter-terrorism technical devices*. 2016. vol. 7-8. pp. 82–89. (In Russ.).
4. Romanova I.K. [Reduction of nonlinear models of motion of bodies of complex shape]. *Nauka i obrazovanie: Elektronnoe nauchnoe izdanie – Science and Education: Electronic Wcientific and Technical Journal*. 2013. vol. 11. (In Russ.).
5. Sun H., Yu J, Zhang S. The Control of Asymmetric Rolling Missiles Based on Improved Trajectory Linearization Control Method. *Journal of Aerospace Technology and Management*. 2016. vol. 8. no. 3. pp. 319–327.
6. Dykes J., Costello M., Fresconi F., Cooper G. Periodic projectile linear theory for aerodynamically asymmetric projectiles. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2014. vol. 228. no. 11. pp. 2094–2107.
7. Byushgens G.S. *Dinamika prostranstvennogo dvizheniya sverkhzvukovykh samoletov* [Dynamics of the spatial motion of supersonic aircraft]. M.: Rossijskaya Akademiya Nauk. 2016. 703 p. (In Russ.).
8. Xu Y., Wang Z., Gao B. Six-Degree-of-Freedom Digital Simulations for Missile Guidance and Control. *Mathematical Problems in Engineering*. 2015. vol. 2015. 11 p.
9. Guan J., Yi W. Modeling of Dual-Spinning Projectile with Canard and Trajectory Filtering. *International Journal of Aerospace Engineering*. 2018. vol. 2018. 8 p.
10. Romanova I.K. *Matematicheskie modeli upravlyaemogo dvizheniya letatel'nykh apparatov* [Mathematical models of the controlled movement of aircraft]. M.: MGТУ im. N.E. Baumana. 2014. 112 p. (In Russ.).
11. Hodges D.H. A New Approach to Aeroelastic Response, Stability and Loads of Missiles and Projectiles. Final Report, U.S. Army Research Office Grant 40448-EG. 44 p. Available at: <http://www.researchgate.net/publication/235079207> (accessed: 28.01.2019).
12. Abbas L.K., Chen D., Rui X. Numerical Calculation of Effect of Elastic Deformation on Aerodynamic Characteristics of a Rocket. *International Journal of Aerospace Engineering*. 2014. vol. 2014. 11 p.
13. Chen D., Abbas L.K., Rui X., Wang G. Numerical simulation of a spinning stabilized projectile aerodynamic characteristics effected by structure errors. *Acta Aerodynamica Sinica*. 2014. vol. 32. no. 5. pp. 705–711.
14. Gkritzapis D.N., Panagiotopoulos E.E. Accurate Computation of the Trajectory of the Spin and Fin-Stabilized Projectiles. *International Journal of Mathematics and Computers in Simulation*. 2009. vol. 3. no. 2. pp. 73–80.
15. Balakrishna B., Sowjanya G. Stability Characteristics of missile due to maneuvering in all six Degree of freedom using CFD simulations. *International Journal of Innovative Research in Science, Engineering and Technology*. 2013. Issue 9. vol. 2. pp. 4449–4457.
16. Lipták P., Jozefek M. Moments having effect on a flying missile. *Science & Military Journal*. 2010. vol. 5. no. 1. pp. 51–57.

17. Brejão L.F., da Fonseca Brasil R.M.L.R. A 2-DOF model of an elastic rocket structure excited by a follower force. *Journal of Physics: Conference Series*. 2017. vol. 911. no. 1. pp. 012020.
18. Malik B., Akhtar S., Masud J. Aircraft spin characteristics with high-alpha yawing moment asymmetry. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2018. vol. 232. no. 15. pp. 2793–2806.
19. Ogunwa T., Abdullah E.J. Flight dynamics and control modelling of damaged asymmetric aircraft. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016. vol. 152. no. 1. pp. 012022.
20. Nguyen N., Krishnakumar K., Kaneshige J., Nespeca P. Dynamics and Adaptive Control for Stability Recovery of Damaged Asymmetric Aircraft. *AIAA Guidance, navigation, and control Conference and Exhibit*. 2006. pp. 6049.
21. Yi W., Sun D., Tan J., Yuan D. Experimental research on aeroelasticity of a large length to diameter ratio projectile. *International Journal of Modern Physics: Conference Series*. 2012. vol. 19. pp. 270–275.
22. Tihomirov D., Ravch D.E. Nonlinear Aerodynamic Effects on Static Aeroelasticity of Flexible Missiles. *AIAA Scitech 2019 Forum*. 2019. pp. 0486.
23. Kitson R.C., Cesnik C.E. Multidisciplinary Effects on High-Speed Vehicle Performance and Stability. 2018 AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 2018. pp. 1208.
24. Kiran K., Cholleti E.R. Static Aeroelastic Analysis on Two Stage Rocket Body. *International Journal of Engineering Research & Technology (IJERT)*. 2015. vol. 4. Issue 11. pp. 388–395.
25. Dongyang C., Abbas L.K., Xiaoting R., Guoping W. Aerodynamic and static aeroelastic computations of a slender rocket with all-movable canard surface. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G: Journal of Aerospace Engineering*. 2018. vol. 232. no. 6. pp. 1103–1119.
26. Hua R.H., Ye Z.Y., Wu J. Effect of elastic deformation on flight dynamics of projectiles with large slenderness ratio. *Aerospace Science and Technology*. 2017. vol. 71. pp. 347–359.
27. Mokin Yu.A. [The influence of small angles of attack and slip on the moment of roll in a hypersonic flow around rotation bodies]. *Teplofizika i aehromekhanika – Thermophysics and Aeromechanics*. 2009. Issue 16. no. 1. pp. 37–42. (In Russ.).
28. Komissarenko A.I., Maksimov F.A. [Features of the dynamics of the flight of the body in the presence of asymmetries]. *XL Akademicheskije chteniya po kosmonavtike [XL Academic Space Conference]*. 2015. pp. 288–288. (In Russ.).
29. Fresconi F., Guidos B., Celmins I., Hathaway W. Flight Behavior of an Asymmetric Body through Spark Range Experiments using Roll-Yaw Resonance for Yaw Enhancement. *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. 2016. pp. 0782.
30. Tong L., Ji H. Multi-body dynamic modelling and flight control for an asymmetric variable sweep morphing UAV. *The Aeronautical Journal*. 2014. vol. 118. no. 1204. pp. 683–706.
31. Andrievskij B.R. et al. [Localization of hidden oscillations in flight control systems]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2016. vol. 6(49). pp. 5–31.