

В.И. ВОРОТНИКОВ, А.В. ВОХМЯНИНА
**МЕТОД ЛИНЕАРИЗУЮЩЕЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ В ЗАДАЧЕ
УПРАВЛЕНИЯ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ
НЕКОНТРОЛИРУЕМЫХ ПОМЕХАХ**

Воротников В.И., Вохмянина А.В. Метод линеаризующей обратной связи в задаче управления по части переменных при неконтролируемых помехах.

Аннотация. Рассматривается задача гарантированного перевода за конечное время подверженной неконтролируемым помехам нелинейной динамической системы в положение, где заданная часть фазовых переменных равна нулю. Эта задача относится к задачам частичного (по отношению к части переменных) управления. Помехи не имеют каких-либо статистических описаний. Управления формируются по принципу обратной связи и удовлетворяют заданным «геометрическим» ограничениям.

Для решения указанной задачи используется метод линеаризующей обратной связи, позволяющий свести решение рассматриваемой нелинейной задачи управления к решению соответствующих линейных игровых антагонистических задач (с нефиксированным временем окончания). Приводятся конструктивно проверяемые достаточные условия, обеспечивающие гарантированное решение рассматриваемой задачи для заданной области начальных значений фазовых переменных. В отличие от ранее выполненных работ, посредством обратной связи линеаризуется более общий класс нелинейных управляемых систем, для которого допускаются оценки некоторой части переменных, и управление может осуществляться по отношению к большей части переменных.

В качестве примера изучается случай, когда рассматриваемая нелинейная управляемая система описывает пространственный разворот асимметричного твердого тела при управлении посредством моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками. В этом случае система включает динамические уравнения Эйлера и кинематические уравнения в переменных Родрига — Гамильтона, описывающие вращательное движение основного тела, а также уравнения вращения маховиков. Рассматриваются две задачи гарантированного пространственного разворота тела при неконтролируемых внешних помехах, где цели управления определяются по части фазовых переменных указанной системы: задача переориентации тела, а также задача «прохождения» (с произвольной скоростью) телом заданного углового положения в пространстве.

Показано, что предложенный в статье подход позволяет с единых позиций получить и дополнить как некоторые уже известные решения этих задач, так и предложить новое решение задачи переориентации посредством более простых управляющих моментов, включающее оценку (завышенную) соотношения допустимых уровней управляющих моментов и неконтролируемых помех. Приводятся результаты численных расчетов, показывающие эффективность применяемых управляющих моментов.

Ключевые слова: управление по части переменных, неконтролируемые помехи, линеаризующая обратная связь, переориентация гиростата.

1. Введение. Часто в приложениях управление динамической системой достаточно осуществить не по всем фазовым переменным, а только по отношению к их некоторой части. Это касается, например, следующих задач: «жесткой» встречи (по отношению к координатам, но не по скоростям) двух объектов [1]; управления движением по от-

ношению к скоростям [2]; «прохождения» (с произвольной скоростью) твердым телом заданного углового положения в пространстве [3].

Более общими являются задачи управления на многообразиях (или в конфигурационном пространстве) [4], а также по отношению к заданной функции фазовых переменных (по выходу) [5]. Некоторое обсуждение задач частичного управления (совместно с проблемами частичной устойчивости и стабилизации) можно найти в работах [5, 6].

Отметим, что в задачах частичного (по части переменных) управления, в отличие от задач частичной (по части переменных) стабилизации [3, 6], речь идет об управлении за конечное, а часто и минимальное, время. Кроме того, в задачах частичного управления само конечное положение рассматриваемой замкнутой системы может не быть ее положением равновесия (система «проходит» данное положение, не останавливаясь в нем). Термин «стабилизация» в этом случае просто теряет смысл. В то же время значительно возрос интерес и к задачам стабилизации по части переменных на конечном промежутке времени (*finite-time partial stabilization*) [7-16], для решения которых используется метод функций Ляпунова [17] в соответствующей модификации [18, 19].

В настоящей статье рассматривается задача гарантированно-го перевода за конечное время подверженной помехам (возмущениям) нелинейной динамической системы в положение, где заданная часть фазовых переменных равна нулю. Помехи не имеют каких-либо статистических описаний. Управления формируются по принципу обратной связи и удовлетворяют заданным прямым «геометрическим» ограничениям. В процессе управления текущая информация о всех фазовых переменных системы считается известной.

Предложена модификация метода линеаризующей обратной связи («эквивалентной линеаризации») [3], позволяющая получить решение указанной нелинейной задачи на основе решения соответствующих игровых антагонистических задач управления с нефиксированным временем окончания для линейных конфликтно-управляемых систем дифференциальных уравнений простейшего вида. В сравнении с работой [3] линеаризуется более общий класс нелинейных управляемых систем, и управление может осуществляться по отношению к большей части переменных.

В качестве примера изучается представляющий самостоятельный теоретический и прикладной интерес случай, когда рассматриваемая нелинейная управляемая система описывает пространственный разворот асимметричного твердого тела (космического аппарата) при действующих на него неконтролируемых внешних помехах, не имею-

щих статистического описания. Управление осуществляется посредством моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками. Рассматриваются две задачи гарантированного пространственного разворота тела, где цели управления определяются по части фазовых переменных указанной системы: задача переориентации тела, а также задача «прохождения» (с произвольной скоростью) телом заданного углового положения в пространстве.

Показано, что предложенный в статье подход позволяет с единых позиций получить и дополнить уже известные решения [20-22] этих задач. Также предложено новое решение задачи переориентации посредством более простых управляющих моментов. Расчеты показывают эффективность применяемых управляющих моментов.

2. Постановка задачи. Рассмотрим нелинейную управляемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= Y_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r Y_{ik}(\mathbf{x})u_k + Y_i^{(1)}(\mathbf{x})v_i; \\ \dot{z}_j &= Z_j(\mathbf{x}) \quad (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, p}), \end{aligned} \quad (1)$$

в которой $\mathbf{x} = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ — вектор фазовых переменных y_i, z_j ; \mathbf{u}, \mathbf{v} — векторы управляющих воздействий (управлений) u_k и неконтролируемых возмущений (помех) v_i .

Функции $Y_i^{(0)}, Y_{ik}, Y_i^{(1)}, Z_j$ в системе (1) определены и непрерывны вместе со своими частными производными по y_i, z_j в области $S = \{\|\mathbf{x}\| \leq H\}$, $H = \text{const} > 0$; $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Считаем, что $Y_i^{(0)}(\mathbf{0}) = 0, Z_j(\mathbf{0}) = 0$. Полагаем также, что $p = r \leq m$.

Управления u_k формируются по принципу обратной связи $u_k = u_k(t, \mathbf{x})$, и в процессе управления известна информация о текущих значениях всех координат фазового вектора \mathbf{x} системы (1). Реализации $u_k[t]$ управлений (здесь $u_k[t] = u_k(t, \mathbf{x}[t])$, $\mathbf{x}[t]$ — решения системы (1) при $u_k = u_k(t, \mathbf{x})$) являются измеримыми функциями, удовлетворяющими заданным «геометрическим» ограничениям:

$$|u_k| \leq \alpha_k = \text{const} > 0. \quad (2)$$

Помехи не имеют каких-либо статистических описаний и могут реализовываться в виде любых измеримых функций в рамках ограничений:

$$|v_i| \leq \beta_i = \text{const} > 0. \quad (3)$$

Отметим, что для любой допустимой реализации неконтролируемых помех v_i решения замкнутой системы дифференциальных уравнений (1) с формально-математической точки зрения понимаются [23] как абсолютно непрерывные функции времени $\mathbf{x}[t]$, удовлетворяющие этой системе (или соответствующей системе дифференциальных включений) при почти всех значениях $t \in [t_0, t_1]$.

Задача 1. Найти управления u_k при любых допустимых реализациях неконтролируемых помех v_i переводящие систему (1) из заданной области $S_0 = \{\|\mathbf{x}_0\| \leq H_0 < H\}$ начальных значений $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}[t_0]$ фазового вектора за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в положение, где:

$$z_k[t_1] = 0 \quad (k = \overline{1, r}). \quad (4)$$

Значения остальных фазовых переменных системы (1) в момент времени t_1 могут быть произвольными. Момент времени t_1 не фиксируется.

Замечание 1. Задача 1 является задачей частичного (по части переменных) управления [3, 6] для системы (1). Положение (4) не является, вообще говоря, положением равновесия не только автономной системы (1) (при $\mathbf{u} = \mathbf{0}, \mathbf{v} = \mathbf{0}$), но и замкнутой системы (1) (при $\mathbf{v} = \mathbf{0}$). В этом случае система (1) «проходит» положение (4) в конечный момент времени t_1 .

Замечание 2. Неравенства (2) и (3) определяют покомпонентную форму учета ограничений на управления u_k и помехи v_i . Связь между значениями α_k и β_i уровней управлений u_k и помех v_i , а также размерами области S_0 начальных значений \mathbf{x}_0 фазового вектора нелинейной системы (1), априори неизвестна и устанавливается в процессе решения задачи 1.

3. Вспомогательная линейная управляемая система. Рассмотрим матричную функцию

$$F(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial \Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u_k} \right) \quad (s, k = \overline{1, r}),$$

$$\Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial y_i} \left[\sum_{k=1}^r Y_{ik}^{(1)}(\mathbf{x}) u_k \right] \right\},$$

и допустим, что в области $S_1 = \{\|\mathbf{x}\| \leq H_1, H_0 < H_1 < H\}$ выполняется условие:

$$\text{rank } F(\mathbf{x}) = r. \quad (5)$$

В этом случае в области S_1 система линейных алгебраических относительно u_k уравнений:

$$\Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial y_i} Y_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial z_k} Z_k(\mathbf{x}) = u_s^* \quad (s = \overline{1, r})$$

(где u_s^* — вспомогательные управляющие воздействия, которыми распорядимся далее) имеет единственное решение:

$$u_k = f_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*), \quad f_k(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (k = \overline{1, r}), \quad (6)$$

и функции f_k непрерывны в области S_1 ; $\mathbf{u}^* = (u_1^*, \dots, u_r^*)$.

Также введем обозначения:

$$v_k^* = v_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial y_i} \left[Y_i^{(1)}(\mathbf{x}) v_i \right] \quad (k = \overline{1, r}),$$

и будем интерпретировать v_k^* как «вспомогательные помехи».

Учитывая непосредственно проверяемые соотношения:

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial y_i} \dot{y}_i + \sum_{s=1}^r \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial z_s} \dot{z}_s = \\ &= \Phi_k(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial y_i} Y_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \\ &+ \sum_{s=1}^r \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial z_s} Z_s(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial y_i} \left[Y_i^{(1)}(\mathbf{x}) v_i \right] \quad (k = \overline{1, r}), \end{aligned}$$

заключаем, что из замкнутой системы (1), (6) в области S_1 можно выделить линейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{z}_k = u_k^* + v_k^* \quad (k = \overline{1, r}). \quad (7)$$

На основе решения соответствующих игровых антагонистических задач управления для построенной вспомогательной линейной управляемой системы дифференциальных уравнений (7) далее будет строиться решение поставленной задачи 1 для исходной нелинейной управляемой системы (1). В этом смысле равенства (6) предопределяют общую структурную форму управлений u_k в задаче 1.

Для реализации указанной цели считаем возможным в области S_1 проведение оценки уровней «вспомогательных помех» v_k^* (при учете заданных ограничений (3) на помехи v_i):

$$|v_k^*| \leq \beta_k^*, \quad \beta_k^* = \sup_{\mathbf{x} \in S_1} [v_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{v})] \quad (k = \overline{1, r}). \quad (8)$$

Естественно, оценка уровней v_k^* может быть затруднена и зависит от конкретного структурного вида нелинейной управляемой системы (1). Например, в случае, когда система (1) описывает пространственный разворот твердого тела (см. раздел 7), такая оценка не вызывает затруднений.

4. Вспомогательная линейная игровая задача. Для линейной управляемой системы (7) решим задачу о быстрейшем «прохождении» положения (4). Управление осуществляется посредством u_k^* при любых допустимых реализациях $\overline{v_k^*}$, удовлетворяющих неравенствам (8). Конечные значения \dot{z}_k ($k = \overline{1, r}$) не фиксируются (произвольны).

Данную задачу трактуем как игровую антагонистическую (с нефиксированным временем окончания). В этой задаче один из игроков распоряжается вспомогательными управлениями u_k^* и стремится уменьшить время $\tau = t_1 - t_0$ достижения системой (7) положения (4). Второй игрок (противник) стремится увеличить τ или вообще избежать позиции (4), и имеет в распоряжении «вспомогательные помехи» v_k^* . При этом построенная линейная система (7) трактуется как конфликтно-управляемая.

Для решения данной задачи ограничение на u_k^* примем в виде:

$$\| \mathbf{u}^* \| = \left[\sum_{k=1}^r u_k^{*2} \right]^{1/2} \leq \alpha^* = \text{const} > 0. \quad (9)$$

Ограничение на v_k^* также примем в виде:

$$\| \mathbf{v}^* \| = \left[\sum_{k=1}^r v_k^{*2} \right]^{1/2} \leq \beta^* = \left[\sum_{k=1}^r \beta_k^{*2} \right]^{1/2}, \quad (10)$$

где значения β_k^* определяются согласно соотношениям (8).

В случае $\alpha^* > \beta^*$, когда уровень α^* управлений u_k^* выше уровня β^* помех v_k^* , решение указанной линейной игровой задачи при ограничениях (9), (10) дает тормозящая экстремальная стратегия Н. Н. Красовского [1].

Управления u_k^* , диктуемые этой стратегией, имеют вид:

$$u_k^*(t, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \theta) = \begin{cases} -\alpha^* L_k \left[\sum_{s=1}^r L_s^2 \right]^{-1/2}, & \omega > 0 \\ 0, & \omega \leq 0; \end{cases} \quad (11)$$

$$\omega = \left[\sum_{s=1}^r L_s^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2}(\alpha^* - \beta^*)(\theta - t)^2;$$

$$L_k = z_k + (\theta - t)\dot{z}_k \quad (k = \overline{1, r}),$$

где переменная θ находится как наименьший положительный корень уравнения $\omega = 0$.

Минимальное гарантированное время τ достижения положения (4) в рассматриваемой линейной игровой задаче определяется [1] как наименьший положительный корень уравнения:

$$\left[\sum_{s=1}^r L_s^{*2} \right]^{1/2} - \frac{1}{2}(\alpha^* - \beta^*)\tau^2 = 0, \quad L_s^* = z_{s0} + \tau \dot{z}_{s0}.$$

Это значение τ является гарантированным временем управления в исходной нелинейной задаче 1, и соответствует случаю $v_k^* = -(\beta^*/\alpha^*)u_k^*$ «наихудших» помех v_k^* , — оптимальных управлений «противника». Если же v_k^* отличаются от «наихудших», то встреча с положением (4) произойдет быстрее, чем за время τ .

Управления (11), а также соответствующие им решения (движения) $\mathbf{z}[t], \dot{\mathbf{z}}[t]$ системы дифференциальных уравнений (7), (11) могут быть построены конструктивно. Таковую возможность дает аппроксимационная схема [1] коррекции управлений u_k^* вида (11) в дискретные моменты времени. При этом управления (11) и решения (движения) системы (7), (11) можно рассматривать как предельный переход от соответствующих управлений и решений (движений), порождаемых указанной дискретной схемой. Получаемые в результате указанного предельного перехода решения системы дифференциальных уравнений (7), (11) являются абсолютно непрерывными функциями времени, удовлетворяющими этой системе почти всюду на рассматриваемом отрезке времени.

5. Условия разрешимости задачи 1. При решении задачи 1 управления по части переменных (по z_1, \dots, z_r) для нелинейной си-

стемы (1) на основе решения соответствующей вспомогательной задачи управления для линейной системы (7) возникает следующая ситуация. Поведение не только переменных z_1, \dots, z_r , но и поведение функций $Z_1(\mathbf{x}), \dots, Z_r(\mathbf{x})$ нелинейной системы (1), будет определяться поведением фазовых переменных, входящих в фазовые векторы $\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}$ линейной системы (7).

При определенном условии данное обстоятельство можно использовать для оценки всего фазового вектора $\mathbf{x}[t]$ нелинейной системы (1) и в конечном счете для оценки уровней (2) управлений u_k .

Пусть, например, в области S имеют место тождества:

$$Z_s(\mathbf{x}) \equiv \sum_{k=1}^r y_k Z_{sk}^{(1)}(y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{z}) + Z_s^{(2)}(y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{z}), \quad (12)$$

$$Z_s^{(2)}(0, \dots, 0, \mathbf{0}) \equiv 0 \quad (s = \overline{1, r}).$$

Рассмотрим матричную функцию:

$$Q(\mathbf{x}) = \left(\frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial y_k} \right) \quad (s, k = \overline{1, r})$$

и допустим, что в области $S_2 = \{\|\mathbf{x}\| \leq H_2, H_0 < H_2 < H\}$ выполняется условие:

$$\text{rank } Q(\mathbf{x}) = r. \quad (13)$$

При выполнении условий (12), (13) система уравнений:

$$\dot{z}_s = Z_s(\mathbf{x}) \quad (s = \overline{1, r}),$$

рассматриваемая как линейная алгебраическая система относительно y_k , имеет единственное решение:

$$y_k = g_k(y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}), \quad (14)$$

$$g_k(0, \dots, 0, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (k = \overline{1, r}).$$

Функции g_k непрерывны в области S_2 ; $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_k)$.

Соотношения (14) означают, что поведение фазового вектора \mathbf{x} нелинейной системы (1) будет определяться поведением фазовых переменных линейной вспомогательной системы (7), а также поведением переменных y_{r+1}, \dots, y_m исходной системы (1).

Поэтому фазовый вектор $\mathbf{x}[t]$ системы (1) можно представить следующим образом:

$$\mathbf{x}[t] \triangleq \mathbf{w}[t], \quad \mathbf{w} = [\mathbf{g}(y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}), y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{z}].$$

Если переменные y_{r+1}, \dots, y_m исходной системы (1) можно оценить тем или иным образом (например, зная первые интегралы этой системы), то указанное обстоятельство можно использовать для конструктивной проверки заданных ограничений (2) на управления u_k .

Пусть оценки (8) получены. Достаточные условия разрешимости задачи 1 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) условие (5) в области S_1 ;
- 2) условия (12) и (13) в области S_2 ;
- 3) для любого $\mathbf{x}_0 \in S_0$ найдется число α^* ($\alpha^* > \beta^*$) такое, что:

$$\begin{aligned} \left| f_k(\mathbf{w}[t], \mathbf{u}^*[t]) \right| &\leq \alpha_k \quad (k = \overline{1, r}), \\ \|\mathbf{w}[t]\| &\leq \min(H_1, H_2), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]. \end{aligned} \tag{15}$$

Тогда для любого \mathbf{x}_0 из области S_0 управления (6), (11) обеспечивают гарантированное «прохождение» системой (1) положения (4) в конечный момент времени $t_1 = t_0 + \tau$ при любых допустимых реализациях помех v_i .

Доказательство. При выполнении условия (5) в области S_1 из замкнутой нелинейной системы (1), (6) можно выделить линейную конфликтно-управляемую систему (7). При этом поведение переменных z_1, \dots, z_r нелинейной системы (1), (6), (11) определяется поведением этих же переменных замкнутой линейной системы (7), (11).

Поэтому для всех значений \mathbf{x}_0 , таких, что фазовый вектор $\mathbf{x}[t]$ в процессе управления остается в области S_1 , управления (6), (11) обеспечивают гарантированное «прохождение» системой (1) положения (4) в конечный момент времени $t_1 = t_0 + \tau$. Однако при этом не гарантируется выполнение заданных ограничений (2) на управления (6), (11).

Если в области S_2 выполнены условия (12), (13), а для любого $\mathbf{x}_0 \in S_0$ выполнены условия (15), то для всех $\mathbf{x}_0 \in S_0$ управления (6), (11) не только обеспечивают гарантированное «прохождение» системой (1) положения (4) в конечный момент времени $t_1 = t_0 + \tau$, но и удовлетворяют заданным ограничениям (2). Теорема доказана.

6. Дополнительные возможности предложенного подхода.

Рассмотрим два варианта модификации, позволяющие расширить возможности предложенного подхода.

6.1. Управление по большей части переменных (по отношению к y_k, z_k). Допустим, что в области S_2 имеют место соотношения (14), причем дополнительно имеют место тождества:

$$g_k(y_{r+1}, \dots, y_m, \mathbf{0}, \mathbf{0}) \equiv 0 \quad (k = \overline{1, r}). \quad (16)$$

Покажем, что в данном случае при соответствующем изменении вспомогательной игровой задачи для линейной конфликтно-управляемой системы (7) и при выполнении условий теоремы 1 управления (6) будут гарантированно переводить систему (1) из заданной области S_0 начальных значений \mathbf{x}_0 за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в положение, где:

$$y_k[t_1] = z_k[t_1] = 0 \quad (k = \overline{1, r}). \quad (17)$$

Значения остальных фазовых переменных системы (1) в момент времени t_1 могут быть произвольными. Момент времени t_1 не фиксируется.

Для этого, в отличие от раздела 4, для линейной системы (7) решим задачу о быстрейшем гарантированном приведении в положение:

$$z_k[t_1] = \dot{z}_k[t_1] = 0 \quad (k = \overline{1, r}). \quad (18)$$

Управление также осуществляется посредством u_k^* при любых допустимых реализациях v_k^* , удовлетворяющих неравенствам (8). Данную задачу трактуем как игровую антагонистическую, в которой один из игроков распоряжается управлениями u_k^* и стремится уменьшить время $\tau = t_1 - t_0$ приведения системы (7) в положение (18). Второй игрок (противник) стремится увеличить значение τ или вообще избежать позиции (18), и имеет в распоряжении «помехи» v_k^* .

Решение этой задачи при ограничениях $|u_k^*| \leq \alpha_k^*$, $|v_k^*| \leq \beta_k^* = \rho_k \alpha_k^*$, $0 < \rho_k < 1$ дают законы управления [1, 24]:

$$u_k^*(z_k, \dot{z}_k) = \begin{cases} \alpha_k^* \operatorname{sgn} \psi_k^p(z_k, \dot{z}_k), & \psi_k^p \neq 0 \\ \alpha_k^* \operatorname{sgn} z_k = -\alpha_i^* \operatorname{sgn} \dot{z}_k, & \psi_k^p = 0 \end{cases} \quad (19)$$

$$\psi_k^p = -z_k - \left[2(1 - \rho_k) \alpha_k^* \right]^{-1} |z_k| |\dot{z}_k|$$

$$(k = \overline{1, r}),$$

где ψ_k^p — функции переключений.

При $v_k^* \neq -\rho_k u_k^*$ движения системы (7), (19) на фазовых плоскостях переменных z_k, \dot{z}_k будут сначала происходить (до достижения кривых переключений $\psi_k^p = 0$) между дуг парабол, являющихся траекториями систем $\ddot{z}_k = (1 \pm \rho_k) u_k^*$. Далее движения будут происходить вдоль кривых переключений в скользящем режиме до достижения требуемых конечных значений (18); на этих участках движения управления u_k^* принимают значения $\pm \alpha_k^*$ с бесконечно частыми сменами знака.

Указанные решения (движения) системы (7), (19) с формально-математической точки зрения трактуем как абсолютно непрерывные функции времени, удовлетворяющие почти всюду соответствующим дифференциальным включениям.

Величина $\tau = \max(\tau_k)$, где τ_k — минимальное гарантированное время для каждой подсистемы системы (7), определяет минимальное гарантированное время в рассматриваемой задаче. Значения τ_k соответствуют случаям $v_k^* = -\rho_k u_k^*$ «наихудших» помех v_k^* , — оптимальных управлений «противника». Если же v_k^* отличаются от «наихудших», то встреча с положением (18) произойдет быстрее. Отметим, что те подсистемы системы (18), которые придут в требуемое положение раньше, чем последняя из них, остаются в этом положении, и соответствующие управления u_k^* в этих подсистемах парируют помехи v_k^* .

Теорема 2. Пусть выполняются следующие условия:

- 1) условие (5) в области S_1 ;
- 2) условия (12), (13) и (16) в области S_2 ;
- 3) для любого $x_0 \in S_0$ найдутся числа α_k^* ($\alpha_k^* > \beta_k^*$) такие, что выполнены соотношения (15).

Тогда для любого x_0 из области S_0 управления (6), (19) обеспечивают гарантированный перевод системы (1) в положение (4) за конечное время τ при любых допустимых реализациях помех v_i .

Доказательство. Если в области S_2 выполнены условия (12), (13), (16), то приведение переменных $\mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}$ линейной системы (7) посредством управлений (19) в положение (18) будет означать приведение нелинейной системы (1) посредством управлений (6), (19) в положение (17).

Поэтому для всех значений x_0 таких, что фазовый вектор $\mathbf{x}[t]$ в процессе управления остается в области $S_1 \cap S_2$, управления (6), (19) обеспечивают гарантированное приведение нелинейной системы (1) в положение (17) за конечное время τ . Однако при этом не гарантируется выполнение заданных ограничений (2) на управления (6), (19).

При выполнении условий (15) для всех $\mathbf{x}_0 \in S_0$ фазовый вектор $\mathbf{x}[t]$ остается в области $S_1 \cap S_2$, и для всех $\mathbf{x}_0 \in S_0$ управления (6), (19) не только обеспечивают гарантированное приведение системы (1) в положение (17), но и удовлетворяют ограничениям (2). Теорема доказана.

Замечание 3. Линеаризация обратной связью рассматривается для более общего (в сравнении с [3], где $m = p = r$) класса нелинейных управляемых систем (1), поскольку в данном случае $m > p = r$. Кроме того, управление осуществляется по большей части (по $2r$) переменным, в то время как в [3] управление осуществляется только по r переменным. Дополнительное ограничение на правые части системы (1) в виде условия (12) не связано с линеаризацией, и существенно облегчает проведение оценок фазового вектора $\mathbf{x}[t]$ в процессе управления.

6.2. Упрощение конструкции управлений (6). Пусть $\Phi_s^{(1)}(\mathbf{x})$, $\Phi_s^{(2)}(\mathbf{x})$, $\Phi_s^{(1)}(\mathbf{0}) = \Phi_s^{(2)}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ — две совокупности функций такие, что в области S имеют место тождества:

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial y_i} Y_i^{(0)}(\mathbf{x}) + \sum_{k=1}^r \frac{\partial Z_s(\mathbf{x})}{\partial z_k} Z_k(\mathbf{x}) \equiv \Phi_s^{(1)}(\mathbf{x}) + \Phi_s^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (s = \overline{1, r}).$$

Если выполняется условие (5), то в области S_1 система линейных относительно u_k алгебраических уравнений:

$$\Phi_s(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \Phi_s^{(1)}(\mathbf{x}) = u_s^*$$

имеет единственное (при фиксированном выборе $\Phi_s^{(1)}$) решение:

$$u_k = f_k^*(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*), \quad f_k^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0 \quad (k = \overline{1, r}), \quad (20)$$

и функции f_k^* непрерывны в области S_1 .

Введем обозначения:

$$v_k^{**} = v_k^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{\partial Z_k(\mathbf{x})}{\partial y_i} [Y_i^{(2)}(\mathbf{x}) v_i] \right\} + \Phi_k^{(2)}(\mathbf{x}) \quad (k = \overline{1, r}),$$

и будем интерпретировать v_k^{**} как «вспомогательные помехи».

В результате из замкнутой системы (1), (20) в области S_1 можно выделить линейную управляемую систему дифференциальных уравнений:

$$\ddot{z}_k = u_k^* + v_k^{**} \quad (k = \overline{1, r}). \quad (21)$$

Решение поставленной задачи 1 для исходной нелинейной управляемой системы (1) можно также найти на основе решения соответствующей игровой задачи управления для построенной вспомогательной линейной управляемой системы (21).

Равенства (20) определяют вторую (более простую) структурную форму управлений u_k в задаче 1, причем упрощение структурной формы (6) достигается за счет усложнения «вспомогательных помех» в образующихся вспомогательных линейных конфликтно-управляемых системах. Имеющийся произвол в выборе функций $\Phi_s^{(1)}$ и $\Phi_s^{(2)}$ может использоваться для поиска наиболее приемлемого решения.

Для реализации указанной цели считаем возможным в области S_1 проведение оценки уровней «вспомогательных помех» v_k^{**} (при учете заданных ограничений (3)):

$$|v_k^{**}| \leq \beta_k^{**}, \quad \beta_k^{**} = \sup_{\mathbf{x} \in S_1} [v_k^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{v})] \quad (k = \overline{1, r}).$$

Оценка уровней v_k^{**} (как и оценка уровней v_k^*) может быть затруднена, и зависит от конкретной структуры нелинейной управляемой системы (1). В случае, когда система (1) описывает пространственный разворот твердого тела (см. раздел 7), такая оценка может быть получена на основе принципа «назначения и последующего подтверждения» уровней v_k^{**} .

Теорема 3. Пусть выполняются условия (2), (3) теоремы 1, и для любого $\mathbf{x}_0 \in S_0$ найдется число α^* ($\alpha^* > \beta^*$) такое, что выполнены соотношения:

$$\begin{aligned} |f_k^*(\mathbf{w}[t], \mathbf{u}^*[t])| &\leq \alpha_k \quad (k = \overline{1, r}), \\ \|\mathbf{w}[t]\| &\leq \min(H_1, H_2), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau]. \end{aligned}$$

Тогда для любого \mathbf{x}_0 из области S_0 управления (20), (11) обеспечивают гарантированное «прохождение» системой (1) положения (4) в конечный момент времени $t_1 = t_0 + \tau$ при любых допустимых реализациях v_i .

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1, 2.

7. Приложение к задачам пространственного разворота асимметричного твердого тела. Допустим, что вдоль главных центральных осей инерции асимметричного твердого тела (космического аппарата) закреплены оси вращения однородных симметричных маховиков. Поскольку геометрия масс данной механической системы

«несущее основное тело — маховики» не меняется при вращениях маховиков, то эта система является гиростатом, и ее вращательное движение вокруг центра масс описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений [3, 25]:

$$\begin{aligned} (A_1 - J_1)\dot{\omega}_1 &= (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + J_2\omega_3\dot{\phi}_2 - J_3\omega_2\dot{\phi}_3 - u_1 + v_1, \\ (A_2 - J_2)\dot{\omega}_2 &= (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 + J_3\omega_1\dot{\phi}_3 - J_1\omega_3\dot{\phi}_1 - u_2 + v_2, \\ (A_3 - J_3)\dot{\omega}_3 &= (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + J_1\omega_2\dot{\phi}_1 - J_2\omega_1\dot{\phi}_2 - u_3 + v_3, \\ J_k(\ddot{\phi}_k + \dot{\omega}_k) &= u_k \quad (k = \overline{1,3}). \end{aligned} \quad (22)$$

В системе (22): ω_k — проекции вектора угловой скорости основного тела на главные центральные оси \mathbf{i}_k эллипсоида инерции гиростата; A_k, J_k — главные центральные моменты инерции гиростата и осевые моменты инерции маховиков; ϕ_k — углы поворота маховиков, оси вращения которых закреплены вдоль осей \mathbf{i}_k .

Управляющие моменты u_k (моменты внутренних сил) приложены к маховикам и создаются специальными двигателями. Моменты v_k характеризуют внешние неконтролируемые возмущения (в том числе и некоторые внешние силы), действующие на основное тело. Управляющие моменты u_k и помехи v_k удовлетворяют соответственно ограничениям (2) и (3).

Ориентацию основного тела рассматриваемого трехроторного гиростата будем определять уравнениями для кватернионов (кинематическими уравнениями в переменных Родрига — Гамильтона [25]):

$$\begin{aligned} 2\dot{\eta}_1 &= \eta_4\omega_1 + \eta_2\omega_3 - \eta_3\omega_2, & 2\dot{\eta}_2 &= \eta_4\omega_2 + \eta_3\omega_1 - \eta_1\omega_3, \\ 2\dot{\eta}_3 &= \eta_4\omega_3 + \eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1, & \eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + \eta_4^2 &= 1. \end{aligned} \quad (23)$$

Требуется найти управляющие моменты u_k , осуществляющие гарантированный разворот основного тела за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в заданное угловое положение. Не нарушая общности, считаем:

$$\eta_k[t_1] = 0, \eta_4[t_1] = 1, \quad (24)$$

когда в момент времени $t_1 > t_0$ происходит совмещение связанной с телом и заданной систем координат.

Начальные угловые скорости основного тела и маховиков считаем нулевыми. В момент времени t_1 угловая скорость основного тела или также нулевая или не фиксируется («прохождение» заданного положения), а угловая скорость маховиков не фиксируется.

В данном случае систему (22), (23), записанную в переменных, соответствующих структуре системы (1), можно представить в виде (здесь и далее под знаком суммы суммирование по j от 1 до 3):

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= (A_1 - J_1)^{-1} [(A_2 - A_3)y_2y_3 + J_2y_3y_5 - J_3y_2y_6 - u_1 + v_1], \\ \dot{y}_2 &= (A_2 - J_2)^{-1} [(A_3 - A_1)y_1y_3 + J_3y_1y_6 - J_1y_3y_4 - u_2 + v_2], \\ \dot{y}_3 &= (A_3 - J_3)^{-1} [(A_1 - A_2)y_1y_2 + J_1y_2y_4 - J_2y_1y_5 - u_3 + v_3], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\dot{y}_{3+k} = -\dot{y}_k + J_l^{-1}u_k \quad (k = \overline{1,3}),$$

$$\dot{z}_1 = \frac{1}{2}(y_1\sqrt{1 - \sum z_j^2} - y_2z_3 + y_3z_2),$$

$$\dot{z}_2 = \frac{1}{2}(y_2\sqrt{1 - \sum z_j^2} + y_1z_3 - y_3z_1), \quad \dot{z}_3 = \frac{1}{2}(y_3\sqrt{1 - \sum z_j^2} - y_1z_2 + y_2z_1),$$

причем, как будет показано, достаточно рассматривать ее в области:

$$\sum z_j^2 < 1. \quad (26)$$

7.1. Задачи управления по части переменных. Уточним рассматриваемые задачи пространственного разворота тела применительно к нелинейной управляемой системе (25).

Задача 2 (переориентации твердого тела). Найти управляющие моменты u_k , гарантированно переводящие систему (25) из области:

$$S_0 = \{\mathbf{x}_0 = (y_0, \mathbf{z}_0) = (\mathbf{0}, z_{10}, z_{20}, z_{30}), \sum z_{j0}^2 < 1\} \quad (27)$$

за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в положение:

$$y_k[t_1] = z_k[t_1] = 0 \quad (k = \overline{1,3}). \quad (28)$$

Значения $y_{3+k}[t_1]$, а также момент времени t_1 , не фиксируются.

Задача 3 («прохождения» твердым телом заданного положения). Найти управляющие моменты u_k , гарантированно переводящие систему (25) из области (27) за конечное время $\tau = t_1 - t_0$ в положение:

$$z_k[t_1] = 0 \quad (k = \overline{1,3}). \quad (29)$$

Значения $y_k[t_1]$ и $y_{3+k}[t_1]$, а также момент времени t_1 , не фиксируются.

Покажем, что предложенный в разделах 2-5 подход к решению задачи 1, а также его модификации, указанные в разделе 6, позволяют:

1) Охватить более сложный (в сравнении с [3], где задачи 2, 3 решаются посредством моментов внешних сил, создаваемых реактивными двигателями) класс задач пространственного разворота асимметричного твердого тела в неопределенной внешней среде посредством моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками.

2) С единых позиций получить и дополнить ранее найденные [20-22] решения задач 2, 3, а также дать новое решение в задаче 2 посредством более простых управлений.

7.2. Выполнимость условий теорем 1, 2. Имеем $m = 6$, $p = r = 3$ (поэтому используемые в статье индексы k, s и j меняются далее от 1 до 3) и для системы (25) выполнено (при $Z_s^{(2)} \equiv 0$) условие (12).

Компоненты f_{ks}, q_{ks} матриц F, Q определяются следующим образом:

$$f_{kk} = -q_{kk}(A_k - J_k)^{-1}, \quad q_{kk} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \sum z_j^2},$$

$$f_{12} = q_{21}(A_2 - J_2)^{-1}, \quad f_{13} = q_{23}(A_3 - J_3)^{-1}, \quad f_{21} = q_{12}(A_1 - J_1)^{-1},$$

$$f_{23} = q_{32}(A_3 - J_3)^{-1}, \quad f_{31} = q_{13}(A_1 - J_1)^{-1}, \quad f_{32} = q_{23}(A_2 - J_2)^{-1},$$

$$q_{12} = -q_{21} = -\frac{1}{2}z_3, \quad q_{13} = -q_{31} = \frac{1}{2}z_2, \quad q_{23} = -q_{32} = -\frac{1}{2}z_1$$

и, следовательно, в области (26) имеем $\text{rank } F = \text{rank } Q = 3$. Поэтому в области (26) выполнены условия 1, 2 теоремы 1 и условие 1 теоремы 2.

Управляющие моменты u_k типа (6) имеют вид (выписано только выражение для u_1 ; выражения для u_2 и u_3 получаются из u_1 циклической перестановкой индексов $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6$; здесь и далее суммирование по l , как и по j , от 1 до 3):

$$u_1 = -\frac{2(A_1 - J_1)}{\sqrt{1 - \sum z_j^2}} [u_1^*(1 - z_2^2 + z_3^2) + u_2^*(z_1 z_2 + z_3 \sqrt{1 - \sum z_j^2}) +$$

$$+ u_3^*(z_1 z_3 - z_2 \sqrt{1 - \sum z_j^2}) + \frac{1}{4}z_1 \sum y_l^2] +$$

$$+ (A_2 y_2 + J_2 y_5) y_3 - (A_3 y_3 + J_3 y_6) y_2. \tag{30}$$

Из замкнутой нелинейной системы (25), (30) можно выделить вспомогательную линейную конфликтно-управляемую систему типа (7):

$$\begin{aligned} \ddot{z}_k &= u_k^* + v_k^* \quad (k = \overline{1,3}), \\ v_1^* &= \frac{1}{2}[\sqrt{1 - \sum z_j^2} v_1(A_1 - J_1)^{-1} + z_2 v_3(A_3 - J_3)^{-1} - \\ &\quad - z_3 v_2(A_2 - J_2)^{-1}] \\ &\quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3). \end{aligned} \quad (31)$$

Используя неравенства Коши — Буняковского, имеем:

$$|v_k^*| \leq \beta_k^* = \beta^* = \frac{1}{2} \sqrt{\sum \frac{\beta_l^2}{(A_l - J_l)^2}}. \quad (32)$$

В силу вида области S_0 (см. выражения (27)) выполнены условия $\dot{z}_{k0} = 0$ ($k = \overline{1,3}$). Поэтому при решении задач 2, 3 в линейных управляемых системах (31), (11) и (31), (19) имеют место соотношения:

$$\sum z_j^2[t] \leq \sum z_{j0}^2 < 1, \quad |z_k[t]| \leq |z_{k0}|$$

и, следовательно, систему (25) достаточно рассматривать в области (26).

Соотношения (14) сводятся к уравнениям:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{2}{\sqrt{1 - \sum z_j^2}} [\dot{z}_1(1 - z_2^2 + z_3^2) + \dot{z}_2(z_1 z_2 + z_3 \sqrt{1 - \sum z_j^2}) + \\ &\quad + \dot{z}_3(z_1 z_3 - z_2 \sqrt{1 - \sum z_j^2})] \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3). \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку $y_k = 0$ при $z_k = \dot{z}_k = 0$ ($k = \overline{1,3}$), то имеют место соотношения (16) и, следовательно, выполнено условие 2 теоремы 2.

Переменные y_4, y_5, y_6 , используя первый интеграл системы (25):

$$\sum [A_l y_l + J_l y_{3+l}]^2 = \text{const},$$

можно оценить следующим образом:

$$|A_k y_k[t] + J_k y_{3+k}[t]| \leq t \left[\sum \beta_l^2 \right]^{1/2} \quad (k = \overline{1,3}). \quad (34)$$

Управляющие моменты (30), (11) и (30), (19) обеспечивают гарантированное приведение тела соответственно в положения (29) и (28) за конечное время при любых $\alpha_k^* > \beta_k^*$ (в задаче 2) и любом $\alpha^* > \beta^*$ (в задаче 3). Но заданные ограничения (2) могут при этом не выполняться.

Условие 3 теорем 1, 2 применительно к задачам 2, 3 можно проверить по-разному. Например, в работах [20-22] получены прямые оценки допустимых уровней β_k помех v_k , определяющие возможности решения задач 2, 3 посредством управляющих моментов (30), (19) и (30), (11) при ограничениях (2). Эти оценки используют, в частности, неравенства (32).

Покажем, что в задаче 2 эти неравенства, а также сами оценки [20, 21], можно несколько улучшить, если использовать принцип «назначения и последующего подтверждения» уровней v_k^* .

Утверждение 1. Если выполняются неравенства:

$$\sqrt{3}(A_k - J_k)\gamma_k \sqrt{\sum \frac{\beta_l^2}{(A_l - J_l)^2}} + 4\sqrt{2}\lambda_k \sqrt{\sum z_{j0}^2} \sqrt{\sum \beta_l^2} < \alpha_k; \quad (35)$$

$$\gamma_k = \sqrt{\left(1 + \frac{z_{k0}^2}{1 - \sum z_{j0}^2}\right) (1 - z_{k0}^2)}, \quad \lambda_1 = \sqrt{2 + \frac{z_{20}^2 + z_{30}^2}{1 - \sum z_{j0}^2}} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3),$$

то задача 2 может быть решена посредством управляющих моментов (30), (19), удовлетворяющих заданным ограничениям (2).

Доказательство. «Назначим» уровни β_k^* «вспомогательных помех» v_k^* в системе (31), полагая:

$$\beta_k^* = \frac{1}{2}(1 - z_{k0}^2)^{1/2} \left[\sum \beta_l^2 (A_l - J_l)^{-2} \right]^{1/2}, \quad (36)$$

и рассмотрим управления (19), в которых $\alpha_k^* = \beta_k^* + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое положительное число.

На множестве состояний системы (31), (19) имеем [20, 21]:

$$z_k^2[t] \leq z_{k0}^2, \quad |z_k^2[t]| \leq |z_{k0}| (\alpha_k^*)^{-1} \left[(\alpha_k^*)^2 - (\beta_k^*)^2 \right]. \quad (37)$$

Учитывая оценку (34), а также равенства:

$$\tau = \max(\tau_k), \quad \tau_k = 2\sqrt{|z_{k0}| (\alpha_k^* - \beta_k^*)^{-1}},$$

определяющие минимальное гарантированное время управления в системе (31), с учетом фазового портрета системы (31), (19), используя

неравенство Коши — Буняковского и неравенства (37), получаем соотношения:

$$\begin{aligned}
 & \left| \{A_2 y_2[t] + J_2 y_5[t]\} y_3[t] \right| \leq 2 \left(1 - \sum z_j^2[t] \right)^{-1/2} \left(\sum \beta_i^2 \right)^{1/2} \times \\
 & \times \left| \tau_3 \dot{z}_3[t] \{ 1 - z_1^2[t] - z_2^2[t] \} + \tau_1 \dot{z}_1[t] \{ z_3[t] z_1[t] + z_2[t] \sqrt{1 - \sum z_j^2[t]} \} + \right. \\
 & \quad \left. + \tau_2 \dot{z}_2[t] \{ z_3[t] z_2[t] - z_1[t] \sqrt{1 - \sum z_j^2[t]} \} \right| \leq \\
 & \leq 2 \left\{ 1 + z_3^2[t] \left(1 - \sum z_j^2[t] \right)^{-1} \right\}^{1/2} \left(\sum \beta_i^2 \right)^{1/2} \left[\sum \{ \tau_k \dot{z}_k[t] \}^2 \right]^{1/2} \leq \\
 & \leq 4 \left\{ 1 + z_{30}^2 \left(1 - \sum z_{j0}^2 \right)^{-1} \right\}^{1/2} \times \\
 & \times \left[\left(\alpha_3^* + \beta_3^* \right) z_{30}^2 / \alpha_3^* + \left(\alpha_1^* + \beta_1^* \right) z_{10}^2 / \alpha_1^* + \left(\alpha_2^* + \beta_2^* \right) z_{20}^2 / \alpha_2^* \right]^{1/2} \left(\sum \beta_i^2 \right)^{1/2} \leq \\
 & \leq 4\sqrt{2} \left\{ 1 + z_{30}^2 \left(1 - \sum z_{j0}^2 \right)^{-1} \right\}^{1/2} \left(\sum z_{j0}^2 \right)^{1/2} \left(\sum \beta_i^2 \right)^{1/2} \\
 & \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3, \quad 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6).
 \end{aligned}$$

Это значит, что полученные верхние оценки выражений типа $\{A_2 y_2[t] + J_2 y_5[t]\} y_3[t]$, входящих в «вспомогательные помехи» v_k^{**} в системе (31), (19), не зависят от «назначенных» значений β_k^* , а также от выбранных значений α_k^* . (Поэтому данные оценки совпадают с полученными ранее в работах [20, 21].)

Кроме того, в силу равенства:

$$\frac{1}{4} \sum y_i^2[t] = \left(1 - \sum z_j^2[t] \right)^{-1} \sum \dot{z}_k^2[t],$$

на основании неравенств (37) заключаем, что при достаточно малом значении ε выражения:

$$\left(A_k - J_k \right) z_k[t] \left(1 - \sum z_j^2[t] \right)^{-3/2} \sum y_i^2[t],$$

входящие в u_k , также являются достаточно малыми.

В результате при достаточно малом $\varepsilon > 0$ на множестве состояний линейной конфликтно-управляемой системы (31), (19) имеем соотношения:

$$\begin{aligned}
 |u_k[t]| & \leq 2 \left(A_k - J_k \right) \left\{ 1 + z_{k0}^2 \left(1 - \sum z_{j0}^2 \right)^{-1} \right\}^{1/2} \left[\sum \left(\alpha_i^* \right)^2 \right]^{1/2} + \\
 & + 4\sqrt{2} \lambda_k \left(\sum z_{j0}^2 \right)^{1/2} \left(\sum \beta_i^2 \right)^{1/2} \quad (k = 1, 3).
 \end{aligned}$$

На основании неравенства Коши — Буняковского справедливы более точные (в сравнении с (32)) оценки:

$$\begin{aligned} |v_1^*[t]| &= \frac{1}{2} |[\sqrt{1 - \sum z_j^2[t]} v_1(A_1 - J_1)^{-1} + \\ &+ z_2[t] v_3(A_3 - J_3)^{-1} - z_3[t] v_2(A_2 - J_2)^{-1}]| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - z_{10}^2)^{1/2} \left[\sum \beta_l^2 (A_l - J_l)^{-2} \right]^{1/2} \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3). \end{aligned}$$

В результате получаем оценки $|v_k^*| \leq \beta_k^*$, что подтверждает «назначенные» уровни «вспомогательных помех» v_k^* .

Поэтому при достаточно малом значении ε заданные ограничения (2) на управляющие моменты (30), (19) выполнены при выполнении неравенств (35). Утверждение доказано.

Утверждение 2 [22]. Если выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} \sqrt{3} (A_k - J_k) \gamma \sqrt{\sum \frac{\beta_l^2}{(A_l - J_l)^2}} + 8\lambda \sqrt{(\sum \beta_l^2)} &< \alpha_k, \\ \gamma = \frac{1 + 3 \sum z_{j0}^2}{\sqrt{(1 - \sum z_{j0}^2)^3}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{\sum z_{j0}^2}{1 - \sum z_{j0}^2}}, \end{aligned} \quad (38)$$

то задача 3 может быть решена посредством управляющих моментов (30), (11), удовлетворяющих заданным ограничениям (2).

Полученные оценки (35), (38) связывают максимально допустимые уровни управляющих моментов (30), (19) и (30), (11), неконтролируемых возмущений v_k , а также область допустимых начальных значений z_{k0} в задачах 2, 3 соответственно. В «предельном» случае $z_{k0} = 0$ (или когда область допустимых начальных значений z_{k0} является малой), неравенства (35) и (38) совпадают и записываются в значительно более простой форме:

$$\sqrt{3} (A_k - J_k) \sqrt{\sum \frac{\beta_l^2}{(A_l - J_l)^2}} < \alpha_k. \quad (39)$$

Отметим, что при $J_l = 0$ оценка (39) совпадает с «предельной» оценкой области допустимых уровней помех в задаче переориентации твердого тела посредством моментов внешних сил [3].

Оценки (35), (38) являются завышенными, поскольку для их вывода используется ряд неравенств, а также делаются предположения

о «наихудшем» поведении вспомогательной системы. Кроме того, для простоты используется единая для всего промежутка управления оценка уровней управляющих моментов, хотя реализации построенных управляющих моментов являются функциями, значения которых меняются в процессе управления в достаточно широких пределах.

Такая ситуация является характерной и, по-видимому, неизбежной при стремлении получить достаточно простые и наглядные соотношения допустимых уровней управлений и помех в сложных нелинейных управляемых системах. Реальные соотношения уровней построенных в рамках предложенного подхода управляющих моментов и неконтролируемых помех значительно ниже, причем в каждый конкретный момент времени эти соотношения меняются в достаточно широких пределах.

Выделим два этапа использования неравенств, приводящих к завышенности оценок (35), (38). На первом этапе используется неравенство Коши — Буняковского для оценки уровней β_k^* «вспомогательных помех» v_k^* , приводящее к относительно небольшому завышению их истинных уровней. При этом величины β_k^* входят в u_k^* и, следовательно, входят в управляющие моменты (30), (19) и (30), (11), что также приводит к некоторому (относительно небольшому) завышению их уровней.

На втором этапе используется цепочка неравенств для оценки самих управляющих моментов (30), (19) и (30), (11), но полученные завышенные величины (в отличие от величин β_k^*) не входят в управляющие моменты. Поэтому управляющие моменты (30), (19) и (30), (11) работоспособны и эффективны и за пределами полученных оценок, что подтверждают результаты численных расчетов.

7.3. Результаты численных расчетов. Для трехроторного гиростата с $A_1 = 4 \times 10^4$, $A_2 = 8 \times 10^4$, $A_3 = 5 \times 10^4$ (кгм²); $J_1 = 4 \times 10^3$, $J_2 = 8 \times 10^3$, $J_3 = 5 \times 10^3$ (кгм²) рассмотрим задачу 3 при начальных значениях $z_{10} = 0.353$, $z_{20} = 0.434$, $z_{30} = 0.432$ (рад).

Пусть уровни β_k неконтролируемых помех v_k определяются равенством $\beta_k^* = 10^{-3}$ (рад/с²). В случае $\beta_k = \beta$ имеем $\beta = 55.99$ (Нм).

Допустим, что гарантированное время переориентации $\tau = 70$ (с). Значения τ , β_k^* предопределяют значение уровня α^* вспомогательных управлений u_k^* в управляющих моментах (30), (11):

$$\alpha^* = \sqrt{3} \times 10^{-3} + \frac{\sqrt{\sum z_{j0}^2}}{\tau^2} = 1.87 \times 10^{-3} \text{ (рад/с}^2\text{)}.$$

Оценим уровни управляющих моментов (30), (11). Расчет показывает, что при «наихудших» помехах v_k^* уровни управляющих

моментов (30), (11) следующие (законы изменения u_k в этом случае даны на рисунке 1):

$$\alpha_1 = 122.48, \alpha_2 = 252.56, \alpha_3 = 221.19 \text{ (Нм)}.$$

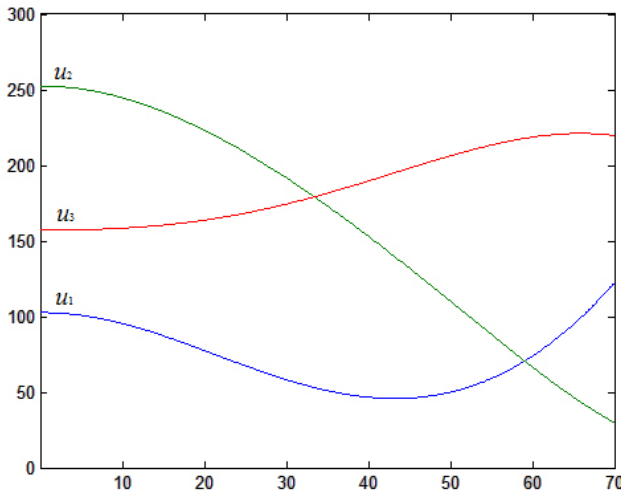


Рис. 1. Реализации управляющих моментов u_k вида (30), (11) в случае «наихудших помех» v_k^*

Сравнивая с уровнями $\beta = 55.99$ (Нм) помех, в данном случае имеем:

$$\beta < \min (0,4571\alpha_1; 0,2217\alpha_2; 0,2531\alpha_3), \quad (40)$$

что на порядок отличается от оценки (38), которая принимает вид:

$$\beta < \min (0,0338\alpha_1; 0,0226\alpha_2; 0,0304\alpha_3).$$

Указанная существенная разница, как уже отмечалось, объясняется тем, что при получении неравенств (38) использованы завышенные оценки, но управляющие моменты (30), (11) и их уровни не зависят от этих завышенных оценок. Кроме того, реализации управляющих моментов (30), (11) не являются релейными функциями времени, и меняются в процессе управления в достаточно широких пределах. Поэтому оценка (38) не полностью характеризует реальное соотношение допустимых уровней управляющих моментов (30), (11) и действующих неконтролируемых помех, и на отдельных промежутках времени при развороте основного тела гиростата некоторые значения β/α_k превышают 1.

Расчет также показывает, что при отсутствии помех v_k (в этом случае имеют место тождества $v_k^* \equiv 0$) уровни управляющих моментов (30), (11) определяются значениями:

$$\alpha_1 = 102.71, \alpha_2 = 252.56, \alpha_3 = 157.12 \text{ (Нм)}.$$

Сравнивая с уровнями $\beta = 55.99$ (Нм) помех, в данном случае имеем:

$$\beta < \min(0,5451\alpha_1; 0,2217\alpha_2; 0,3564\alpha_3),$$

а на отдельных промежутках времени некоторые значения β/α_k также превышают 1.

В целом моделирование показывает, что при одних и тех же ограничениях на управляющие моменты u_k , гарантированное время разворота основного тела гиростата в задаче 3 меньше, чем в задаче 2.

Как уже отмечалось, полученные оценки (35), (38) существенно зависят от начальных значений z_{k0} . Например, в «предельном» случае $z_{k0} = 0$ (или при малых значениях z_{k0}) области (35) и (38) совпадают и имеют вид:

$$\beta < \min(0,4201\alpha_1; 0,2102\alpha_2; 0,3360\alpha_3).$$

С другой стороны, случай $\sum z_{j0}^2 = 3/4$ также является «предельным» в том плане, что для расширения допустимой области помех на первом этапе следует перейти к управляющим моментам, получающимся из (30), (19) или (30), (11) соответствующей перестановкой индексов. Поэтому для выбранных значений параметров гиростата область допустимых значений β при использовании управляющих моментов (30), (19) или (30), (11) является промежуточной по отношению к указанным двум «предельным» областям. Например, при $z_{k0} = 0.1$ (рад) область (38) принимает вид:

$$\beta < \min(0,1894\alpha_1; 0,0947\alpha_2; 0,1669\alpha_3).$$

Отметим также, что в рамках рассматриваемого в статье подхода неуправляемые переменные y_i связаны с управляемыми переменными z_k, \dot{z}_k соотношениями (33), (34). Это исключает недопустимые в процессе управления «особенности» поведения этих переменных (типа «ухода в бесконечность» за конечное время). Поэтому поведение неуправляемых переменных замкнутой системы (25) является регулярным.

Для примера, при «наихудших» помехах v_k^* законы изменения переменных $y_k[t]$ (угловых скоростей тела) и переменных $y_{3+k}[t]$ (угловых скоростей маховиков) даны соответственно на рисунках 2 и 3.

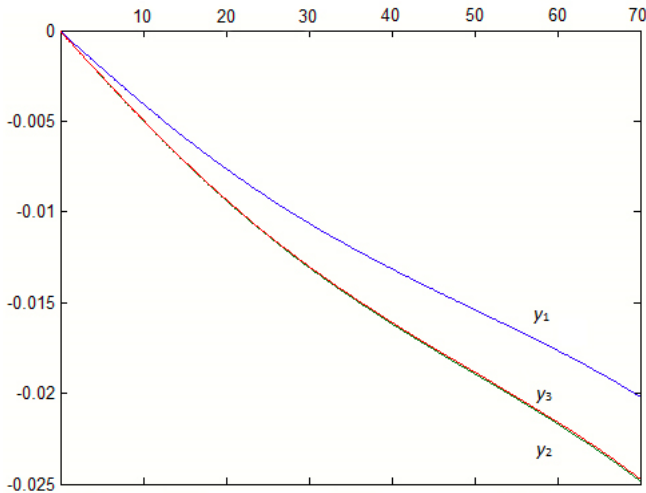


Рис. 2. Законы изменения переменных $y_k[t]$ замкнутой системы (25), (30), (11) в случае «наихудших помех» v_k^*

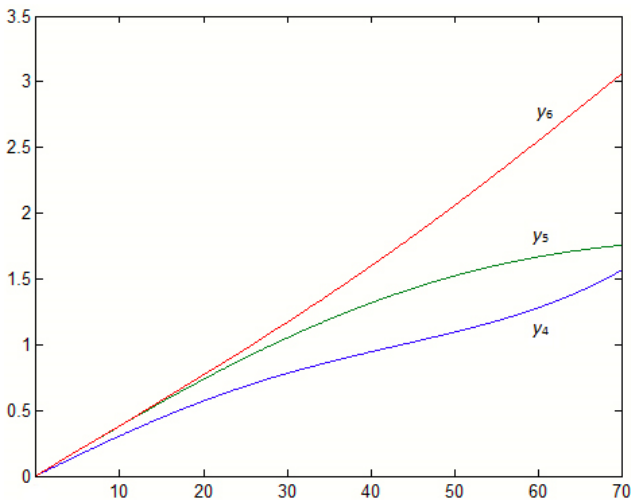


Рис. 3. Законы изменения переменных $y_{3+k}[t]$ замкнутой системы (25), (30), (11) в случае «наихудших помех» v_k^*

7.4. Упрощение управлений в задаче 2. Покажем, что оценка (35) определяет возможность решения задачи 2 не только посредством управляющих моментов (30), (19), но и посредством более простых управляющих моментов типа (20):

$$\begin{aligned}
 u_1 = & -\frac{2(A_1 - J_1)}{\sqrt{1 - \sum z_j^2}} [u_1^* (1 - z_2^2 - z_3^2) + u_2^* (z_1 z_2 + z_3 \sqrt{1 - \sum z_j^2}) \\
 & + u_3^* (z_1 z_3 - z_2 \sqrt{1 - \sum z_j^2})] + \\
 & + (A_2 y_2 + J_2 y_5) y_3 - (A_3 y_3 + J_3 y_6) y_2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3).
 \end{aligned} \tag{41}$$

В данном случае из нелинейной системы (25), (41) можно выделить линейную конфликтно-управляемую систему типа (21):

$$\begin{aligned}
 \ddot{z}_k &= u_k^* + v_k^{**} \quad (k = \overline{1, 3}), \\
 v_1^{**} &= \frac{1}{2} [\sqrt{1 - \sum z_j^2} (v_1 + V_1) (A_1 - J_1)^{-1} + \\
 & + z_2 (v_3 + V_2) (A_3 - J_3)^{-1} - z_3 (v_2 + V_3) (A_2 - J_2)^{-1}], \\
 V_1 &= -\frac{1}{2} \frac{(A_1 - J_1)}{\sqrt{1 - \sum z_j^2}} z_1 \sum y_i^2 \quad (1 \rightarrow 2 \rightarrow 3).
 \end{aligned} \tag{42}$$

Утверждение 3. Если выполняются неравенства (35), то задача 2 может быть решена посредством управляющих моментов (41), (19), удовлетворяющих заданным ограничениям (2).

Доказательство. «Назначим» уровни β_k^{**} «вспомогательных помех» v_k^{**} в вспомогательной линейной системе (42), полагая $\beta_k^{**} = \beta_k^* + \varepsilon_1$ (значения β_k^* определяются соотношениями (36)). Рассмотрим также управления (19), в которых $\alpha_k^* = \beta_k^* + \varepsilon_2$. Здесь $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ — достаточно малые положительные числа.

Аналогично доказательству утверждения 1 можно показать, что достаточно малые положительные числа $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 > 0$ можно выбрать таким образом, чтобы заданные ограничения (2) на управляющие моменты (41), (19) были выполнены при выполнении неравенств (35).

Кроме того, в силу соотношений (37) имеем:

$$\begin{aligned}
 |V_k[t]| &\leq 2 \left(1 - \sum z_{j0}^2\right)^{3/2} \left(\sum z_{j0}^2\right)^{1/2} \sum \left\{ |z_{l0}| (\alpha_l^*)^{-1} \left[(\alpha_l^*)^2 - (\beta_l^{**})^2 \right] \right\} \leq \\
 &\leq 4(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \lambda^*, \\
 \lambda^* &= \left(1 - \sum z_{j0}^2\right)^{3/2} \left(\sum z_{j0}^2\right)^{1/2} \sum |z_{j0}|,
 \end{aligned}$$

и на основании неравенства Коши — Буняковского получаем оценки:

$$\begin{aligned} |v_k^{**}[t]| &\leq \beta_k^* + 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\lambda^{**}, \\ \lambda^{**} &= \lambda^* \left[\sum (A_l - J_l)^{-2} \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Полагая

$$\varepsilon_2 = \left[1 + \frac{1}{2}(\lambda^{**})^{-1} \right] \varepsilon_1,$$

при достаточно малом ε_1 получаем оценки $|v_k^{**}| \leq \beta_k^* + \varepsilon_1$, что подтверждает «назначенные» уровни «вспомогательных помех» v_k^{**} . Утверждение доказано.

Как и при использовании управляющих моментов (30), (19), условия (35) гарантируют решение задачи 2 посредством управляющих моментов (41), (19) также только при достаточно большом (хотя и конечном) значении τ . Однако учитывая, что оценки (35) завышенные, а управляющие моменты (41), (19) работоспособны и за пределами этих оценок, нахождение гарантированного времени переориентации τ можно осуществить без учета оценок (35) следующим образом.

Итерационный алгоритм (нахождения τ в задаче 2 при управляющих моментах (41), (19)).

Шаг 1. Выбирается значение $\Delta > 0$ и «назначаются» уровни $\beta_k^{**} = \beta_k^* + \Delta$ «вспомогательных помех» v_k^{**} в системе (42) (значения β_k^* определяются соотношениями (36)). Выбираются также «пробные» значения $\alpha_k^* > \beta_k^{**}$, предопределяющие соответствующее значение τ .

Шаг 2. Подтверждается выполнимость неравенств $|v_k^{**}| \leq \beta_k^{**}$ на множестве состояний линейной системы (42), (19), что подтверждает назначенные уровни v_k^{**} .

Поскольку верхние оценки выражений V_k монотонно зависят от значений $\gamma_k = \alpha_k^* - \beta_k^{**}$, причем эти оценки тем меньше, чем меньше значения γ_k , то для выбранного значения $\Delta > 0$ найдется диапазон «пробных» значений α_k^* ($\alpha_k^* > \beta_k^{**}$) и соответствующий диапазон значений τ , в котором «назначенные» уровни v_k^{**} подтверждаются.

Шаг 3. Проверка заданных ограничений (2) на управляющие моменты (41), (19). При этом в управляющие моменты (41), (19) входят значения α_k^* из того диапазона «пробных» значений, в котором «назначенный» уровень v_k^{**} подтверждается.

Если на шаге 3 заданные ограничения (2) на управляющие моменты u_k не выполняются, выбор «пробных» $\alpha_k^* > \beta_k^{**}$ (подбор подходящего значения τ из диапазона значений, в котором «назначенные» уровни

v_k^{**} подтверждается) продолжается. В противном случае гарантированное время переориентации определяется выбранным значением τ .

8. Дополнительное замечание. Для управляемых систем дифференциальных уравнений (1) и (25), линеаризуемых обратной связью, рассмотренные задачи решаются также (см., например, [5]) путем построения траектории движения в заданную точку с последующим обеспечением стабилизации (при помехах) относительно заданной траектории.

В рамках предложенного в статье подхода, в сущности, так и происходит. При использовании управлений (6), (19) и управляющих моментов (30), (19) линейные системы (7) и (31) по каждой переменной выводятся на траектории, соответствующие кривым переключений управлений (19), с последующим движением в скользящем режиме вдоль этих траекторий. Отличие в том, что указанные траектории строятся в результате решения соответствующей игровой задачи оптимального управления.

Отметим, что при отсутствии помех такой способ позволяет получить (как показывают расчеты в работе [3]) субоптимальные по быстродействию законы управления в задаче 2.

При использовании управлений (6), (11) и управляющих моментов (30), (11) движение к цели происходит по траектории, определяемой тормозящей экстремальной стратегией, и при отсутствии помех законы управления также субоптимальны по быстродействию в задаче 3.

9. Заключение. Рассмотрена задача гарантированного перевода нелинейной управляемой системы, подверженной неконтролируемым помехам (возмущениям), за конечное время в положение, где заданная часть переменных равна нулю. Данная задача является задачей частичного (по отношению к части фазовых переменных) управления. Управляемая система является аффинной (линейной по управлениям). Помехи не имеют каких-либо статистических описаний. Управления формируются по принципу обратной связи и удовлетворяют заданным «геометрическим» ограничениям. Реализации управлений и помех допускаются в классе измеримых функций времени. Предполагается, что в процессе управления известна информация о текущих значениях всех координат фазового вектора изучаемой системы.

Предложена модификация метода линеаризующей обратной связи [3], позволяющая получить решение указанной нелинейной задачи управления по части переменных на основе решения соответствующих игровых антагонистических задач управления (с фиксированным временем окончания) для линейных конфликтно-управляемых систем дифференциальных уравнений простейшего

вида. Линеаризация посредством обратной связи рассматривается для более общего (в сравнении с [3], где $m = p = r$) класса нелинейных управляемых систем. Кроме того, управление может осуществляться (в случае использования конструкции (6), (19)) по большей части переменных.

В качестве примера изучается случай, когда рассматриваемая нелинейная управляемая система описывает пространственный разворот асимметричного твердого тела (космического аппарата) в неопределенной внешней среде, генерирующей помехи с неизвестным статистическим описанием. Управление осуществляется посредством ограниченных по величине моментов внутренних сил, создаваемых двигателями-маховиками, что имеет ряд преимуществ при управлении пространственным движением космических аппаратов.

Рассматриваются две типичные задачи гарантированного пространственного разворота тела, где цели управления определяются по части фазовых переменных указанной системы. Наряду с классической задачей переориентации, также рассматривается задача «прохождения» телом заданного углового положения в пространстве, небезынтересная в случаях необходимости быстрой переориентации космического аппарата для совершения кратковременных операций в момент достижения заданного положения (таких, например, как фотографирование, поражение цели, передача информации).

Показано, что предложенный в статье подход позволяет с единых позиций получить и дополнить уже известные решения [20-22] этих задач. Также предложено новое решение задачи гарантированной переориентации твердого тела посредством более простых управляющих моментов. Указанные решения получены в классе пространственных разворотов без каких-либо дополнительных ограничений на характер результирующего движения тела (типа «плоского разворота» вокруг оси Эйлера). Приводятся результаты численных расчетов, показывающие эффективность применяемых управляющих моментов.

Отметим, что имеются также и другие, не использующие линеаризацию обратной связью, подходы к анализу нелинейных задач переориентации асимметричного твердого тела при внешних помехах, основанные на методах конфликтного управления с целевым функционалом интегрального типа, адаптивного управления, а также на методе функций Ляпунова; см., например, работы [26-31]. Данные задачи важны для приложений в космической технике, в том числе для вновь возникающих приложений (связанных, например, с использованием группы космических аппаратов-перехватчиков для борьбы с астероидной опасностью [32]).

Литература

1. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений // М.: Наука. 1970. 420 с.
2. *Акуленко Л.Д.* Асимптотические методы оптимального управления // М.: Наука. 1987. 365 с.
3. *Vorotnikov V.I.* Partial Stability and Control // Boston: Birkhauser. 1998. 448 p.
4. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.* Математическая теория оптимальных процессов // М.: Физматлит. 1961. 392 с.
5. *Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O.* Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems // Kluwer Academic Publisher. 1999. 528 p.
6. *Воротников В.И.* Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. № 4. С. 3–58.
7. *Jammazi C.* Finite-Time Partial Stabilizability of Chained Systems // Comptes Rendus Mathematique. 2008. vol. 346. no. 17-18. pp. 975–980.
8. *Jammazi C.* A Discussion on the Holder and Robust Finite-Time Partial Stabilizability of Brockett’s Integrator // Control, Optimization and Calculus of Variations. 2012. vol. 18. no. 2. pp. 360–382.
9. *Jammazi C.* Continuous and Discontinuous Homogeneous Feedbacks Finite-Time Partially Stabilizing Controllable Multichained Systems // Journal of Control and Optimization. 2014. vol. 52. no. 1. pp. 520–544.
10. *Chen H., Li B.Y., Zhang B.W., Zhang L.* Global Finite-Time Partial Stabilization for a Class of Nonholonomic Mobile Robots Subject to Input Saturation // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2015. vol. 12. no. 11. 159 p.
11. *Haddad W.M., L’Afflitto A.* Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control // Journal of the Franklin Institute. 2015. vol. 352. no. 6. pp. 2329–2357.
12. *Binazadeh T., Shafiei M.H., Bazregarzadeh E.* New Approach in Guidance Law Design Based on Finite-Time Partial Stability Theorem // Journal of Space Science and Technology. 2015. vol. 8. pp. 1–7.
13. *Golestani M., Mohammadzaman I., Yazdanpanah M. J.* Robust Finite-Time Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems Based on Partial Stability // Nonlinear Dynamics. 2016. vol. 85. no. 1. pp. 87–96.
14. *L’Afflitto A.* Differential Games, Finite-Time Partial-State Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems, and Optimal Robust Control // International Journal of Control. 2017. vol. 90. no. 9. pp. 1861–1878.
15. *Rajpurohit T., Haddad W.M.* Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control // Mathematics of Control, Signals, and Systems. 2017. vol. 29. no. 2. 10 p.
16. *Jammazi C., Abichou A.* Controllability of Linearized Systems Implies Local Finite-Time Stabilizability: Applications to Finite-Time Attitude Control // Journal of Mathematical Control and Information. 2018. vol. 35. no. 1. pp. 249–277.
17. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения // Изд-во Харьковского математического общества. 1892. 251 с.
18. *Bhat S.P., Bernstein D.S.* Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems // Journal on Control and Optimization. 2000. vol. 38. no. 3. pp. 751–766.
19. *Bhat S.P., Bernstein D.S.* Geometric Homogeneity with Applications to Finite-Time Stability // Mathematics of Control, Signals and Systems. 2005. vol. 17. no. 2. pp. 101–127.
20. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К нелинейной задаче трехосной переориентации трехроторного гиростата при игровой модели помех // Космические исследования. 2013. Т. 51. № 5. С. 412.
21. *Воротников В.И., Мартышенко Ю.Г.* К задаче переориентации трехроторного гиростата при неконтролируемых внешних помехах // Мехатроника. Автоматизация. Управление. 2016. Т. 17. № 6. С. 414–419.

22. *Воротников В.И., Вохмянина А.В.* К нелинейной задаче «прохождения» трехроторным гироскопом заданного углового положения в пространстве при неконтролируемых внешних помехах // *Космические исследования*. 2018. Т. 56. № 5. С. 382–387.
23. *Филлипов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью // М.: Наука. 1985. 216 с.
24. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами // М.: Физматлит. 2006. 328 с.
25. *Лурье А.И.* Аналитическая механика // М.: Физматлит. 1961. 824 с.
26. *Park Y.* Robust and Optimal Attitude Stabilization of Spacecraft with External Disturbances // *Aerospace Science and Technology*. 2005. vol. 9. no. 3. pp. 253–259.
27. *Ding S.H., Li S.H.* Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with External Disturbances using Finite-Time Control Techniques // *Aerospace Science and Technology*. 2009. vol. 13. no. 4-5. pp. 256–265.
28. *Xia Y.Q., Zhu Z., Fu M.Y., Wang S.* Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Bounded Disturbances // *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2011. vol. 58. no. 2. pp. 647–659.
29. *Hu Q., Niu G.* Attitude Output Feedback Control for Rigid Spacecraft with Finite-Time Convergence // *ISA Transactions*. 2017. vol. 70. pp. 173–186.
30. *Song Z., Duan C., Su H., Hu J.* Full-Order Sliding Mode Control for Finite-Time Attitude Tracking of Rigid Spacecraft // *Control Theory & Applications*. 2018. vol. 12. no. 8. pp. 1086–1094.
31. *Ran D., Chen X., de Ruiter A., Xiao B.* Adaptive Extended-State Observer-Based Fault Tolerant Attitude Control for Spacecraft with Reaction Wheels // *Acta Astronautica*. 2018. vol. 145. pp. 501–514.
32. *Минаков Е.П., Соколов Б.В., Шалдаев С.Е.* Исследование характеристик и вариантов применения околорунной системы поражения астероидов // *Труды СПИИРАН*. 2017. Вып. 5(54). С. 106–129.

Воротников Владимир Ильич — д-р физ.-мат. наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ). Область научных интересов: устойчивость динамических систем, частичная устойчивость и стабилизация, теория управления, динамика управляемого твердого тела (космического аппарата). Число научных публикаций — 190. vorotnikov-vi@rambler.ru; ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002; р.т.: +7(3435) 256722.

Вохмянина Анастасия Владимировна — аспирант кафедры информационных технологий, Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина (УрФУ). Область научных интересов: теория управления, динамика управляемого твердого тела (космического аппарата). Число научных публикаций — 5. vokhmyanina.av@gmail.com; ул. Мира, 19, Екатеринбург, 620002; р.т.: +7(3435) 256722.

V.I. VOROTNIKOV, A.V. VOKHMYANINA
**FEEDBACK LINEARIZATION METHOD FOR PROBLEM OF
CONTROL OF A PART OF VARIABLES IN UNCONTROLLED
DISTURBANCES**

Vorotnikov V.I., Vokhmyanina A.V. Feedback Linearization Method for Problem of Control of a Part of Variables in Uncontrolled Disturbances.

Abstract. The paper studies a problem of guaranteed transfer within a finite amount of time of a nonlinear dynamical system subjected to uncontrolled disturbances to a state where a given part of the variables equals zero. The bounded controls are offered to be generated by means of a feedback in form of nonlinear functions of phase variables of a given nonlinear controlled system of differential equations. The method of exact feedback linearization of the nonlinear system is used. As a result, the solution of the original nonlinear problem is narrowed down to solve the linear game-theoretic antagonistic control problem. Sufficient conditions are obtained with ensure that the problem has a guaranteed solution for the given domain of initial conditions.

As an example, problem of the space turn of an asymmetric rigid body (spacecraft) is considered within the framework of the method. Three reaction wheels are employed to produce necessary torque in the axes of the spacecraft. External uncontrolled disturbances, that have no statistical description, are taken into consideration in the process of reorientation. In this case the initial nonlinear controlled systems consists of dynamic Euler equations and Rodrigues – Hamilton kinematic equations based on the quaternion parameterization of attitude kinematics. Two problems of the space turn of the spacecraft are considered. 1) The rest - to - rest reorientation problem. 2) The space turn from a stationary state to a given angular position; it is not assumed that the turn takes the spacecraft to a stationary state. The proposed approach allows common positions to give some already well-known solutions of these problems. A new solution of the reorientation problem is also given. For this new solution an estimation of the admissible domain of uncontrolled disturbances is found. Results of a numerical calculations are considered.

Keywords: control of a part of variables, uncontrolled disturbances, linearization feedback, three-rotor gyrostatt reorientation.

Vorotnikov Vladimir Il'ich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of information technology department, Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin. Research interests: stability of dynamical systems, partial stability and stabilization, control theory, dynamics of controlled solid (spacecraft). The number of publications — 190. vorotnikov-vi@rambler.ru; 19, Mira str., Ekaterinburg, 620002; office phone: +7(3435) 256722.

Vokhmyanina Anastasiya Vladimirovna — Ph.D. student of information technology department, Ural Federal University named after the First President of Russia B. N. Yeltsin. Research interests: control theory, dynamics of controlled solid (spacecraft). The number of publications — 5. vokhmyanina.av@gmail.com; 19, Mira str., Ekaterinburg, 620002; office phone: +7(3435) 256722.

References

1. Krasovskii N.N. *Igrovye zadachi o vstreche dvizhenij* [Rendezvous Game Problems]. M.: Nauka. 1971. 365 p. (In Russ.).
2. Akulenko L.D. *Asimptoticheskie metody optimal'nogo upravlenija* [Perturbation Methods in Optimal Control Problems]. M.: Nauka. 1987. 365 p. (In Russ.).

3. Vorotnikov V.I. *Partial Stability and Control*. Boston: Birkhauser. 1998. 448 p.
4. Pontryagin L.S. Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V., Mishenko E.F. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov* [The Mathematical Theory of Optimal Processes]. M.: Fizmatlit. 1961. 392 p. (In Russ.).
5. Fradkov A.L., Miroshnik I.V., Nikiforov V.O. *Nonlinear and Adaptive Control of Complex Systems*. Kluwer Academic Publisher. 1999. 528 p.
6. Vorotnikov V.I. [Partial Stability and Control: the State of the Art and Developing Prospects]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2005. vol. 4. pp. 3–58. (In Russ.).
7. Jammazi C. Finite-Time Partial Stabilizability of Chained Systems. *Comptes Rendus Mathematique*. 2008. vol. 346. no. 17-18. pp. 975–980.
8. Jammazi C.A Discussion on the Holder and Robust Finite-Time Partial Stabilizability of Brockett's Integrator. *Control, Optimization and Calculus of Variations*. 2012. vol. 18. no. 2. pp. 360–382.
9. Jammazi C. Continuous and Discontinuous Homogeneous Feedbacks Finite-Time Partially Stabilizing Controllable Multichained Systems. *Journal of Control and Optimization*. 2014. vol. 52. no. 1. pp. 520–544.
10. Chen H., Li B.Y., Zhang B.W., Zhang L. Global Finite-Time Partial Stabilization for a Class of Nonholonomic Mobile Robots Subject to Input Saturation. *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2015. vol. 12. no. 11. 159 p.
11. Haddad W.M., L'Afflitto A. Finite-Time Partial Stability and Stabilization, and Optimal Feedback Control. *Journal of the Franklin Institute*. 2015. vol. 352. no. 6. pp. 2329–2357.
12. Binazadeh T., Shafiei M.H., Bazregarzadeh E. New Approach in Guidance Law Design Based on Finite-Time Partial Stability Theorem. *Journal of Space Science and Technology*. 2015. vol. 8. pp. 1–7.
13. Golestani M., Mohammadzaman I., Yazdanpanah M.J. Robust Finite-Time Stabilization of Uncertain Nonlinear Systems Based on Partial Stability. *Nonlinear Dynamics*. 2016. vol. 85. no. 1. pp. 87–96.
14. L'Afflitto A. Differential Games, Finite-Time Partial-State Stabilization of Nonlinear Dynamical Systems, and Optimal Robust Control. *International Journal of Control*. 2017. vol. 90. no. 9. pp. 1861–1878.
15. Rajpurohit T., Haddad W.M. Stochastic Finite-Time Partial Stability, Partial-State Stabilization, and Finite-Time Optimal Feedback Control. *Mathematics of Control, Signals, and Systems*. 2017. vol. 29. no. 2. 10 p.
16. Jammazi C., Abichou A. Controllability of Linearized Systems Implies Local Finite-Time Stabilizability: Applications to Finite-Time Attitude Control. *Journal of Mathematical Control and Information*. 2018. vol. 35. no. 1. pp. 249–277.
17. Lyapunov A.M. *Obshhaja zadacha ob ustojchivosti dvizhenija* [The General Problem of the Stability of Motion]. Kharkov Mathematical Society. 1892. 251 p. (In Russ.).
18. Bhat S.P., Bernstein D.S. Finite-Time Stability of Continuous Autonomous Systems. *Journal on Control and Optimization*. 2000. vol. 38. no. 3. pp. 751–766.
19. Bhat S. P., Bernstein D. S. Geometric Homogeneity with Applications to Finite-Time Stability. *Mathematics of Control, Signals and Systems*. 2005. vol. 17. no. 2. pp. 101–127.
20. Vorotnikov V.I., Martysenko Yu.G. [On the Nonlinear Problem of Three-Axis Reorientation of a Three-Rotor Gyrostat in the Game Noise Model]. *Kosmicheskie issledovaniya – Cosmic Research*. 2013. Issue. 51. vol. 5. pp. 412. (In Russ.).
21. Vorotnikov V.I., Martysenko Yu.G. [To Problem of Three-Rotor Gyrostat Reorientation under Uncontrolled External Disturbances]. *Mekhatronika, Avtomatizatsija, Upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*. 2016. Issue. 17. vol. 6. pp. 414–419. (In Russ.).
22. Vorotnikov V.I., Vokhmyanina A.V. [Revisiting the Nonlinear Problem of the Passage of a Three-Rotor Gyrostat through a Given Angular Position in Space under Uncon-

- trollable External Disturbances]. *Kosmicheskie issledovanija – Cosmic Research*. 2018. vol. 56. no. 5. pp. 382–387. (In Russ.).
23. Filippov A.F. *Differencial'nye uravnenija s razryvnoj pravoj chast'ju* [Differential equations with discontinuous righthand sides: control systems]. M.: Nauka. 1985. 216 p. (In Russ.).
 24. Chernousko F.L., Ananievski I.M., Reshmin S.A. *Metody upravlenija nelinejnymi mehanicheskimi sistemami* [Control of Nonlinear Dynamical Systems: Methods and Applications]. M.: Fizmatlit. 2006. 328 p. (In Russ.).
 25. Lurie A.I. *Analiticheskaja mehanika* [Analytical Mechanics]. M.: Fizmatlit. 1961. 824 p. (In Russ.).
 26. Park Y. Robust and Optimal Attitude Stabilization of Spacecraft with External Disturbances. *Aerospace Science and Technology*. 2005. vol. 9. no. 3. pp. 253–259.
 27. Ding S.H., Li S.H. Stabilization of the Attitude of a Rigid Spacecraft with External Disturbances using Finite-Time Control Techniques. *Aerospace Science and Technology*. 2009. vol. 13. no. 4-5. pp. 256–265.
 28. Xia Y.Q., Zhu Z., Fu M.Y., Wang S. Attitude Tracking of Rigid Spacecraft with Bounded Disturbances. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2011. vol. 58. no. 2. pp. 647–659.
 29. Hu Q., Niu G. Attitude Output Feedback Control for Rigid Spacecraft with Finite-Time Convergence. *ISA Transactions*. 2017. vol. 70. pp. 173–186.
 30. Song Z., Duan C., Su H., Hu J. Full-Order Sliding Mode Control for Finite-Time Attitude Tracking of Rigid Spacecraft. *Control Theory & Applications*. 2018. vol. 12. no. 8. pp. 1086–1094.
 31. Ran D., Chen X., de Ruiter A., Xiao B. Adaptive Extended-State Observer-Based Fault Tolerant Attitude Control for Spacecraft with Reaction Wheels. *Acta Astronautica*. 2018. vol. 145. pp. 501–514.
 32. Minakov E.P., Sokolov B.V., Shaldaev S.E. [Investigation of the Characteristics of the Near-Moon System for Hitting Asteroids]. *Trudy SPIIRAN — SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 5(54). pp. 106–129. (In Russ.).