

В.И. ЧЕРНЫШЕВ, Л.А. САВИН, О.В. ФОМИНОВА  
**НЕПРЯМОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ: ЭЛЕМЕНТЫ  
ТЕОРИИ**

*Чернышев В.И., Савин Л.А., Фоминова О.В.* **Непрямое управление колебаниями: элементы теории.**

**Аннотация.** Приводится краткий обзор основных направлений исследований в области управляемых виброзащитных систем. Показано, что виброзащитные системы с непрямым управлением процессами колебаний позволяют с минимальными затратами энергии обеспечить программируемые переключения параметров и структур, при которых диссипативные, восстанавливающие и инерционные силы формируются по принципу активного воздействия. В рамках синтеза непрямого управления получены цепочки новых вспомогательных математических конструкций для нахождения оптимальных синтезирующих функций управления параметрами упругодемпфирующих звеньев, что позволило выделить базовую модель с прерывистым демпфированием и базовую модель с импульсной ловушкой. В результате исследования на основе метода гармонического баланса динамических свойств базовой модели с прерывистым демпфированием получены расчетные формулы для определения параметров компенсационного воздействия и расчета коэффициента динамичности. Установлено, что при оптимальной последовательности переключений демпфирования резонансные явления устраняются, а переходные процессы затухают в пределах одного периода кинематического возмущения. Базовая модель с импульсной ловушкой имитирует предельный вариант прерывистого демпфирования и реализует процесс наложения удерживающих связей, последовательность и длительность которых являются новыми переменными, существенно повышающими управляемость. Причем для непрямого импульсного управления характерен определенный минимум энергозатрат не зависящий от достигаемого эффекта виброзащиты. Регламентированное увеличение продолжительности наложения удерживающей связи в области низких частот и уменьшение этой продолжительности в области высоких частот обеспечивает монотонно-убывающую зависимость для коэффициентов динамичности на всем диапазоне частот. Рассмотрен пример решения оптимизационной задачи управления процессом демпфирования для базовой модели системы виброизоляции. Установлено, что прерывистое демпфирование является необходимым признаком оптимальности системы виброизоляции: демпфер включается в работу при смене знака скорости объекта и выключается из работы при смене знака смещения объекта.

**Ключевые слова:** колебания, виброзащитные системы, не прямое управление, оптимальное и субоптимальное управление, базовая модель с прерывистым демпфированием, базовая модель с импульсной ловушкой.

**1. Введение.** Обеспечение нормативных показателей вибрационного состояния в различных зонах виброактивных агрегатов во многом зависит от эффективности используемых для этих целей виброзащитных систем. При этом необходимо учитывать, что динамические свойства данных систем проявляются только во взаимодействии с защищаемым объектом, как части виброактивного агрегата, отражающего специфику его функционирования [1-4].

В настоящее время известны главные причины тех затруднений, которые встречаются на пути создания виброзащитных систем.

Снижение собственной частоты защищаемого объекта дает положительный эффект только при узкополосном спектре кинематического возмущения и отсутствии силового возмущения. Если в реальных условиях работы виброзащитная система воспринимает силовое возмущение, то при мягком подвесе можно наблюдать большие перемещения защищаемого объекта, а также пробои подвески, сопровождаемые ударами об ограничители. С другой стороны, при случайных возмущениях со сплошным спектром не удастся избежать проявления резонансных явлений, а «срезание» резонансных пиков посредством увеличения демпфирования неизбежно ухудшает динамические свойства виброзащитной системы в области высоких частот.

Вполне очевидно, что в классе линейных и пассивных виброзащитных систем преодолеть указанные противоречия невозможно. В связи с этим, активные виброзащитные системы [5, 6], управление в которых непосредственно отождествляется с компенсационным воздействием и характеризуется как прямое управление, а также виброзащитные системы с непрямым управлением [7-11], опосредствовано формирующие компенсационные воздействия за счет существенно-нелинейных проявлений, являются более перспективными.

Для работы активных систем требуются мощные внешние источники энергии, то есть велика энергоемкость процесса управления. По этой причине использование данных систем в роторных агрегатах может оказаться экономически нецелесообразно.

Теоретически, если мощность внешнего источника энергии активной системы неограниченна, то имеем тривиальный случай идеальной виброзащиты, который, однако, не реализуется на практике из-за запаздывания в срабатывании исполнительного механизма и других привносимых факторов, связанных с обработкой и обеспечением разрешающих скоростей потоков информации. Наряду с этим активные системы с ограниченной мощностью внешнего источника энергии, воспроизводящие релейный закон изменения компенсационного воздействия, обходятся дискретными во времени потоками информации, что значительно упрощает схемные решения и элементную базу для реализации данного способа управления.

Активные виброзащитные системы позволяют разрешить отмеченные выше противоречия за счет формируемого компенсационного воздействия, адекватного силовому и кинематическому возмущениям. Вследствие этого активные виброзащитные системы являются эталонными моделями, которые обеспечивают предельные возможности виброзащиты при оптимальном управлении и рассматриваются как прообразы лучших моделей виброзащитных систем с непрямым управлением.

В отличие от прямого управления, которое непосредственно воздействует на защищаемый объект и, по сути, является компенсационным воздействием, не прямое управление воздействует, например, на параметры упругодемпфирующего звена и посредством переключения подсистем или их отдельных структур оказывает опосредствованное влияние на движение защищаемого объекта.

Известны исследования динамических свойств виброзащитных систем с непрямым управлением параметрами демпфирования и жесткости, когда эти параметры изменяются в зависимости от интенсивности колебаний в том или ином диапазоне частот [12, 13]. Результаты данных исследований позволяют определить предельные варианты виброзащиты для способа управления параметрами упругодемпфирующего звена в амплитудно-частотной области. В области низких и резонансных частот коэффициенты динамичности равны единице. В области высоких частот они остаются такими же, как и для линейной виброзащитной системы с нулевым демпфированием. Достичь лучших показателей при таком способе управления параметрами упругодемпфирующего звена невозможно и, следовательно, проблемы виброзащиты остаются нерешенными.

Другой подход к решению проблем виброзащиты в рамках непрямого управления разработал С.В. Елисеев [14, 15]. Он предложил использовать дополнительные (неудерживающие и удерживающие) связи, а также переключать параметры и структуры виброзащитной системы при смене ряда априорных ситуаций, определяемых через компоненты состояния системы. Для этих целей допускается воспроизводить различные нелинейные проявления, которые программируются на основе «элементов памяти», зафиксированных в актуализированных свойствах конструкций подсистем. Математически переключения соответствующих параметров и структур описываются в виде разрывных нелинейностей и отображают режим «включить-выключить» работы исполнительных органов: механизмов преобразования движений, динамических гасителей, корректоров, переключателей. При этом данные виброзащитные системы являются наиболее перспективными, поскольку они позволяют избежать больших и неоправданных энергетических затрат на управление, а при определенных программируемых переключениях параметров и структур не уступают по эффективности активным виброзащитным системам.

Поскольку формально каждый нелинейный эффект представим как результат непрямого управления [16], то вариант непрямого импульсного управления является естественной имитацией разрывной нелинейности. Такой обобщенный подход позволяет теоретически обосновать новый класс виброзащитных систем с непрямым

управлением, а также соответствующие способы переключений их параметров и структур в амплитудно-фазовой области. Определенный подход к решению задач синтеза подобных систем можно найти в математических трудах французских авторов А. Бенсуан и Ж. Лионс [17], а также в прикладных работах по данной тематике [18-21]. Из-за того, что в роторных агрегатах невозможно получить несмещенную текущую информацию для решения задач управления процессами виброзащиты, особое внимание следует уделить методам построения нечетких алгоритмов управления [22] и, в частности, нечетким алгоритмам минимаксной процедуры нахождения непрямого импульсного управления [23].

Анализ известных устройств виброзащитной техники, которые реализуют способ непрямого управления, показал, что они, как правило, не оптимальны и решают частные задачи виброзащиты. Главная причина заключается в том, что в рамках данного научного направления создание обобщающих базовых элементов теории виброзащитных систем с непрямым управлением еще не завершено. По крайней мере, требуется проведение комплексных исследований для решения ряда актуальных проблем виброзащиты.

Тематика первоочередных исследований представлена следующими пятью разделами:

1. Разработка информационного обеспечения непрямого управления – нахождение синтезирующих функций и установление связи оптимальных алгоритмов переключений параметров и отдельных структур с принятым показателем качества.

2. Разработка базовых моделей виброзащитных систем с непрямым управлением, позволяющих формировать диссипативные, восстанавливающие и инерционные силы по принципу активного воздействия, а также осуществлять циклические (рекуперативные) процессы накопления потенциальной и кинетической энергии и возвращение ее в систему с положительным эффектом.

3. Сопоставительный анализ универсальных (не зависящих от частотно-фазовой модуляции) антирезонансных, противоударных и инвариантных свойств базовых моделей.

4. Отработка схемных и конструктивных решений исполнительных органов и в целом мехатронных устройств непрямого управления.

5. Оценка эффективности работы сложных технических систем, в которых используются виброзащитные системы с непрямым управлением.

**2. Элементы информационного обеспечения непрямого управления.** В рамках синтеза оптимального непрямого управления

решалась задача нахождения оптимальных и субоптимальных синтезирующих функций и соответствующих алгоритмов переключений параметров и отдельных структур виброзащитных системы в соответствии с принятым показателем качества. В качестве научной гипотезы допускалась возможность воспроизведения посредством непрямого управления компенсационных воздействий по принципу активных систем.

Основной характеристикой всякой управляемой виброзащитной системы является ее оптимальность по принятым критериям. Это также ассоциируется с проблемой установления и поддержания режима оптимального управления. Синтез оптимального управления базируется на использовании трех связанных между собой оценочных критериев: 1) показателе качества, устанавливаемого в зависимости от целей функционирования системы во времени; 2) показателе энергоемкости, который определяет минимальное потребление энергии на управление; 3) критерии управляемости. Обеспечение предельно-минимального уровня расхода энергии на управление от внешнего источника соотносится с возможностью системы сохранять управляемость.

Активные виброзащитные системы:

$$\dot{x} = f(x, t) + u \quad (1)$$

являются эталонными моделями. Они реализуют предельные антирезонансные, противоударные и инвариантные свойства при заданных ограничениях на управление ( $u \in U$ ) и принимаемом показателе качества:

$$J(x, u) = \int_0^T F(x, u, t) dt \rightarrow \min. \quad (2)$$

Поскольку управление активных систем напрямую зависит от энергоресурса внешнего источника, то оптимизация показателя качества (2) достигается за счет большого расхода энергии. В рамках системы (1) это противоречие не снимается. Кроме того, прямое действие управления на защищаемый объект предопределяет его «повышенную чувствительность» к области допустимых значений или накладываемых ограничений, — сужение этой области однозначно приводит к ухудшению управляемости.

Естественно, что для системы (1) наиболее экономичным является импульсный режим (вариант прямого импульсного управления). Однако при этом достижение минимума показателя качества (2) возможно только с интегрантом определенного частного вида.

Качественно новые возможности будем иметь при переходе к виброзащитным системам с непрямым управлением:

$$\dot{x} = f(x, u, t) = \alpha(x, t) + \phi(x, u, t); \quad (3)$$

и использовании показателя качества независящего от управления:

$$J(x) = \int_0^T F[x(t)] dt \rightarrow \min. \quad (4)$$

В системах с непрямым управлением компенсационные воздействия определяются функцией  $\phi(x, u, t)$ . Управление в эту функцию входит как аргумент, то есть в системе (3) управление отождествляется с изменением выделяемого параметра или отдельной структуры. Данные изменения (в том числе и скачкообразные) не связаны с большим расходом энергии и всегда ограничены, то есть при гарантированном малом потреблении энергии на управление оптимизация показателя качества (4) обеспечивается за счет проявления нелинейных свойств системы. При этом формируемое в соответствии с целью управления компенсационное воздействие обеспечивает необходимый перевод системы из заданного начального состояния в заданное конечное состояние, что является косвенным признаком управляемости системы.

С позиции современных представлений системотехники и концепции управления [16], каждое проявление нелинейности формально можно представить как некоторое не прямое управление. Такой подход позволяет использовать общие положения и аппарат теории управления при проведении синтеза и разработке теории нового класса виброзащитных систем с непрямым управлением.

Функциональное уравнение Беллмана [24]:

$$-\frac{\partial V}{\partial t} = \min_{u \in U} \left( \frac{\partial V}{\partial x} \dot{x} + F \right), \quad (5)$$

где  $V = \int_t^T F(x, \tau) d\tau$  допускает для циклических (колебательных) процессов следующие цепочки преобразований, приводящие к

соотношениям, которые можно использовать для нахождения синтезирующих функций управления:

$$F[x(t)] \Rightarrow \frac{dF}{dt} \Rightarrow \min_{u \in U} \frac{dF}{dt} = \min_{u \in U} (\nabla F \cdot f), \quad (6)$$

$$\frac{d^2 F[x(t)]}{dt^2} \Rightarrow \min_{u \in U} \frac{d^2 F}{dt^2} = \min_{u \in U} [\nabla G \cdot fd]. \quad (7)$$

Здесь  $f^T = (f_1 \dots f_n)$ ,  $fd^T = (f_1 \dots f_n \dot{f}_1 \dots \dot{f}_n)$ ,

$$\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_1} \dots \frac{\partial F}{\partial x_n} \right), \quad G(x, f) = \nabla F \cdot f \rightarrow \nabla G = \left( \frac{\partial G}{\partial x_1} \dots \frac{\partial G}{\partial x_n} \frac{\partial G}{\partial f_1} \dots \frac{\partial G}{\partial f_n} \right).$$

Первая цепочка преобразований воспроизводит алгоритм получения соотношения (6) для функции  $F[x(t)]$ , явно не зависящей от времени, а вторая цепочка демонстрирует преобразование этого соотношения в новое соотношение (7), которое также может быть использовано для нахождения синтезирующей функции управления.

Очевидно, что соотношения (6) и (7) гарантируют достижение минимума для конкретных показателей качества типа (4) только тогда, когда произведение  $\frac{dF}{dt} \cdot \frac{d^2 F}{dt^2} < 0$ . Отсюда получаем объединяющее эти соотношения неравенство:

$$\min_{u \in U} [(\nabla F \cdot f) \cdot (\nabla G \cdot fd)] < 0. \quad (8)$$

Таким образом, получены соотношения, которые связывают компоненты вектора состояния системы и вектора управления и позволяют определить информационное обеспечение непрямого управления для типовых показателей качества и, соответственно, находить синтезирующую функцию непрямого управления.

Поставим следующую оптимизационную задачу. Для динамической системы с управляемым процессом демпфирования:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \end{aligned} \quad (9)$$

требуется найти оптимальное управление  $u \geq 0$ , которое минимизирует показатель качества:

$$J = \int_0^T x_1^2 dt. \quad (10)$$

Управление оптимально, если выполняется неравенство (8). В данной задаче:

$$F = x_1^2, \quad \nabla F = (2x_1, 0), \quad G(x, f) = 2x_1 f_1, \quad \nabla G = (2f_1, 0, 2x_1, 0),$$

$$f_1 = x_2, \quad f_2 = -u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \quad \dot{f}_1 = f_2.$$

Отсюда:

$$\nabla F \cdot f = 2x_1 f_1, \quad \nabla G \cdot fd = 2f_1^2 + 2x_1 f_2.$$

С учетом этого имеем:

$$\min_u 2x_1 x_2 \left\{ 2x_2^2 + 2x_1 \left[ -u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y) \right] \right\} < 0,$$

$$\min_u x_2 u(\dot{y} - x_2) < 0, \quad u \rightarrow \text{sign} \left[ x_2(x_2 - \dot{y}) \right].$$

Если предположить, что  $u = (u_0, 0)$ , то оптимальное управление можно представить в виде следующей синтезирующей функции:

$$u = \begin{cases} u_0, & x_2(x_2 - \dot{y}) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (11)$$

Как видно, данная синтезирующая функция зависит от компонент состояния системы (абсолютной и относительной скорости защищаемого объекта) и определяет прерывистый процесс демпфирования (прерывистый вариант переключений диссипативных сил). Заметим, что здесь реализован двухступенчатый вариант прерывистого демпфирования. Обобщая данный результат, можно утверждать о целесообразности, например, реализации трехступенчатого варианта прерывистого демпфирования, рассматривая компоненты управления  $u = (u_1, u_0, 0)$  как новые переменные, позволяющие оптимизировать процесс демпфирования. Очевидно, что один из данных вариантов непрямого управления процессом прерывистого демпфирования является субоптимальным (почти оптимальным).



Изменим оптимизационную задачу, то есть будем искать оптимальное управление  $u \geq 0$ , которое минимизирует показатель качества:

$$J = \int_0^T x_2^2 dt. \quad (12)$$

В данном случае используем соотношение (6), которое зависит от управления.

Поскольку

$$F = x_2^2, \quad \nabla F = (0, 2x_2), \quad f_1 = x_2, \quad f_2 = -u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y),$$

то соотношение (6) запишется в виде:

$$\min_{u \in U} (\nabla F \cdot f) = \min_u 2x_2 \cdot [-u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y)].$$

Из данного соотношения получим такое же оптимальное управление, как и в предыдущем случае:

$$\min_u x_2 \cdot [-u(x_2 - \dot{y})], \quad u \rightarrow \text{sign}[x_2(x_2 - \dot{y})].$$

Этот результат свидетельствует о том, что оптимальный прерывистый процесс демпфирования в системах виброзащиты данного типа обеспечивается при минимизации показателя качества (4) как с интегрантом  $F(x) = x_1^2$ , так и с интегрантом  $F(x) = x_2^2$ .

Особый интерес представляют предельные варианты управления, приводящие к скачкообразному изменению структуры системы (3), когда управление периодически резко возрастает  $u \rightarrow \infty$ , и варианты, когда управление периодически «исчезает»  $u \rightarrow 0$ . Последовательное чередование данных управлений определяет так называемое не прямое импульсное управление. Допускаются также следующие последовательности:

$$u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \Leftrightarrow u \rightarrow 0 \dots, \quad u \rightarrow \infty \Leftrightarrow u_{\min} \leq u \leq u_{\max} \dots$$

Причем в моменты времени, когда  $u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$ , исходная структура системы (3) не изменяется.

Рассмотрим динамическую систему с так называемой импульсной ловушкой, которая позволяет периодически блокировать

систему посредством резкого увеличения вязкого сопротивления и тем самым реализовать не прямое импульсное управление:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -[u = (\infty, 0)] \cdot (x_2 - \dot{y}) - 2n(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \\ J &= \int_0^T x_2^2 dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (13)$$

Математическая модель данной системы неотделима от принятого здесь показателя качества (12), по отношению к которому дифференциальные уравнения являются внешними ограничениями, то есть при оптимальной последовательности чередования предельных значений непрямого импульсного управления достигается условный минимум показателя качества (12).

Поскольку при  $u \rightarrow \infty$  импульсная ловушка блокирует систему и на соответствующем интервале движения фазовые координаты известны:  $x_1 = y$ ;  $x_2 = \dot{y}$ , то оптимальную синтезирующую функцию непрямого импульсного управления, по аналогии с предыдущими примерами, можно представить в следующем виде:

$$u = \begin{cases} \infty, & |\dot{y}| \leq \Delta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (14)$$

Здесь использован новый ограничительный параметр  $\Delta$ , который косвенно определяет длительность интервала движения заблокированной системы. Определение данного параметра связывается с достижением минимума принятого показателя качества. Последнее гарантируется только в том случае, если на интервале свободного движения системы выполняется необходимое условие оптимальности непрямого импульсного управления  $x_2(x_2 - \dot{y}) < 0$ .

Рассмотренные динамические системы, в контексте известных классификационных построений [23], относятся к базовым моделям виброзащитных систем с непрямым управлением процессом прерывистого и ударного демпфирования.

**3. Базовая модель виброзащитной системы с прерывистым демпфированием.** Воспользуемся методом гармонического баланса [25] для определения установившихся режимов колебаний базовой модели с прерывистым демпфированием [23]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -u(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \\ u &= \begin{cases} u_0, & x_2(x_2 - \dot{y}) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

Преобразуем базовую модель (15) к безразмерному виду, полагая при этом, что кинематическое возмущение  $y = y_0 \sin \omega t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{\varepsilon}{\eta}(\xi_2 - \cos \tau) - \frac{1}{\eta^2}(\xi_1 - \sin \tau), \\ \varepsilon &= \begin{cases} \varepsilon_0, & \xi_2(\xi_2 - \cos \tau) \geq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь приняты следующие безразмерные переменные и параметры:

$\xi_1 = \frac{x_1}{y_0}$ ,  $\xi_2 = \frac{x_2}{y_0 \omega}$ ,  $\dot{\xi}_2 = \frac{\dot{x}_2}{y_0 \omega^2}$  — смещение, скорость и ускорение защищаемого объекта;

$\eta = \frac{\omega}{k}$  — относительная частота;  $\tau = \omega t$  — безразмерное время;

$\varepsilon = \frac{u}{k} \left( \varepsilon_0 = \frac{u_0}{k} \right)$  — относительное демпфирование.

Для установившегося режима колебаний системы (в пределах периода  $T = 2\pi$ ) зависимость изменения относительного демпфирования можно записать в виде:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_0, & \text{если } \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 \text{ или } \tau_3 \leq \tau \leq \tau_4; \\ 0, & \text{если } 0 < \tau < \tau_1, \tau_2 < \tau < \tau_3 \text{ или } \tau_4 < \tau < T; \end{cases} \quad (17)$$

где  $\tau_1$ ,  $\tau_3$  — моменты времени, в которые демпфер включается в работу и  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_4$  — моменты времени, в которые демпфер выключается из работы и  $\varepsilon = 0$ .

Причем  $\tau_3 = \tau_1 + \pi$ ,  $\tau_4 = \tau_2 + \pi$  и, соответственно,

$$\xi_2(\tau_1) - \cos \tau_1 = 0, \quad \xi_2(\tau_2) = 0. \quad (18)$$

Для описания установившихся колебаний защищаемого объекта будем использовать усеченные тригонометрические ряды:

$$\xi_1 = \sum_{n=1}^N A_n \cos(n\tau) + B_n \sin(n\tau), \quad \xi_2 = \sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau) + B_n \cos(n\tau)], \quad (19)$$

где  $N$  — число членов тригонометрических рядов,  $A_n, B_n$  — неизвестные коэффициенты тригонометрических рядов.

Линеаризация диссипативной составляющей производится по следующей схеме:

$$\varepsilon (\xi_2 - \cos \tau) \approx \sum_{n=1}^N R_n \cos(n\tau) + S_n \sin(n\tau), \quad (20)$$

где коэффициенты Фурье:

$$\begin{aligned} R_n(C_n, D_n, \tau_1, \tau_2) &= \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\pi} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau) + B_n \cos(n\tau)] - \cos \tau \right\} \cos(n\tau) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_1+\pi}^{\tau_2+\pi} \left\{ \sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau) + B_n \cos(n\tau)] - \cos \tau \right\} \cos(n\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} S_n(C_n, D_n, \tau_1, \tau_2) &= \\ &= \frac{\varepsilon_0}{\pi} \left\{ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left\{ \sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau) + B_n \cos(n\tau)] - \cos \tau \right\} \sin(n\tau) d\tau + \right. \\ &+ \left. \int_{\tau_1+\pi}^{\tau_2+\pi} \left\{ \sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau) + B_n \cos(n\tau)] - \cos \tau \right\} \sin(n\tau) d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь система дифференциальных уравнений (16) может быть заменена линеаризованной системой уравнений следующего вида:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2; \\ \dot{\xi}_2 &= -\frac{1}{\eta} \left[ \sum_{n=1}^N R_n \cos(n\tau) + S_n \sin(n\tau) \right] - \frac{1}{\eta^2} (\xi_1 - \sin \tau). \end{aligned} \quad (23)$$

С учетом соотношений (19), данная система дифференциальных уравнений преобразуется в трансцендентное уравнение:

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{n=1}^N n^2 [A_n \cos(n\tau) + B_n \sin(n\tau)] + \frac{1}{\eta} \sum_{n=1}^N [R_n \cos(n\tau) + S_n \sin(n\tau)] + \\
 & + \frac{1}{\eta^2} \sum_{n=1}^N [A_n \cos(n\tau) + B_n \sin(n\tau)] - \frac{1}{\eta^2} \sin \tau = 0.
 \end{aligned}
 \tag{24}$$

После группировки слагаемых трансцендентного уравнения (24) получаем следующую совокупность уравнений:

$$\begin{aligned}
 & A_n \left( -n^2 + \frac{1}{\eta^2} \right) + R_n (A_n, B_n, \tau_1, \tau_2) \frac{1}{\eta} = 0, \\
 & B_n \left( -n^2 + \frac{1}{\eta^2} \right) + S_n (A_n, B_n, \tau_1, \tau_2) \frac{1}{\eta} = \frac{1}{\eta^2}.
 \end{aligned}
 \tag{25}$$

Используем также тригонометрические ряды (19) для преобразования соотношений (18) к следующему виду:

$$\sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau_1) + B_n \cos(n\tau_1)] - \cos(\tau_1) = 0,
 \tag{26}$$

$$\sum_{n=1}^N n [-A_n \sin(n\tau_2) + B_n \cos(n\tau_2)] = 0.
 \tag{27}$$

Совокупность полученных уравнений (25), (26) и (27) является замкнутой относительно неизвестных параметров  $A_n, B_n, \tau_1, \tau_2$ .

Поскольку установившийся процесс колебаний базовой модели (15) в пределах периода является кососимметричным, то при решении полученной замкнутой системы уравнений следует учитывать только нечетные составляющие, то есть принимать  $n = 1, 3, 5, \dots$ . Анализ результатов решений системы уравнений (25)-(27) показал, что достаточная для практического использования точность воспроизведения реальных динамических процессов в нелинейной системе данного типа обеспечивается при учете первых трёх (нечётных) слагаемых в разложении (19).

На рисунке 1 приведены выборочные решения системы уравнений (25)-(27) в виде графиков компонент состояния базовой модели, кинематического возмущения и прерывистого демпфирования, коррелированного по знаку с относительной скоростью защищаемого объекта. Из приведенных графиков расчетных зависимостей следует, что на резонансной частоте амплитуды колебаний защищаемого объекта ограничены и не превышают амплитуды колебаний подвижного основания. При этом на опорной относительной частоте  $\eta = 1,41$  прерывистый процесс демпфирования обеспечивает снижение амплитуды колебаний защищаемого объекта по сравнению с амплитудой колебаний подвижного основания практически в четыре раза.

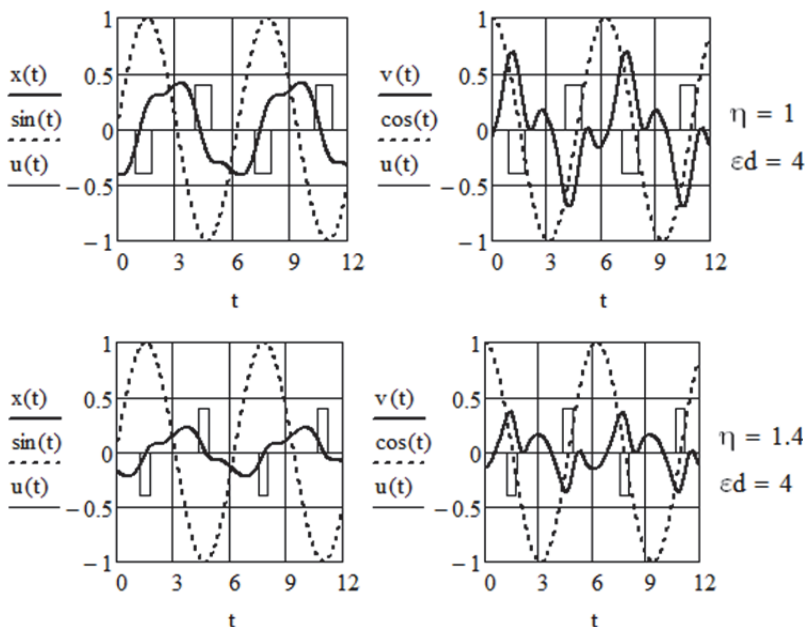


Рис. 1. Графики расчетных зависимостей: базовая модель с прерывистым демпфированием; примечание:  $x(t) = \xi_1$ ;  $v(t) = \xi_2$ ;  $u(t) = \varepsilon(\tau) \cdot \text{sign}(\xi_2 - \cos \tau)$

Отметим следующую важную особенность оптимального прерывистого демпфирования — в области высоких частот ( $\eta > 1,0$ ) моменты времени выключения демпфера из работы, связанные со сменой знака абсолютной скорости защищаемого объекта, практически совпадают с моментами времени, в которые происходит

смена знака относительного смещения защищаемого объекта. Как следствие, становится возможным реализовать субоптимальный алгоритм непрямого управления процессом демпфирования, при котором демпфер включается в работу при смене знака относительной скорости и выключается из работы при смене знака относительного смещения. Заметим, что для поддержания субоптимального прерывистого процесса демпфирования можно использовать актуализированные свойства собственно системы и тем самым обходиться без электронных средств слежения. При этом следует ожидать, что динамические свойства базовой модели в указанном диапазоне частот установившихся колебаний практически не изменятся.

Приведенные в таблице 1 значения коэффициентов динамичности позволяют сделать следующие выводы о динамических свойствах базовой модели (16). Во-первых, с увеличением относительного демпфирования резонансные пики уменьшаются и смещаются в сторону низких частот. Во-вторых, в области высоких частот значения коэффициентов динамичности монотонно уменьшаются, оставаясь не только меньше единицы, но и меньше значений коэффициентов динамичности линейной системы без демпфирования, определяемых из соотношения:

$$Kd = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \quad (\eta > 1,41). \quad (28)$$

Таблица 1. Коэффициенты динамичности

$\varepsilon d$	$\eta$							
	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
2	1,563	0,989	0,753	0,533	0,374	0,266	0,192	0,144
3	0,942	0,725	0,498	0,344	0,244	0,173	0,139	0,111
4	0,820	0,593	0,413	0,299	0,224	0,171	0,133	0,106
5	0,743	0,558	0,407	0,312	0,234	0,177	0,137	0,108
6	0,723	0,566	0,439	0,345	0,252	0,186	0,152	0,111

Таким образом, доказано, что в рамках объектно-ориентированной методики использования метода гармонического баланса можно с заданной степенью точности воспроизводить установившиеся колебания виброзащитной системы с управляемым демпфером прерывистого действия. При этом соответствующая диссипативная сила, как управляющее воздействие, позволяет устранить резонансные явления и существенно снизить интенсивность колебаний защищаемого объекта.

**3. Базовая модель виброзащитной системы с импульсной ловушкой.** Рассматривается виброзащитная система, в которой импульсная ловушка позволяет периодически резко увеличивать вязкое сопротивление и тем самым реализует процесс ударного демпфирования колебаний защищаемого объекта. Базовую модель такой виброзащитной системы получим, объединяя (13) и (14):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -u \cdot (x_2 - \dot{y}) - 2n(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \\ u &= \begin{cases} \infty, & |\dot{y}| \leq \Delta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

Предполагается, что в результате срабатывания импульсной ловушки, имитирующей процесс наложения удерживающей связи, можно реализовать оптимальные последовательности программируемых «мгновенных» переводов системы из одного состояния в другое, при которых достигается минимизация принятого показателя качества на траекториях движения системы, состоящих из кусков границ допустимой области и кусков сопряженных экстремалей. Упорядоченная и расширенная последовательность срабатываний импульсной ловушки и их длительности являются новыми переменными, существенно повышающими управляемость системы по сравнению, например, с вариантом пассивных ограничителей. Причем для непрямого импульсного управления характерен определенный минимум энергозатрат, не зависящий от достигаемого эффекта виброзащиты. Это относится и к так называемым скользящим режимам, то есть при повторных срабатываниях импульсной ловушки на кусках траектории движения системы в пределах границ допустимой области.

В пределе, когда  $\Delta \rightarrow 0$ , базовая модель (29) имитирует периодические процессы ударного демпфирования и имеет качественно новое описание — дифференциальные уравнения движения объекта между соударениями дополняются конечными соотношениями, определяющими начальные условия:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -2n(x_2 - \dot{y}) - k^2(x_1 - y), \quad \text{при } \dot{y}(t_i) \neq 0, \end{aligned} \quad (30)$$

$$x_2^+(t_i) \rightarrow \dot{x}_i^+ = 0, \quad x_1^+(t_i) \rightarrow x_i^+ = x_1^-(t_i) \rightarrow x_i^-, \quad \text{при } \dot{y}(t_i) = 0. \quad (31)$$



Здесь в моменты времени  $t_i$  положение объекта фиксируется по отношению подвижного основания и скорость объекта становится равной нулю. Длительность фиксации  $\Delta \rightarrow 0$ .

Будем искать периодические решения дифференциального уравнения (30) при детерминированном кинематическом возмущении  $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$ .

В начале из решения дифференциального уравнения (30)

$$\xi(\tau) = \exp(-\varepsilon d \cdot \tau / \eta) \cdot [C_1 \cos(\tau / \beta) + C_2 \sin(\tau / \beta)] + Kd \cdot \cos(\tau - \phi) \quad (32)$$

определим постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , используя соотношения (31) на  $i$ -ом интервале движения объекта  $\xi(0) = \xi_0$ ,  $\dot{\xi}(0) = 0$ .

После несложных преобразований получим:

$$C_1 = \xi_0 - Kd \cdot \cos \phi; \quad C_2 = \gamma \cdot (\xi_0 - Kd \cdot \cos \phi) - Kd \cdot \beta \cdot \sin \phi. \quad (33)$$

В (32) и (33) приняты следующие обозначения безразмерных переменных и параметров:

$$\begin{aligned} \tau &= \omega t; \quad \xi_i(\tau) = x_i(\tau) / y_0; \quad \eta = \omega / k; \quad \varepsilon d = n / k; \\ Kd &= \frac{1 + 4 \cdot \varepsilon d^2 \eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4 \cdot \varepsilon d^2 \eta^2}}; \quad \gamma = \frac{\varepsilon d}{\sqrt{1 - \varepsilon d^2}}; \quad \beta = \frac{\eta}{\sqrt{1 - \varepsilon d^2}}; \\ \phi &= \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \varepsilon d \cdot \eta^3}{1 - \eta^2 + 4 \cdot \varepsilon d^2 \eta^2}. \end{aligned}$$

Исходя из того, что для периодического процесса  $\xi_i(\pi) = -\xi_0$ , выразим  $\xi_0$  через безразмерные параметры базовой модели:

$$\xi_0 = Kp \frac{\exp(-\varepsilon d \cdot \pi / \eta) \cdot \left( \cos \phi \cdot \cos \frac{\pi}{\beta} + \gamma \cdot \cos \phi \cdot \sin \frac{\pi}{\beta} + \beta \cdot \sin \phi \cdot \sin \frac{\pi}{\beta} \right) - \cos(\pi - \phi)}{1 + \exp(-\varepsilon d \cdot \pi / \eta) \cdot \left( \cos \frac{\pi}{\beta} + \gamma \cdot \sin \frac{\pi}{\beta} \right)}. \quad (34)$$

С учетом постоянных интегрирования (33) и начального смещения (34) общее решение (32) описывает движение объекта в пределах полупериода ( $0 \leq \tau \leq \pi$ ) установившихся — периодических колебаний.

Результаты расчетов коэффициентов динамичности по перемещению  $Kd_0 = \max|\xi(\tau)|$ , произведенных с использованием общего решения (32) и уравнений (33), (34), когда параметр  $\Delta = 0$ , сведены в таблицу 2. Там же приведены предельные (минимально-достижимые на заданной частоте  $\eta$ ) значения коэффициентов динамичности  $Kd_1$  и  $Kd_2$  базовой модели (29) с конечным временем срабатывания импульсной ловушки  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  соответственно. Эти данные получены в результате моделирования работы базовой модели (29) на ЭВМ.

Для сравнения в двух нижних строках таблицы 2 приведены значения коэффициентов динамичности  $Kd$  неуправляемой (пассивной) виброзащитной системы при кинематическом воздействии. В нашем случае — это базовая модель (29) при  $u \equiv 0$ .

Таблица 2. Результаты расчетов базовой модели с импульсной ловушкой

$\eta$	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	$\varepsilon d$
$Kd_0$	1,517	1,952	1,213	0,529	0,388	0,291	0,225	0,180	0,1
	1,459	1,633	1,182	0,674	0,463	0,354	0,288	0,244	0,2
$\Delta_1$	0,70	0,50	0,30	0,20	0,16	0,13	0,11	0,09	0,1
$Kd_1$	0,885	0,731	0,496	0,279	0,193	0,154	0,133	0,113	
$\Delta_2$	0,80	0,60	0,40	0,20	0,10	0,08	0,06	0,04	0,2
$Kd_2$	0,944	0,859	0,736	0,573	0,414	0,325	0,268	0,234	
$Kd$	1,547	2,571	5,099	2,052	1,038	0,659	0,468	0,336	0,1
	1,505	2,180	2,693	1,703	1,031	0,704	0,524	0,412	0,2

Дополнительные результаты проведенных расчетов в виде характерных графиков компонент состояния базовой модели с импульсной ловушкой, имитирующей процесс ударного демпфирования, когда параметр  $\Delta = 0$ , и процесс наложения удерживающей связи, когда параметр  $\Delta \neq 0$ , приведены на рисунках 2 и 3.

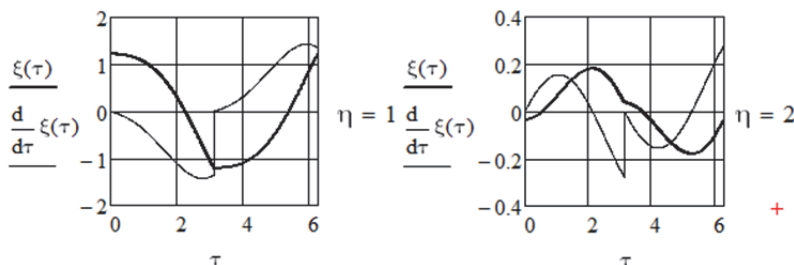


Рис. 2. Графики расчетных зависимостей: имитация ударного демпфирования; примечание:  $\varepsilon d = 0,1$ ;  $\Delta = 0$

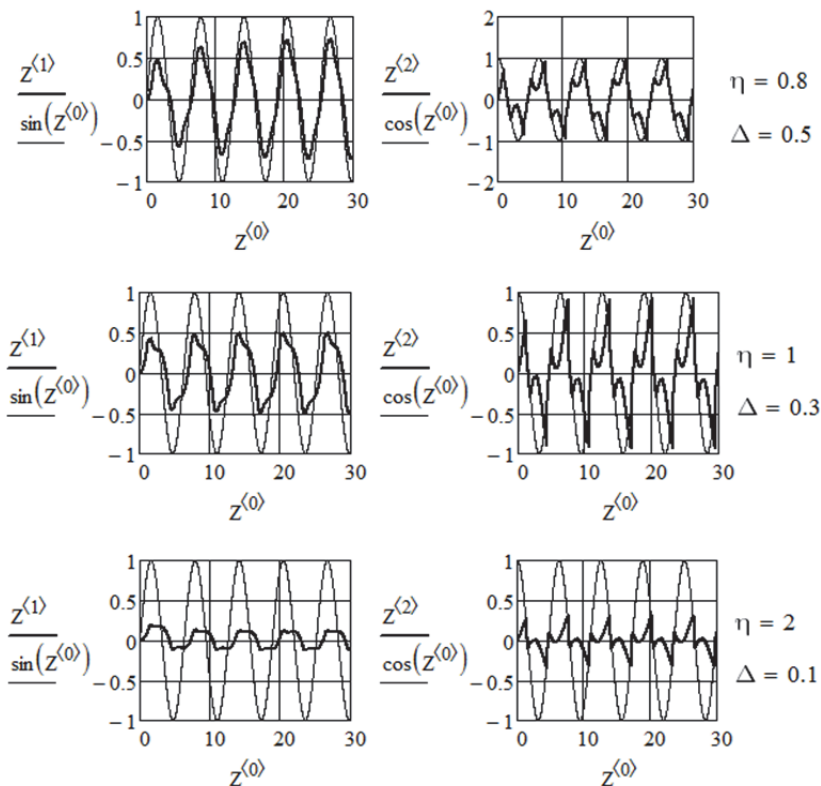


Рис. 3. Графики расчетных зависимостей: имитация наложения удерживающих связей; примечание:  $\varepsilon d = 0,1$ ;  $Z^{(0)} = \tau$ ;  $Z^{(1)} = \xi(\tau)$ ;  $Z^{(2)} = \ddot{\xi}(\tau)$

В отличие от неуправляемых виброзащитных систем базовая модель с импульсной ловушкой позволяет существенно снизить уровни колебаний объекта, как в области низких (дорезонансных), так и в области высоких (зарезонансных) частот.

Реализация ударного демпфирования позволяет сместить пиковые значения коэффициентов динамичности в дорезонансную область частот и положительный эффект виброзащиты достигается, если относительная частота  $\eta > 1,1$ . При этом наблюдается монотонное уменьшение амплитуд колебаний объекта. Показательно, что на характерной частоте кинематического воздействия, когда  $\eta \approx 1,41$ , амплитуды колебаний объекта уменьшаются более чем в два раза.

В момент срабатывания импульсной ловушки происходит скачкообразное «обнуление» скорости защищаемого объекта. После этого объект совершает «свободное» движение, которое происходит до тех пор, пока скорость подвижного основания опять не станет равной нулю. Далее циклический процесс повторяется. Заметим, что в области высоких (зарезонансных) частот «перепад» скорости объекта в момент срабатывания импульсной ловушки уменьшается с увеличением относительной частоты.

В процессе наложения удерживающих связей параметр  $\Delta$ , как элемент непрямого управления, позволяет исключить проявление резонансных явлений и достичь предельных показателей виброзащиты в рабочем диапазоне частот кинематического воздействия. При этом регламентированное увеличение продолжительности наложения удерживающей связи в области низких частот и, соответственно, уменьшение этой продолжительности в области высоких частот обеспечивает монотонно-убывающую зависимость для коэффициентов динамичности на всем диапазоне частот — и это вне зависимости от интенсивности демпфирования. Заметим, что приведенные в таблице 2 и на рисунке 3 значения параметра  $\Delta$  являются оптимальными, то есть их изменение приведет к увеличению амплитуд колебаний объекта.

В результате моделирования установлено, что переходные процессы, вызываемые начальными условиями или случайными флуктуациями внешних возмущений, затухают в пределах одного периода кинематического воздействия, то есть реализуется процесс, который характеризуется как «один толчок — одно колебание».

**4. Пример решения оптимизационной задачи управления процессом виброизоляции.** Рассматривается базовая модель системы виброизоляции с управляемым демпфером [26]:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + b(t)\dot{x} + cx = P_0 \cos \omega t. \quad (35)$$

Ставится задача — обеспечить существенное снижение динамических реакций  $R(t) = cx + b(t)\dot{x}$ , воспринимаемых несущим элементом (основанием) виброизолятора при детерминированном силовом возмущении за счет оптимального процесса демпфирования.

Поставленную задачу будем решать, используя методы теории оптимального управления [11, 24, 27].

Исходное уравнение движения рассматриваемой системы преобразуем к форме Коши [24]:

$$\dot{x}_0 = x_1, \quad \dot{x}_1 = -nx_1 - ux_1 - k^2 x_0 + H_0 \cos \omega t. \quad (36)$$

Здесь приняты следующие обозначения:  $H_0 = P_0/m$  — амплитуда силового возмущения, отнесенная к массе виброактивного объекта;  $u = b(t)/m$  — функция управления (управление);  $x_0, x_1$  — перемещение, скорость виброактивного объекта;  $k = \sqrt{c/m}$  — частота собственных колебаний виброактивного объекта на несущем упругом элементе;  $\omega$  — частота силового возмущения.

Очевидно, что для оценки уровня интенсивности воздействия динамической реакции  $R(t) = cx + b(t)\dot{x}$  на несущий элемент и, соответственно, оптимальности системы виброизоляции, можно использовать функционал:

$$J = \int_0^T (ux_1 + k^2x_0)^2 dt \rightarrow \min. \quad (37)$$

Здесь  $T$  — некоторый (представительный) интервал времени.

Функционал (37) принимается за показатель качества исходной системы (36).

Для рассматриваемой оптимизационной задачи функция Гамильтона имеет вид:

$$H = -(ux_1 + k^2x_0)^2 + p_0x_1 + p_1(-nx_1 - ux_1 - k^2x_0 + H_0 \cos \omega t), \quad (38)$$

где  $p_0, p_1$  — присоединенные переменные.

Поскольку вязкое трение  $b(t) \geq 0$ , то управление, отождествленное с демпфированием, не может быть отрицательным ( $u \geq 0$ ).

Будем полагать, что  $u = z^2$ .

Тогда

$$H = -(z^2x_1 + k^2x_0)^2 + p_0x_1 + p_1(-nx_1 - z^2x_1 - k^2x_0 + H_0 \cos \omega t). \quad (39)$$

На переменную  $z$  ограничения не накладываются. Это позволяет установить зависимость переменной  $z$  от фазовых координат  $x_0, x_1$  и присоединенных переменных  $p_0, p_1$  из соотношения:

$$\frac{\partial H}{\partial z} = 0 \Rightarrow -4(z^2x_1 + k^2x_0)zx_1 - 2zp_1x_1 = 0. \quad (40)$$

Отсюда

$$z(x, p) = \begin{cases} -\frac{k^2 x_0 + 0,5 p_1}{x_1}, (k^2 x_0 + 0,5 p_1) x_1 \leq 0; \\ 0, (k^2 x_0 + 0,5 p_1) x_1 > 0, \end{cases} \quad (41)$$

и, соответственно, получаем структуру оптимального управления:

$$\tilde{u}(x, p) = \begin{cases} -\frac{k^2 x_0 + 0,5 p_1}{x_1}, (k^2 x_0 + 0,5 p_1) x_1 \leq 0; \\ 0, (k^2 x_0 + 0,5 p_1) x_1 > 0. \end{cases} \quad (42)$$

Определим присоединенные переменные. Для этого раскроем канонические уравнения Гамильтона:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} \Rightarrow \dot{p}_0 = 0, \dot{p}_1 = -p_0. \quad (43)$$

Имеем замкнутую систему дифференциальных уравнений. Общее решение:  $p_0(t) = C_1$ ,  $p_1(t) = C_1 t + C_2$ .

Для оптимальности присоединенных переменных, обращающих в тождества дифференциальные уравнения (43), необходимо чтобы выполнялись следующие краевые условия:

$$p_0(0) = 0, p_1(0) = 0, p_0(T) = 0, p_1(T) = 0. \quad (44)$$

Это общий признак оптимальности для случая, когда краевые значения фазовых координат не определены и произвольны.

Выполнение конечных условий (44) возможно только тогда, когда  $p_0 = 0$ ,  $p_1 = 0$ .

В результате подстановки  $p_1 = 0$  в соотношение (42) найдем оптимальную синтезирующую функцию управления:

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} -\frac{k^2 x_0}{x_1}, x_0 x_1 \leq 0; \\ 0, x_0 x_1 > 0. \end{cases} \quad (45)$$

Как видно, оптимальное управление определяет прерывистый процесс демпфирования. Демпфер включается в работу при смене

знака скорости объекта, когда  $x_1 = 0$ , и выключается из работы, когда смещение объекта  $x_0 = 0$ .

Таким образом, установлено, что прерывистое демпфирование является необходимым признаком оптимальности системы виброизоляции.

**5. Заключение.** Виброзащитные системы с непрямым управлением обеспечивают определенный минимум энергетических затрат, связанных с управлением, и устранение резонансных режимов в рабочих диапазонах частот. Получены и апробированы цепочки новых вспомогательных математических конструкций для нахождения оптимальных синтезирующих функций управления в системах с непрямым управлением. Установлено, что основным признаком оптимальности изменяемых параметров системы, которые отождествляются с непрямым управлением, является их прерывистость. В рамках общей классификации виброзащитных систем с непрямым управлением предложены новые базовые модели, которые реализуют оптимальные и субоптимальные релейно-прерывистые последовательности переключений параметров упругодемпфирующих звеньев, что позволяет существенно улучшить их динамические свойства по сравнению с соответствующими пассивными системами по критерию вибрационной безопасности.

### Литература

1. *Genfeng L., Jing J., Yuhe L., Ming Z.* Impact of system anisotropy on vibration reduction of rotating machinery and its evaluation method // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. vol. 93. pp. 299–311.
2. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная динамика упругих систем. Приложения // М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2015. Т. 2. 700 с.
3. *Chernyshev V.I., Savin L.A., Fominova O.V.* Dynamics of the rotor on elastic-damping supports under action of kinematic effects // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2017. vol. 233. no. 1. pp. 012055.
4. *Linfeng D., Zhao R.* A vibration analysis method based on hybrid techniques and its application to rotating machinery // *Measurement*. 2013. vol. 46. no. 9. pp. 3671–3682.
5. *Дорф Р., Бишон Р.* Современные системы управления // М.: Лаборатория Базовых Знаний. 2013. 832 с.
6. *Bai X.X., Wereley N.M., Choi Y.T.* Magnetorheological energy absorber with dual concentric annular valves // *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. vol. 27. no.7. pp. 944–958.
7. *Дыхта В.А., Самсонок О.Н.* Оптимальное импульсное управление с приложениями // М.: Физматлит. 2003. 256 с.
8. *Дыхта В.А.* Позиционный принцип минимума для квазиоптимальных процессов в задачах управления с терминальными ограничениями // *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика*. 2017. Т. 19. С. 113–128.
9. *Balthazar J.M., Gonçalves, P.B., Fenili A.* Nonlinear vibrations in elastic structures: Dynamics and control // *Shock and Vibration*. 2013. vol. 20. no. 6. pp. 1031–1032.

10. *Ibrahim R.A.* Recent advances in nonlinear passive vibration isolators // *Journal of Sound and Vibration*. 2008. vol. 314. no. 3-5. pp. 371–452.
11. *Фоминова О.В., Степанов Ю.С., Чернышев В.И.* Экстремальные задачи и оптимизация: введение в теорию непрямого импульсного управления процессами колебаний // М.: Издательский дом «Спектр». 2011. 218 с.
12. *Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D.* Pre-acting control for shock and pact isolation systems // *Shock and Vibration*. 2005. vol. 12. no. 1. pp. 49–65.
13. *Ni Y.Q., Chen Z.H., Or S.W.* Experimental identification of a self-sensing magnetorheological damper using soft computing // *Journal of Engineering Mechanics*. 2015. vol. 141. no. 7. pp. 1–13.
14. *Елисеев С.В., Орленко А.И., Нгуен Д.Х.* Устройства для преобразования движения в структуре диады механической колебательной системы // *Вестник Донского государственного технического университета*. 2017. № 17(3). С. 46–59.
15. *Елисеев А.В., Сельвинский В.В., Елисеев С.В.* Динамика вибрационных взаимодействий элементов технологических систем с учетом неудерживающих связей // Новосибирск: Наука. 2015. 332 с.
16. *Дружинин В.В., Конторов Д.С.* Системотехника // М.: Радио и связь. 1985. 200 с.
17. *Бенсуан А., Лиож Ж.* Импульсное управление и квазивариационные неравенства // М.: Наука. 1987. 596 с.
18. *Ledezma D.F., Ferguson N.S, Zamarripa A.S.* Mathematical modeling of a transient vibration control strategy using a switchable mass stiffness compound system // *Shock and Vibration*. 2014. URL: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/565181> (дата обращения: 18.06.2017).
19. *Ledezma D.F., Ferguson N.S., Brennan M.J., Tang B.* An experimental nonlinear low dynamic stiffness device for shock isolation // *Journal of Sound and Vibration*. 2015. vol. 347. pp. 1–13.
20. *Tang B., Brennan M.J.* On the shock performance of a nonlinear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness // *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. vol. 81. pp. 207–214.
21. *Пегат А.* Нечеткое моделирование и управление // М.: Бином Лаборатория знаний. 2018. 798 с.
22. *Фоминова О.В., Савин Л.А., Чернышев В.И.* Теоретические аспекты формирования оптимальных управляемых процессов виброзащиты // *Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии*. 2013. № 3. С. 044–050.
23. *Фоминова О.В.* Прерывистое демпфирование в системах виброзащиты: основы теории, приложения // М.: Машиностроение-1. 2005. 256 с.
24. *Пантелеев А.В., Бортановский А.С.* Теория управления в примерах и задачах // М.: Высшая школа. 2003. 583 с.
25. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического управления // СПб: Профессия. 2003. 752 с.
26. *Фоминова О.В., Белозёрова Е.Б., Чернышев В.И.* Система виброизоляции с управляемым демпфером // *Справочник. Инженерный журнал с приложением*. 2012. № 6. С. 16–22.
27. *Черноусько Ф.Л., Ананьевский И.М., Решмин С.А.* Методы управления нелинейными механическими системами // М.: Физматлит. 2006. 328 с.

**Чернышев Владимир Иванович** — д-р техн. наук, профессор кафедры мехатроники, механики и робототехники, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. Область научных интересов: динамика управляемых систем, оптимальное управление, моделирование, природоподобные роботы, механика. Число научных



публикаций — 214. chernyshev\_@mail.ru; ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026; р.т.: +7(920)287-2495.

**Савин Леонид Алексеевич** — д-р техн. наук, профессор, заведующий кафедрой мехатроники, механики и робототехники, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. Область научных интересов: адаптивные опоры роторов, моделирование электрогидродинамических систем, динамика и вибрационная диагностика роторных систем, разработка и исследование мехатронных систем и устройств. Число научных публикаций — 514. savin@ostu.ru; ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026; р.т.: +7(910)748-3766.

**Фоминова Ольга Владимировна** — к-т техн. наук, доцент кафедры мехатроники, механики и робототехники, Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева. Область научных интересов: динамика управляемых виброзащитных систем, оптимальное управление, механика, моделирование. Число научных публикаций — 79. mechatronics.orel@yandex.ru; ул. Комсомольская, 95, Орел, 302026; р.т.: +7(919)209-0733.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-19-00186).

V.I. CHERNYSHEV, L.A. SAVIN, O.V. FOMINOVA  
**INDIRECT CONTROL OF OSCILLATIONS: ELEMENTS OF  
THEORY**

---

*Chernyshev V.I., Savin L.A., Fominova O.V. Indirect Control of Oscillations: Elements of Theory.*

**Abstract.** A brief review of the main research areas in the field of controlled vibration protection systems is given. It is shown that Vibration systems with indirect control processes of oscillations allow with a minimum expenditure of energy to ensure programmable switching parameters and structures, in which the dissipative restoring and inertial forces generated on the basis of active impact. Within synthesis of indirect control the chains of new auxiliary mathematical constructs for finding optimal synthesizing functions of the elastic-damping units parameters control are obtained. It enabled to separate a base model with intermittent damping and base model with impulse trap. As a result of the study, based on the harmonic balance method, the dynamic properties of the basic model with intermittent damping, calculation formulas are obtained for determining the parameters of the compensation effect and calculating the dynamic coefficient. It is established that, with an optimal sequence of damping switching, the resonant phenomena are eliminated, and the transient processes decay within one period of the kinematic perturbation. The basic model with a pulse trap imitates the limiting variant of intermittent damping and realizes the process of superimposing constraining bonds, the sequence and duration of which are new variables essentially increasing controllability. And for indirect pulse control, there exists a certain minimum of power consumption independent of the achieved effect of vibration protection. A regulated increase in the duration of the application of the restraining coupling in the low-frequency region and a decrease in this duration in the high-frequency region provides a monotonically decreasing dependence on the dynamic coefficients over the entire frequency range. An example of a solution to the optimization problem of controlling the damping process for a basic model of a vibration isolation system is considered. It is established that intermittent damping is an indispensable feature of the optimality of the vibration isolation system: the damper switches on when the sign of the object's speed has changed and turns off when the object's displacement sign has changed.

**Keywords:** Oscillations, Vibration Protection Systems, Indirect Control, Optimal and Suboptimal Control, Basic Model With Intermittent Damping, Basic Model with Pulse Trap.

---

**Chernyshev Vladimir Ivanovich** — Ph.D., Dr. Sci., Professor of Mechatronics, Mechanics and Robotics Department, Oryol State University. Research interests: Dynamics of Controlled Systems, Optimal Control, Modeling of Dynamic Systems, Nature-Like Robots, Mechanics. The number of publications — 214. [chernyshev\\_@mail.ru](mailto:chernyshev_@mail.ru); 95, Komsomolskaya str., Orel, 302026, Russia; office phone: +7(920)287-2495.

**Savin Leonid Alekseevich** — Ph.D., Dr. Sci., Professor, Head of Mechatronics, Mechanics and Robotics Department, Oryol State University. Research interests: Adaptive Support of Rotors, Modeling of Electrohydrodynamic Systems, Dynamics And Vibration Diagnostics of Rotor Systems, Development And Research of Mechatronic Systems And Devices. The number of publications — 514. [savin@ostu.ru](mailto:savin@ostu.ru); 95, Komsomolskaya str., Orel, 302026, Russia; office phone: +7(910)748-3766.

**Fominova Olga Vladimirovna** — Ph.D., Associate Professor of Mechatronics, Mechanics and Robotics Department, Oryol State University. Research interests: Dynamics of Controlled Vibration Protection Systems, Optimal Control, Mechanics. The number of publications — 79.

chernyshev @mail.ru; 95, Komsomolskaya str., Orel, 302026, Russia; office phone: +7(919)209-0733.

**Acknowledgements.** The work was supported by the RFBR (project No. 16-19-00186).

## Reference

1. Genfeng L., Jing J., Yuhe L., Ming Z. Impact of system anisotropy on vibration reduction of rotating machinery and its evaluation method. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2017. vol. 93. pp. 299–311.
2. Avramov K.V., Mihlin Yu.V. *Nelinejnaya dinamika uprugih sistem. Prilozheniya* [Nonlinear Dynamics of Elastic Systems. Apps]. M.-Izhevsk: Institut komp'yuternyh issledovanij. 2015. Issue 2. 700 p. (In Russ.).
3. Chernyshev V.I., Savin L.A., Fominova O.V. Dynamics of the rotor on elastic-damping supports under action of kinematic effects. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. vol. 233. no.1. pp. 012055.
4. Linfeng D., Zhao R.A. Vibration analysis method based on hybrid techniques and its application to rotating machinery. *Measurement*. 2013. vol. 46. no. 9. pp. 3671–3682.
5. Dorf R., Bishop R. *Sovremennye sistemy upravleniya* [Modern management systems]. M.: Laboratoriya Bazovyh Znanij. 2013. 832 p. (In Russ.).
6. Bai. X.X., Wereley N.M., Choi Y.T. Magnetorheological energy absorber with dual concentric annular valves. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*. 2016. vol. 27. no. 7. pp. 944–958.
7. Dyhta V.A., Samsonyuk O.N. *Optimal'noe impul'snoe upravlenie s prilozheniyami* [Optimal impulse control with applications]. M.: Fizmatlit. 2003. 256 p. (In Russ.).
8. Dyhta V.A. [The positional minimum principle for quasioptimal processes in control problems with terminal constraints]. *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*. 2017. Issue 19. pp. 113–128. (In Russ.).
9. Balthazar J.M., Gonçalves, P.B., Fenili A. Nonlinear vibrations in elastic structures: Dynamics and control. *Shock and Vibration*. 2013. vol. 20. no. 6. pp. 1031–1032.
10. Ibrahim R.A. Recent advances in nonlinear passive vibration isolators. *Journal of Sound and Vibration*. 2008. vol. 314. no. 3-5. pp. 371–452.
11. Fominova O.V., Stepanov Yu.S., Chernyshev V.I. *Ehkstremal'nye zadachi i optimizaciya: vvedenie v teoriyu nepryamogo impul'snogo upravleniya processami kolebanij* [Extreme problems and optimization: introduction to the theory of indirect pulse control of oscillation processes]. M.: Izdatel'skij dom «Spektr». 2011. 218 p. (In Russ.).
12. Balandin D.V., Bolotnik N.N., Pilkey W.D. Pre-acting control for shock and pact isolation systems. *Shock and Vibration*. 2005. vol. 12. no. 1. pp. 49–65.
13. Ni Y.Q., Chen Z.H., Or S.W. Experimental identification of a self-sensing magnetorheological damper using soft computing. *Journal of Engineering Mechanics*. 2015. vol. 141. no. 7. pp. 1–13.
14. Eliseev S.V., Orlenko A.I., Nguen D.H. [Devices for the transformation of motion in the structure of a dyad of a mechanical oscillatory system]. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Vestnik of Don State Technical University*. 2017. vol. 17(3). pp. 46–59. (In Russ.).
15. Eliseev A.V., Sel'vinskij V.V., Eliseev S.V. *Dinamika vibracionnyh vzaimodejstvij ehlementov tekhnologicheskikh sistem s uchetom neuderzhivayushchih svyazej* [Dynamics of vibrational interactions of elements of technological systems with allowance for non-retentive links]. Novosibirsk: Nauka. 2015. 332 p. (In Russ.).
16. Druzhinin V.V., Kontorov D.S. *Sistemotekhnika* [System engineering]. M.: Radio i svyaz'. 1985. 200 p. (In Russ.).

17. Bensuan A., Liozh Zh. *Impul'snoe upravlenie i kvazivariacionnye neravenstva* [Pulse control and quasi-variational inequalities]. M. Nauka. 1987. 596 p. (In Russ.).
18. Ledezma D.F., Ferguson N.S., Zamarripa A.S. Mathematical modeling of a transient vibration control strategy using a switchable mass stiffness compound system. *Shock and Vibration*. 2014. Available at: <http://dx.doi.org/10.1155/2014/565181> (accessed: 18.06.2017)
19. Ledezma D.F., Ferguson N.S., Brennan M.J., Tang B. An experimental nonlinear low dynamic stiffness device for shock isolation. *Journal of Sound and Vibration*. 2015. vol. 347. pp. 1–13.
20. Tang B., Brennan M.J. On the shock performance of a nonlinear vibration isolator with high-static-low-dynamic-stiffness. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2014. vol. 81. pp. 207–214.
21. Pegat A. *Nechetkoe modelirovanie i upravlenie* [Unclear modeling and control]. M.: Laboratoriya Bazovyh Znanij. 2009. 798 p. (In Russ.).
22. Fominova O.V., Savin L.A., Chernyshev V.I. [Theoretical aspects of the formation of optimal controlled vibration protection processes]. *Izvestiya Yugo-Zapadnogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: tekhnika i tehnologii – Proceedings of the South-West State University Series: Engineering and Technology*. 2019. vol. 3. pp. 044–050. (In Russ.).
23. Fominova O.V. *Preryvistoe dempfirovanie v sistemah vibrozashchity: osnovy teorii, prilozheniya* [Intermittent damping in vibration protection systems: theory bases, applications]. M. Mashinostroenie-1. 2005. 256 p. (In Russ.).
24. Panteleev A.V., Bortanovskij A.S. *Teoriya upravleniya v primerah i zadachah* [Theory of control in examples and problems]. M. Vysshaya shkola 2003. 583 p. (In Russ.).
25. Besekerskiy V.A., Popov Ye.P. *Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya* [Theory of automatic control systems]. SPb: Professiya. 2003. 752 p. (In Russ.).
26. Fominova O.V., Belozyorova E.B., Chernyshev V.I. [Vibration damping system with controlled damper]. *Spravochnik. Inzhenernyj Zhurnal – Handbook. An Engineering Journal*. 2012. vol. 6. pp. 3–10. (In Russ.).
27. Chernous'ko F.L., Anan'evskij I.M., Reshmin S.A. *Metody upravleniya nelinejnymi mekhanicheskimi sistemami* [Methods of control of nonlinear mechanical systems]. M.: Fizmatlit. 2006. 328 p. (In Russ.).