

К. А. БАТЕНКОВ, А. А. БАТЕНКОВ
**АНАЛИЗ И СИНТЕЗ СТРУКТУР СЕТЕЙ СВЯЗИ ПО
ДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ УСТОЙЧИВОСТИ**

Батенков К.А., Батенков А.А. Анализ и синтез структур сетей связи по детерминированным показателям устойчивости.

Аннотация. Анализ и синтез сетей связи, основанный на критериях устойчивости, предполагает рассмотрение простых и удобных для понимания показателей, слабо привязанных к классическому понятию вероятности выхода объекта из состояния работоспособности. Подобные детерминированные показатели устойчивости (связность, пара связностей, линейный функционал связности, число остовых деревьев) позволяют, пусть и весьма приближенно, решать целый комплекс задач, связанных с оценкой надежности и живучести сложноразветвленных сетей связи. Вследствие достаточно простого аналитического вида линейного функционала связности для синтеза структур оказывается возможным использовать аналитический метод, представленный в работе. При этом общая постановка задачи для синтеза связных графов формулируется как поиск графа с заданным числом ребер, вершин и с фиксированными значениями их весовых коэффициентов, имеющего максимальное значение линейного функционала связности. В целом для детерминированных показателей характерен и достаточно серьезный недостаток, проявляющийся в невозможности учета особенностей функционирования отдельных линий связи. Кроме того, для структур общего типа, где выражение линейного функционала не сводится к аналитическому виду, конструктивность такого показателя связности структур сетей связи (графов) оказывается менее выраженной. В теоретических исследованиях относительно структур общего типа линейный функционал слабо коррелирует с уже существующими понятиями (например, с реберной связностью). Поэтому, несмотря на то, что он, как показатель связности (надежности), может быть применен для оценки любой структуры, при исследовании структур общего типа более рационально использовать такие показатели связности, которые все же каким-либо образом согласовывались с понятиями, используемыми в теории графов.

Ключевые слова: сеть связи, граф, структура, детерминированные показатели устойчивости, связность, пара связностей, линейный функционал связности, число остовых деревьев.

1. Введение. Анализ и синтез сетей связи, основанный на критериях устойчивости, предполагает рассмотрение простых и удобных для понимания показателей [1], слабо привязанных к классическому понятию вероятности выхода объекта из состояния работоспособности [2]. Целью использования подобных детерминированных показателей устойчивости [3, 4] является возможность, пусть и весьма приближенно, решать целый комплекс задач, связанных с оценкой надежности и живучести сложноразветвленных сетей связи [5, 6]. Причем основным преимуществом данных показателей оказывается, прежде всего, простота их расчета, и как следствие, возможность анализа и синтеза структур крупномасштабных сетей связи.

Отметим, что в настоящей работе под устойчивостью понимается способность сети связи сохранять работоспособность при влиянии внутренних и внешних дестабилизирующих факторов [7, 8]. При этом надежность выступает одной из составляющих устойчивости и отражает влияние на работоспособность сети и главным образом внутрисистемных факторов, а живучесть — другой составляющей и характеризует устойчивость системы связи против действия причин, лежащих вне системы и приводящих к разрушениям или значительным повреждениям некоторой части ее элементов. Необходимо подчеркнуть, что в большинстве научных работ [9-11], посвященных теории надежности, под *надежностью* сети понимается ее объективное свойство функционировать с качеством не хуже заданного в условиях дестабилизирующего воздействия внешней среды. В этом смысле теория надежности, по сути, занимается более общими закономерностями, затрагивающими определенные аспекты анализа устойчивости сетей связи. Именно поэтому в дальнейшем все задачи анализа и синтеза структур сетей связи рассматриваются на основе показателей надежности, хотя с точки зрения сетевой терминологии более правильным является использование показателей *устойчивости*.

2. Связность сетей связи. Одно из наиболее простых и распространенных свойств, которым может обладать граф, — свойство быть связным. Граф G является *связным*, если между любой парой его вершин можно выделить простую цепь [12]. При этом *компонента связности*, или просто *компонента* графа G — это связный подграф графа G , имеющий максимальный набор элементов. Следовательно, произвольный несвязный граф включает в себя минимум две компоненты.

Рассмотрение в качестве математической модели сети связи графа позволяет переформулировать свойство связности: связной является такая сеть связи, в которой между любой парой узлов существует хотя бы один маршрут (транзитный или прямой путь) [11] (на рисунке 1 приведены примеры связной и несвязной сетей).

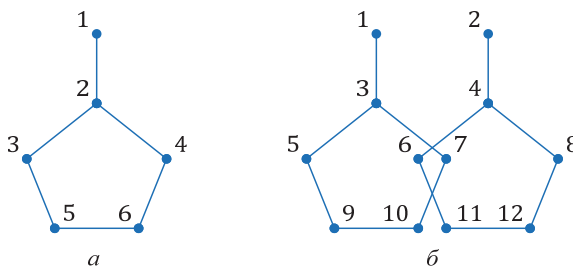


Рис. 1. Графы: а) связный; б) несвязный

Со свойством связности теснейшим образом связана такая характеристика сетей связи, как структурная надежность. Поэтому в литературе [11] под структурной надежностью (живучестью) подразумевают свойство сети обеспечивать ее связность в случае существенных разрушений как определенных сегментов сети, так и ее элементов. Иногда к этому определению еще добавляется требование обеспечения связи между всеми узлами сети даже с пониженным качеством обслуживания. Но независимо от того, какие дополнительные требования и ограничения закладываются в определение структурной надежности, ясно, что связность выступает как одно из значимых свойств сетей связи, а следовательно, ее целесообразно рассматривать в качестве показателя структурной надежности [13].

Сама по себе связность, в том определении, которое дано выше, мало что говорит о структуре сети связи. Из факта связности структуры еще не следует, что такая сеть связи обладает высокой структурной живучестью. И это достаточно хорошо иллюстрирует рисунок 1, слева — удаление вершины 2 приводит к появлению двухкомпонентного графа, а следовательно, к несвязности структуры сети.

В результате гораздо важнее знать, как хорошо связана сеть (насколько хорошо или насколько плохо). Иначе говоря, необходимо иметь некоторые количественные оценки связности структуры сети связи. Это становится тем более очевидным, когда при решении задачи синтеза структуры сети связи появляется несколько альтернатив выбора решения.

Связность графов — понятие в теории графов довольно интуитивное, обобщающее такие ранее введенные понятия, как точка сочленения, мост и блок [12]. При исследовании вопроса о том, какой из двух графов «более связан», полезны два инварианта, называемые связностью и реберной связностью.

Связность $\chi(G)$ графа G — это минимальное количество вершин, удаление которых образует либо тривиальный, либо несвязный граф. Отсюда следует, что у несвязного графа связность $\chi(G)$ равна 0, а у связного с точкой сочленения $\chi(G) = 1$. Граф клик (полносвязный, полный) при удалении любого числа вершин остается связным, однако удаление $(v-1)$ вершины приводит его к тривиальному виду (v — число вершин графа), в результате связность клики $\chi(G) = v-1$. Иногда в литературе χ именуют *вершинной связностью*.

Реберная связность $\lambda(G)$ графа G — минимальное число ребер, удаление которых образует несвязный граф. Понятно, что у несвязного графа реберная связность $\lambda(G) = 0$, а у связного графа, включающего в себя мост, $\lambda(G) = 1$. Уитни получено неравенство, определяющее взаимосвязь связности, реберной связности и наименьшей степени графа [12].

Теорема 1. Для любого графа G выполняются неравенства $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G)$, где $\delta(G)$ — минимальная степень вершины в графе G .

Установлено [12], что если $\delta(G)$ достаточно велико, то реберная связность и минимальная степень вершин графа равны между собой.

Теорема 2. Если граф G имеет v вершин и $\delta(G) = \lfloor v/2 \rfloor$, то $\lambda(G) = \delta(G)$, где $\lfloor x \rfloor$ — округление в меньшую сторону до ближайшего целого числа x .

Утверждение в виде равенства для вершинной связности несправедливо. Например, у графов G , построенных на основе двух одинаковых клик с v' вершинами, соединенных посредством всего одной вершины (рисунок 2), число вершин $v(G) = 2v' - 1$, минимальная степень вершины $\delta(G) = v' - 1$, реберная связность $\lambda(G) = \delta(G) = v' - 1$, а вершинная связность $\kappa(G) = 1 \neq \lambda(G)$.

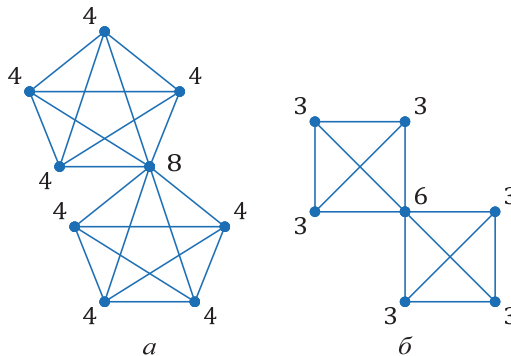


Рис. 2. Графы, построенные на основе двух одинаковых клик: а) с пятью; б) четырьмя вершинами, соединенных посредством всего одной вершины (точки сочленения)

Задача определения наибольшей связности, возможной для графа с данным числом вершин и данным числом ребер, была поставлена К. Бержем и решена Ф. Харари.

Теорема 3. Среди всех графов с v вершинами и l ребрами наибольшая связность определяется выражением:

$$\lambda(G) = \begin{cases} 0, & l < v-1, \\ \left\lfloor \frac{2l}{v} \right\rfloor, & l \geq v-1. \end{cases}$$

В данном выражении учтено, что наибольшая связность $\chi(G)$ графа соответствует его наибольшей реберной связности $\lambda(G)$.

В качестве примера рассмотрим расчет связностей графов, заданных их инвариантами — макси-кодами.

Пример 1. Макси-код первого графа равен 1023, а второго — 823 [14]. Определить их вершинные и максимальные связности.

Дано: $\mu(G_1) = 1023$, $\mu(G_2) = 787$.

Найти: $\kappa(G_1)$, $\kappa(G_2)$, $\lambda(G_1)$, $\lambda(G_2)$.

Проще всего определить сначала максимальную, или реберную, связность. Для этого необходимо найти вектор смежностей \mathbf{a} . Количество вершин в графах вычисляется следующим образом [14]:

$$v(G_i) = \frac{1}{2} + \sqrt{2 \lceil \log_2 \mu(G_i) \rceil} + \frac{1}{4}; \quad v(G_1) = v(G_2) = 5.$$

Представление макси-кодов в двоичной системе исчисления позволяет определить вектор смежностей \mathbf{a} :

$$\mathbf{a}(G_1) = [1111111111]^T, \quad \mathbf{a}(G_2) = [1100010011]^T.$$

Следует отметить, поскольку $\mu(G_1) = 2^{\frac{v(G_1)-1}{2} v(G_1)} - 1$, то первый граф является 5-кликкой и имеет единичный вектор смежностей, то есть $\mathbf{a}(G_1) = \mathbf{1}_{10}$.

Исходя из вектора смежностей, число ребер вычисляется как:

$$l(G_i) = \mathbf{a}^T(G_i) \mathbf{1}_{v(G_i)} : l(G_1) = 10; l(G_2) = 5.$$

Реберная (максимальная) связность:

$$\lambda(G_i) = \begin{cases} 0, l(G_i) < v(G_i) - 1, \\ \left\lfloor \frac{2l(G_i)}{v(G_i)} \right\rfloor, l(G_i) \geq v(G_i) - 1; \end{cases}$$

$$\lambda(G_1) = \left\lfloor \frac{2 \cdot 10}{5} \right\rfloor = 4; \lambda(G_2) = 2.$$

Для получения вершинной связности целесообразно построить диаграммы графов: на рисунке 3а представлена диаграмма первого графа, на рисунке 3б — второго.

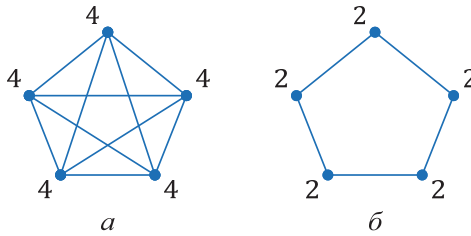


Рис. 3. Диаграммы графов

Поскольку первый граф является 5-кликой, то его вершинная связность соотносится с числом вершин, то есть $\chi(G_1) = v(G_1) - 1 = 4$. Для второго графа, исходя из его диаграммы, вершинная связность равна реберной, то есть $\chi(G_1) = \lambda(G_1) = 2$.

3. Пары связностей сетей связи. Также существует задача о дроблении графа на основе удаления из него заданного числа ребер и вершин. *Пара связностей* графа G — это упорядоченная пара целых неотрицательных чисел, (a, b) , причем существует множество, включающее a вершин и b ребер, удаление которых образует несвязный граф, и нет такого множества, состоящее из $(a - 1)$ вершин и b ребер или a вершин и $(b - 1)$ ребер, удаление которых формирует несвязный граф. В частности, упорядоченные пары $(\kappa, 0)$ и $(0, \lambda)$ — это вершинная и реберная связности графа G соответственно. Таким образом, понятие пары связностей является обобщением данных понятий. Легко заметить, что для каждого значения a , $0 \leq a \leq \kappa$ существует единственная пара связностей (a, b_a) ; таким образом, граф G имеет в точности $\kappa + 1$ пар связностей.

Пары связностей графа G определяют функцию $f: a \rightarrow b_a$, отображающую множество $\{0, 1, \dots, k\}$ в множество неотрицательных целых чисел и такую, что $f(k) = 0$. Эта функция называется функцией связности графа G . Она строго убывает, поскольку, если (a, b) — пара связностей и $b > 0$, то очевидно, найдется множество, включающее $a+1$ вершин и $b-1$ ребер, удаление которых формирует несвязный или тривиальный граф.

Граф G называется n -связным, если $\kappa(G) \geq n$, и n -реберно-связным, если $\lambda(G) \geq n$. Заметим, что нетривиальный граф 1-связен тогда и только тогда, когда он является связным, и 2-связен тогда и только тогда, когда он включает блок, содержащий минимум два ребра.

В качестве примера рассмотрим расчет функций связностей графов, заданных их инвариантами — макси-кодами.

Пример 2. Макси-код первого графа равен 1023, а второго — 823. Определить их функции связностей.

Дано: $\mu(G_1) = 1023$, $\mu(G_2) = 787$.

Найти: f_{G_1} , f_{G_2} .

Воспользуемся результатами, полученными в примере 1. Таким образом, функция связности f отображает для первого графа множество $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, а для второго — $\{0, 1, 2\}$. Исходя из диаграмм графов (рисунок 3) соответствующие пары связностей имеют следующий вид:

$$G_1: (0, 4), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0); G_2: (0, 2), (1, 1), (2, 0).$$

Следует заметить, что для первого графа, являющегося кликой, удаление любой вершины приводит к графу, также оказывающемуся кликой, что свидетельствует о его реберной связности, на единицу меньшей числа вершин. Второй же граф после удаления вершины превращается в дерево, что говорит о единичной его реберной связности.

Таким образом, функции связности можно представить в графическом (рисунок 4) или табличном виде:

$$\begin{array}{cccccc} a & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ f_{G_1} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} a & 2 & 1 & 0 \\ f_{G_2} & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Рассмотренные показатели связности сетей связи (графов) обладают целым рядом достоинств [11]:

- простота интерпретации;
- использование для анализа значительного класса сетей (следует отметить, что сети связи, моделируемые на основе ориентированных графов, должны использовать понятия связностей, отличные от рассмотренных здесь);
- относительно простые математические преобразования при вычислениях;
- возможность описания результатов в наглядной форме и проведения сравнительного анализа.

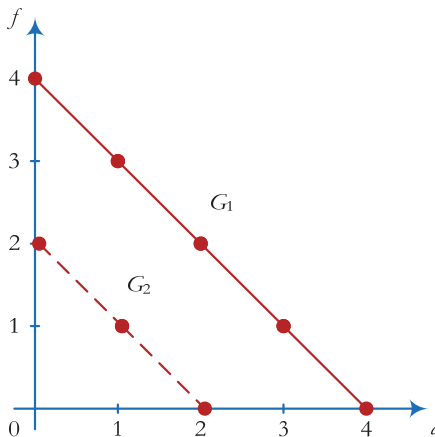


Рис. 4. Функции связностей

Сложность состоит в том, что большинство методов решения задач анализа и синтеза связных графов сталкивается с необходимостью выполнения большого количества вычислений, что делает их трудно применимыми для реальных сетей связи [15, 16]. Особенно трудоемким оказывается расчет как связностей, так и пар связностей в целом для структур сетей связи, имеющих достаточно сложные формы, не позволяющие использовать такие особенности графов, как мост, двудольность, компонентность и другие. Данное обстоятельство обуславливается, прежде всего, необходимостью применения либо визуального метода анализа рассмотренных детерминированных показателей на основе диаграмм, либо же исключительно переборных способов анализа, имеющих просто катастрофический рост вычислительной сложности при увеличении сложности сети. Поэтому используются некоторые эвристические показатели связности, которые позволяют легче решать поставленные задачи [17].

Таким образом, несмотря на то, что существует несколько показателей по оценке связности структуры сетей связи (графов), возможности их применения к решению задач анализа и синтеза сетей связи оказываются несколько ограниченными [18, 19]. Это обстоятельство вынуждает использовать другие методы анализа надежности сетей.

4. Линейный функционал связности сетей связи. Ограниченные возможности применения известных показателей связности графов при решении задач анализа надежности сетей связи вынуждают использовать более простые с вычислительной точки зрения показатели.

Рассмотрим некоторый линейный функционал, представляющий собой линейную комбинацию определенным образом выбранных параметров связности, составленную по всем узлам (вершинам) сети связи (графа). Такими параметрами могут быть относительная и абсолютная связности каждого узла (каждой вершины) рассматриваемой сети связи (графа) [11].

Относительная связность i -го узла (вершины) сети (графа) определяется следующим отношением [11]:

$$c_i = \frac{v_i}{v - d_i + 1}, i = 1, 2, \dots, v, \quad (1)$$

где v_i — ранг i -го узла сети (степень вершины); v — общее число узлов в сети связи; d_i — количество узлов сети связи, с которыми i -й узел может иметь связь в сети (учитывается также и сам i -узел), то есть величина d_i на единицу больше числа узлов, с которыми i -й узел соединен хотя бы одной простой цепью.

В векторном виде данное соотношение имеет форму:

$$\mathbf{c} = \text{diag} \left\{ \text{diag}(\mathbf{v}) \left[\text{diag}(\{v+1\} \mathbf{1}_v - \mathbf{d}) \right]^{-1} \right\},$$

где $\text{diag}(\mathbf{x})$ — диагональная матрица с главной диагональю, соответствующей вектору \mathbf{x} , а $\text{diag}(\mathbf{X})$ — вектор, составленный из элементов главной диагонали матрицы \mathbf{X} ; $\mathbf{c} = \{c_i\}_{i=1,2,\dots,v}$ — вектор относительных связностей; $\mathbf{v} = \{v_i\}_{i=1,2,\dots,v}$ — вектор степеней вершин; где $\mathbf{1}_v = [1, 1, \dots, 1]^T$ — единичный вектор размера $(v \times 1)$.

Величину v_i можно справедливо трактовать как число прямых связей, которыми обладает i -й узел. Очевидно, что $v_i \leq d_i - 1$. Данный параметр показывает соотношение числа прямых и отсутствующих связей у i -го узла, указывает на преобладание одних над другими. Он будет тем больше, чем больше первых и меньше вторых. В итоге значение данного параметра будет определяться числом связей, которыми может обладать i -й узел сети связи.

Относительность этого параметра состоит в том, что он не дает полного представления о связях i -го узла с остальными узлами рассматриваемой сети.

Абсолютная связность i -го узла сети определяется отношением числа связей, которыми может обладать i -й узел, к общему числу узлов рассматриваемой сети:

$$c'_i = \frac{d_i - 1}{v}, i = 1, 2, \dots, v, \quad (2)$$

или в векторном виде:

$$\mathbf{c}' = \frac{1}{v}(\mathbf{d} - \mathbf{1}_v).$$

Абсолютная связность i -го узла при фиксированном числе узлов v в сети будет полностью определяться величиной d_i . Чем больше d_i , тем больше абсолютная связность.

Общий вид линейного функционала для графа G определяется как сумма выражений (1) и (2):

$$k(G) = \sum_{i=1}^v \alpha_i (c_i + c'_i) = \sum_{i=1}^v \alpha_i \left(\frac{v_i}{v - d_i + 1} + \frac{d_i - 1}{v} \right),$$

где α_i — коэффициент веса i -го узла (вершины); или в векторном виде:

$$k(G) = \mathbf{a}^T (\mathbf{c} + \mathbf{c}') = \mathbf{a}^T \left(\text{diag} \left\{ \text{diag}(\mathbf{v}) \left[\text{diag}(\{v+1\} \mathbf{1}_v - \mathbf{d}) \right]^{-1} \right\} + \frac{1}{v} [\mathbf{d} - \mathbf{1}_v] \right),$$

где $\mathbf{a} = \{\alpha_i\}_{1,2,\dots,v}$ — вектор весовых коэффициентов вершин графа.

Следует отметить, что коэффициенты веса вершин α_i определяют важность того или иного узла связи относительно других узлов и задаются субъективно при постановке задач анализа и синтеза.

Для весовых коэффициентов справедливо условие нормировки:

$$\sum_{i=1}^v \alpha_i = \mathbf{a}^T \mathbf{1}_v = 1, \quad (3)$$

а для других параметров сети неравенство:

$$v_i \leq d_i - 1 \leq v.$$

Если все узлы рассматриваемой структуры сети связи равноценны, то есть обладают одинаковым весом $\alpha_i = \alpha_j$, $i, j = 1, 2, \dots, v$ в общей структуре сети, то $\alpha_i = 1/v$.

Значения введенных параметров для каждого узла сети связи в общем случае могут быть различными и определяются, как уже отмечалось, числом связей, которыми он может обладать. Тем не менее для значений относительной c_i и абсолютной c_i' связности каждого узла сети справедливы следующие оценки. В силу того, что $0 \leq d_i - 1 \leq v$ и $0 \leq v_i \leq v - 1$, получается:

$$0 \leq c_i \leq v - 1;$$

$$0 \leq c_i' \leq 1 - 1/v.$$

В качестве примера рассмотрим расчет линейных функционалов связности графов, заданных их инвариантами — макси-кодами.

Пример 3. Макси-код первого графа равен 1023, а второго — 0. Все вершины имеют одинаковый вес. Определить значения их линейных функционалов связности.

Дано: $\mu(G_1) = 1023$, $\mu(G_2) = 0$.

Найти: $k(G_1)$, $k(G_2)$.

Воспользуемся результатами, полученными в примере 2. Тогда первый граф является 5-кликкой, а второй нуль-графом, причем с неуказанным числом вершин v . Матрицы смежностей графов:

$$\mathbf{A}(G_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}(G_2) = \mathbf{0}_{v(G_2), v(G_2)}.$$

Векторы степеней:

$$\mathbf{v}(G_i) = \mathbf{A}(G_i)\mathbf{1}_{v(G_i)}; \mathbf{v}(G_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}; \mathbf{v}(G_2) = \mathbf{0}_{v(G_2)}.$$

Матрицы достижимостей:

$$\mathbf{D}(G_i) = \bigcup_{i=1}^{v(G_i)-1} \mathbf{A}^i(G_i) \cup \text{diag}(\mathbf{1}_v);$$

$$\mathbf{D}(G_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{D}(G_2) = \text{diag}(\mathbf{1}_{v(G_2)}).$$

Отметим, что в данном случае символ \cup трактуется как объединение матриц, то есть в результате объединения матриц $\mathbf{A} = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ и $\mathbf{B} = \{b_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ формируется матрица $\mathbf{C} = \{c_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$, элементы которой равны нулю при условии одновременного равенства нулю соответствующих элементов матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} , и единице — при неравенстве нулю хотя бы одного из соответствующих элементов матриц \mathbf{A} или \mathbf{B} :

$$a_{i,j} \cup b_{i,j} = \begin{cases} 0, & a_{i,j} = 0 \wedge b_{i,j} = 0, \\ 1, & a_{i,j} \neq 0 \vee b_{i,j} \neq 0. \end{cases}$$

Вектор достижимостей:

$$\mathbf{d}(G_i) = \mathbf{D}(G_i)\mathbf{1}_{v(G_i)}; \mathbf{d}(G_1) = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}; \mathbf{d}(G_2) = \mathbf{1}_{v(G_2)}.$$

Относительная связность:

$$\mathbf{c}(G_i) = \text{diag} \left\{ \text{diag}(\mathbf{v}(G_i)) \left[\text{diag}(\{v(G_i) + 1\} \mathbf{1}_v - \mathbf{d}(G_i)) \right]^{-1} \right\};$$

$$\mathbf{c}(G_1) = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}; \mathbf{c}(G_2) = \mathbf{0}_{v(G_2)}.$$

Абсолютная связность:

$$\mathbf{c}'(G_i) = \frac{1}{v(G_i)} (\mathbf{d}(G_i) - \mathbf{1}_v); \mathbf{c}'(G_1) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \\ 0,8 \end{bmatrix}; \mathbf{c}'(G_2) = \mathbf{0}_{v(G_2)}.$$

Исходя из условия нормировки для весовых коэффициентов (3) и их равнозначности, вектор весовых коэффициентов узлов имеет вид:

$$\mathbf{a}(G_i) = \frac{1}{v(G_i)} \mathbf{1}_{v(G_i)}.$$

Тогда линейный функционал рассчитывается следующим образом:

$$k(G_i) = \mathbf{a}^T (\mathbf{c}(G_i) + \mathbf{c}'(G_i)); k(G_1) = 4,8; k(G_2) = 0.$$

Вообще, когда относительная (1) и абсолютная (2) связности i -го узла сети связи принимают максимальные значения, то есть $c_i = v - 1$, $c'_i = 1 - 1/v$, что характерно для полносвязных структур (клик [12]), у которых ранг каждого узла (степень вершины) $v - 1$, значение линейного функционала принимает максимальное значение $k_{\max} = v - \frac{1}{v}$ [11].

Также очевидно, что при достаточно большом числе узлов v (вершин) в сети связи (графе), представляющей собой полносвязную структуру (клик), значение линейного функционала практически определяется самим числом v .

Значения нижних пределов для относительной $c_i = 0$ и абсолютной $c'_i = 0$ связностей узла (вершины) полностью несвязной сети связи (нуль-графа) справедливы при $\mathbf{v} = \mathbf{d} = \mathbf{0}_v$. Если это соотношение будет выполняться, то значение линейного функционала будет минимальным и равным нулю $k_{\min} = 0$.

Для связного графа формула для линейного функционала несколько упрощается, поскольку $d_i = v$. Тогда, так как $\mathbf{c} = \mathbf{v}$,

$\mathbf{c}' = \frac{v-1}{v} \mathbf{1}_v$, то $\mathbf{c} + \mathbf{c}' = \mathbf{v} + \frac{v-1}{v} \mathbf{1}_v$, то линейный функционал составит:

$$k(G) = \mathbf{a}^T \mathbf{v} + 1 - \frac{1}{v}. \quad (4)$$

Для графа типа дерево также достаточно просто получить значение линейного функционала $k(G)$ при равновесности всех вершин. Поскольку дерево связно, то справедлива вышеприведенное выражение, а так как число ребер l на единицу больше числа

ребер l , то $\mathbf{1}^T \mathbf{v} = 2l = 2v - 2$, а значит, $k(G) = 3 \left(1 - \frac{1}{v} \right)$. Кроме того,

поскольку дерево является связным графом с минимальным числом ребер l при заданном числе вершин v , то, по сути, величина его линейного функционала k определяет нижнюю границу для любого связного графа с равновесными вершинами. Отметим, что при значительных размерах сетей, то есть когда v велико, минимальное значение линейного функционала для связного графа стремится к 3.

Верхняя граница для несвязного графа определяется исходя из следующих соображений. Несвязный граф с максимальным числом ребер l при заданном числе вершин v является объединением $(v-1)$ -

клик и изолированной вершины. Поскольку число ребер u $(v-1)$ -

клик равно $l = C_{v-1}^2 = \frac{(v-1)(v-2)}{2}$, то $\mathbf{1}^T \mathbf{v} = 2l = (v-1)(v-2)$, а

значит, $k(G) = v - 2 + \frac{1}{v}$. Данные границы изображены на рисунке 5.

Таким образом, можно отметить, что линейный функционал k отражает только структурные характеристики сети связи и не зависит от особенностей функционирования элементов этой сети. Каждое слагаемое этого функционала в определенной мере характеризует связность некоторого узла сети связи со всеми остальными узлами, а

в целом линейный функционал отражает физическую сущность связности сетей связи. Он максимален для полносвязной структуры (клики) и равен нулю только для «вырожденной» структуры (нуль-графа), то есть для набора несвязных узлов.

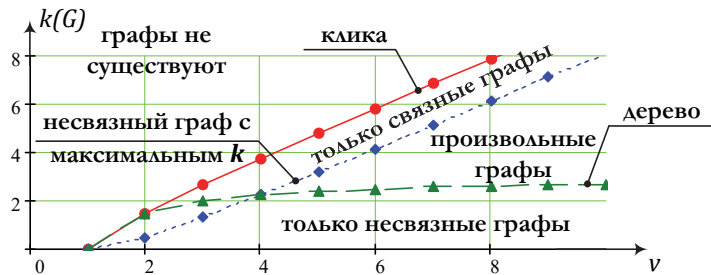


Рис. 5. Границы линейного функционала связности

Все сказанное дает основание использовать линейный функционал k в качестве показателя связности структуры сетей связи.

Нельзя не отметить еще и то, что сам по себе линейный функционал k прост и для некоторых классов структур сетей (например, класса регулярных структур) удастся получить его конкретное аналитическое выражение, что в значительной степени упрощает его использование.

5. Оценка надежности решетчатой структуры (решетки) на основе линейного функционала связности. В общем виде решетчатую структуру можно задать в виде, представленном на рисунке 6. В общем случае в данной структуре a рокад (рядов по вертикали) и b осей (рядов по горизонтали).

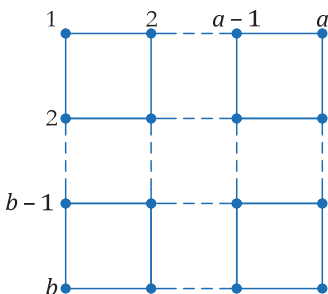


Рис. 6. Решетчатая структура (решетка)

Из построения структуры следует, что общее число узлов $|G| = v = ab$, а также ее связность.

Множество узлов (вершин) решетчатой структуры целесообразно разделить на три подмножества: подмножество вершин G_2 со степенью 2, G_3 — 3 и G_4 — 4 соответственно. Мощность множеств $g_i = |G_i|$, $i = 2, 3, 4$ (число вершин в подмножествах) $g_2 = 4$, $g_3 = 2a + 2b - 8$, $g_4 = ab - 2a - 2b + 4$.

Тогда, учитывая равновесность всех вершин, линейный функционал решетчатой структуры представим в виде суммы:

$$k(G) = \frac{1}{v} \sum_{i=2}^4 i \cdot g_i + 1 - \frac{1}{v} = 5 - \frac{2}{a} - \frac{2}{b} - \frac{1}{ab}.$$

6. Оценка надежности сотовой структуры (соты) на основе линейного функционала связности. В общем виде сотовую структуру можно задать в виде, представленном на рисунке 7. В общем случае в данной структуре a рокад (рядов по вертикали — от правого верхнего угла к левому нижнему) и b осей (рядов по вертикали).

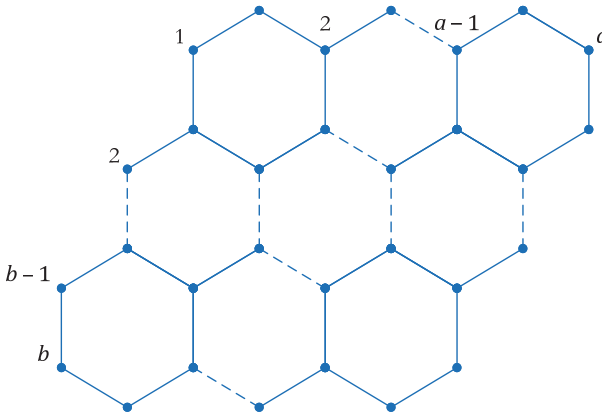


Рис. 7. Сотовая структура (сота)

Из построения структуры следует, что общее число узлов $|G| = v = 2(ab - 1)$, $a > 1$, $b > 1$, а также ее связность.

Множество узлов (вершин) решетчатой структуры целесообразно разделить на два подмножества: подмножество вершин G_2 со степенью 2 и G_3 — 3 соответственно. Мощность множеств $g_i = |G_i|$, $i = 2, 3$: $g_2 = 2(a + b - 1)$, $g_3 = 2(a - 1)(b - 2) + 2(a - 2)$.

Тогда, учитывая равновесность всех вершин, линейный функционал сотовой структуры представим в виде суммы:

$$k(G) = \frac{1}{v} \sum_{i=2}^3 i \cdot g_i + 1 - \frac{1}{v} = 4 - \frac{a+b}{ab-1} + \frac{1}{2(ab-1)}, a > 1, b > 1.$$

7. Оценка надежности древовидной структуры (дерева) на основе линейного функционала связности. В общем виде регулярную древовидную структуру можно задать в виде, представленном на рисунке 8. Регулярность заключается в постоянной величине «размножения» каждого узла древовидной структуры (за исключением узлов последнего уровня). В общем случае в данной структуре у каждой вершины (за исключением листьев) a ответвлений (величина «размножения») и b уровней (рядов по вертикали).

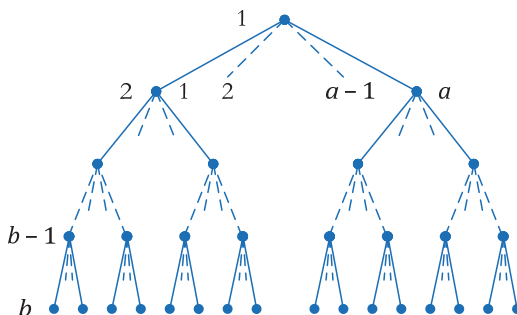


Рис. 8. Древовидная структура (дерево)

Из построения структуры следует, что общее число узлов $|G| = v = \sum_{i=0}^b a^i = \frac{a^{b+1} - 1}{a - 1}$, $a > 1$, $b > 0$, а также ее 1-связность.

Множество узлов (вершин) древовидной структуры целесообразно разделить на три подмножества: подмножество вершин G_1 со степенью 1, G_2 — a и G_3 — $a+1$ соответственно. Мощность множеств $g_i = |G_i|$, $i = 1, 2, 3$: $g_1 = a^b$, $g_2 = 1$, $g_3 = \sum_{i=1}^{b-1} a^i = \frac{a - a^b}{a - 1}$.

Тогда, учитывая равновесность всех вершин, линейный функционал древовидной структуры представим в виде суммы:

$$k(G) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^3 i \cdot g_i + 1 - \frac{1}{v} = \frac{3a^{b+1} - 3a}{a^{b+1} - 1}, a > 1, b > 0.$$

Отметим, что для произвольного дерева значение линейного функционала получено ранее и составляет $k = 3 \left(1 - \frac{1}{v} \right)$.

8. Оценка надежности двойной решетчатой структуры (двойная решетка) на основе линейного функционала связности. В общем виде двойную решетчатую структуру можно задать в виде, представленном на рисунке 9. В общем случае в данной структуре a рокад (рядов по вертикали) и b осей (рядов по горизонтали). Принципиальное отличие данной структуры от классической решетки (рисунок 9) состоит в том, что степень всех узлов увеличена за счет дополнительных (диагональных) ветвей в сети.

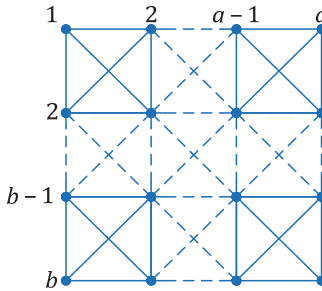


Рис. 9. Двойная решетчатая структура (двойная решетка)

Из построения структуры следует, что общее число узлов $|G| = v = ab$, а также ее связность.

Множество узлов (вершин) решетчатой структуры целесообразно разделить на три подмножества: подмножество вершин G_1 со степенью 3, G_2 — 5 и G_3 — 8 соответственно. Мощность множеств $g_i = |G_i|$, $i = 1, 2, 3$: $g_1 = 4$, $g_2 = 2a + 2b - 8$, $g_3 = ab - 2a - 2b + 4$.

Тогда, учитывая равновесность всех вершин, линейный функционал решетчатой структуры представим в виде суммы:

$$k(G) = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^3 g_i \cdot g_i + 1 - \frac{1}{v} = 9 - \frac{6}{a} - \frac{6}{b} + \frac{3}{ab}.$$

9. Сравнительный анализ структур. Полученные выражения линейного функционала для каждой рассмотренной структуры определяют значения функционала для сетей, в которых нет приоритета одних узлов над другими, то есть когда $\alpha_i = 1/v$, $i = 1, 2, \dots, v$.

Графическое представление зависимостей значения линейного функционала связности $k(G)$ от числа вершин v представлено на рисунках 10 и 11. Отметим, что на данных рисунках рассматривается случай, когда $a, b = 1, 2, \dots, 10$. Подобное допущение использовано для того, чтобы на графиках не отображались предельные графы, например при значительных величинах числа рокад $a \gg 1$ и одной оси $b = 1$ или, наоборот, при $a = 1, b \gg 1$. Данные варианты приводят к графам типа дерево, то есть к значению линейного функционала связности $k(G)$, близкого к трем. Поэтому, по сути, приведенные зависимости указывают на наибольшие значения линейного функционала k в некотором (достаточно малом) диапазоне числа вершин v .

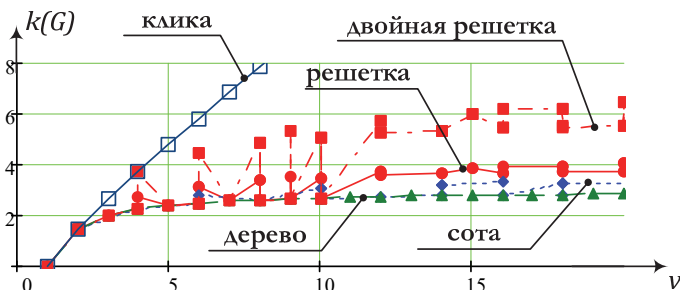


Рис. 10. Зависимости значения линейного функционала связности $k(G)$ от числа вершин $v = 1, 2, \dots, 20$ ($a, b = 1, 2, \dots, 10$)

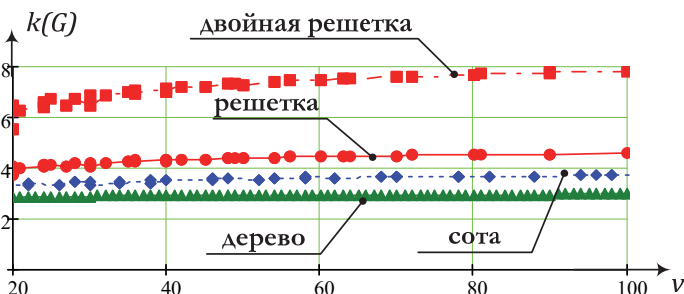


Рис. 11. Зависимости значения линейного функционала связности $k(G)$ от числа вершин $v = 20, 21, \dots, 100$ ($a, b = 1, 2, \dots, 10$)

Несомненно, структура «двойная решетка» с позиции связности значительно превосходит остальные (рисунок 11). Это вполне естественно, поскольку данная структура содержит наибольшее число ветвей, а

минимальная степень ее вершин оказывается наибольшей. О таком соотношении в величине связности рассмотренных структур можно было бы сказать и по чисто визуальным наблюдениям. Следует заметить, что при малом количестве узлов в сети линейный функционал связности для двойной решетчатой структуры колеблется для одного и того же значения числа вершин в широких пределах (рисунок 10). Это вызвано тем, что связность малых структур существенно зависит от конфигурации сети (соотношении числа осей и рокад).

Полученные результаты указывают на приоритет решетчатой структуры относительно сотовой, что также согласуется с минимальной величиной степеней вершин соответствующих графов.

Особняком расположилась древовидная структура. По сравнению с остальными структурами ее связность оказалась самой низкой для всех примеров. Если при этом вспомнить о том, что дерево является связным графом с минимальным значением линейного функционала связности, то вывод окажется очевидным.

В целом полученные результаты лишней раз подтверждают правомерность использования линейного функционала $k(G)$ в качестве показателя связности структур сетей связи (графов). Это в первую очередь относится к регулярным структурам, где достоинства этого функционала относительно простоты вычислений проявляются особенно ярко.

Для структур общего типа, где выражение линейного функционала не сводится к аналитическому виду, конструктивность такого показателя связности структур сетей связи (графов) оказывается менее выраженной. В теоретических исследованиях относительно структур общего типа линейный функционал слабо коррелирует с уже существующими понятиями (например, с реберной связностью). Поэтому, несмотря на то, что он как показатель связности (надежности) может быть применен для оценки любой структуры, при исследовании структур общего типа более рационально использовать такие показатели связности, которые все же каким-либо образом согласовывались с понятиями, используемыми в теории графов. Необходимость привязки показателя надежности сетей связи к классическому понятию связности требует равенства нулю этого показателя тогда, когда нарушается связность структуры сети связи (графа) в обычном понимании, то есть когда хотя бы один узел сети (хотя бы одна вершина графа) оказывался изолированным (изолированной).

10. Синтез структур сетей связи. Вследствие достаточно простого аналитического вида линейного функционала связности для синтеза структур возможно использовать аналитический метод. Общая постановка задачи для синтеза связных графов может быть представлена в следующем виде: для графа G с заданными значениями числа

вершин v и ребер l и вектора весовых коэффициентов вершин $\alpha = \{\alpha_i\}_{i=1,2,\dots,v}$, $\alpha_i > 0$, $\sum_{i=1}^v \alpha_i = 1$, найти вектор степеней вершин $\mathbf{v}^* = \{v_i^*\}_{i=1,2,\dots,v} \in \mathbb{N}^v$, $\sum_{i=1}^v v_i^* = 2l$ такой, что

$$k(G) \rightarrow \max_v.$$

Естественно, что решением задачи является вектор степеней вершин \mathbf{v} , который и определяет структуру результирующего графа. Сложность заключается в том, что, как и в любой задаче на графах, вектор варьируемых переменных \mathbf{v}^* имеет дискретный характер. Ситуация несколько упрощается некоторыми особенностями целевой функции задачи синтеза. Во-первых, синтезировать необходимо исключительно связный граф, что позволяет использовать упрощенную формулу (4) для линейного функционала связности. Во-вторых, введение дополнительно ребра в граф приводит лишь к увеличению линейного функционала, причем чем выше вес инцидентных вершин, тем на большее значение увеличивается функционал. В результате оказывается возможным реализовать последовательную процедуру добавления ребер, которая приводит к максимальному значению линейного функционала связности.

Первоначально определяется связный граф с минимальным числом ребер. Естественно, подобным графом будет являться дерево, причем для максимизации его линейного функционала связности необходимо корневой вершиной назначить узел с максимальным весом, а все остальные узлы считать «листьями».

В результате задача синтеза графа с максимальным значением линейного функционала связности k с заданным числом вершин v с весами $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, v$ и количеством ребер l решается путем реализации следующих процедур.

Первоначально определяется матрица весов ребер $\mathbf{A}' = \{\alpha_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$, элементы которой задаются в виде:

$$\alpha_{i,j} = \begin{cases} \alpha_i + \alpha_j, & i \neq j, \\ 0, & i=j, i, j=1, 2, \dots, v. \end{cases}$$

Таким образом, корневой вершиной в начальном графе (дереве) будет вершина с номером:

$$n = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq v} \left(\max_{1 \leq j \leq v} \alpha_{i,j} \right).$$

Тогда матрица смежности $\mathbf{A}' = \{a_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,v}$ начального дерева будет заполнена нулевыми элементами $a_{i,j} = 0$, за исключением $a_{i,n} = a_{n,j} = 1, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, v$.

Затем элементы матрицы весов ребер \mathbf{A}' , соответствующие ребрам сформированного дерева, обнуляются, то есть $\alpha_{i,n} = \alpha_{n,j} = 0, i, j = 1, 2, \dots, v$.

Заметим, что на первом этапе граф (дерево) содержит $v-1$ ребер, то есть на последующих этапах необходимо добавить еще $l-v+1$ ребер.

Далее последовательно вычисляются пары, задающие номера добавляемых ребер:

$$(n_1, n_2) = \arg \max_{1 \leq i, j \leq v} \alpha_{i,j},$$

на основе которых соответствующие элементы матрицы смежности \mathbf{A} назначаются единичными, то есть $a_{n_1, n_2} = a_{n_2, n_1} = 1$, а элементы матрицы весов \mathbf{A}' обнуляются $\alpha_{n_1, n_2} = \alpha_{n_2, n_1} = 0$. Процедура выполняется до момента распределения всех l ребер.

Оптимальность данного алгоритма вытекает из формулы (1), которую можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} k(G) &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{v} + 1 - \frac{1}{v} = \sum_{i=1}^v \alpha_i v_i + 1 - \frac{1}{v} = \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^{v_i} \alpha_i + 1 - \frac{1}{v} = \\ &= \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \alpha_i \cdot a_{i,j} + 1 - \frac{1}{v} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \alpha_i \cdot a_{i,j} + \sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v \alpha_j \cdot a_{i,j} \right) + 1 - \frac{1}{v} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^v \sum_{j=1}^v a_{i,j} (\alpha_i + \alpha_j) \right) + 1 - \frac{1}{v}. \end{aligned}$$

Величина под суммой $a_{i,j} (\alpha_i + \alpha_j)$ является, по сути, весом ребра, задаваемым весами инцидентных ему вершин. Поскольку в графе отсутствуют по определению петли и двойные ребра [20], то для максимизации линейного функционала связности $k(G)$ необходимо выбирать ребра с максимальным весом $\alpha_i + \alpha_j$, что и выполняется в предложенном алгоритме.

В качестве примера рассмотрим синтез структуры сети с заданным числом ребер и вершин с соответствующими весами.

Пример 4. Синтезировать структуру сети связи с 5 вершинами и 7 ребрами. Вектор весов узлов $\alpha = [0, 4; 0, 25; 0, 1; 0, 1; x]^T$, где x — неизвестное число.

Дано: $v = 5$, $l = 7$, $\alpha = [0, 4; 0, 25; 0, 1; 0, 1; x]^T$.

Найти: $G : k(G) \rightarrow \max_A$.

Неизвестный весовой коэффициент рассчитывается, исходя из условия нормировки:

$$\alpha_5 = 1 - \sum_{i=1}^4 \alpha_i = 0,15.$$

Матрица весов ребер имеет вид:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0,65 & 0,5 & 0,5 & 0,55 \\ 0,65 & 0 & 0,35 & 0,35 & 0,4 \\ 0,5 & 0,35 & 0 & 0,2 & 0,25 \\ 0,5 & 0,35 & 0,2 & 0 & 0,25 \\ 0,55 & 0,4 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Номер корневой вершины определяется как:

$$n = \operatorname{argmax}_{1 \leq i \leq v} \left(\max_{1 \leq j \leq v} \alpha_{i,j} \right) = 1.$$

Матрица смежности начального дерева имеет форму:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что на первом этапе граф (дерево) содержит 4 ребра, то есть необходимо добавить еще 3 ребра.

Модифицированная матрица весов ребер определяется следующим образом:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 & 0,35 & 0,4 \\ 0 & 0,35 & 0 & 0,2 & 0,25 \\ 0 & 0,35 & 0,2 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,4 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пара, идентифицирующая первое добавляемое ребро, задается выражением:

$$(n_1, n_2) = (2, 5), (5, 2).$$

Из этого набора можно выбрать любую пару, поскольку все они приводят к идентичному росту линейного функционала. Тогда матрица смежности приобретает вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

а матрица весовых коэффициентов имеет форму:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,35 & 0,35 & 0 \\ 0 & 0,35 & 0 & 0,2 & 0,25 \\ 0 & 0,35 & 0,2 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}.$$

Продолжая подобную процедуру, получаем следующую матрицу смежностей:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Диаграмма соответствующего графа приведена на рисунке 12.

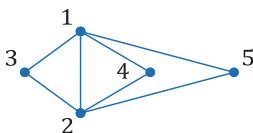


Рис. 12. Граф с максимальным значением линейного функционала связности

Заметим, что в результате решения задач оптимального синтеза структур сетей по линейному функционалу связности последовательно назначаются ребра, инцидентные вершинам с весами, упорядоченными в порядке невозрастания.

11. Число остовых деревьев. Существует значимый простой вид графов, называемый деревьями. Они важны, прежде всего, широким охватом приложений для разнообразных областей науки, но в то же время занимают и особое положение в теории графов [12]. Последнее предопределено существенной простотой структуры деревьев. Зачастую решение задач на графах анализируется первоначально на деревьях.

Термин дерево как математическая абстракция введен Г. Кирхгофом для задания фундаментальных циклов, используемых для исследования электрических цепей [20]. Спустя почти десятилетие А. Кэли опять (независимо от Г. Кирхгофа) использовал понятие *дерево* и формализовал значительное число результатов в области анализа подобных графов [12, 20, 21].

Граф — *ациклический*, если в нем отсутствуют циклы.

Дерево является связным ациклическим графом (рисунок 13а).

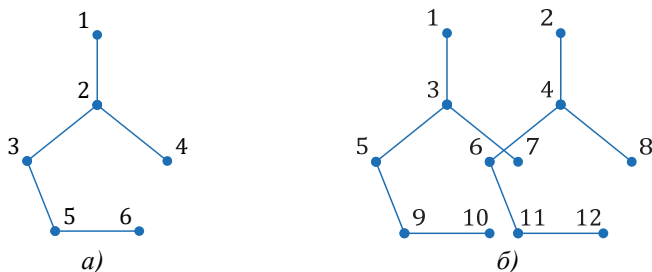


Рис. 13. Дерево (а) и лес (б)

Каждый граф, не содержащий циклов, называется *лесом* (рисунок 13б). Следовательно, деревья являются компонентами леса (на рисунке 13б лес состоит из двух деревьев).

Деревом графа G называется связный ациклический подграф графа G . *Остов (остовое дерево)* графа G — это дерево графа G , содержащее все вершины G . Связный подграф дерева называется *поддеревом*.

Например, для графа G , показанного на рисунке 14а, граф на рисунке 14б является его подграфом (как, впрочем, и все остальные графы на рисунке 14), граф на рисунке 14в — его остовом, а граф на рисунке 14г — его деревом, но не остовом.

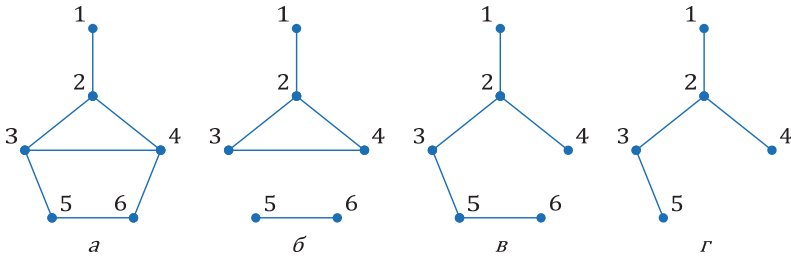


Рис. 14. Исходный граф (а), его подграф (б), остов (в) и дерево (г)

В результате остов графа G является наименьшим связным подграфом графа G , где «минимальность» трактуется следующим образом: не существует способа сформировать связный остовый подграф графа G из подмножество ребер этого остова.

Существует задачи, требующие поиска всех остовов графа G . Например, в случае трудно формализуемого критерия выбора наилучшего дерева, в том числе субъективного, что не позволяет аналитически разрешать подобные задачи оптимизации, не применяя анализ всех возможных альтернатив.

В задачах анализа надежности структур сетей связи число остовых деревьев t используется в качестве одного из показателей [11]. При этом одним из главных его достоинств является высокая чувствительность к организации связей между вершинами. Там, где трудно получить единственно правильное решение по известным показателям надежности (связности), данный показатель, как правило, позволяет это сделать.

Другим важным достоинством является возможность получения объективной оценки важности того или иного ребра в графе G . Важность ребра будет определяться тем «вкладом», который вносит это ребро в общую связность графа G . Этот «вклад» может быть оценен числом остовых деревьев $t(G)$ графа G , которые образованы с непосредственным участием данного ребра.

Несомненно, должно быть отмечено и то, что для определения числа остовов графа существует достаточно много конструктивных методов и алгоритмов. В этой связи результат, полученный Г. Кирхгофом, является наиболее приемлемым при решении задач анализа структур реальных сетей связи.

Количество остовов вычисляется на основе *матричной теоремы 4 (о деревьях)* [20]. Число остовов $t(G)$ (остовых деревьев) в графе G с v вершинами равно любому из миноров элементов главной диагонали матрицы Кирхгофа \mathbf{K} (для случая единичных проводимостей):

$$t(G) = |\mathbf{K}_i|, i = 1, 2, \dots, v,$$

где $\mathbf{X}_{i,j}$ — подматрица матрицы \mathbf{X} , полученная вычеркиванием i -й строки и j -го столбца, $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_{i,i}$.

Таким образом, для вычисления числа остовов необходимо рассчитать определитель матрицы $(v-1)$ порядка. Естественно, наиболее рационально проводить подобные операции с помощью средств вычислительной техники. Однако иногда возникает необходимость осуществить расчет вручную. При этом предпочтительным оказывается использование теоремы разложения определителя матрицы и некоторых его свойств, а также мнемонических правил для определителей второго и третьего (правила Саррюса) порядков [22].

Определители более высоких порядков также можно вычислять по определению, однако это требует больших усилий. Чаще поступают следующим образом: определитель v -го порядка приводят к определителям $(v-1)$ -го порядка, каждый из которых сводят к определителям $(v-2)$ -го порядка и так далее. В результате получают сумму определителей 3-го или 2-го порядка. Фундаментом данного принципа «последовательного снижения порядка» является теорема разложения: определитель v -го порядка представляется как сумма определителей порядка $(v-1)$; далее для любого из этих определителей порядка $(v-1)$ также применима теорема разложения. Часто используется следующее свойство: сумма определителей вырождается во всего один определитель, если все, за исключением одного из элементов i -й строки (столбца) определителя, равны нулю. Следовательно, существенного упрощения можно добиться путем сведения элементов заданной строки (столбца) к нулю перед разложением определителя. Подобные же преобразования основываются на свойствах определителей.

В качестве примера рассмотрим расчет числа остовых деревьев графа, заданного диаграммой.

Пример 5. Оценить количество остовов графа, приведенного на рисунке 14а.

Дано: G (рисунок 14а).

Найти: $t(G)$.

Матрица Кирхгофа рассматриваемого графа имеет вид:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Рациональнее всего для вычисления числа остовых деревьев использовать минор элемента, соответствующий вершине с максимальной степенью (например, второй):

$$t(G) = |\mathbf{K}_2| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

Следует отметить, что наличие в графе G по крайней мере одного остового дерева t означает, что данный граф G является связным. Отсутствие же остовых деревьев $t(G) = 0$ приводит к несвязности графа G .

Кроме того, очевидно, что чем больше остовых деревьев $t(G)$ содержится в графе G , тем более связным он является [12, 21].

12. Заключение. Представленные в работе детерминированные показатели устойчивости отличаются не только простотой их аналитического описания, но и достаточно понятной интерпретацией их физического смысла, непосредственно связанного с тем или иным аспектом понятия устойчивости сети связи. В то же время следует заметить, что несмотря на существенные достоинства подобных показателей, позво-

ляющие даже сформулировать задачу синтеза структуры сети, решение которой выполняется на основе последовательных процедур, а не переборными методами, для данных показателей характерен и достаточно серьезный недостаток, проявляющийся в невозможности учета особенностей функционирования отдельных линий связи, а следовательно, и существенно ограничивающий применимость детерминированных показателей для реальных топологий сетей.

Литература

1. *Форман Дж.* Много цифр: Анализ больших данных при помощи Excel // М.: Альпина Паблишер. 2016. 464 с.
2. *Остроумова Л.А.* Математические ожидания k -х входящих степеней вершин в случайных графах в модели Боллобаша-Риордана // Труды Московского физико-технического института. 2012. Т. 4. № 1(13). С. 29–40.
3. *Лакеев А.В.* Элементы теории обыкновенных графов : учеб. пособие // Иркутск: Изд-во ИГУ. 2014. 83 с.
4. *Колганов А.С.* Параллельная реализация алгоритма поиска минимальных остовных деревьев с использованием центрального и графического процессоров // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2016). 2016. С. 530–543.
5. *Батенков К.А.* Общие подходы к анализу и синтезу структур сетей связи // Современные проблемы телекоммуникаций: материалы Российской научно-технической конференции. 2017. С. 19–23.
6. *Батенков К.А.* К вопросу оценки надежности двухполюсных и многополюсных сетей связи // Современные проблемы радиоэлектроники: сб. науч. тр. Красноярск: Сиб. федер. ун-т. 2017. С. 604–608.
7. ГОСТ Р 53111–2008. Устойчивость функционирования сети связи общего пользования. Требования и методы проверки. // М.: Стандартинформ. 2009. 16 с.
8. *Батенков К.А.* Устойчивость сетей связи // Орел: Академия ФСО России. 2017. 277 с.
9. *Дудник Б.Я., Овчаренко В.Ф.* Надежность и живучесть систем связи / под ред. Б.Я. Дудинка // М.: Радио и связь. 1984. 216 с.
10. *Обоскалов В. П.* Структурная надежность электроэнергетических систем: учеб. пособие // Екатеринбург: УрФУ. 2012. 194 с.
11. Оптимизация структур сетевых моделей / под ред. А.А. Колесникова // Л.: ВАС. 1987. С. 101.
12. *Харари Ф.* Теория графов: пер. с англ; изд. 2-е // М.: Едиториал УРСС. 2003. 296 с.
13. *Kalofolias S.V., Bresson X., Bronstein M.M., Vandergheynst P.* Robust principal component analysis on graphs // CoRR, vol. abs/1504.06151. 2015. URL: <http://arxiv.org/abs/1504.06151>. (дата обращения: 28.10.2017).
14. *Батенков К.А.* Числовые характеристики структур сетей связи // Труды СПИИРАН. 2017. № 4 (53). С. 5–28.
15. *Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G.* The degree sequence of a scale-free random graph process // Random Structures Algorithms. 2001. vol. 18. no. 3. pp. 279–290.
16. *Grechnikov E.A.* An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model // Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory. 2011. vol. 1. no. 2. pp. 40–73.
17. *Drinea E., Enachescu M., Mitzenmacher M.* Variations on random graph models for the web // Harvard Computer Science Group Technical Report TR-06-01. 2001.
18. *Егунов М.М., Шувалов В.П.* Анализ структурной надёжности транспортной сети // Вестник СибГУТИ. 2012. № 1. С. 54–60.

19. *Tsitsiashvili G.Sh.* Complete calculation of disconnection probability in planar graphs // *Reliability: Theory and Applications*. 2012. vol. 1. no. 1. pp. 154–159.
20. *Tamm V.* Теория графов: пер. с англ. // М.: Мир. 1988. 424 с.
21. *Кристофидес Н.* Теория графов: пер. с англ. // М.: Мир. 1978. 432 с.
22. *Бронштейн, И. И., Семендяев К. Л.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов: 13-е изд., исправленное // М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. 544 с.

Батенков Кирилл Александрович — д-р техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: статистическая теория связи, модели и методы обработки сигналов, качества сетей связи. Число научных публикаций — 150. pustur@yandex.ru; Приборостроительная, 35, Орёл, 302034; р.т.: +7(486)254-13-25.

Батенков Александр Александрович — д-р техн. наук, профессор, научный сотрудник, Орловский филиал института проблем информатики Российской академии наук (ИПИ РАН). Область научных интересов: статистическая теория связи, модели и методы обработки сигналов. Число научных публикаций — 110. batenkov1957@mail.ru; Московское шоссе, 137, Орёл, 302025; р.т.: +79038831183.

K.A. BATENKOV, A.A. BATENKOV
**ANALYSIS AND SYNTHESIS OF COMMUNICATION NETWORK
STRUCTURES ACCORDING TO THE DETERMINED STABILITY
INDICATORS**

Batenkov K.A., Batenkov A.A. Analysis and Synthesis of Communication Network Structures According to the Determined Stability Indicators.

Abstract. When solving problems related to the analysis and synthesis of communication networks for stability, a special place is simple and easy to understand indicators, weakly linked to the classical concept of exit probability from a state of health. Such deterministic indicators of stability (connectedness, a couple of connections, linear functional connectivity, the number of spanning trees) allow, albeit very approximately, to solve a complex of tasks related to the assessment of the reliability and survivability complex networks. Due to the rather simple analytical form of a linear functional connectivity for the synthesis of structures, it is possible to use the analytical method presented in the work. In this general formulation for the synthesis of connected graphs is formulated as the maximization of the linear functional connectivity for all possible graphs with a given number of edges, vertices, and with fixed values of their weighting coefficients. In general, the deterministic indicators are characterized by a rather serious drawback, which is manifested in the inability to take into account the peculiarities of the functioning of individual communication lines. In addition, for structures of general type, where the expression of the linear functional is not reduced to an analytical form, the constructiveness of such an indicator of connectivity of structures of communication networks (graphs) is less pronounced. In theoretical studies on structures of general type, the linear functional is weakly correlated with already existing concepts (for example, with edge connectivity). Therefore, despite the fact that it, as an indication of connectivity (reliability), can be used to evaluate any structure, in the study of structures of general type, it is more rational to use such indicators of connectivity, which are still in any way consistent with the principles used in graph theory.

Keywords: network graph structure, a deterministic indicators of stability, connectivity, pair of connections, linear functional connectivity, the number of spanning trees.

Batenkov Kirill Aleksandrovich — Ph.D., Dr. Sci., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: statistical communication theory, models and methods of signal processing, communications network quality analysis. The number of publications — 150. pustur@yandex.ru; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(486)254-13-25.

Batenkov Aleksandr Aleksandrovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, researcher, Orel branch of The Institute of Informatics Problems of the Russian Academy of Sciences (IPI RAN). Research interests: statistical communication theory, models and methods of signal processing. The number of publications — 110. batenkov1957@mail.ru; 137, Moskovskoe sh., Orel, 302034, Russia; office phone: +79038831183.

References

1. Foreman J.W. Data smart: *Using data science to transform information into insight*. John Wiley & Sons. 2013. 432 p. (Russ. ed.: Forman Dzh. *Mnogo cifr: Analiz bol'shikh dannyh pri pomoshchi Excel*. M.: Al'pina Publisher. 2016. 464 p.).

2. Ostroumova L.A. [The expectations k-th incoming vertex degrees of random graphs in Bollobasha-Riordan model]. *Trudy Moskovskogo fiziko-tehnicheskogo instituta – Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology (State University)*. 2012. Issue 4. vol. 1(13). pp. 29–40. (In Russ.).
3. Lakeev A.V. *Elementy teorii obyknovennykh grafov* [Elements common graph theory]. Irkutsk: Izd-vo IGU. 2014. 83 p. (In Russ.).
4. Kolganov A.S. [Parallel implementation of the search algorithm of minimum spanning Dere-vev using the CPU and GPU]. *Parallel'nye vychislitel'nye tekhnologii (PaVT'2016)* [Parallel computing technology]. 2016. pp. 530–543. (In Russ.).
5. Batenkov K.A. [General approaches to the analysis and synthesis of structures of communication networks]. *Sovremennye problemy telekommunikacij: materialy Rossijskoj nauchno-tehnicheskoy konferencii* [Modern problems of telecommunications: materials of Russian scientific-technical conference]. 2017. pp. 19–23. (In Russ.).
6. Batenkov K.A. [To the question of assessing the reliability of bipolar and multipolar networks]. *Sovremennye problemy radioelektroniki: sb. nauch. tr.* [Modern problems of radio electronics: collection of scientific papers]. Krasnoyarsk: Sib. Feder. Univ. 2017. pp. 604–608. (In Russ.).
7. GOST R 53111–2008. [Stability of the public communication network. Requirements and verification methods]. M.: Standardinform. 2009. 16 p. (In Russ.).
8. Batenkov K.A. *Ustojchivost' setej svyazi* [Network stability]. Orel: Akademiya FSO Rossii. 2017. 277 p. (In Russ.).
9. Dudnik B.Ya., Ovcharenko V.F. *Nadezhnost' i zhivuchest' sistem svyazi* [The reliability and survivability of communication systems]. Moskva: Radio i svyaz'. 1984. 216 p. (In Russ.).
10. Oboskalov V.P. *Structural reliability of electric power systems* [Structural reliability of electric power systems]. Ekaterinburg: UrFU. 2012. 194 p. (In Russ.).
11. *Optimizaciya struktur setevykh modelej. Pod red. A.A. Kolesnikova* [Optimisation of the structures network models. Edited by A.A. Kolesnikov]. Leningrad: VAS. 1987. 101 p. (In Russ.).
12. Harary F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Pub. Co. 1969. 274 p. (Russ. Ed.: Harary F. *Teoriya grafov*. M.: Editorial URSS. 2003. 296 p.).
13. Kalofolias S.V., Bresson X., Bronstein M.M., Vandergheynst P. Robust principal component analysis on graphs. *CoRR*. vol. abs/1504.06151. 2015. Available at: <http://arxiv.org/abs/1504.06151> (accessed: 28.10.2017).
14. Batenkov K.A. [Numerical characteristics of the structures of communication networks]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 4(53). pp. 5–28. (In Russ.).
15. Bollobás B., Riordan O., Spencer J., Tusnády G. The degree sequence of a scale-free random graph process. *Random Structures Algorithms*. 2001. vol. 18. no. 3. pp. 279–290.
16. Grechnikov E.A. An estimate for the number of edges between vertices of given degrees in random graphs in the Bollobás–Riordan model. *Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory*. 2011. vol. 1. no. 2. pp. 40–73.
17. Drinea E., Enachescu M., Mitzenmacher M. Variations on random graph models for the web. Harvard Computer Science Group Technical Report TR-06-01. 2001.
18. Egunov M. M., Shuvalov V. P. [Analysis of the structural reliability of the transport network]. *Vestnik SibGUTI – Herald of SibGUTI*. 2012. vol. 1. pp. 54–60. (In Russ.).
19. Tsitsiashvili G.Sh. Complete calculation of disconnection probability in planar graphs. *Reliability: Theory and Applications*. 2012. vol. 1. no. 1. pp. 154–159.
20. Tutte W.T. *Graph Theory*. Addison-Wesley Pub. Co. 1984. 233 p. (Russ. Ed.: Tutte W. T. *Teoriya grafov*. Moskva: Mir. 1988. 424 p.).
21. Christofides N. *Graph Theory: An Algorithmic Approach*. Academic Press. 1975. 400 p. (Russ. Ed.: Christofides N. *Teoriya grafov*. Moskva: Mir. 1978. 432 p.).
22. Bronstein I.I., Semendyaev K.L. *Spravochnik po matematike dlya inzhenerov i uchashchihsya vtuzov* [Handbook of mathematics for engineers and students of technical universities]. M.: Nauka. GL. ed. Fiz.-Mat. lit. 1986. 544 p. (In Russ.).