

С.А. АЛЕКСАНДРОВА, С.В. БЫСТРОВ, Н.А. ВУНДЕР, О.В. СЛИТА,
А.В. УШАКОВ

СИНТЕЗ РОБАСТНОЙ НЕПРЕРЫВНОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ОЦЕНКИ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ИНТЕРВАЛЬНОСТИ СЛЕДА ЕЕ МАТРИЦЫ СОСТОЯНИЯ

Александрова С.А., Быстров С.В., Вундер Н.А., Слита О.В., Ушаков А.В. Синтез робастной непрерывной системы на основе минимизации оценки относительной интервальности следа ее матрицы состояния.

Аннотация. В работе предлагается алгоритм синтеза устройства управления непрерывным техническим объектом, модель которого характеризуется неопределенными параметрами, заданными в интервальной форме, доставляющего системе, в которую он входит, параметрическую робастность. Для обеспечения робастности проектируемой системы использована концепция относительной интервальности интервальных математических объектов: скаляр, вектор, численная характеристика матрицы, в качестве которой в алгоритме синтеза использован ее след. Задача решается методом медианного модального управления на требуемые значения стандартных показателей качества системы, дополненного контролем оценки относительной интервальности следа интервальной матрицы состояния спроектированной системы, которая принимается за критерий робастности. Показано, что если желаемое медианное поведение проектируемой системы задается с помощью модели, матрица состояния которой имеет кратные собственные числа кратности равной размерности вектора состояния, то относительная интервальность следа интервальной матрицы проектируемой системы совпадает с относительной интервальностью ее кратного интервального собственного числа. При этом появляется возможность изменения относительной интервальности интервального следа матрицы состояния проектируемой системы с помощью механизма изменения его медианной составляющей, реализуемого введением обратной связи по вектору состояния непрерывного технического объекта. Полученные результаты иллюстрируются примером.

Ключевые слова: интервальные системные параметры, оценка относительной интервальности, медианные значения, модальное управление, след матрицы, робастность.

1. Введение. Проблема синтеза робастной непрерывной системы на основе минимизации оценки относительной интервальности следа ее матрицы состояния вынесена в заголовок статьи в связи со следующими обстоятельствами. Проблема робастности непрерывных динамических систем подобно проблеме их устойчивости относится к разряду вечных в современной теории и практике управления. Если устойчивость является гарантией работоспособности проектируемых систем, то робастность является гарантией стабильности их основных показателей качества. В настоящее время под робастностью понимается малая чувствительность [1, 2] показателей качества систем к неопределенности их параметров [3-5], точнее параметров технических объектов, входящих в состав систем. Параметрическая неопределенность порождается многими причинами [6, 7]. Это и технологический разброс при производ-

стве компонентов системы, изменение параметров под действием физических условий эксплуатации, естественное старение, экстремальные ситуации, которые могут скачкообразно изменить параметры. В общем, система разрабатывается при одних (номинальных, паспортных) значениях параметров, техническая реализация системы наделяет ее компоненты другими значениями параметров, а в фазе эксплуатации параметры компонентов приобретают третьи значения. Параметры системы принято разделять на физические и системные. Физическими параметрами являются: длина, радиус, объем, масса, момент инерции, вязкость среды, жесткость, электрическое сопротивление, электрическая емкость конденсаторов, индуктивность проводных систем и так далее. Системными параметрами являются коэффициенты полиномов числителя и знаменателя передаточных функций в случае использования моделей «вход — выход» [8, 9], а также элементы матриц входа, состояния и выхода в случае использования моделей «вход — состояние — выход» [10-13] метода пространства состояний. Так как для разработчика системы технический объект — это математическая модель технического объекта, то в дальнейшем, говоря о параметрах системы, будут в основном иметься в виду ее системные параметры.

В статье для описания неопределенности системного параметра используются возможности интервальных [14, 15] представлений, которые позволяют неопределенные параметры представить интервальными числами, задаваемыми двумя фиксированными числами, определяющими граничные значения неопределенного параметра. От представления интервального числа с помощью двух граничных его значений можно осуществить переход [4] к трехкомпонентному его представлению. Компонентами этого представления являются: медианное значение интервального числа и два равных по модулю, но разных по знаку фиксированных числа, задающих диапазон вариации интервального числа в центрированной относительно его медианного значения форме. Трехкомпонентное представление интервального числа позволяет охарактеризовать его [4] оценкой относительной интервальности, которая в дальнейшем используется в качестве меры достигаемой в результате процедуры синтеза системы ее робастности.

Следует заметить, что если в состав проектируемой системы входит технический объект с интервальными параметрами, скажем, его матрицы состояния, то все показатели качества системы будут также интервальными. Будут интервальными: длительность переходного процесса, значение перерегулирования, величина добротности по скорости, полосы пропускания на уровне заданных значений амплитудных ча-

стотных характеристик по выходу и ошибке при гармоническом экзогенном воздействии, собственные числа матрицы состояния, норма и след этой матрицы. При этом оценки относительной интервальности перечисленных математических объектов с одной стороны связаны с оценкой относительной интервальности исходных интервальных параметров технического объекта, с другой — они могут быть изменены в силу определения оценки относительной интервальности увеличением медианной составляющей интервального математического объекта в процессе процедуры синтеза проектируемой системы.

При синтезе алгоритма управления предлагается уменьшение оценки относительной интервальности следа матрицы состояния проектируемой системы для решения указанной задачи. След матрицы состояния как сумма ее собственных значений достаточно информативен и характеризуется простотой вычисления как суммы ее диагональных элементов.

Статья организована следующим образом. В разделе «Постановка задачи» приводится модель технического объекта с интервальной матрицей состояния и ставится задача синтеза закона управления, который учитывал бы значение оценки относительной интервальности следа матрицы состояния проектируемой непрерывной системы. В разделе «Концепция управляемой относительной интервальности следа квадратной матрицы» показано, что если создать механизм изменения относительной интервальности следа матрицы с целью ее минимизации, то появляется возможность управления робастностью динамических свойств проектируемой системы путем минимизации относительной интервальности собственных чисел ее матрицы состояния. В разделе «Основной результат» приводится алгоритм синтеза робастной интервальной системы методом медианного модального управления, дополненного процедурой минимизации оценки относительной интервальности следа ее интервальной матрицы состояния. Статья заканчивается примером использования предложенной авторами методики.

2. Постановка задачи. Рассмотрим непрерывный технический объект с интервальными параметрами, заданный в форме «вход-состояние-выход» (BCB):

$$\dot{x}(t) = [A]x(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t), \varepsilon(t) = g(t) - y(t), \quad (1)$$

В (1) x , u , y , g и ε — соответственно векторы состояния, управления, выхода, внешнего (экзогенного) воздействия и ошибки слежения; $[A] = A_0 + [\Delta A]$ — интервальная матрица состояния с медианной составляющей A_0 и интервальной $[\Delta A]$, B , C — матрицы управ-

ления и выхода с фиксированными параметрами. Перечисленные компоненты имеют размерности: $\dim(x) = n$, $\dim(u) = r$, $\dim(y) = \dim(g) = \dim(\varepsilon) = m$, $\dim[A] = n \times n$, $\dim(B) = n \times r$, $\dim(C) = m \times n$. Очевидно, что для такого технического объекта (ТО) интервальными являются и такие скалярные характеристики матрицы состояния, как норма, собственные числа, а также след матрицы.

В результате синтеза закона управления интервальным ТО требуется получить непрерывную робастную систему, медианные значения показателей качества которой в переходном режиме, таких как перерегулирование и длительность переходного процесса, и в установившемся режиме, таких как добротность по скорости, полосы пропускания на уровне заданных значений амплитудных частотных характеристик по выходу и ошибке, а также значение оценки относительной интервальности следа ее матрицы состояния, удовлетворяют заданным требованиям.

Поставим задачу синтезировать для ТО (1) закон управления вида:

$$u(t) = K_g g(t) - Kx(t), \quad (2)$$

где K_g — матрица прямых связей по задающему воздействию, K — матрица обратных связей по вектору состояния, который обеспечивал бы желаемое качество процессов по выходной переменной замкнутой непрерывной системы:

$$\dot{x}(t) = [F]x(t) + Gg(t), x(0), y(t) = Cx(t), [F] = [A] - BK, G = BK_g \quad (3)$$

в переходном и установившемся режимах. При этом для обеспечения робастности основных показателей качества проектируемой системы алгоритм синтеза закона управления дополнен процедурой минимизации значения оценки относительной интервальности следа интервальной матрицы состояния.

3. Концепция управляемой относительной интервальности следа квадратной матрицы. Интервальным числом называется [14] пара чисел $(\underline{\alpha}, \overline{\alpha})$, задающих его левое $\underline{\alpha}$ и правое $\overline{\alpha}$ граничные значения. Оно записывается в форме $[\alpha] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}]$. Такую запись интервального числа можно дополнить его представлением, использующим три компонента:

$$[\alpha] = [\underline{\alpha}, \overline{\alpha}] = [\alpha_0] + [\Delta\alpha] = [\alpha_0, a_0] + [\underline{\Delta a}, \overline{\Delta a}] = \alpha_0 + [\Delta\alpha], \quad (4)$$

где α_0 — медианное значение интервального числа $[\alpha]$, $[\Delta\alpha]$ — центрированная относительно α_0 интервальная составляющая интервального числа, $\underline{\Delta\alpha}, \overline{\Delta\alpha}$ — левое и правое граничные значения интервальной составляющей интервального числа соответственно. Компоненты трехэлементного представления интервального числа удовлетворяют соотношениям:

$$\alpha_0 = 0.5(\underline{\alpha} + \overline{\alpha}), \underline{\Delta\alpha} = \underline{\alpha} - \alpha_0, \overline{\Delta\alpha} = \overline{\alpha} - \alpha_0, \overline{\Delta\alpha} = -\underline{\Delta\alpha}, \quad (5)$$

где $\overline{\Delta\alpha}$ — положительна, $\underline{\Delta\alpha}$ — отрицательна для любых $[\alpha]$.

В соотношениях (4) $\alpha_0, \underline{\alpha}, \overline{\alpha}, \underline{\Delta\alpha}, \overline{\Delta\alpha}$ являются фиксированными, а не интервальными числами. Используем соотношение (5) и зададим оценку $\delta_I\alpha$ относительной интервальности интервального числа $[\alpha]$ в форме:

$$\delta_I\alpha = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|} = \frac{-\underline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|}. \quad (6)$$

С помощью выражения (6) можно управлять относительной интервальностью интервального числа путем изменения его медианной составляющей. Изменение медианной составляющей может быть осуществлено в мультипликативной или аддитивной формах. Действительно, пусть числа β и γ таковы, что выполняются условия:

$$\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0\beta, \tilde{\tilde{\alpha}}_0 = \alpha_0 + \gamma: |\tilde{\alpha}_0| > |\alpha_0|, |\tilde{\tilde{\alpha}}_0| > |\alpha_0|. \quad (7)$$

По существу, введением мультипликативного компонента β или аддитивного компонента γ осуществляется формирование новых интервальных чисел $[\tilde{\alpha}] = \tilde{\alpha}_0 + [\Delta\alpha]$ и $[\tilde{\tilde{\alpha}}] = \tilde{\tilde{\alpha}}_0 + [\Delta\alpha]$, обладающих меньшим значением оценки относительной интервальности так, что выполняется неравенства:

$$\delta_I\tilde{\alpha} = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\tilde{\alpha}_0|} < \delta_I\alpha = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|}, \delta_I\tilde{\tilde{\alpha}} = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\tilde{\tilde{\alpha}}_0|} < \delta_I\alpha = \frac{\overline{\Delta\alpha}}{|\alpha_0|}. \quad (8)$$

Очевидно, что аналогичным образом может быть введено понятие интервального вектора $[a]$, который состоит из интервальных скалярных компонентов, записываемого в форме:

$$[a] = \text{col}\{[a_i] | i = \overline{1, n}\}. \quad (9)$$

Интервальный вектор $[a]$ по аналогии с (4) может быть представлен цепочкой равенств:

$$[a] = [\underline{a}, \overline{a}] = a_0 + [\Delta a] = a_0 + [\underline{\Delta a}, \overline{\Delta a}], \quad (10)$$

где a_0 — медианный компонент интервального вектора $[a]$, $\underline{a}, \overline{a}$ — соответственно векторы, составленные из левых и правых граничных значений скалярных компонентов интервального вектора, $[\Delta a]$ — центрированная относительно a_0 интервальная составляющая интервального вектора $[a]$, $\underline{\Delta a}, \overline{\Delta a}$ — левое и правое граничные составляющие интервального вектора $[a]$. По аналогии с (5) оказываются справедливыми соотношения:

$$a_0 = 0.5[\underline{a} + \overline{a}], \quad \underline{\Delta a} = \underline{a} - a_0, \quad \overline{\Delta a} = \overline{a} - a_0, \quad \overline{\Delta a} = -\underline{\Delta a}. \quad (11)$$

Теперь по аналогии с (6) для интервального вектора может быть введено понятие оценки относительной интервальности нормы интервального вектора, задаваемой в форме:

$$\delta, a = \frac{\|\overline{\Delta a}\|}{\|a_0\|}. \quad (12)$$

С помощью выражения (12) можно, как и в скалярном случае, управлять относительной интервальностью нормы интервального вектора $[a]$ путем изменения его медианного компонента a_0 . Управление медианным компонентом интервального вектора в основном осуществляется в аддитивной форме. Пусть вектор $\theta: \dim(\theta) = \dim([a])$ с фиксированными элементами таков, что выполняется условие:

$$\tilde{a}_0 = a_0 + \theta: \|\tilde{a}_0\| > \|a_0\|, \quad (13)$$

По существу введением аддитивного векторного компонента θ осуществлено конструирование нового интервального вектора

$\tilde{a} = \tilde{a}_0 + [\Delta a]$, обладающего меньшим значением оценки относительной интервальности его нормы так, что выполняется неравенство:

$$\delta_l \tilde{a} = \frac{\|\overline{\Delta a}\|}{\|\tilde{a}_0\|} < \delta_l a = \frac{\|\overline{\Delta a}\|}{\|a_0\|}. \quad (14)$$

Следует сказать, что авторами этот прием уменьшения относительной интервальности нормы интервального вектора использован в работе [16].

Аналогичным скалярному и векторному случаям может быть введено понятие интервальной матрицы $[N]$, которая состоит из интервальных скалярных компонентов $[N_{ij}]$, записываемая в форме:

$$[N] = \text{row}\{\text{col}([N_{ij}]; i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m})\}. \quad (15)$$

По аналогии с (4) для интервальной матрицы $[N]$ может быть записана цепочка соотношений:

$$[N] = [\underline{N}, \overline{N}] = N_0 + [\Delta N] = N_0 + [\underline{\Delta N}, \overline{\Delta N}], \quad (16)$$

где N_0 — медианная составляющая интервальной матрицы $[N]$, $\underline{N}, \overline{N}$ — матрицы, составленные из левых и правых граничных значений скалярных компонентов матрицы, $[\Delta N]$ — центрированная относительно N_0 интервальная составляющая интервальной матрицы $[N]$, $\underline{\Delta N}, \overline{\Delta N}$ — левое и правое граничные составляющие интервальные матрицы $[N]$. По аналогии с (5) оказываются справедливыми соотношения:

$$N_0 = 0.5[\underline{N} + \overline{N}], \quad \underline{\Delta N} = \underline{N} - N_0, \quad \overline{\Delta N} = \overline{N} - N_0, \quad \overline{\Delta N} = -\underline{\Delta N}. \quad (17)$$

Следует заметить, что квадратная матрица обладает тремя основными скалярными характеристиками: норма матрицы, след матрицы и определитель матрицы. Причем след матрицы [17] по определению равен сумме собственных чисел матрицы, а определитель равен произведению собственных чисел матрицы, при этом вычислительно след матрицы равняется сумме диагональных элементов матрицы.

Таким образом, по аналогии с (6) для матрицы $[N]$ вводится понятие оценки относительной интервальности ее нормы, задаваемой в форме:

$$\delta_l N = \frac{\|\overline{\Delta N}\|}{\|N_0\|}. \quad (18)$$

В силу соотношения (18) можно, как и в скалярном случае, путем изменения ее медианной составляющей N_0 управлять оценкой относительной интервальности нормы матрицы $[N]$. Очевидно, управление медианной составляющей, как и в скалярном случае, может быть осуществлено в двух формах. Действительно, пусть матрицы B и Π удовлетворяют соотношениям:

$$\tilde{N}_0 = N_0 B, \quad \tilde{\tilde{N}}_0 = N_0 + \Pi; \quad \|\tilde{N}_0\| > \|N_0\|, \quad \|\tilde{\tilde{N}}_0\| > \|N_0\|. \quad (19)$$

По существу, введением мультипликативного матричного компонента B или аддитивного матричного компонента Π конструируются новые интервальные матрицы $\tilde{N} = \tilde{N}_0 + [\Delta N]$ и $\tilde{\tilde{N}} = \tilde{\tilde{N}}_0 + [\Delta N]$, обладающие меньшими значениями оценок относительной интервальности их норм, так что выполняются неравенства:

$$\delta_l \tilde{N} = \frac{\|\overline{\Delta N}\|}{\|\tilde{N}_0\|} < \delta_l N = \frac{\|\overline{\Delta N}\|}{\|N_0\|}; \quad \delta_l \tilde{\tilde{N}} = \frac{\|\overline{\Delta N}\|}{\|\tilde{\tilde{N}}_0\|} < \delta_l N = \frac{\|\overline{\Delta N}\|}{\|N_0\|}. \quad (20)$$

Если интервальная матрица $[N]$ — квадратная ($m = n$), то становится корректной постановка задачи оценки относительной интервальности интервального следа $[tr([N])]$ этой матрицы:

$$[tr([N])] = \sum_{i=1}^n [\lambda_i([N])] = \sum_{i=1}^n [N_{ii}] = tr(N_0) + [tr([\Delta N])] \quad (21)$$

в форме:

$$\delta_l tr(N) = \frac{|tr(\overline{\Delta N})|}{|tr(N_0)|}. \quad (22)$$

Интервальными являются и собственные числа $[\lambda_i]$ интервальной квадратной матрицы $[N]$, в силу определения удовлетворяющие условию

$[\lambda_i] = \arg\{det([\lambda_i]I - [N]) = 0\}$. Если интервальное собственное число записать в приведенных выше формах, то получим по аналогии с [6] цепочку равенств $[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] = \lambda_{i0} + [\underline{\Delta\lambda}_i, \overline{\Delta\lambda}_i]$. Используя интервальное представление собственных чисел интервальной матрицы, ее интервальный след можно записать в форме $[tr(N)] = \sum_{i=1}^n [\lambda_i] = \sum_{i=1}^n \lambda_{i0} + \left[\sum_{i=1}^n \underline{\Delta\lambda}_i, \sum_{i=1}^n \overline{\Delta\lambda}_i \right]$, что с использованием (22) позволяет для оценки относительной интервальности следа матрицы записать:

$$\delta_I tr(N) = \frac{|tr(\overline{\Delta N})|}{|tr(N_0)|} = \frac{\left| \sum_{i=1}^n \overline{\Delta\lambda}_i \right|}{\left| \sum_{i=1}^n \lambda_{i0} \right|}. \quad (23)$$

Если интервальная квадратная матрица обладает спектром интервальных кратных собственных чисел так, что $[\lambda_i] = [\underline{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i] = \lambda_{i0} + [\underline{\Delta\lambda}_i, \overline{\Delta\lambda}_i] = [\lambda] = [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] = \lambda_0 + [\underline{\Delta\lambda}, \overline{\Delta\lambda}]$, $(i = \overline{1, n})$, то в силу (23) оценки относительной интервальности следа интервальной матрицы и интервального кратного собственного числа совпадают так, что выполняется равенство $\delta_I tr(N) = \delta_I \lambda$.

Соотношение (23), дополненное требованием выполнения условия $tr(N_0) < 0$, с использованием аддитивного способа изменения медианной составляющей матрицы состояния проектируемой системы путем использования обратной связи по вектору состояния, являются основой для формирования алгоритма синтеза робастной непрерывной системы на основе минимизации оценки относительной интервальности следа ее матрицы состояния в случае, когда параметрическая неопределенность компонентов модели технического объекта задана в интервальной форме. К этому надо добавить, что след матрицы состояния очень информативен, потому что он равен сумме ее собственных чисел, и очень конструктивен, потому что вычислительно он определяется как сумма диагональных элементов матрицы.

4. Основной результат. Алгоритм синтеза медианного модального управления с использованием концепции управляемой относительной интервальности. Модальное управление [18], используемое в данной работе, основано на концепции подобия матриц состояния проектируемой системы и модальной (эталонной) модели, которая

в алгоритме приводит к матричному уравнению Сильвестра с использованием медианной составляющей интервальной матрицы состояния технического объекта. Характеристическая частота [19] модальной модели (ММ) должна назначаться на основании требований к динамическим показателям системы и необходимого значения оценки относительной интервальности следа матрицы состояния системы, которая в решаемой задаче выступает в качестве критерия робастности, точнее модальной робастности. С учетом сказанного алгоритм принимает вид:

1. Сформулировать требования к показателям качества системы в переходном и установившемся режимах в форме неравенств:

$$\sigma_0 \leq \sigma_R, t_{\Pi 0} \leq t_{\Pi R}, D_{01} \geq D_{IR}, \delta_0 \leq \delta_R, \quad (24)$$

где σ_R , $t_{\Pi R}$, D_{IR} , δ_R — соответственно требуемые медианные значения перерегулирования, длительности переходного процесса, добротности по скорости и величины относительной частотной ошибки при гармоническом внешнем воздействии.

2. Задать требуемое значение $\delta_{tr}(F)$ оценки $\delta_{tr}(F)$ относительной интервальности следа интервальной матрицы $[F]$ состояния проектируемой системы.

3. Задать модель исходного технического объекта в форме модели ВСВ (1).

4. Сформировать модель желаемого поведения проектируемой системы в форме модальной модели (ММ) с передаточной функцией (ПФ) «вход-выход» (ВВ) [19-22] вида:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{v_n \omega_0^n}{s^n + \sum_{i=1}^n v_i \omega_0^i s^{n-i}} = \frac{v_n \omega_0^n}{D(s, v_i, \omega_0)}, \quad (25)$$

где коэффициенты v_i полинома $D(s, v_i, \omega_0)$ определяют характер размещения его корней на комплексной плоскости, ω_0 — параметр, именуемый характеристической частотой, определяет размер области локализации этого размещения так, что задача синтеза оказывается однопараметрической и сводится к определению необходимого значения ω_0 , при этом от v_i зависят перерегулирование, показатель колебательности и запас устойчивости, а от ω_0 при фиксированных v_i зависят длительность переходного процесса, частота среза, добротность по скорости и ширина

полос пропускания на заданном уровне амплитудных частотных характеристик по выходу и ошибке. При этом, если по условиям задачи синтеза системы оказывается недопустимым ненулевое значение перерегулирования, следует использовать размещение Ньютона корней полинома $D(s, v_i, \omega_0)$ знаменателя ПФ (25). В противном случае в качестве ПФ (25) может быть использована ее реализация с размещениями корней полинома знаменателя Баттерворта, Чебышева, Бессели и другие [20].

5. Определить значение характеристической частоты ω_0 из условия выполнения соотношения:

$$\omega_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \arg(t_{\Pi}(\omega_0) \leq t_{\text{ПР}}), \\ \omega_0 = \arg(D(\omega_0) \geq D_{\text{R}}), \\ \omega_0 = \arg(\delta(\omega_0) \leq \delta_{\text{R}}) \end{array} \right\}. \quad (26)$$

6. Подставить значение характеристической частоты (26) в (25), после чего перейти от представления ВВ модальной модели к ее представлению ВСВ в векторно-матричной форме:

$$z(t) = \Gamma(\omega_0)z(t) + Eg(t), \eta = Hz(t), \quad (27)$$

где z, η — соответственно векторы состояния и выхода ММ; Γ, E, H — соответственно матрицы состояния, входа и выхода ММ, при этом (Γ, H) — наблюдаемая пара матриц. Перечисленные компоненты имеют размерности: $\dim(z) = n, \quad \dim(y) = m, \quad \dim(\Gamma) = n \times n, \quad \dim(E) = \dim(C^T) = n \times m, \quad \dim(H) = \dim(B^T)$.

7. Задать алгоритм формирования сигнала управления объектом (1) в форме (2):

8. Решить матричное уравнение Сильвестра [23]:

$$M\Gamma - A_0M = -BH, \quad (28)$$

относительно матрицы M матричного подобия $M\Gamma = F_0M$.

9. Осуществить вычисление матрицы K обратных связей с помощью [23] формулы:

$$K = HM^{-1}. \quad (29)$$

10. Сформировать медианную составляющую F_0 интервальной матрицы $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$ состояния проектируемой системы (3) на основании матричного условия подобия $F_0 = MGM^{-1}$.

11. Осуществить проверку выполнения условия достижения требуемого значения оценки относительной интервальности следа матрицы $[F] = F_0 + [\Delta F] = F_0 + [\Delta A]$ на основании неравенства:

$$\delta_l tr(F) = \frac{|tr(\overline{\Delta A})|}{|tr(F_0)|} \leq \delta_{lr} tr(F). \quad (30)$$

В случае выполнения условий (24) и (30) перейти к п. 12 алгоритма, иначе — увеличить значение характеристической частоты ω_0 и перейти к п.6 алгоритма.

12. Вычислить матрицу K_g прямой связи с помощью соотношения:

$$K_g = \arg\left\{ \Phi(s) = C(sI - F_0)^{-1} BK_g \Big|_{s=0} = I \right\} = (C(-F_0)^{-1} B)^{-1}. \quad (31)$$

13. Отказаться от гипотезы о непосредственной измеримости внешнего воздействия $g(t)$, которая использована при построении алгоритма (2) формирования сигнала управления с тем, чтобы сформировать физически реализуемый алгоритм:

$$u(t) = K_e \varepsilon(t) - K_x x(t), \quad (32)$$

где $K_x = K - K_y C$, $K_e = K_y = K_g$, $\varepsilon(t) = g(t) - y(t)$.

14. Произвести исследование спроектированной робастной системы в оболочке Matlab и Simulink, особое внимание обратить на значения показателей системы при граничных значениях интервальных параметров исходного технического объекта.

15. В случае положительных результатов выполнения п.14 осуществить техническую реализацию спроектированной системы.

5. Пример. Проиллюстрируем предложенную авторами методику синтеза робастной непрерывной системе на примере разработки системы высокоточного следящего микроперемещения (СВСМ) элементов составного зеркала телескопа [23, 24]. Исполнительное устройство системы, выполненное в виде прецизионного пьезопривода (ППП) с усилителем мощности, описывается передаточной функцией «вход-выход»:

$$W_{ov}(s) = \frac{K_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{K_2}{T_2^2 s^2 + 2[\zeta] T_2 s + 1}, \quad (33)$$

с параметрами $K_1 \cdot K_2 = 10^{-6}$ мм/в, $T_1 = 5 \cdot 10^{-4}$ с, $T_2^2 = 2.56 \cdot 10^{-8}$ с², и интервальным коэффициентом демпфирования $[\zeta]$, который в силу (4) представим в форме $[\zeta] = [0.05, 0.15] = \zeta_0 + [\Delta\zeta] = 0.1 + [-0.05, 0.05]$.

В соответствии с разработанной авторами методикой, реализованной в форме алгоритма, приведенного в разделе «основной результат»:

1. Сформируем требования к показателям проектируемой робастной СВСМ: перерегулирование должно отсутствовать так, что должно выполняться условие $\sigma_0 = 0\%$; длительность переходного процесса должна удовлетворять неравенству $t_{п0} \leq 0.01$ с; значение добротности D_1 по скорости обеспечить из условия $D_{10} \geq 100c^{-1}$; величина относительной частотной ошибки $\delta_0 = (\varepsilon_m / g_m)$ при воспроизведении с ошибкой $\varepsilon(t) = \varepsilon_m \sin(\omega t + \psi)$ экзогенного гармонического воздействия $g(t) = g_m \sin(\omega t)$ с параметрами $g_m = 10^{-5}$ м, $\omega = 3.14c^{-1}$ должна быть обеспечена из условия $\delta_0 \leq 0.01$;

2. Сформируем требование к величине оценки относительной интервальной следа матрицы состояния проектируемой робастной СВСМ в форме неравенства $\delta_{tr}(F) \leq 0.025$.

3. На основании (33) сформируем представление ППП в форме (1) с использованием правил интервальной арифметики при переходе от интервальной модели ВВ к интервальной модели ВСВ [14], в результате чего получим:

$$[A] = A_0 + [\Delta A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -39000000 & -1250 & 1 \\ 0 & 0 & -2000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-625; 625] & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 78125 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0]. \text{ При этом } \delta_{tr}(A) = \frac{625}{3250} = 0.1923.$$

4. В силу того, что ППП представляет собой технический объект размерности $n = 3$ зададим ПФ (25) проектируемой робастной СВСМ в форме:

$$\Phi(s, \omega_0) = \frac{v_3 \omega_0^3}{s^3 + \sum_{i=1}^3 v_i \omega_0^i s^{3-i}} = \frac{v_3 \omega_0^3}{D(s, v_i, \omega_0)} = \frac{v_3 \omega_0^3}{s^3 + v_1 \omega_0 s^2 + v_2 \omega_0^2 s + v_3 \omega_0^3}. \quad (34)$$

5. В силу требования к величине перерегулирования в форме равенства $\sigma_0 = 0\%$ назначаем размещение Ньютона корней полинома $D(s, v_i, \omega_0) = s^3 + v_1 \omega_0 s^2 + v_2 \omega_0^2 s + v_3 \omega_0^3$ по таблицам [19] показателей качества типовых полиномиальных динамических моделей с размещением Ньютона корней определяем значение характеристической частоты ω_0 из условия (26), в результате чего получаем:

$$\omega_0 = \max \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \arg(t_n(\omega_0) \leq 0.01 c) = 630, \\ \omega_0 = \arg(D_1(\omega_0) \geq 100 c^{-1}) = 300, \\ \omega_0 = \arg(\delta_0(\omega_0) \leq 0.01) = 942 \end{array} \right\} = 942 c^{-1}.$$

6–11. Выполнение этих пунктов при значении характеристической частоты $\omega_0 = 942 c^{-1}$ обнаруживает невыполнение условия $\delta_{tr}(F) \leq 0.025$, что в силу алгоритма синтеза робастной непрерывной системы требует осуществить увеличения ω_0 , в рассматриваемом случае оно оказалось значительным, так что ω_0 придано значение $\omega_0 = 9420 c^{-1}$, при этом в силу алгоритма осуществлено возвращение к его п.б.

6. При значении характеристической частоты $\omega_0 = 9420 c^{-1}$ передаточная функция (34) проектируемой робастной СВСМ принимает представление $\Phi(s, \omega_0) = \frac{9420^3}{s^3 + 3 \cdot 9420 s^2 + 3 \cdot 9420^2 s + 9420^3}$, что дает матричные компоненты ММ (27):

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -9420^3 & -3 \cdot 9420^2 & -3 \cdot 9420 \end{bmatrix}; G = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 9420^3 \end{bmatrix}; H = [1 \ 0 \ 0]. \quad (35)$$

7. Получим решение матричного уравнения Сильвестра (27) с матричными компонентами (35):

$$M = \begin{bmatrix} 7.63 \cdot 10^{-7} & 1.17 \cdot 10^{-10} & 4.81 \cdot 10^{-15} \\ -0.004 & -5.18 \cdot 10^{-7} & -1.93 \cdot 10^{-11} \\ 40.8659 & 0.005 & 1.91 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix},$$

что позволяет вычислить матрицу отрицательной обратной связи по состоянию $K = HM^{-1} = [-2.7839 \cdot 10^6 \ 0.2476 \ 0.3201]$.

8. С использованием матрицы M решения матричного уравнения Сильвестра в п.7 на основании соотношения подобия $F_0 = MGM^{-1}$ формируем медианную составляющую интервальной матрицы состояния проектируемой робастной СВСМ

$$F_0 = \begin{bmatrix} 539.4144 & 1.339 & 2 \cdot 10^{-5} \\ -4.0741 \cdot 10^7 & -4452 & 0.7196 \\ 1.9695 \cdot 10^{11} & -1.7126 \cdot 10^8 & -24347 \end{bmatrix}.$$

9. Вычисляем след матрицы F_0 с тем, чтобы проверить выполнение условия робастности $\delta_l tr(F) = \frac{|tr(\overline{\Delta A})|}{|tr(F_0)|} \leq \delta_{IR} tr(F) = 0.025$, которое оказывается выполненным в силу соотношений:

$$\delta_l tr(F) = \frac{|tr(\overline{\Delta A})|}{|tr(F_0)|} = \frac{625}{28260} = 0.022 < 0.025,$$

что оказалось меньше относительной интервальности $\delta_l tr(A) = 0.1923$ следа интервальной матрицы состояния исходного технического объекта в 8.74 раза.

10,11. Значение матрицы K_g прямых связей, которая в решаемой задаче оказалась скаляром, вычисляем с помощью соотношения (31), в результате чего получаем $K_g = 1.0054 \cdot 10^7$; кладем $K_e = K_g$ с тем чтобы реализовать закон управления исполнительной частью, проектируемой робастной СВСМ в физически реализуемой форме (32).

12. Проводим комплексное исследование спроектированной робастной СВСМ с использованием оболочки Simulink пакета Matlab, результаты которого представлены на рисунках 1, 2, 3 и 4 в виде кривых: переходного процесса при воспроизведении ступенчатого входного воздействия $g(t) = g_0 \cdot 1(t)$, $g_0 = 10^{-5}$ м, при воспроизведении кинетического входного воздействия, изменяющегося с постоянной скоростью $g(t) = \dot{g}_0 t$, $\dot{g}_0 = 3.14 \cdot 10^{-5}$ м/с и ошибки при воспроизведении системой гармонического воздействия с амплитудой $g_m = 10^{-5}$ м, и частотой $\omega = 3.14 c^{-1}$, что позволяет зафиксировать следующие динамические показатели спроектированной робастной СВСМ $\sigma_0 = 0\%$,

$t_{i_0} = 0.0007 \text{ c} \leq 0.01 \text{ c}$ и $D_{i_0} = 3.14 \cdot 10^{-5} / 10^{-8} = 3140 \text{ c}^{-1} > 100 \text{ c}^{-1}$,
 $\delta_0 = \varepsilon_{m_3} / g_{m_3} = 10^{-8} / 10^{-5} = 0.001$. Достигнутая робастность хорошо иллюстрируется кривыми переходного процесса для случаев медианной и двух угловых реализаций матрицы состояния системы.

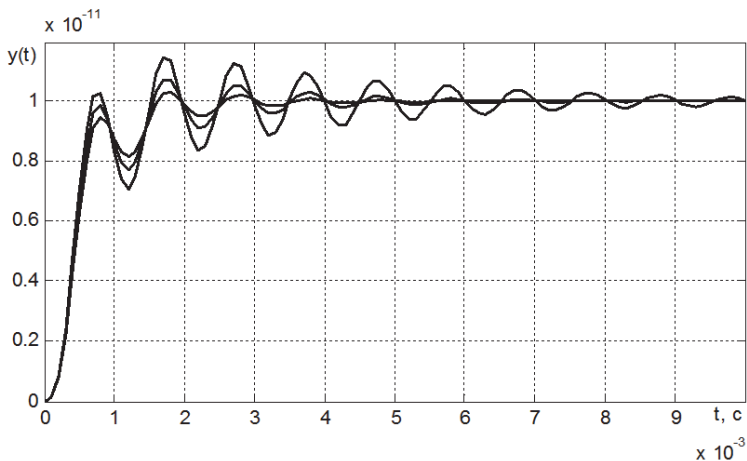


Рис.1. Кривые переходных характеристик исходного устойчивого технического объекта в виде ППП при медианном и двух угловых значениях интервального параметра

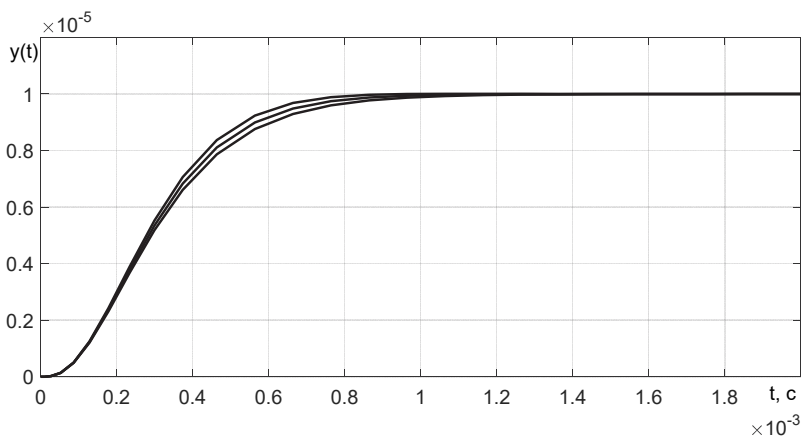


Рис.2. Кривые переходных характеристик спроектированной робастной СВСМ при медианном и двух угловых значениях интервального параметра исходного технического объекта

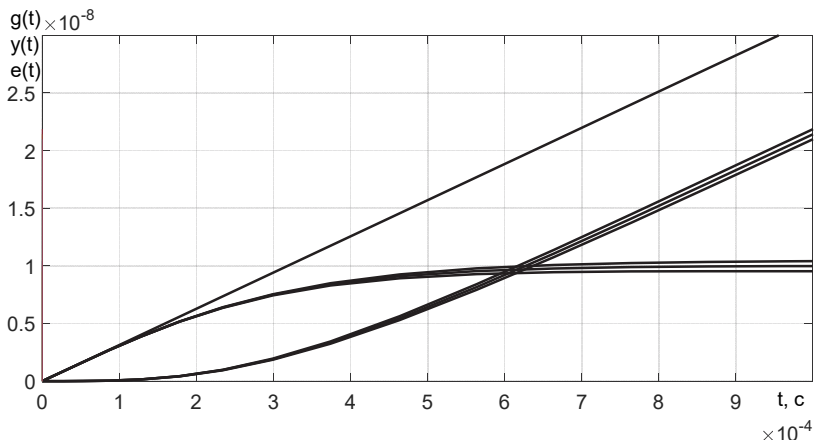


Рис. 3. Кривая кинетического входного воздействия (1), семейство кривых выхода (2) и семейство кривых ошибки (3) спроектированной робастной СВСМ при медианном и двух угловых значениях интервального параметра технического объекта

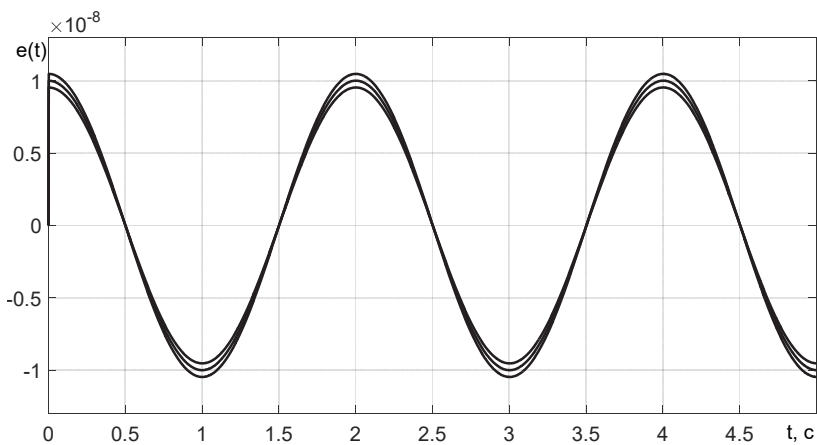


Рис.4. Кривые ошибки спроектированной робастной СВСМ при воспроизведении гармонического воздействия

6. Заключение. Получен алгоритм синтеза устройства управления непрерывным техническим объектом с неопределенными параметрами, заданными в интервальной форме, доставляющего системе параметрическую робастность. Применение метода медианного модального управления в сочетании с процедурой минимизации значения оценки относительной интервальности следа матрицы состояния проектируе-

мой системы обеспечивает требуемые значения относительной интервальности интервальных значений стандартных показателей качества разработанной системы. Действительно, в приведенном примере уменьшение оценки относительной интервальности следа интервальной матрицы состояния спроектированной системы по сравнению с оценкой относительной интервальности следа интервальной матрицы состояния исходного технического объекта в 8.74 раза, как следует из анализа кривых рисунка 1 и рисунка 2, дает сокращение нормы дополнительного движения в относительном представлении в 7.3 раза.

Литература

1. *Розенвассер Е.Н., Юсупов Р.М.* Чувствительность систем управления // М.: Наука. 1981. 464 с.
2. *Никифоров В.О., Ушаков А.В.* Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность // СПб.:СПбГИТМО(ТУ). 2002. 232 с.
3. *Petersen I.R., Tempo R.* Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments // Automatica. 2014. vol. 50. no. 5. pp. 1315–1335.
4. *Wonham W.M.* Linear Multivariable Control: A Geometric Approach // New York: Springer. 1974. 344 p.
5. *Cloutier J.R.* Robust control of uncertain dynamic systems: A linear state space approach // Springer New York. 2014. 204 p.
6. *Ackermann J.* Robust control systems with uncertain physical parameters // London: Springer-Verlag. 1993. 406 p.
7. *Oliveira V.A., Felizardo K.R., Bhattacharyya S.P.* A model-free measurement based approach to circuit analysis and synthesis based on linear interval systems // IEEE International Symposium on Industrial Electronics. 2015. pp. 38–43.
8. *Matusiū R.* Robust stabilization of interval plants by means of two feedback controllers // International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing. 2015. vol. 9. pp. 427–434.
9. *Junior F.S., Oliveira J., Araújo A.* Variable structure adaptive pole placement control for uncertain systems: An interval approach // International Journal of Innovative Computing, Information and Control. 2017. vol. 13. pp. 485–507.
10. *Mohsenzadeh D.N., Oliveira V.A., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* Extremal results for algebraic linear interval systems // Springer Optimization and Its Applications. 2016. vol. 115. pp. 341–351.
11. *Mohsenzadeh D.N., Keel L.H., Bhattacharyya S.P.* An extremal result for unknown interval linear systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. vol. 19. pp. 6502–6507.
12. *Patre B.M., Deore P.J.* Robust state feedback for interval systems: An interval analysis approach // Reliable Computing. 2010. vol. 14. pp. 46–60.
13. *Yedavalli R.K.* Robust stability of linear interval parameter matrix family problem revisited with accurate representation and solution // Proceedings of the American Control Conference. 2009. pp. 3710–3717.
14. *Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J.* Introduction to Interval Analysis // SIAM Philadelphia. 2009. 234 p.
15. *Ackermann J.* Parameter Space Design of Robust Control Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 1980. vol. 25 no.6. pp. 1058–1072.
16. *Акунов Т.А. и др.* Задача качественного исследования харитоновской робастной устойчивости непрерывных систем // Международный научно-технический журнал “Проблемы управления и информатики”. 2016. № 4. С. 100–108.

17. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления // М.: Наука. 1984. 320 с.
18. *Smagina Ye., Brewer I.* Using interval arithmetic for robust state feedback design // *Systems and Control Letters*. 2002. vol. 46. no. 3. pp. 187–194.
19. *Быстров С.В., Вундер Н.А., Синетова М.М., Ушаков А.В.* Аналитическое конструирование последовательного компенсатора для систем с запаздыванием на основе модификации типовых полиномиальных моделей // *Труды СПИИРАН*. 2017. Вып. 3(52). С. 115–136.
20. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) // М.: Физматлит. 2012. 360 с.
21. *Быстров С.В., Вундер Н.А., Ушаков А.В.* Решение проблемы сигнальной неопределенности при аналитическом конструировании последовательного компенсатора в задаче управления пьезоприводом // *Научно-технический вестник информационных технологий, механики и оптики*. 2016. Т. 16. № 3. С. 451–459.
22. *Barmish B.R., Hollot C.V., Kraus F.J., Tempo R.* Extreme Point Results for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensators // *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1992. vol. 37 no. 6. pp. 707–714.
23. *Быстров С.В., Слита О.В., Сударчиков С. А., Ушаков А. В.* Обеспечение робастности пьезопривода с использованием метода управляемой относительной интервальности // *Изв. вузов. Приборостроение*. 2016. Т. 59. № 7. С.534–541.
24. *Артемченко Ю.Н. и др.* Особенности выбора электроприводов зеркальной системы космических радиотелескопов // *Мехатроника, Автоматизация, Управление*. 2012. №1. С. 26–31.

Александрова Софья Александровна — аспирант кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: управляемый электропривод, проблемы обеспечения робастности непрерывных систем с техническими объектами с интервальными параметрами. Число научных публикаций — 15. alexandrova_sophie@mail.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812) 595-41-28.

Быстров Сергей Владимирович — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: системы управления с исполнительными устройствами на пьезокерамике, синтез последовательных компенсаторов в условиях сигнальной и параметрической неопределенности. Число научных публикаций — 68. sbystrov@mail.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Вундер Нина Александровна — аспирант кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: матричный формализм метода пространства состояния, разработка устройств управления в форме последовательного компенсатора, системы с неопределенностями и запаздыванием, анализ причинных факторов больших отклонений свободного движения линейных устойчивых непрерывных и дискретных систем. Число научных публикаций — 43. polinova_nina@mail.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Слита Ольга Валерьевна — к-т техн. наук, доцент, доцент кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных

интересов: проблемы робастности в условиях параметрической неопределенности, заданной аддитивным и интервальным образом, разработка алгоритмов синтеза параметрически инвариантных сист. Число научных публикаций — 53. o-slita@yandex.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812) 595-41-28.

Ушаков Анатолий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры систем управления и информатики, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО). Область научных интересов: проблемы динамики непрерывных, дискретных и двоичных динамических систем, робастность непрерывных систем с интервальными и аддитивными параметрическими неопределенностями, системы с запаздыванием, разработка возможностей обобщенного модального управления, аппарат эллипсоидных оценок качества векторных процессов в многомерных системах, разработка цифрового дистанционного управления непрерывными объектами с учетом факторов канальной среды, проблемы человека-оператора, интегрированного в функциональную среду. Число научных публикаций — 360. Ushakov-AVG@yandex.ru; Кронверкский пр., 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +7(812)595-41-28.

Поддержка исследований. Работа написана при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации, госзадание № 8.8885.2017/8.9

S.A. ALEXANDROVA, S.V. BYSTROV, N.A. VUNDER, O.V. SLITA,
A.V. USHAKOV

**CONTINUOUS ROBUST SYSTEM SYNTHESIS BASED ON
MINIMIZATION OF ESTIMATION OF THE RELATIVE
INTERVALITY OF TRACE OF THE STATE MATRIX**

Alexandrova S.A., Bystrov S.V., Vunder N.A., Slita O.V., Ushakov A.V. **Continuous Robust System Synthesis Based on Minimization of Estimation of the Relative Intervality of Trace of the State Matrix.**

Abstract. An algorithm for synthesis of robust control system for a continuous plant with uncertain interval parameters is proposed in the paper. A concept of relative intervality of the following interval mathematical objects is used to ensure robustness of the system: a scalar, a vector, a numerical characteristic of matrix namely trace. The problem is solved by the median modal control method taking into account the relative intervality of trace of the system state matrix. The trace of a matrix is the sum of the eigenvalues. The desired relative intervality value of standard system indicators is guaranteed. It is shown that relative intervality of trace of the system state matrix is equal to relative intervality of trace of multiply eigenvalue when the state matrix has one multiple eigenvalue. Relative intervality of trace of the system state matrix is changed by changing its median component. It is realized by introducing feedback on the plant state vector. The obtained results are illustrated by an example.

Keywords: interval parameters, relative intervality, trace of matrix, estimation, median modal control, robustness.

Alexandrova Sofija Aleksandrovna — Ph.D. student of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: controlled electric drive, robustness of continuous systems with interval plant. The number of publications — 15. alexandrova_sophie@mail.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812) 595-41-28.

Bystrov Sergey Vladimirovich — Ph.D., associate professor, associate professor of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: control systems on piezoceramic actuators, consecutive compensator synthesis under conditions of signal and parametric uncertainty. The number of publications — 68. sbystrov@mail.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Vunder Nina Aleksandrovna — Ph.D. student of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: state space method, consecutive compensator synthesis, control systems with uncertainties and delay, peaks of free motion of linear stable continuous and discrete systems. The number of publications — 43. polinova_nina@mail.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Slita Olga Valer'evna — Ph.D., associate professor, associate professor of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: problems of robustness un-

der conditions of parametric uncertainty given by additive and interval forms, synthesis of parametrically invariant systems. The number of publications — 53. o-slitaa@yandex.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812) 595-41-28.

Ushakov Anatoly Vladimirovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of control systems and informatics department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: : problems of the dynamics of continuous, discrete and binary dynamic systems, robustness of continuous systems with interval and additive parametric uncertainties, delayed systems, the development of the possibilities of generalized modal control, the apparatus of ellipsoidal estimations of the quality of vector processes in multidimensional systems, the development of digital remote control of continuous plants with allowance for the channel environment, the problem of the human operator, integrated into the functional environment. The number of publications — 360. Ushakov-AVG@yandex.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +7(812)595-41-28.

Acknowledgements. This work was supported by the Ministry of Education and Science of Russian Federation, goszadanie no. 8.8885.2017/8.9

References

1. Rosenwasser E.N., Jusupov R.M. *Chuvstvitel'nost' sistem upravleniya* [Sensitivity of control systems]. M.: Nauka. 1981. 464 p. (In Russ).
2. Nikiforov V.O., Ushakov A.V. *Upravlenie v usloviyah neopredelennosti: chuvstvitel'nost', adaptaciya, robastnost'* [Control under uncertainty: sensitivity, adaptation, robustness]. SPb.:SPbGITMO(TU). 2002. 232 p. (In Russ).
3. Petersen I.R., Tempo R. Robust control of uncertain systems: Classical results and recent developments. *Automatica*. 2014. vol. 50. no. 5. pp. 1315–1335.
4. Wonham W.M. *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*. New York: Springer. 1974. 344 p.
5. Cloutier J.R. *Robust control of uncertain dynamic systems: A linear state space approach*. Springer New York. 2014. 204 p.
6. Ackermann J. *Robust control systems with uncertain physical parameters*. London: Springer-Verlag. 1993. 406 p.
7. Oliveira V.A., Felizardo K.R., Bhattacharyya S.P. A model-free measurement based approach to circuit analysis and synthesis based on linear interval systems. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*. 2015. pp. 38–43.
8. Matuš R. Robust stabilization of interval plants by means of two feedback controllers. *International Journal of Circuits, Systems and Signal Processing*. 2015. vol. 9. pp. 427–434.
9. Junior F.S., Oliveira J., Araújo A. Variable structure adaptive pole placement control for uncertain systems: An interval approach. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*. 2017. vol. 13. pp. 485–507.
10. Mohsenizadeh D.N., Oliveira V.A., Keel L.H., Bhattacharyya S.P. Extremal results for algebraic linear interval systems. *Springer Optimization and Its Applications*. 2016. vol. 115. pp. 341–351.
11. Mohsenizadeh D.N., Keel L.H., Bhattacharyya S.P. An extremal result for unknown interval linear systems. *IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline)*. 2014. vol. 19. pp. 6502–6507.
12. Patre B.M., Deore P.J. Robust state feedback for interval systems: An interval analysis approach. *Reliable Computing*. 2010. vol. 14. pp. 46–60.

13. Yedavalli R.K. Robust stability of linear interval parameter matrix family problem revisited with accurate representation and solution. Proceedings of the American Control Conference. 2009. pp. 3710–3717.
14. Moore R.E., Kearfott R.B., Cloud M.J. Introduction to Interval Analysis. SIAM Philadelphia. 2009. 234 p.
15. Ackermann J. Parameter Space Design of Robust Control Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1980. vol. 25 no.6. pp. 1058–1072.
16. Akunov T.A. et al. [The problem of qualitative research of the Khariton robust stability of continuous systems] *Mezhdunarodnyj nauchno–tehnicheskij zhurnal “Problemy upravlenija i informatiki” – International scientific and technical journal “Problems of Control and Informatics”*. 2016. vol. 4. pp. 100–108. (In Russ).
17. Voevodin V.V., Kuznecov Ju.A. *Matricy i vychislenija* [Matrices and calculations]. M.: Nauka. 1984. 320 p. (In Russ).
18. Smagina Ye., Brewer I. Using interval arithmetic for robust state feedback design. *Systems and Control Letters*. 2002. vol. 46. no. 3. pp. 187–194.
19. Bystrov S.V., Vunder N.A., Sinetova M.M., Ushakov A.V. [Analytical Design of Consecutive Compensator for Control Systems With Delay Based on Modification of Typical Polynomial Models]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 3(52). pp. 115–136.
20. Gajduk A.R. *Teorija i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravlenija (polynomial'nyj podhod)* [Theory and methods of analytical synthesis of automatic control systems (polynomial approach)]. M.: Fizmatlit. 2012. 360 p. (In Russ).
21. Bystrov S.V., Vunder N.A., Ushakov A.V. [Solution of signal uncertainty problem at analytical design of consecutive compensator in piezo actuator control]. *Nauchno-tehnicheskij vestnik informacionnyh tehnologij, mehaniki i optiki – Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2016. vol. 16. no. 3. pp. 451–459 (In Russ).
22. Barmish B.R., Hollot C.V., Kraus F.J., Tempo R. Extreme Point Results for Robust Stabilization of Interval Plants with First Order Compensators. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 1992. vol. 37 no. 6. pp. 707–714.
23. Bystrov S.V., Slita O.V., Sudarchikov S.A., Ushakov A.V. [Ensuring piezoelectric drive robustness using the method of controlled relative interval frequency]. *Izv. vuzov. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2016. vol. 59. no. 7. pp. 534–541. (In Russ).
24. Artemenko Ju.N. et al. [Problems of the Choice of Electric Drives of Space Radio-Telescope System Dish System]. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*. 2012. vol. 1. pp. 26–31. (In Russ).