УДК 519.71 **DOI** 10.15622/sp.55.5

С.И. Колесникова

СИСТЕМА МНОЖЕСТВЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОБЪЕКТА С НЕПОЛНЫМ ОПИСАНИЕМ

Колесникова С.И. **Конструирование множественного управления нелинейным объектом.**

Аннотация. Предлагается алгебраический подход к конструированию системы множественного управления для нелинейных многомерных объектов с хаотическими режимами с целью вывода объекта в аналитически заданное устойчивое состояние. Рассмотрены непрерывные и дискретные объекты управления, представленные системами нелинейных дифференциальных или разностных уравнений, соответственно, часть описания которых не определена. Предлагаемый алгоритм управления реализован на совместном применении методов нелинейного управления на многообразиях, функций Ляпунова и алгебраическом подходе к синтезу корректных алгоритмов. Рассмотрены две прикладные задачи экономической направленности с непрерывной и дискретной моделями описания. Численное моделирование осуществлено на реальных данных малых предприятий. Результаты работы предполагается использовать в системе поддержки принятия экономических решений.

Ключевые слова: нелинейный многомерный объект, плохо формализуемый объект, целевое многообразие, множественное управление, коллектив алгоритмов управления.

1. Введение. Предметом настоящего исследования является проблема управления нелинейными многомерными объектами, неустойчивыми в разомкнутом состоянии и имеющими все признаки плохо формализуемых объектов (или сложных по Л.А. Растригину): невозможность полного аналитического описания; параметрическая многомерность, «нетерпимость» к управлению, странные аттракторы среди предельных состояний.

Поскольку задачи управления хаотическими объектами являются, как правило, некорректными, то естественно рассматривать задачу достижения объектом управления не отдельного заданного состояния, а некоторого целевого множества состояний, попадая в которое, объект будет обладать требуемыми и содержательно определенными физическими свойствами [1-4]. В условиях «невозможности создания общей теории нелинейных систем» (по Нейману) представляют несомненный интерес наиболее «физичные» методы синтеза систем управления, то есть такие, которые при постановке задачи управления и ее решении учитывают инвариантные соотношения и физические ограничения для описания объекта и его целевых свойств, к которым, например, в определенной степени относятся конструирование управления в скользящих режимах [5], бэкстеппинг [6, 7] или обход интегратора, метод инвариантного погружения [8], метод аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) (например, [4, 9]).

В последнее десятилетие подробный математический анализ специальных классов систем управления неоднократно проводился [1-4, 10], в том числе и *аналитических* методов синтеза управления нелинейными объектами с хаотическими режимами, список которых невелик. Основная сложность привлекательных в математическом плане указанных методов состоит в том, что синтез управления многомерными, многосвязными объектами без предварительной линеаризации зачастую сталкивается с проблемами вычислительного характера (метод Летова-Калмана с применением функционала обобщенной работы, управление в скользящих режимах…) (см. наиболее полный обзор А.А. Красовского в [4], а также обзор в [2, 3]). Поэтому имеется определенный интерес к теории и к практике адаптивного управления с использованием нескольких моделей, общий подход к конструированию которых возник с целью решения вопросов создания устойчивых систем управления с медленно и быстро меняющимися параметрами [11, 12].

Использование множественных моделей (или моделей переменной структуры) имеет в основе принцип адаптации или обратной связи для уменьшения консерватизма в процессе управления, однако ее решение в наиболее общем виде до сих пор задача открытая [13, 14]. Базовые (множественные) модели возникают либо на основе представления исходного объекта совокупностью кусочно-линеаризованных (см. обзор в [1, 11]), либо на основе политики переключения регуляторов [11, 12, 15], что улучшает качество переходных процессов и повышает устойчивость синтезируемой системы управления.

Важно отметить, что фундаментальные конструктивные положения множественного адаптивного управления, заложенные в трудах С.В. Емельянова, K.S. Narendra, J. Balakrishnan и получившие активное применение в 90-е годы прошлого столетия в технических проектах, по-прежнему составляют базу современных отечественных и зарубежных исследований в прикладных задачах теории множественного адаптивного управления (MMAC), представленных в основном в следующих классах задач (например, [15-18]):

1) задачи оптимизации обучения системы множественного управления или разработки алгоритмов использования доступной выборки для идентификации шумовой составляющей и настройки параметров локальных регуляторов; решаемые вопросы связаны с исследованием эффективности схем переключения, с анализом устойчивости и робастности, с выяснением условий стабилизируемости системы множественного управления («узким» местом таких систем);

2) задачи управления процессами с изменяющимися во времени параметрами [19];

3) задачи интеллектуального управления, включающие задачи управления нелинейными процессами на основе нечетких моделей, динамических нейронных сетей (PDNN) [20].

В последнем случае математическое описание объекта и регулятора представлено, как правило, множеством линейных моделей, аппроксимирующих локальные свойства системы, а операция линеаризации практически во всех случаях является основным инструментом для физической организации адаптивного управления на основе совокупности регуляторов. Следует также отметить, что применение идеологии множественного управления в сетевых системах управления (NCS) заслуживает отдельного анализа, поскольку в распределенных объектах существенным является зависимость от топологии сети и от физических ограничений каналов связи.

В статье поставлена задача конструирования системы множественного управления на основе нелинейных (базовых) алгоритмов управления без предварительной линейной параметризации исходного нелинейного объекта как, например, в [12], поэтому может быть полезна для всех объектов, для которых операция линеаризации не является желательной или затруднительной (например, в системах управления с техническим зрением).

Предлагается алгоритм, соединяющий достоинства методов управления в скользящем режиме, АКАР, функций Ляпунова и алгебраический подход к синтезу корректных алгоритмов. В качестве базовых будут использованы управления, полученные на основе метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов (АКАР) [4], который отвечает требованиям физической теории управления [1]. Достоинство методов синтеза систем управления на многообразиях заключается и в том, что при достижении окрестности заданного многообразия удерживание траекторий объекта в его окрестности не зависит от значений неопределенности в описании объекта (в необременительных условиях [2-9]), но область их применимости в данное время в основном ограничена физическими приложениями [9, 10, 21].

В статье впервые рассмотрена постановка задачи управления в экономической модели на основе обобщения метода агрегированных регуляторов для объектов с неполным описанием [9, 22], а именно задача вывода плохо формализуемого экономического объекта из хаотического состояния в устойчивое.

2. Основные понятия и определения. Для лучшего восприятия текста приведем несколько понятий и утверждений [4].

Множества $V \subset \mathrm{R}^n$ называются инвариантными по отношению к потоку $\boldsymbol{x}_f(t, \boldsymbol{x}_0, t_0)$, если $\boldsymbol{x}_f(t, \mathrm{x}_0, t_0) \in V$ для любых $x_0 \in V$ для всех $t > t_0$, где

$\boldsymbol{x}_f$:($\boldsymbol{x}_0$, t_0)→($\boldsymbol{x}$, t), $\dot{x}=f\left(x\right)+u, x\in R^n, u\in R^m, m\le n$ (фазовый поток системы).

Напомним, что формализм инвариантов применялся для построения регулятора для линейной системы с полной компенсацией возмущений [23].

Множество V называется притягивающим или аттрактивным, если оно замкнутое, инвариантное и для некоторой окрестности a_V множества V, для всех $x_0 \in a_V$ имеют место предельные соотношения: $\boldsymbol{x}_f(t, \mathrm{x}_0, t_0) \in a_V\ \forall t\ge 0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\left\|\boldsymbol{x}_f\left(t, \boldsymbol{x}_0, t_0\right)\right\|_V = 0$.

Под макропеременными понимают некоторые определенные функции $\psi\left(\boldsymbol{x}\right)$ от координат объекта; равенство $\psi\left(\boldsymbol{x}\right)=0$ определяет целевое множество состояний.

Постановка задачи управления на многообразии включает в себя: а) объект управления, заданных системой обыкновенных дифференциальных уравнений или системой разностных (нелинейных) уравнений для непрерывной и дискретной задач управления соответственно; б) цель управления в виде аналитически заданного уравнения $\psi\left(\boldsymbol{x}\right)=0$; в) выполнение требований: множество состояний, подчиняющихся описанию $\psi\left(\boldsymbol{x}\right)=0$, есть инвариантное многообразие; решения исходной системы уравнений ограничены; существует режим стабилизации объекта в окрестности $\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})$=0.

АКАР-управлением будем называть (векторную) переменную $u^{A}\left(x\left(t\right)\right)=\left(u_1^A,\dots,u_m^A\right)$, доставляющую решение вариационной задаче:

$$\Phi_C=\int_0^\infty\sum_{i=1}^m\left(\psi_i^2+\omega_i^2\dot{\psi}_i^2\left(t\right)\right)dt\to\min,$$

$$\Phi_D=\sum_{n=0}^\infty\sum_{i=1}^m\left(\omega_i^2\psi_{i,n}^2+\left(\Delta\psi_{i,n}\right)^2\right)\to\min$$

при ограничении $\psi\left(x\left(t\right)\right)=0,\ \psi\left(x\left(t\right)\right)=\left(\psi_1\left(x\left(t\right)\right),\dots,\psi_m\left(x\left(t\right)\right)\right)$, $\psi\left(x_s\right)=0,\ \psi\left(x_s\right)=\left(\psi_1\left(x_s\right),\dots,\psi_m\left(x_s\right)\right)$ в непрерывном и дискретном случаях соответственно. Далее указанные вариационные задачи будем обозначать парой символов $\left(\Phi_C,\psi\right)$, $\left(\Phi_D,\psi\right)$.

Математический аппарат метода аналитического конструирования агрегированных регуляторов основан на следующих утверждениях, доказательство которых опирается на результаты теоретической механики [24].

Утверждение 1. Пусть имеет место вариационная задача: $J_C = \int_0^\infty F(t, \psi, \dot{\psi})\, dt \to \min$, $\psi = 0$, где $F(t, \psi, \dot{\psi}) = \psi^2 + \omega^2 \dot{\psi}^2$. Тогда уравнение Эйлера — Лагранжа (в условиях применения АКАР) для J_C будет иметь вид: $\omega\dot{\psi} + \psi = 0$.

Утверждение 2. Пусть имеет место вариационная задача: $J_D = \sum_{t=0}^{\infty} \left(\omega^2 \psi_t^2 + (\Delta\psi_t)^2 \right) \to \min$, $\psi = 0$, где $\psi_t = \psi(x(t)), t \in \mathrm{N}$. Уравнение $\psi_{t+1} + \lambda\psi_t = 0$, $|\lambda| < 1$, $t \geq 1$ является уравнением Эйлера — Лагранжа для J_D. При этом скаляры λ и ω связаны соотношением: $\lambda = 0.5\left(2 + \omega^2 - \sqrt{\left(2 + \omega^2\right)^2 - 4} \right)$.

3. Обобщение алгоритма АКАР для объектов с неполным описанием. Рассмотрим объект с непрерывным наиболее общим описанием:

$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_1, ..., x_n) + u_j,\ j = \overline{1, m},$$
$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_1, ..., x_n),\ j = \overline{m+1, n},$$

где $x \in R^n$ — вектор состояний, $u \in R^m$, $m<n$, — вектор управления, $f \in R^n$ — нелинейная ограниченная вектор-функция; компоненты $f_1, ..., f_m$ вектора $f \in R^n$ неизвестны.

Предполагается, что существуют оценки $\hat{f}_j,\ j = \overline{1, m}$ неизвестных описаний $f_j,\ j = \overline{1, m}$ такие, что выполнены все условия для существования АКАР-управления $u^A = \left(u_1^A, ..., u_m^A\right)$ для объекта:

$$\dot{x}_j(t) = \hat{f}_j(x_1, ..., x_n) + u_j,\ j = \overline{1, m},$$
$$\dot{x}_j(t) = f_j(x_1, ..., x_n),\ j = \overline{m+1, n}.$$

Приведем основные положения алгоритма, основанного на совмещении методики АКАР и функций Ляпунова [22, 25]:

1) замена неизвестного описания $f_j,\ j = \overline{1, m}$ ее оценкой $\hat{f}_j,\ j = \overline{1, m}$ (например, верхней границей [5]);

2) преобразование управляющих переменных: $u_j = u_j^A + \upsilon_j, j = \overline{1,m}$, где u_j^A — АКАР-управление для системы, полученной из исходной после применения операции п.1); υ_j — управление, предназначенное для компенсации возникающего возмущения после замены неизвестного описания ее оценкой;

3) декомпозиция исходного описания на основе подстановки найденных соотношений для $u_j^A, j = \overline{1,m}$;

4) поиск управлений υ_j на базе функции Ляпунова вида $V(t) = \sum_{i=1}^{m}\left(\psi_i^2(t) + \upsilon_i^2(t)\right)$. Задача поиска управлений $\upsilon_j, j = \overline{1,m}$ сводится к поиску соотношений для $\upsilon_j, j = \overline{1,m}$, обеспечивающих условие $\dot{V}(t) < 0$. Специфика управлений $u_j^A, j = \overline{1,m}$ такова, что после шага 3) определение вида функции Ляпунова не является (в практически важных случаях вида ψ) затруднительным.

Синтез системы управления закончен. В результате получим модель управления, обусловленную применяемой на шаге п.1, видом оценки неизвестного описания.

4. Примеры применение метода АКАР для объектов с неполным описанием. Рассмотрим два примера, в которых объекты управления — балансовые модели малого предприятия и рынка двух производителей соответственно (подробное описание моделей без управления представлено в [4, 26]).

Численное моделирование ниже приведенных систем управления основано на реальных данных.

Рассмотрим основные шаги алгоритма на конкретных примерах.

Пример 1. Рассмотрим непрерывную модель (n=3, m=2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, x_3) + u_1, \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, x_3), \\ \dot{x}_3 &= f_1(x_1, x_2, x_3) + u_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^3$ вектор состояний, $u \in R^2$ вектор управлений, $f \in R^3$ нелинейная векторная функция; компоненты f_1, f_3 вектора $f \in R^3$ неизвестные ограниченные функции, $f_2 = \mu\left(x_2 + x_3\right) - \beta x_1 x_3, \mu, \beta \in R$. Согласно алгоритму п.3, осуществляем преобразования уравнений, содержащих неопределенность в описании: $\dot{x}_i = \hat{f}_i + \left(f_i - \hat{f}_i\right) + u_j, i = 1,3; j = 1,2$, получаем объект управления в виде:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \hat{f}_1 + \eta_1 \upsilon_1 + u_1^A, \\ &\dot{x}_2 = f_2, \\ &\dot{x}_3 = \hat{f}_3 + \eta_2 \upsilon_2 + u_2^A, \end{aligned} \tag{2}$$

где АКАР-управления будут определяться для системы (2) в условиях $\eta_1 = \eta_2 = 0$. Пусть заданы целевые макропеременные в виде:

$$\begin{aligned} &\psi_1(t) = x_1(t) - \rho x_2(t), \\ &\psi_2(t) = x_3(t) - x_3^*, \end{aligned} \tag{3}$$

где x_3^* — заданное целевое значение переменной x_3 .

Утверждение 3. Если цель управления будет задана в виде $\psi = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)$, где ψ_1, ψ_2 из (3), то итоговое описание регулятора для объекта (1) примет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \hat{f}_1(x_1, x_2, x_3) + u_1^A + \eta_1 \upsilon_1, \\ &\dot{x}_2 = \mu\left(x_2 + x_3\right) - \beta x_1 x_3 \ , \\ &\dot{x}_3 = \hat{f}_3(x_1, x_2, x_3) + u_2^A + \eta_2 \upsilon_2, \\ &\dot{\upsilon}_j = -\eta_j \psi_j, \ \eta_j > 0, \ j = 1, 2. \end{aligned} \tag{4}$$

При этом закон управления $u_i = u_i^A + \eta_i \upsilon_i, i = 1,2$ гарантирует выполнение всех целевых установок задачи управления для плохо формализованного объекта (1), а именно: 1) решение вариационной задачи $\Phi_C = \int\limits_0^\infty \sum\limits_{i=1}^2 \left(\psi_i^2 + \omega_i^2 \dot{\psi}_i^2\right) dt \to \min, \ \omega_i > 0, i = 1,2$ при ограничении $\psi = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)$ или, что то же самое, достижение целевого множества $\psi = 0$ в смысле $\Phi_C \to \min$; 2) асимптотическую устойчивость объекта (1) в окрестности $\psi = 0$.

Доказательство. Найдем управления $u_i^A, i = 1,2$ для объекта с описанием:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = \hat{f}_1 + u_1^A, \\ &\dot{x}_2 = f_2, \\ &\dot{x}_3 = \hat{f}_3 + u_2^A, \end{aligned}$$

Используя технику АКАР, аналитический вид целевого множества $\psi = 0, \psi = (\psi_1, \psi_2)$, функциональные уравнения $T_i\dot{\psi}_i + \psi_i = 0, i = 1, 2,$ доставляющие глобальный минимум функционалу качества $\Phi_C = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{2} \left(\psi_i^2 + \omega_i^2 \dot{\psi}_i^2\right) dt, \quad \omega_i > 0, i = 1, 2,$ получим соотношения для управлений u_1^A, u_2^A:

$$\begin{aligned} u_1^A &= -\omega_1^{-1}\psi_1(t) - \hat{f}_1 + \rho f_2, \\ u_2^A &= -\omega_2^{-1}\psi_2(t) - \hat{f}_3. \end{aligned} \tag{5}$$

Для нахождения управлений υ_1, υ_2 осуществляем сначала декомпозицию системы (2) с учетом управлений (5):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \eta_1\upsilon_1 - \omega_1^{-1}\psi_1(t) + \rho f_2, \\ \dot{x}_2 &= f_2, \\ \dot{x}_3 &= \eta_2\upsilon_2 - \omega_2^{-1}\psi_2(t). \end{aligned} \tag{6}$$

Затем вычисляем производную функции $V(t) = 0.5\sum_{i=1}^{2}\left(\psi_i^2 + \upsilon_i^2\right)$ Ляпунова $\dot{V}(t) = \sum_{i=1}^{2}\left(\psi_i\dot{\psi}_i + \upsilon_i\dot{\upsilon}_i\right),$ куда подставляем уравнения системы (6). Опуская подробности преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= \sum_{i=1}^{2}\left(\psi_i \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\dot{x}_j + \upsilon_i\dot{\upsilon}_i\right) = \\ &= \upsilon_1\left(\eta_1\psi_1 + \dot{\upsilon}_1\right) + \upsilon_2\left(\eta_2\psi_2 + \dot{\upsilon}_2\right) - \omega_1^{-1}\psi_1^2(t) - \omega_2^{-1}\psi_2^2(t). \end{aligned}$$

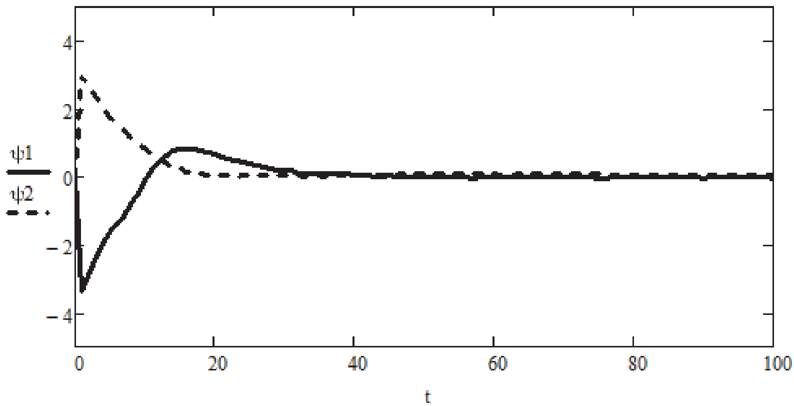
Формируем недостающие управления υ_i, определяемые, например, из условия:

$$\dot{\upsilon}_i = -\eta_i\psi_i, i = 1, 2, \tag{7}$$

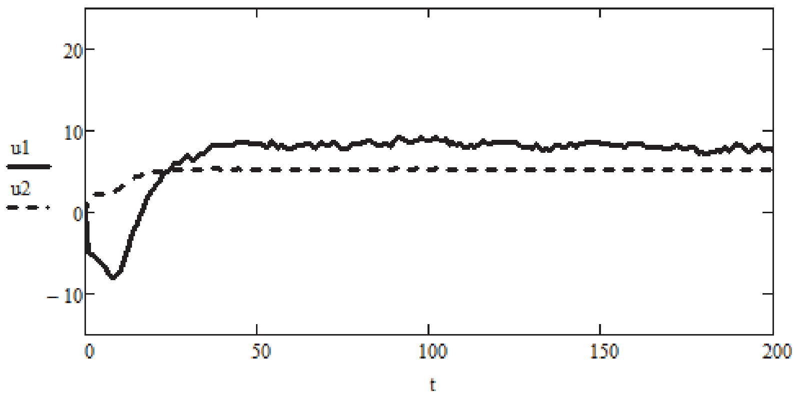
обеспечивающего требование отрицательности $\dot{V}(t) < 0$. Таким образом, управления υ_i из (7) обеспечивают отрицательность производной функции Ляпунова $\dot{V}(t) < 0$ и тем самым гарантирует вместе с законом (5) выполнение всех целевых установок задачи управления для плохо формализованного объекта (1). Собирая (2), (5), (7), получим (4).

Утверждение 1 доказано.

На рисунке 1 приведены результаты управления (5), (7) с оценками $\hat{f}_1, \hat{f}_3: \hat{f}_1 = \alpha x_2 x_3 - \gamma x_1, \hat{f}_3 = \delta x_2 - \lambda x_3$, полученных при значениях параметров $\alpha, \gamma, \delta, \lambda$, сопоставленных реальным данным (бухгалтерская отчетность малого предприятия при интерпретации переменных [4, 26] x_1, x_2, x_3 в виде затрат на содержание сотрудников, величины капитала и кредита соответственно) при «подгонке» по методу наименьших квадратов.



а)



б)

Рис. 1. Форма переходного и установившегося процессов: *а*) для целевых макропеременных ψ_1, ψ_2; *б*) управлений u_1, u_2

Пример 2. Рассмотрим дискретную балансовую модель (n=2) рынка двух производителей X, Y однотипной продукции [4, 26], построенной на основе модели Фейгенбаума и имеющей в этой связи среди предельных состояний хаотические:

$$\begin{aligned} &X_{i+1} = F_{X,i}, F_{X,i} = X_i\left(\alpha C_0 - \mu\beta_X X_i Y_i\right), \\ &Y_{i+1} = F_{Y,i}, F_{Y,i} = A\left(\alpha C_0 - \mu\beta_Y X_i Y_i\right).i \geq 1. \end{aligned} \tag{8}$$

Переменные в (8) X_i, Y_i интерпретируются как объемы продукции на рынке, произведенные субъектами X, Y соответственно; коэффициенты пропорциональности α, C_0, μ имеют конкретный содержательный экономический смысл, а величины β_X, β_Y означают цены, устанавливаемые производителями X, Y соответственно.

Алгоритм синтеза системы управления для объекта с неполной информацией (п. 3) обеспечивает возможность новой постановки задачи управления (n=4) таким образом, что достижение заданного множества состояний $\psi(X_i, Y_i) = 0, i \geq 1$ будет обеспечиваться влиянием на процесс ценообразования как со стороны X, так и со стороны Y, или со стороны обоих производителей одновременно:

$$\begin{aligned} &X_{i+1} = X_i\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{X,i} X_i Y_i\right), \\ &Y_{i+1} = A\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{X,i} X_i Y_i\right), \\ &\beta_{X,i+1} = f_{X,i} + u_{1i}, \\ &\beta_{Y,i+1} = f_{Y,i} + u_{2i}, i \geq 1, \end{aligned} \tag{9}$$

где функции $f_{X,i}.f_{Y,i}$ не определены, что вполне согласуется с «правилами» реальных рыночных игр. Согласно основным положениям метода нелинейной адаптации и алгоритму п.3, получаем управление в виде:

$$\begin{aligned} &X_{i+1} = X_i\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{X,i} X_i Y_i\right), \\ &Y_{i+1} = A\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{X,i} X_i Y_i\right), \\ &\beta_{X,i+1} = \hat{f}_{X,i} + \eta_1\upsilon_{1,i} + u_{1,i}^A, \\ &\beta_{Y,i+1} = \hat{f}_{Y,i} + \eta_2\upsilon_{2,i} + u_{2,i}^A, \\ &\upsilon_{1,i+1} = \upsilon_{1,i} + \eta_1\psi_{1i}, \\ &\upsilon_{2,i+1} = \upsilon_{2,i} + \eta_2\psi_{2i}, i \geq 1, \end{aligned} \tag{10}$$

где коэффициенты пропорциональности $\eta_j, j = 1.2$ есть параметры оптимизации системы управления (10).

Пусть цель управления задана в виде требований:

$$\begin{aligned}
&\psi_{1,i} = Y_i - Y^0 = 0,\\
&\psi_{2,i} = X_i - \rho Y_i = 0, \rho \in (0;1), i \geq 1,
\end{aligned} \tag{11}$$

содержательно означающим достижение производителем Y заданного объема продаж Y^0 и заданного предельного равновесия на рынке $X_i - \rho Y_i = 0, i \to \infty$.

Утверждение 4. Если цель управления задана в виде $\psi = 0, \psi = \left(\psi_1, \psi_2\right)$, где ψ_1, ψ_2 из (11), то система управления для объекта (9) вида:

$$\begin{aligned}
&X_{i+1} = X_i\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{X,i} X_i Y_i\right),\\
&Y_{i+1} = A\left(\alpha C_0 - \mu\beta_{Y,i} X_i Y_i\right),\\
&\hat{\beta}_{X,i+1} = \hat{f}_{X,i} + \eta_1 \upsilon_{1,i} + u_{1,i}^A,\\
&\hat{\beta}_{Y,i+1} = \hat{f}_{Y,i} + \eta_2 \upsilon_{2,i} + u_{2,i}^A,\\
&\upsilon_{1,i+1} = \upsilon_{1,i} + \eta_1 \psi_{1i},\\
&\upsilon_{2,i+1} = \upsilon_{2,i} + \eta_2 \psi_{2i};
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
&u_{1,i}^A = -\hat{f}_{X,i} - \upsilon_{1,i} + \varphi_{1,i+1} - \lambda_1 \hat{\beta}_{X,i} + \lambda_1 \varphi_{1,i},\\
&u_{2,i}^A = -\hat{f}_{Y,i} - \upsilon_{2,i} + \varphi_{2,i+1} - \lambda_2 \hat{\beta}_{Y,i} + \lambda_2 \varphi_{2,i};
\end{aligned}$$

$$\varphi_{1,i} = \left(\mu X_i^2 Y_i\right)^{-1} \begin{pmatrix} X_i \alpha C_0 + \rho\left(-Y_{i+1}^0 + k_1\left(\upsilon_{1,i} + \eta_1 \psi_{1i}\right) + \lambda_3\left(\psi_{1.i} + k_1 \upsilon_{1,i}\right)\right) + \\ + k_2\left(\upsilon_{2,i} + \eta_2 \psi_{2i}\right) + \lambda_4\left(\psi_{2.i} + k_2 \upsilon_{2,i}\right) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_{2,i} = \left(A\mu X_i Y_i\right)^{-1}\left(A\alpha C_0 - Y_{i+1}^0 + k_1\left(\upsilon_{1,i} + \eta_1 \psi_{1i}\right) + \lambda_3\left(\psi_{1.i} + k_1 \upsilon_{1,i}\right)\right)$$

гарантирует выполнение всех целевых установок задачи управления для плохо формализованного объекта (9), а именно: 1) решение вариационной задачи $\Phi_D \to \min$ при ограничении $\psi = 0, \psi = \left(\psi_1, \psi_2\right)$ или, что то же самое, достижение целевого множества $\psi = 0$ в смысле

$\Phi_D \to \min$, где $\Phi_D = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \left(\omega_j^2 \psi_{j,i}^2 + \left(\Delta\psi_{j,i}\right)^2\right) \to \min$, $\omega_j > 0, j = 1, 2$;

2) асимптотическую устойчивость объекта (9) в окрестности $\psi = 0$ (здесь в обозначении $\psi_{j,i}$ первый индекс указывает на номер компоненты вектора (ψ_1, ψ_2), второй индекс указывает на номер временных отсчетов).

Доказательство утверждения 4 проведем с позиций синтеза управления на базе нелинейной адаптации на заданном многообразии, поскольку равносильность алгоритмов из п.3 и нелинейной адаптации (например, [7]) показана в [16].

Введем сначала макропеременные $\psi_1^{(1)} = \hat{\beta}_{X,i} - \varphi_1(X_i, Y_i)$, $\psi_2^{(1)} = \hat{\beta}_{Y,i} - \varphi_2(X_i, Y_i)$. Применяя технику АКАР, получим:

$$\begin{aligned} u_{1,i}^A &= -\hat{f}_{X,i} - \upsilon_{1,i} + \varphi_{1,i+1} - \lambda_1 \hat{\beta}_{X,i} + \lambda_1 \varphi_{1,i}, \\ u_{2,i}^A &= -\hat{f}_{Y,i} - \upsilon_{2,i} + \varphi_{2,i+1} - \lambda_2 \hat{\beta}_{Y,i} + \lambda_2 \varphi_{2,i}. \end{aligned} \tag{13}$$

Затем декомпозируем систему (10) на многообразии $\psi^{(1)} = \left(\psi_1^{(1)}, \psi_2^{(1)}\right) = 0$, получим с учетом (13):

$$\begin{aligned} X_{i+1} &= X_i \left(\alpha C_0 - \mu \beta_{X,i} X_i Y_i\right), \\ Y_{i+1} &= A\left(\alpha C_0 - \mu \beta_{Y,i} X_i Y_i\right), \\ \upsilon_{1,i+1} &= \upsilon_{1,i} + \eta_1 \psi_{1i}, \\ \upsilon_{2,i+1} &= \upsilon_{2,i} + \eta_2 \psi_{2i}. \end{aligned} \tag{14}$$

На следующем шаге введем макропеременные: $\psi_1^{(2)} = \psi_1 + k_1 \upsilon_1, \psi_2^{(2)} = \psi_2 + k_2 \upsilon_2$, $k_j \neq 0, j = 1,2$.

Применяя технику АКАР с учетом (14) и ограничения $\psi^{(2)} = 0, \psi^{(2)} = \left(\psi_1^{(2)}, \psi_2^{(2)}\right)$, получим (12).

На рисунке 2 приведены результаты управления по реальным данным годовой отчетности двух предприятий, из которого следует, что все целевые установки $Y_i = Y^0, X_i = \rho Y_i$ выполнены, однако форма переходного и установившегося процессов зависит от вида оценок $\hat{f}_{X,i}, \hat{f}_{Y,i}$.

Расчеты в условиях $A = 10,\ C_0 = 3000,\ X_0 = 4,\ Y_0 = 17,$ $\alpha = 56 \cdot 10^{-5},\ \beta_x = 7.3,\ \beta_y = 7.5,\ \mu = 2 \cdot 10^{-4},\ \rho = 0.61$.

Выше приведенные примеры являются мотивирующими к постановке задачи управления, в которой указано правило выбора модели управления, сопоставленной частной оценке неопределенности в описании.

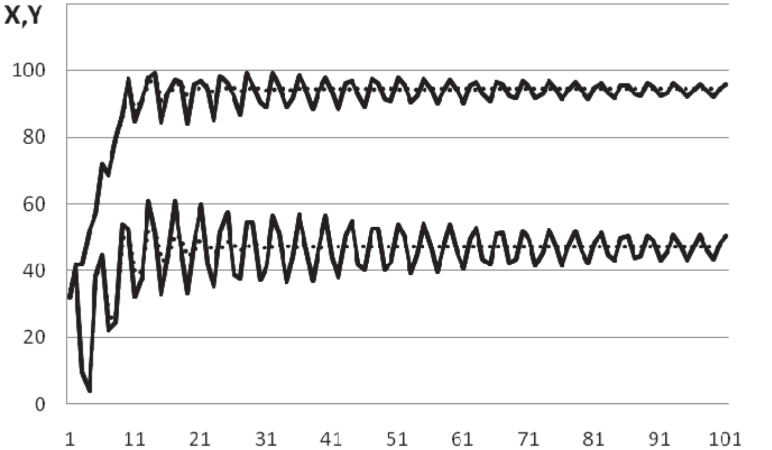


Рис. 2. Форма переходных процессов для переменных X_i, Y_i при разных аппроксимациях $\hat{f}_{X,i}, \hat{f}_{Y,i}$ (короткий и длинный пунктир, соответственно)

Следует заметить следующее: нелинейная адаптация на заданном многообразии при выполнении определенных условий (в частности, существования АКАР-управления) обеспечивает достижение целевого множества при любой *допустимой* оценочной функции при условии ограниченности величин $\left|\hat{f}_j - f_j\right| < \infty, j \in J$, $J \subseteq \{1,...,m\}$, но «цена» соответствующих управлений в виде показателей качества переходного и установившегося процессов будет отличаться; тем самым системы управления, полученные на базе алгоритма из п. 3, допускают параметризацию в виде возможных вариантов оценок неизвестных фрагментов описания.

5. Постановка задачи конструирования системы множественного управления. Пусть имеется некоторое конечное множество векторов функций-оценок $F = \left\{\left(\hat{f}_1^{(j)},...,\hat{f}_s^{(j)}\right)\right\}_{j=\overline{1,r}, s\le m}$ для аппроксимации фрагментов неизвестных описаний $f_{l_1},...,f_{l_s}, s \le m$ в правой части уравнений описания (в системах дифференциальных или разностных уравнений).

Согласно выше изложенному алгоритму синтеза системы управления для объекта с неполным описанием, множество оценок F порождает совокупность базовых алгоритмов конструирования управлений $\left\{A_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$ (п.3) и соответствующих моделей управлений $\left\{U_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$, в каждой из которых используется j-й вектор оценочных функций $\hat{f}^{(j)}=\left(\hat{f}_1^{(j)},...,\hat{f}_s^{(j)}\right)$ вместо неизвестных функций $f_{l_1},...,f_{l_s}$, входящих в правые части уравнений, содержащих управляющие переменные (здесь остановимся только на этом случае).

Обозначим через $U_j\left(t\right)$ j-ю модель управления, «активную» в момент времени t, что означает следующее: векторное управление $u^{(j)}(t)=u^{A(j)}(t)+\eta\upsilon^{(j)}(t),\eta\in R^m$, которому подвергается объект в момент времени t, вычисляется по алгоритму A_j, согласно которому решение задачи $\Phi_C^{(j)}=\int\limits_0^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{m}\left(\left(\omega_i^{(j)}\dot{\psi}_i^{(j)}\right)^2+\left(\psi_i^{(j)}\right)^2\right)dt\to\min\limits_{\psi_j(t)},0<\omega_i<\infty$ при ограничении $\psi^{(j)}=(\psi_1^{(j)},...,\psi_m^{(j)})=(0,...,0),j=\overline{1,r}$ обеспечивает составляющая $u^{A(j)}(t)$. Здесь дополнительный индекс j указывает на номер используемого алгоритма A_j (для непрерывной и дискретной моделей описания).

Ставится задача нахождения решающего правила выбора модели управления $U_{j_0}\left(t\right)$, обеспечивающего выполнение требования: управление $U_{j_0}\left(t\right)$ доставляет экстремум некоторому функционалу качества $Q\left(t\right)$ системы множественного управления, вычисленного по апостериорной информации, накопленной к моменту времени t, $U_{j_0}\left(t\right)=\arg extrQ\left(t\right)$.

6. Решение задачи конструирования системы множественного управления. Применим алгебраический подход (Ю.И. Журавлев) (например, [27]) к синтезу корректных алгоритмов, идейно близкий к трудам Шеннона («надежные схемы из ненадежных реле») или Неймана («надежная система из ненадежных элементов»).

Определяем частные показатели эффективности системы управления $C_k^{(j)}\left(t\right)$, где $C_k^{(j)}\left(t\right)$ — значение k-го показателя качества для j-й модели управления в момент времени t, отражающего k-ю апостериорную характеристику ($j=\overline{1,r}, k=\overline{1,K}$).

Набор показателей качества отдельного базового управления определяется экспертом и может включать величины:

$$C_1^{(j)}(t)=\sum_{i=1}^{m}\left|\psi_i^{(j)}(t)\right|,$$

$$C_2^{(j)}(t)=\max_t\left\{\left|\psi_1^{(j)}(t)\right|,\ldots,\left|\psi_m^{(j)}(t)\right|\right\},$$

$$C_3^{(j)}(t)=\left(\sum_{i=1}^{m}\left|\psi_i^{(j)}(t)\right|^2\right)^{1/2}\ldots.$$

где m — размерность векторного управления. Обобщая, определим:

$$C_k^{(j)}(t)=\left\|\psi^{(j)}(t)\right\|_{(k)},\psi^{(j)}(t)=\left(\psi_1^{(j)}(t),\ldots,\psi_m^{(j)}(t)\right), \tag{15}$$

где $\|y\|_{(k)}$ — k-я норма вектора y в векторном конечномерном пространстве $\left\{\psi^{(j)}(t)\right\}$.

На входе ниже следующего алгоритма должны быть определены: описание цели управления $\psi=0,\psi=\left(\psi_1,\ldots,\psi_m\right)$, где $\psi_i, i=\overline{1,m}$ — макропеременные, m — размерность векторного управления; множества F, $\left\{A_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$.

Этап 1. Применяем алгоритм из п. 3 для построения моделей управления $\left\{U_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$.

Этап 2. Вычисляем весовые коэффициенты $\rho_j\left(t,\tau,s\right)$ частных критериев (15) с учетом «горизонта памяти» $\left(\tau,t\right]$ (длительности накопления апостериорной информации, порождаемой динамикой управляемого объекта).

Содержательно коэффициент регуляризации $\rho_j\left(t,\tau,s\right)\in\left[0,1\right]$ характеризует текущее значение «уровня доверия» к активному управлению $U_j\left(s\right),s\in\left(\tau,t\right]$; величина τ характеризует размер горизонта накопления показателей качества управления $C^{(j)}\left(t\right)$. В наиболее простом случае (например, [28]) можно полагать $\rho_j\left(t,\tau,s\right)=\theta_j^{t-s+1},\theta_j\in\left[0,1\right]$.

Этап 3. Вычисляем итоговый показатель эффективности моделей управления $U_j, j=\overline{1,r}$ по формулам:

$$
\begin{aligned}
Q_C^{(j)}(t) &= \sum_{k=1}^{K}\int_{\tau}^{t}\rho_k(t,\tau,s)\,C_k^{(j)}(s)\,ds,\ j=\overline{1,r},\\
Q_D^{(j)}(t) &= \sum_{k=1}^{K}\sum_{s=\tau}^{t}\rho_k(t,\tau,s)\,C_k^{(j)}(s),\ j=\overline{1,r},
\end{aligned}
\tag{16}
$$

для непрерывного и дискретного управлений соответственно.

Принимаем решение относительно номера модели управления, претендующего на роль активного управления в момент времени t по правилу:

$$
u(t)=\sum_{j=1}^{k}\chi_j U_j(t),\ \chi_j=\begin{cases}1, j=j_0,\\ 0, j\neq j_0,\end{cases}\ j_0=\arg\min_{j=\overline{1,k}} Q_{C(D)}^{(j)}(t). \tag{17}
$$

Согласно алгебраической теории синтеза корректных алгоритмов [27], управление, получаемое по формуле (17), называется корректной композицией управлений $\left\{U_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$, то есть обеспечивающей наилучшее качество процесса управления (рисунок 3) при фиксированных множестве базовых управлений $\left\{U_j\right\}_{j=\overline{1,r}}$ и критерии качества (16).

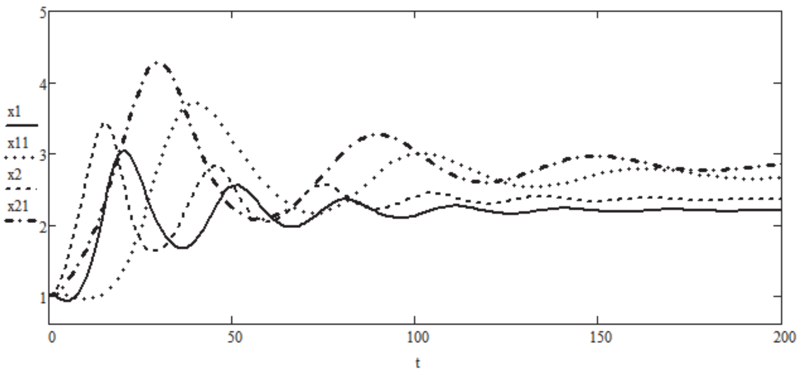


Рис. 3. Форма процессов для переменных x_1, x_2 при отдельных управлениях (длинный пунктир и точечный пунктир) и выбранных «наилучших» (сплошное начертание и короткий пунктир) по правилу (5)

7. Заключение. В статье реализован алгоритм конструирования управления нелинейными объектами с компенсацией неопределенности в описании, идейно восходящий к созданию «регулятора с полной компенсацией» [23].

Изложенный подход построения «коллектива» управлений применим не только для случая, рассмотренного в статье. Множество базовых управлений могут быть сконструированы на основе методов обхода интегратора или управления в скользящем режиме.

Выбор примеров, рассмотренных в статье, не случаен и отражает факт применимости методов адаптации на многообразиях не только для задач технических [4, 9, 10], но и задач социогуманитарной и экономической направленности, поскольку объекты в этих областях подпадают под описание «сложных» объектов [29], моделирование которых с достаточной степенью уверенности не представляется возможным.

Результаты работы предполагается использовать при создании системы поддержки принятия решений при решении задач управления в экономических приложениях, а также при конструировании системы интеллектуального управления плохо формализуемыми объектами. Такие объекты возникают в прикладных исследованиях, когда затруднительно предусмотреть все динамические изменения (параметрические флуктуации, накопленная ошибка округления при оцифровке сигнала, ошибки измерений).

Литература

1. *Красовский А.А.* Проблемы физической теории управления // Автоматика и телемеханика. 1990. №. 1. С. 3 –28 .
2. *Тюкин И.Ю., Терехов В.А.* Адаптация в нелинейных динамических системах // СПб.: ЛКИ. 2008. 384 с.
3. *Khalil H.K.* Nonlinear systems // Prentice Hall. 2002. 750 p.
4. *Колесников А.А.* Синергетика и проблемы теории управления: сборник научных трудов // М.: Физматлит. 2004. 504 с.
5. *Utkin V.I.* Sliding modes in control and optimization // Springer. 2012. 237 p.
6. *Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.V.* Constructive nonlinear control // Springer Science & Business Media. 2012. 313 p.
7. *Arcak M., Teel A., Kokotovic P.* Robust nested saturation redesign for systems with input unmodeled dynamics // Proceedings of the 2000 American Control Conference. 2000. vol. 1. no. 6. pp. 150–154.
8. *Astolfi A., Karagiannis D., Ortega R.* Nonlinear and Adaptive Control with Applications // Springer Science & Business Media. 2008. 290 p.
9. *Колесников А.А.* Новые нелинейные методы управления полетом // М.: Физматлит. 2013. 193 с.
10. *Andrievskii B.R., Fradkov A.L.* Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications // Automation and Remote Control. 2004. vol. 65. no. 4. pp. 505–533.
11. *Емельянов С.В.* Системы автоматического управления с переменной структурой: синтез скалярных и векторных систем по состоянию и по выходу // Нелинейная динамика и управление. // М.: Физматлит. 2006. Вып. 5. С. 5–24.
12. *Narendra K.S., Balakrishnan J.* Adaptive control using multiple models // IEEE Trans. on Automatic Control. 1997. vol. 42. no. 2. pp. 171–187.
13. *Yan X.G. et al.* Decentralised control for complex systems – an invited survey // International Journal of Modelling, Identification and Control. 2014. vol. 22. no. 4. pp. 285–297.

14. *Sokolov B.V., Zelentsov V.A., Yusupov R.M., Merkuryev Y.A.* Multiple models of information fusion processes: quality definition and estimation // Journal of Computational Science. 2014. vol. 5. no. 3. pp. 380–386.
15. *Narendra K.S., Han Z.* A new approach to adaptive control using multiple models // International Journal of Adaptive Control and Signal Processing. 2012. vol. 26. no. 8. pp. 689–820.
16. *Narendra K.S., Wang Y., Mukhopadhay S.* Fast Reinforcement Learning using multiple models // IEEE 55th Conference on Decision and Control (CDC). 2016. pp. 7183–7188.
17. *Ioannou P.A. et al.* L1-Adaptive Control: Stability, Robustness, and Interpretations // IEEE Transactions on Automatic Control. 2014. vol. 59. no. 11. pp. 3075–3080.
18. *Narendra K.S., Harshangi P.* Unstable systems stabilizing each other through adaptation // American Control Conference (ACC). 2015. pp. 856–861.
19. *Haisen K., Wenrui L.* Adaptive control using multiple models without switching // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2013. vol. 53. no. 2. URL: http://www.jatit.org/volumes/Vol53No2/11Vol53No2.pdf. (дата обращения: 02.10.2017).
20. *Chen L., Narendra K.S.* Intelligent Control Using Neural Networks and Multiple Models // URL: http://citeseerx.ist.psu.edu /viewdoc/download;jsessionid = 4C8D357D68BA09DA6AF50CC3BC4C27A9?doi=10.1.1.19.9261&rep=rep1&type=pdf (дата обращения: 02.10.2017).
21. *Isidori A.* Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2010. vol. 18. pp. 693-714.
22. *Колесникова С.И.* Алгоритм синтеза системы управления многомерным плохо формализуемым объектом // Известия ЮФУ. Технические науки. 2015. № 5. С. 211–220.
23. *Щипанов Г.В.* Теория, расчет и методы проектирования автоматических регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1939. № 1. С. 49–66.
24. *Галиуллин А.С.* Обратные задачи динамики и задачи управления движениями материальных систем // Дифференц. уравнения. 1972. Т. 8. С. 1535–1541.
25. *Kolesnikova S.I.* Nonlinear regulator with disturbance compensatio // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. 2015. vol. 51. no. 4. pp. 104–113.
26. *Шаповалов В.И.* Моделирование синергетических систем: Метод пропорций и другие математические методы // Проспект. 2015. 136 с.
27. *Абламейко С.В. и др.* Практические алгоритмы алгебраической и логической коррекции в задачах распознавания по прецедентам // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2014. Т. 54. № 12. С. 1979–1993.
28. *Воронцов К.В.* Прогнозирование временных рядов URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/c/cb/Voron-ML-forecasting-slides.pdf (дата обращения: 02.10.2017).
29. *Zhang* W.B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics // Springer Science & Business Media. 2013. 246 p.

Колесникова Светлана Ивановна — д-р техн. наук, профессор кафедры высшей математики и математического моделирования факультета прикладной математики и кибернетики, Национальный исследовательский Томский государственный университет (НИ ТГУ). Область научных интересов: интеллектуальный анализ данных, интеллектуальные системы управления, управление нелинейными объектами с неопределенностью в описании и их применение в технических и экономических исследованиях. Число научных публикаций — 60. skolesnikova@yandex.ru; пр. Ленина, 36, Томск, 634050; р.т.: +7(3822)528453, Факс: +7(3822)529585.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-08-00920-а).

DOI 10.15622/sp.55.5

S.I. KOLESNIKOVA

A MULTIPLE CONTROL SYSTEM FOR A NON-LINEAR OBJECT WITH UNCERTAINTY

Kolesnikova S.I. **A Multiple Control System for a Non-Linear Object with Uncertainty.**

Abstract. We propose an algebraic approach to constructing a multiple control system for nonlinear multidimensional objects with chaotic regimes. The purpose of control is to output an object to an analytically prescribed stable state. Two variants of the continuous and discrete description of control objects are considered. The controlled objects are presented as a system of ordinary non-linear differential or difference equations with chaotic behavior in the case of certain combinations of parameters. Part of the objects description may be unknown. The suggested control algorithm is realized on the basis of methods of nonlinear control on manifolds, Lyapunov functions and the algebraic approach to the synthesis of correct algorithms. Two applied problems of economic orientation with continuous and discrete models of description are considered. Numerical modeling was carried out on real data of small enterprises. The results of the paper are expected to be used in the system of economic decision-making support.

Keywords: non-linear multidimensional object, poorly formalized object, target manifold, multiple control, collective of control algorithms.

Kolesnikova Svetlana Ivanovna — Ph.D., Dr. Sci., professor of higher mathematics and mathematical modeling department of applied mathematics and cybernetics faculty, National Research Tomsk State University (NR TSU). Research interests: intellectual data analysis, intelligent control systems, control of nonlinear objects with uncertainty in the description and their application in technical and economic studies. The number of publications — 60. skolesnikova@yandex.ru; 36, Lenin Avenue, Tomsk, 634050, Russia; office phone: +7(3822)528453, Fax: +7(3822)529585.

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grant 17-08-00920-a).

References

1. Krasovskiy A.A. [Problems of Control Physical Theory]. *Avtomatika i telemehanika – Automatic and Telemechanic*. 1990. vol. 1. pp. 3–28. (In Russ.).
2. Tyukin I.Yu., Terekhov V.A. *Adaptaciya v nelinejnyh dinamicheskih sistemah* [Adaptation in nonlinear dynamical systems]. SPb.: LKI. 2008. 384 p. (In Russ.).
3. Khalil H.K. Nonlinear systems. Prentice Hall. 2002. 750 p.
4. Kolesnikov A.A. *Sinergetika i problemy teorii upravlenija: sbornik statej* [Synergetics and problems of control theory: Collected articles]. M.:Fizmatlit. 2004. 504 p. (In Russ.).
5. Utkin V.I. Sliding modes in control and optimization. Springer. 2012. 237 p.
6. Sepulchre R., Jankovic M., Kokotovic P.V. Constructive nonlinear control. Springer Science & Business Media. 2012. 313 p.
7. Arcak M., Teel A., Kokotovic P. Robust nested saturation redesign for systems with input unmodeled dynamics. Proceedings of the 2000 American Control Conference. 2000. vol. 1. no. 6. pp. 150–154.
8. Astolfi D., Karagiannis R., Ortega R. Nonlinear and Adaptive Control with Applications Springer. 2008. 290 p.
9. Kolesnikov A.A. *Novye nelinejnye metody upravlenija poletom* [New nonlinear methods of flight control]. M.: Fizmatlit. 2013. 193 p. (In Russ.).
10. Andrievskii B.R., Fradkov A.L. Control of Chaos: Methods and Applications. II. Applications. *Automation and Remote Control*. 2004. vol. 65. no. 4. pp. 505–533.
11. Emel'yanov S.V. [Automatic control systems with variable structure: synthesis of scalar and vector systems by state and by output. Collected articles]. *Nelinejnaya*

dinamika i upravlenie – Nonlinear dynamics and control. 2006. vol. 5. pp. 5–24. (In Russ.).
12. Narendra K.S., Balakrishnan J. Adaptive control using multiple models. *IEEE Trans. on Automatic Control*. 1997. vol. 42. no. 2. pp. 171–187.
13. Yan X.G. et al. Decentralised control for complex systems – an invited survey. *International Journal of Modelling, Identification and Control*. 2014. vol. 22. no. 4. pp. 285–297.
14. Sokolov B.V., Zelentsov V.A., Yusupov R.M., Merkuryev Y.A. Multiple models of information fusion processes: quality definition and estimation. *Journal of Computational Science*. 2014. vol. 5. no. 3. pp. 380–386.
15. Narendra K.S., Han Z. A new approach to adaptive control using multiple models. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*. 2012. vol. 26. no. 8. pp. 689–820.
16. Narendra K.S., Wang Y., Mukhopadhay S. Fast Reinforcement Learning using multiple models. Proceedings of IEEE International 55th Conference on Decision and Control (CDC). 2016. pp. 7183–7188.
17. Ioannou P.A. et al. L1-Adaptive Control: Stability, Robustness, and Interpretations. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2014. vol. 59. no. 11. pp. 3075-3080.
18. Narendra K.S., Harshangi P. Unstable systems stabilizing each other through adaptation. Proceedings of American Control Conference (ACC). 2015. pp. 856–861.
19. Haisen K., Wenrui L. Adaptive control using multiple models without switching. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*. 2013. vol. 53. no. 2. Available at: http://www.jatit.org/volumes/Vol53No2/11Vol53No2.pdf. (accessed: 02.10.2017).
20. Chen L., Narendra K.S. Intelligent Control Using Neural Networks and Multiple Models. Available at: http://citeseerx.ist.psu.edu /viewdoc/download;jsessionid = 4C8D357D68BA09DA6AF50CC3BC4C27A9?doi=10.1.1.19.9261&rep=rep1&type=pdf. (accessed: 02.10.2017).
21. Isidori A. Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2010. vol. 18. pp. 693–714.
22. Kolesnikova S.I. [Algorithm for the synthesis of a control system for a multidimensional poorly-formalized object]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – News of SFedU. Technical science*. 2015. vol. 5. pp. 211–220. (In Russ.).
23. Shipanov G.V. [The theory of the calculation and design methods of automatic regulators]. *Avtomatika i telemehanika – Automatic and Telemechanic*. 1939. vol. 1. pp. 49–66. (In Russ.).
24. Galiullin A.S. [Inverse problems of dynamics and control problems of motions of material systems]. *Differencial'nye uravnenija – Differential equations.* 1972. Issue 8. pp. 1535–1541. (In Russ.).
25. Kolesnikova S.I. Nonlinear regulator with disturbance compensation. *Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing*. 2015. vol. 51. no. 4. pp. 104–113.
26. Shapovalov *V.I. Modelirovanie sinergeticheskih sistem: Metod proporcij i drugie matematicheskie metody* [Modeling of synergetic systems: The method of proportions and other mathematical methods]. Prospekt. 2015. 136 p. (In Russ.).
27. Ablameiko S.V. et al. [Practical Algebraic and Logical Correction Algorithms in Recognition Problems Using Precedents]. *Zhuranl vychislitel'noj matematiki i matematicheskoj fiziki – Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*. 2014. Issue 54. vol. 12. pp. 1979–1993. (In Russ.).
28. Vorontsov K.V. Forecasting time series. Available at: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/c/cb/Voron-ML-forecasting-slides.pdf. (accessed: 02.10.2017). (In Russ.).
29. Zhang W.B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. Springer Science & Business Media. 2013. 246 p.