

И.С. ПОЛЯНСКИЙ, Ю.С. ПЕХОВ  
**БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЙ МЕТОД В РЕШЕНИИ  
СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЗЕРКАЛЬНЫХ АНТЕНН**

---

*Полянский И.С., Пехов Ю.С. Бариецентрический метод в решении сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн.*

**Аннотация.** В статье предложено использование бариецентрического метода в решении задач анализа характеристик излучения зеркальных антенн. Формализация задачи выполнена в приближении электродинамической теории зеркальных и полосковых антенн при сведении к решению системы сингулярных интегральных уравнений. В постановке бариецентрического метода решение формируемой системы предполагается выполнять численно с использованием вариационных методов Галёркина и Ритца. Для повышения эффективности решения в сравнении с известными методами аппроксимация Ритца для областей анализа (раскрыты рефлекторы и излучателей) задается без их разбиения на элементарные подобласти (конечные элементы). Для заданной аппроксимации исходная задача сведена к системе линейных уравнений. С целью определения предпочтительности применения бариецентрического метода рассмотрен пример решения задачи анализа зеркальной антенны при сравнении с существующими методами, которые формируют аппроксимацию базисными функциями путем разбиения проводящей поверхности антенны на подобласти простой формы.

**Ключевые слова:** бариецентрический метод, метод моментов, интегральное сингулярное уравнение, зеркальная антенна.

---

**1. Введение.** Одна из основных задач математической теории зеркальных антенн (ЗА) [1] при проектировании, оптимизации и управлении связана с формированием адекватных математических моделей, позволяющих при минимальных затратах вычислительного и емкостного ресурсов ЭВМ с заданной точностью оценить характеристики излучения [2]. Для математического моделирования ЗА в ряде работ [2-10 и др.] предлагается применять методы вычислительной электродинамики, которые составляют основу широко используемых во всем мире программ моделирования высокочастотных электромагнитных полей (ЭМП) [11]: Ansis-Ansoft HFSS, CST Microwave Studio Suite, QWAVE QuickWave3D, Remcom XFDTD, EMSS-SA FEKO, Russian R&D Center LG Electronics RFS и другие. Эти методы условно разделяются относительно вида решаемой внешней или внутренней задачи [12]. Первая группа не ограничивает расчетную область анализа и связана с решением неоднородного волнового уравнения, удовлетворяющим условию излучения Зоммерфельда [13]. К ней относятся метод моментов (ММ) [4] (метод сингулярных интегральных уравнений [6, 14, 15]) и ряд асимптотических методов [2] (геометрической оптики [16], геометрической теории дифракции [17], физической оптики [13], физической теории дифракции [18] и др.). Вторая группа связана с

поиском решения уравнений Максвелла или соответствующих им волновых уравнений в ограниченной расчетной области с заданными граничными условиями (методы конечных разностей [19], конечных элементов [20], матрицы линий передачи [21]). Все перечисленные методы имеют ряд ограничений. Асимптотические методы расчета не обеспечивают требуемого уровня адекватности, поскольку они не способны в требуемой мере учесть эффекты дифракции и переотражения излучения. Остальные методы при практической реализации требуют значительных вычислительных ресурсов, что с точки зрения пользователя затрудняет решение задач анализа зеркальных антенн за обозримый отрезок машинного времени на типовой ЭВМ.

Для устранения ограничения асимптотических методов в [2, 9] предложена модификация токового метода. Однако при решении ряда задач анализа многоэлементных ЗА в условиях взаимного влияния облучающей и отражающей систем разработанное решение [9] приводит к существенному росту вычислительных затрат. Снижения вычислительных затрат можно добиться за счет решения задач анализа многоэлементных зеркальных антенн ММ [4] в приближении электродинамической теории зеркальных и полосковых антенн [10]. Эффективность метода моментов существенным образом зависит от удачного выбора базисных функций, которые при минимальном порядке аппроксимации обеспечивают требуемую адекватность решения формируемого сингулярного интегрального уравнения (СИУ). Известные методы [4, 14, 15, 22-24, 31] задают базисные функции путем разбиения проводящей поверхности зеркальной антенны на подобласти простой формы, размер которых должен быть  $\leq 0,1\lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны. С учетом решений [8, 25] интерес вызывает задание в приближении барицентрического метода (БМ) базисных функций, позволяющих сформировать аппроксимацию векторного и скалярного потенциалов для всей проводящей поверхности ЗА в целом без ее разбиения на подобласти простой формы.

Цель статьи заключается в разработке эффективного решения сингулярных интегральных уравнений электродинамической теории зеркальных антенн с применением БМ [8, 25].

**2. Содержательная постановка задачи.** Зеркальную антенну представим системой, состоящей из  $M$  излучателей с раскрывами  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_M$  и  $M'$  рефлекторов с произвольной формой отражающих поверхностей  $S_1, S_2, \dots, S_{M'}$  (рисунок 1). В общей системе координат ЗА  $OXYZ$  положение раскрыва  $\Omega_m$   $m$ -го излучателя ( $m = \overline{1, M}$ ) задано

координатами  $x_m, y_m, z_m$ , а ориентация — орт-вектором нормали  $\vec{s}_m^{(o)}$  плоскости  $\Omega_m$ . Рефлектор в  $OXYZ$   $m'$ -й отражающей поверхности  $S_{m'}$  ( $m' = \overline{1, M'}$ ) характеризуется раскрывом  $\Omega'_{m'}$  апертуры с центром в  $x'_{m'}, y'_{m'}, z'_{m'}$  и функцией  $Z_{m'}(x, y)$  формы, из которой по известным правилам [26] определяется орт вектора внешней нормали  $\vec{n}_{m'}^0$ . Раскрывы апертуры рефлектора  $\Omega'_{m'}$  и излучателя  $\Omega_m$  задаются произвольными многоугольниками с соответствующим числом  $N'_{m'}$  и  $N_m$  вершин  $P_1^{m'}, P_2^{m'}, \dots, P_{N'_{m'}}^{m'}$  и  $P_1^m, P_2^m, \dots, P_{N_m}^m$ . Относительно  $\Omega'_{m'}$  и  $\Omega_m$  в  $OXYZ$  вводятся системы координат  $O'_{m'}X'_{m'}Y'_{m'}Z'_{m'}$  и  $O_mX_mY_mZ_m$  соответственно.

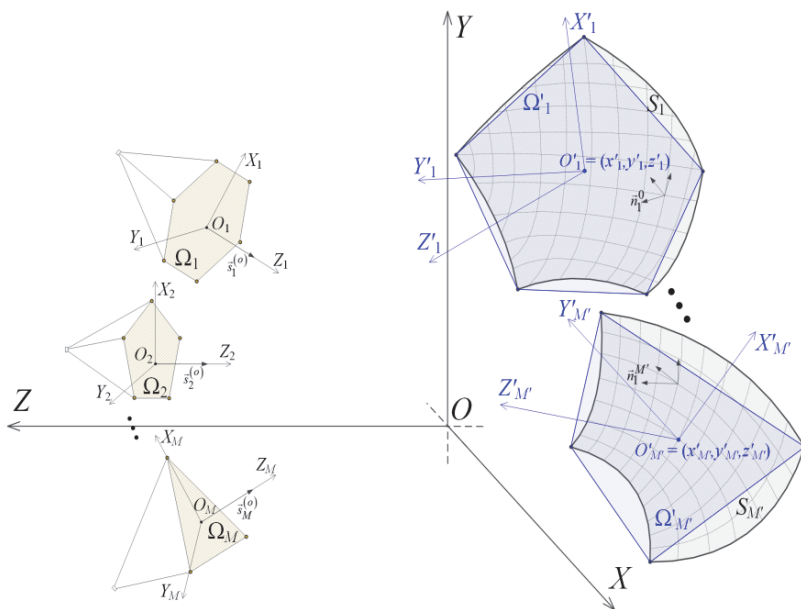


Рис. 1. Пример геометрического представления зеркальной антенны

В соответствии с правилами, приведенными в [27], в плоскостях  $O'_{m'}X'_{m'}Y'_{m'}$  и  $O_mX_mY_m$  раскрывов  $\Omega'_{m'}$  и  $\Omega_m$  задаются соответствующие барицентрические системы координат (БСК)  $\zeta_{n_m}^{m'}$  и  $\zeta_{n_m}^m$ , где  $n'_{m'} = \overline{1, N'_{m'}}$ ,  $n_m = \overline{1, N_m}$ . При этом барицентрический

координаты  $\zeta_{n_m}'(P')$  и  $\zeta_{n_m}^m(P)$  являются относительно  $P' \in \Omega_{m'}$  и  $P \in \Omega_m$  гармоническими функциями [27], удовлетворяющими свойствам [28]: аффинной инвариантности, положительной определенности, равенства суммы единице.

Для принятых представлений с использованием решений из [10, 30], определим формализованную постановку задачи анализа ЗА. С учетом применяемой симметризации [29] системы уравнений Максвелла для сокращения математической записи далее будем рассматривать решение относительно напряженности  $\vec{E}$  электрического поля.

**3. Формализованная постановка задачи.** Постановка задачи анализа ЗА следует из неоднородного уравнения Гельмгольца [2]:

$$\nabla^2 \vec{E} + \kappa^2 \vec{E} = -(i\omega\epsilon)^{-1} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}) + i\omega\mu \vec{J} + \nabla \times \vec{J}^M, \quad (1)$$

где  $\vec{J}$  и  $\vec{J}^M$  — плотности эклектического и магнитного токов соответственно;  $\kappa = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$  — волновое число;  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическая и магнитная проницаемости среды соответственно;  $\omega = 2\pi/\lambda$  — круговая частота.

С учетом известных из [3, 13, 22] граничных условий между рассеянным и наводимым полями на поверхностях раздела (диэлектрика и идеального проводника, двух диэлектриков) и фундаментального решения уравнения Гельмгольца [30] с помощью функции Грина  $\psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-\beta R}}{4\pi R}$  ( $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ ;  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$  — радиус-векторы

точек наблюдения и источника) задача (1) сводится к решению СИУ для рефлектора  $S_{m'}$  [22]:

$$-\vec{E}_{\tan}^{\text{ind}} = \left[ \iint_{S_{m'}} \psi \left( i\omega\mu \vec{J}_{m'} - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_{m'}) \right) dS \right]_{\tan}, \quad (2)$$

и излучателя  $\Omega_m$  [22]:

внешняя область:

$$\vec{E}_{\tan}^{\text{ind}} = - \left[ \iint_{\Omega_m} \psi \left( i\omega\mu \vec{J}_m - \frac{\nabla(\nabla \cdot \vec{J}_m)}{i\omega\epsilon} + \nabla \times \vec{J}_m^M \right) d\Omega \right]_{\tan}; \quad (3)$$

внутренняя область:

$$0 = \left[ \iint_{\Omega_m} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_m - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_m) + \nabla \times \vec{J}_m^M \right) d\Omega \right]_{\tan},$$

где индекс  $\tan$  обозначает тангенциальную составляющую поля;  $\vec{E}^{\text{ind}}$  — напряженность электрического поля источника, наводимого на соответствующую поверхность.

Объединяя (2), (3) для  $S_{m'}$  и  $\Omega_m$  в единое соотношение, с учетом содержательной постановки получим систему из  $M' + 2M$  СИУ, решение которой формализует задачу анализа функционирования ЗА:

$$\begin{aligned} & -\vec{n}_{m'}^0 \times \left[ \sum_{k=1}^{M'} \iint_{S_k} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_k - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_k) \right) dS + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_k - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_k) + \nabla \times \vec{J}_k^M \right) d\Omega \right] = \vec{n}_{m'}^0 \times \sum_{k=1}^M \vec{E}_{k,m'}^{\text{ind}}; \\ & -\vec{s}_m^{(o)} \times \left[ \sum_{k=1}^{M'} \iint_{S_k} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_k - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_k) \right) dS + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_k - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_k) + \nabla \times \vec{J}_k^M \right) d\Omega \right] = \vec{s}_m^{(o)} \times \sum_{k=1}^M \vec{E}_{k,m}^{\text{ind}}; \\ & \vec{s}_m^{(o)} \times \sum_{k=1}^M \iint_{\Omega_k} \Psi \left( i\omega\mu\vec{J}_k - \frac{1}{i\omega\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \vec{J}_k) + \nabla \times \vec{J}_k^M \right) d\Omega = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\vec{E}_{k,m'}^{\text{ind}}$  —  $\vec{E}^{\text{ind}}$  ( $k$ -й излучатель, где  $k = \overline{1, M'}$ ), наведенное на  $S_{m'}$ ;  $\vec{E}_{k,m}^{\text{ind}}$  —  $\vec{E}^{\text{ind}}$ , наведенное на  $\Omega_m$ .

**4. Анализ функционирования зеркальных антенн в приближении барицентрического метода.** Решение задачи (4) выполняется численно по аналогии с [14, 15, 22-24, 31 и др.] при сведении в приближении вариационных методов В. Ритца, И.Г. Бубнова и Б.Г. Галёркина системы сингулярных интегральных уравнений к системе линейных уравнений. Для этого задаются

аппроксимации функций  $\vec{J}_k(P)$  и  $\vec{J}_k^M(P)$  для соответствующей  $k$ -й поверхности  $P \in \mathcal{S}_k$  (или  $S_k$ , или  $\Omega_k$ ) в  $N_k$ -мерной барицентрической системе координат  $\zeta_1^k, \zeta_2^k, \dots, \zeta_{N_k}^k$  следующим образом.

*Теорема 1.* Функции  $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j} \vec{\gamma}_j^k(P)$  и  $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j}^M \vec{\chi}_j^k(P)$ , задающие аппроксимацию порядка  $p$  ( $p \in \mathbb{N}$ )

плотности поверхностных электрического  $\vec{J}_k$  и магнитного  $\vec{J}_k^M$  токов в интегральных уравнениях вида (4), при:

$$\vec{\gamma}_j^k(P) = \vec{n}_k^0(P) \times \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^{N_k} [\hat{\alpha}_{j,n}^k(P) \vec{\Theta}_n^k(P)]; \quad (5)$$

$$\vec{\chi}_j^k(P) = \vec{n}_k^0(P) \times \vec{\gamma}_j^k(P),$$

являются аппроксимацией Ритца.

В заданных аппроксимациях  $\hat{J}_{k,j}$  и  $\hat{J}_{k,j}^M$  — коэффициенты в  $j$ -х узловых точках электрического  $\vec{J}_k$  и магнитного  $\vec{J}_k^M$  поверхностных токов на  $\mathcal{S}_k$ .

В выражении (5)  $\vec{n}_k^0(P)$  — орт-вектора нормали в  $P \in \mathcal{S}_k$ ;  $\hat{\alpha}_{j,n}^k(P)$  — вспомогательный интерполяционный сдвинутый полином Сильвестра–Лагранжа [32] относительно  $n$ -й вершины многоугольника, задающего раскрыв  $\mathcal{S}_k$ :

$$\hat{\alpha}_{j,n}^k(P) = \hat{R}_{j_n}^k(P) \prod_{\substack{n'=1 \\ n' \neq n}}^{N_k} R_{j_n'}^k(P); \quad (6)$$

$$\hat{R}_{j_n}^k(P) = \begin{cases} \frac{1}{(j_n - 1)!} \prod_{h=1}^{j_n-1} (p \zeta_n^k(P) - h), & \text{if } 2 \leq j_n \leq p; \\ 1, & \text{if } j_n = 1; \end{cases}$$

$\bar{\Theta}_n^k(P) = (\zeta_n^k(P) \nabla \zeta_{n+1}^k(P) - \zeta_{n+1}^k(P) \nabla \zeta_n^k(P)) \left| P_{n+1}^k - P_n^k \right|$  — краевые базисные векторные функции Неделека относительно  $n$ -й вершины;  $j$  — мультииндекс из множества  $\mathbb{M}_p$  [33]:

$$\mathbb{M}_p = \left\{ j = (j_1, j_2, \dots, j_n, \dots, j_{N_k}) : j_n \in \mathbb{Z}, j_n \geq 0, \sum_{n \in [1; N_k]} j_n = p \right\}. \quad (7)$$

В выражении (6)  $R_{j_n'}^k(P) = \prod_{n=1}^{j_n'} [(p \zeta_{n'}^k(P) - h + 1) / h]$  при  $j_n' > 0$ ,

$R_0^k(P) = 1$  — полином Лагранжа [8].

*Доказательство.* Из [25] известно, что функции

$$\bar{\beta}_j^k(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^{N_k} [\hat{\alpha}_{j,n}^k(P) \bar{\Theta}_n^k(P)]$$
 с учетом свойств гармонических

барицентрических координат  $\zeta_n^k$  ( $n = \overline{1, N_k}$ ) [27], интерполяционных

форм  $\alpha_{j,n}^k(P) = \prod_{n=1}^{N_k} R_{j_n}^k(P)$  и  $\hat{\alpha}_{j,n}^k(P)$  являются расширением краевых

базисных функций  $\bar{\Theta}_n^k(P)$  и для  $n$ -го ребра  $e_n^k = (P_n^k, P_{n+1}^k)$  раскрыва  $\mathcal{S}_k$  удовлетворяют условиям:

$$\frac{P_{n+1}^k - P_n^k}{|P_{n+1}^k - P_n^k|} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{M}_p \\ j_n \neq 0}} \bar{\beta}_j^k(P) = 1; \quad \nabla \cdot \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{\beta}_j^k(P) / G_j^k = 0; \quad (8)$$

$$\nabla \times \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{\beta}_j^k(P) / G_j = \sum_{n=1}^{N_k} (\nabla \zeta_n^k(P)) \times (\nabla \zeta_{n+1}^k(P)) = \text{const},$$

определяющих, что  $\bar{\beta}_j^k(P)$  дивергентно-свободные и имеют постоянную тангенциальную компоненту на  $e_n^k$ , что обеспечивает отсутствие ложных решений [3] дифференциальных волновых уравнений вида (1).

В (8) приняты следующие обозначения:

$$\bar{\beta}_j^k(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^{N_k} \hat{\alpha}_{j,n}^k(P) \frac{\bar{\Theta}_n^k(P)}{|P_{n+1}^k - P_n^k|}; \quad G_j^k = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{n=1}^{N_k} \frac{j_n}{p} P_n^k \in \Gamma_k; \\ N_k, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (9)$$

где  $\Gamma_k$  — кусочно-линейная граница раскрыва  $\mathcal{S}_k$ .

Из (8) следует, что векторная базисная функция  $\bar{\gamma}_j^k(P) = \bar{n}_k^0(P) \times \bar{\beta}_j^k(P)$  на ребре  $e_n^k$  при  $|\bar{n}_k^0(P)| = 1$  удовлетворяет условиям:

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}^k - P_n^k}{|P_{n+1}^k - P_n^k|} \cdot \sum_{\substack{j \in \mathbb{M}_p \\ j_n \neq 0}} \bar{\gamma}_j^k(P) &= 1; \quad \nabla \times \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{\gamma}_j^k(P) / G_j^k = 0; \\ \nabla \cdot \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \bar{\gamma}_j^k(P) / G_j^k &= \text{const}, \end{aligned} \quad (10)$$

где:

$$\bar{\gamma}_j^k(P) = \sum_{\substack{n=1 \\ j_n > 0}}^{N_k} \left[ \hat{\alpha}_{j,n}^k(P) \bar{n}_k^0(P) \times \bar{\Theta}_n^k(P) / |P_{n+1}^k - P_n^k| \right]. \quad (11)$$

Свойства (10) определяют то, что при аппроксимации  $\bar{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j} \bar{\gamma}_j^k(P)$  на  $\Gamma_k$  нормальная составляющая плотности тока равна нулю, а функция  $\bar{\gamma}_j^k(P)$  дивергентно-постоянная, что удовлетворяет уравнению непрерывности [29]. В целом из (10) следует, что  $\bar{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j} \bar{\gamma}_j^k(P)$  является для (4) аппроксимацией

Ритца  $\bar{J}_k$  на  $\mathcal{S}_k$  и удовлетворяет уравнениям Максвелла [13], условию не протекания тока на  $\Gamma_k$  и условию сохранения полного тока в цепи.

Из выделенных свойств векторной базисной функции  $\bar{\gamma}_j^k(P)$ , аппроксимации  $\bar{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j} \bar{\gamma}_j^k(P)$ , уравнений Максвелла [13], формализующих зависимость между векторами напряженностей электрического  $\bar{E}_k$  и магнитного  $\bar{H}_k$  полей, и определением  $\bar{J}_k$  и  $\bar{J}_k^M$



токов через векторное произведение  $\vec{H}_k$  и  $\vec{E}_k$  на  $\vec{n}_k^0(P)$  соответственно следует, что  $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j}^M \vec{\chi}_j^k(P)$  является для (4)

аппроксимацией Ритца  $\vec{J}_k^M$  на  $k$ -й поверхности. ■

Из доказательства теоремы 1 с учетом выделенных свойств векторных базисных функций  $\vec{\gamma}_j^k(P)$ ,  $\vec{\chi}_j^k(P)$ , уравнений Максвелла [13] и принципа симметризации следует следующее утверждение.

*Следствие 1.* Вариационное решение системы сингулярных интегральных уравнений вида (4) по  $\vec{H}$  задается аппроксимацией  $\vec{J}_k(P)$  и  $\vec{J}_k^M(P)$  через  $\vec{\chi}_j^k(P)$  и  $\vec{\gamma}_j^k(P)$  соответственно.

Аппроксимации  $\vec{J}_k(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j} \vec{\gamma}_j^k(P)$  и  $\vec{J}_k^M(P) = \sum_{j \in \mathbb{M}_p} \hat{J}_{k,j}^M \vec{\chi}_j^k(P)$  позволяют свести исходную систему сингулярных

интегральных уравнений (4) к системе линейных уравнений вида:

$$\mathbf{B}\vec{J} = \vec{C}, \quad (12)$$

где  $\vec{J}$  и  $\vec{C}$  — блочные векторы:

$$\vec{J} = \left( \left[ \vec{J}_1^S \quad \dots \quad \vec{J}_{M'}^S \right] \left[ \vec{J}_1^\Omega \quad \dots \quad \vec{J}_M^\Omega \right] \left[ \vec{J}_1^{\Omega M} \quad \dots \quad \vec{J}_M^{\Omega M} \right] \right)^T;$$

$$\vec{C} = \left( \left[ \vec{C}_1^S \quad \dots \quad \vec{C}_{M'}^S \right] \left[ \vec{C}_1^\Omega \quad \dots \quad \vec{C}_M^\Omega \right] \left[ \vec{C}_1^0 \quad \dots \quad \vec{C}_M^0 \right] \right)^T,$$

а  $\mathbf{B}$  — блочная матрица, составленная из следующих компонент:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1}^S & \dots & \mathbf{B}_{1,M'}^S \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{M',1}^S & \dots & \mathbf{B}_{M',M'}^S \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1}^\Omega & \dots & \mathbf{B}_{1,M}^\Omega \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{M',1}^\Omega & \dots & \mathbf{B}_{M',M}^\Omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{1,1}^{\Omega M} & \dots & \mathbf{B}_{1,M}^{\Omega M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{B}_{M',1}^{\Omega M} & \dots & \mathbf{B}_{M',M}^{\Omega M} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^S & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M'}^S \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^S & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M'}^S \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^\Omega & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M}^\Omega \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^\Omega & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M}^\Omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^{\Omega M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M}^{\Omega M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^{\Omega M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M}^{\Omega M} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^0 & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M'}^0 \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^0 & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M'}^0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^\Omega & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M}^\Omega \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^\Omega & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M}^\Omega \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}}_{1,1}^{\Omega M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{1,M}^{\Omega M} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\mathbf{B}}_{M,1}^{\Omega M} & \dots & \tilde{\mathbf{B}}_{M,M}^{\Omega M} \end{bmatrix} \end{pmatrix}.$$

Блочная матрица  $\mathbf{B}$  включает подматрицы:

$$\mathbf{B}_{m'_1, m'_2}^S = \left( b_{j_1, j_2}^{S, m'_1, m'_2} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\mathbf{B}_{m', m}^\Omega = \left( b_{j_1, j_2}^{\Omega, m', m} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\mathbf{B}_{m', m}^{\Omega M} = \left( b_{j_1, j_2}^{\Omega M, m', m} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m, m'}^S = \left( \tilde{b}_{j_1, j_2}^{S, m, m'} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m_1, m_2}^\Omega = \left( \tilde{b}_{j_1, j_2}^{\Omega, m_1, m_2} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m_1, m_2}^{\Omega M} = \left( \tilde{b}_{j_1, j_2}^{\Omega M, m_1, m_2} \right)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|};$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_{m, m'}^0 = (0)_{|\mathbb{M}_p| \times |\mathbb{M}_p|}, \text{ где } m', m'_1, m'_2 \in \{1, M'\}; m, m_1, m_2 \in \{1, M\};$$

$$b_{j_1, j_2}^{S, m'_1, m'_2} = \iint_{S_{m'_1}} \iint_{S_{m'_2}} \Psi \left( i\omega\mu \bar{\gamma}_{j_1}^{m'_1} \bar{\gamma}_{j_2}^{m'_2} - \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_1}^{m'_1}] [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_2}^{m'_2}] \right) dS_2 dS_1; \quad (13)$$

$$b_{j_1, j_2}^{\Omega, m', m} = \iint_{S_{m'}} \iint_{\Omega_m} \Psi \left( i\omega\mu \bar{\gamma}_{j_1}^{m'} \bar{\gamma}_{j_2}^m - \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_1}^{m'}] [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_2}^m] \right) d\Omega dS; \quad (14)$$

$$b_{j_1, j_2}^{\Omega M, m', m} = \iint_{S_{m'}} \bar{\gamma}_{j_1}^{m'} \iint_{\Omega_m} \bar{\chi}_{j_2}^m \times \nabla \Psi d\Omega dS; \quad (15)$$

$$\tilde{b}_{j_1, j_2}^{S, m, m'} = \iint_{\Omega_m} \iint_{S_{m'}} \Psi \left( i\omega\mu \bar{\gamma}_{j_1}^m \bar{\gamma}_{j_2}^{m'} - \frac{1}{i\omega\epsilon} [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_1}^m] [\nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_2}^{m'}] \right) dS d\Omega; \quad (16)$$

$$\tilde{b}_{j_1, j_2}^{\Omega, m_1, m_2} = \iint_{\Omega_{m_1}} \iint_{\Omega_{m_2}} \Psi \left( i\omega\mu \bar{\gamma}_{j_1}^{m_1} \bar{\gamma}_{j_2}^{m_2} - (i\omega\epsilon)^{-1} \times \left[ \nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_1}^{m_1} \right] \left[ \nabla \cdot \bar{\gamma}_{j_2}^{m_2} \right] \right) d\Omega_2 d\Omega_1; \quad (17)$$

$$\tilde{b}_{j_1, j_2}^{\Omega_M, m_1, m_2} = \iint_{\Omega_{m_1}} \tilde{\gamma}_{j_1}^{m_1} \iint_{\Omega_{m_2}} \tilde{\chi}_{j_2}^{m_2} \times \nabla \Psi d\Omega_2 d\Omega_1. \quad (18)$$

Блочный вектор  $\tilde{J}$  состоит из подвекторов  $\tilde{J}_{m'}^S = \left( \tilde{J}_{m', j}^S \right)_{|M_P|}$  в  $\tilde{J}_{m'}(P) = \sum_{j \in M_P} \tilde{J}_{m', j}^S \tilde{\gamma}_j^{m'}$  при  $P \in S_{m'}$ ;  $\tilde{J}_m^\Omega = \left( \tilde{J}_{m, j}^\Omega \right)_{|M_P|}$  в  $\tilde{J}_m(P) = \sum_{j \in M_P} \tilde{J}_{m, j}^\Omega \tilde{\gamma}_j^m(P)$  при  $P \in \Omega_m$ ;  $\tilde{J}_m^{\Omega_M} = \left( \tilde{J}_{m, j}^{\Omega_M} \right)_{|M_P|}$  в  $\tilde{J}_m^M(P) = \sum_{j \in M_P} \tilde{J}_{m, j}^{\Omega_M} \tilde{\chi}_j^m(P)$  при  $P \in \Omega_m$ .

Блочный вектор  $\tilde{C}$  включает подвекторы  $\tilde{C}_{m'}^S = \left( c_{m', j}^S \right)_{|M_P|}$ ;  $\tilde{C}_m^\Omega = \left( c_{m, j}^\Omega \right)_{|M_P|}$ ;  $\tilde{C}_m^0 = (0)_{|M_P|}$ , где:

$$c_{m', j}^S = - \iint_{S_{m'}} \tilde{\gamma}_j^{m'} \sum_{k=1}^M \tilde{E}_{k, m'}^{\text{ind}} dS; \quad c_{m, j}^\Omega = - \iint_{\Omega_m} \tilde{\gamma}_j^m \sum_{k=1}^M \tilde{E}_{k, m}^{\text{ind}} d\Omega. \quad (19)$$

Применение процедур численного интегрирования [34] по  $S_{m'}$  и  $\Omega_m$  при вычислении элементов (13-19) позволяет определить искомый вектор коэффициентов  $\tilde{J} = \mathbf{B}^{-1} \tilde{C}$  из (12). Следует отметить, что для корректного расчета элементов матрицы  $\mathbf{B}$  в виду сингулярности ядра  $\Psi(\vec{r}, \vec{r}')$  для случаев  $\vec{r} \rightarrow \vec{r}'$  используется

асимптотики функции Грина [35]  $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left( R^{-1} - i\kappa + O(R) \right)$  и

[10]  $\Psi(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \left( R^{-1} - i\kappa - 0,5\kappa^2 R + O(R) \right)$  при представлении интегралов (13)–(18) в виде суммы от регулярной и сингулярной частей с последующим вычислением последней части с учетом метода дискретных вихрей [14, 15].

Дальнейшая процедура расчета характеристик излучения ЗА по методу моментов является стандартной [4, 6].

**5. Результаты моделирования и их обсуждение.** Для определенного численного решения (12) в приближении БМ задачи

анализа ЗА (4) в Matlab проведено математическое моделирование. При этом с целью сравнительной оценки предпочтительности применения предложенной аппроксимации функциями (5) аналогичное решение задачи анализа ЗА также выполнено разбиением проводящей поверхности при формировании векторных базисных функций вида [31]. Параметры моделирования выбраны следующими:  $\lambda = 0,05$  м;  $M' = 1$ ;  $\Omega'_1$  — прямоугольник с высотой  $14\lambda$  и шириной  $30\lambda$ ;  $Z_1(x, y) = 0,25(x^2 + y^2)/f$  при  $f = 16\lambda$ ; системы координат  $OXYZ$  и  $O'_1X'_1Y'_1Z'_1$  совпадают;  $M = 3$ ;  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  — правильный треугольник, квадрат и круг соответственно, радиус вписанной окружности для которых равен  $\lambda$ ;  $\vec{s}_1^{(o)} = \vec{s}_2^{(o)} = \vec{s}_3^{(o)} = (0 \ 0 \ -1)^T$ ;  $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ ,  $y_1 = -1,5\lambda$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = 1,5\lambda$ ,  $z_1 = z_2 = z_3 = f$ . На рисунке 2 представлены геометрия антенной системы и диаграмма направленности в  $H$ -плоскости ( $\xi = 90^\circ$ ) анализируемой ЗА.

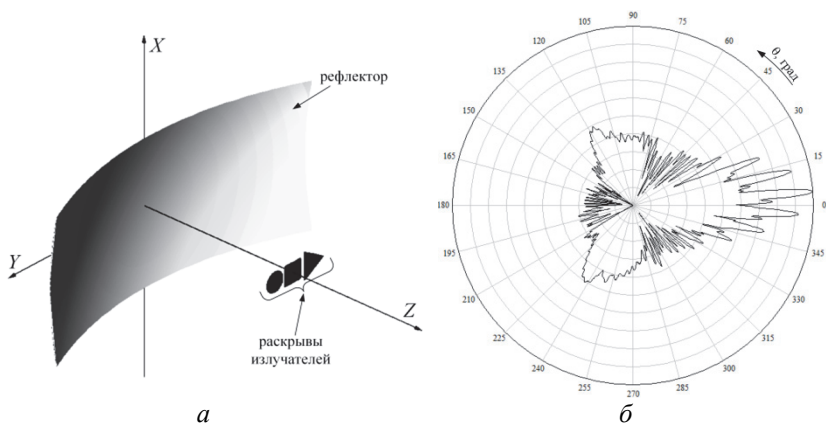


Рис. 2. Геометрия анализируемой ЗА (а) и реализуемая диаграмма направленности (б)

На рисунке 3 представлена зависимость среднеквадратического отклонения  $\sigma = \sqrt{\iint_{\Omega'_1} (\vec{J}(x, y) - \vec{J}_p(x, y))^2 dx dy}$  между реальным распределением плотности электрического тока  $\vec{J}_p(x, y)$  на

поверхности рефлектора и его рассчитываемым значением  $\bar{J}(x, y)$  для различного порядка аппроксимации  $p$  при сравнении разработанного решения в приближении БМ с известным [31].

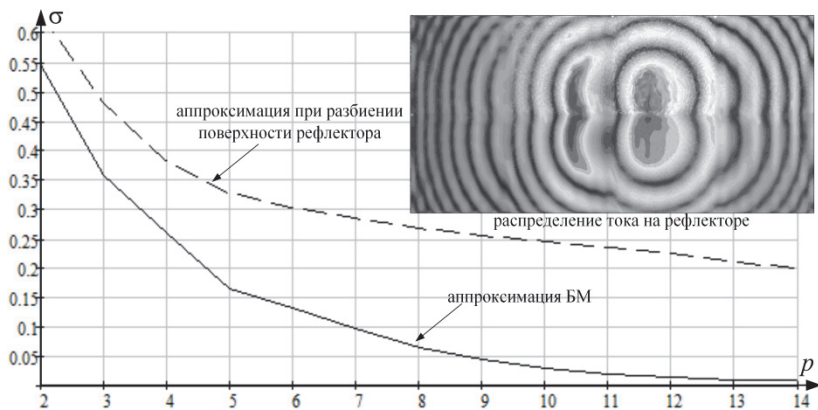


Рис. 3. Зависимость отклонения  $\sigma$  между  $\bar{J}_p(x, y)$  и  $\bar{J}(x, y)$  от порядка аппроксимации  $p$

На рисунке 4 отражена зависимость  $\sigma$  от диаметра  $D$  раскрыва апертуры  $\mathcal{S}_k$  к числу узловых точек  $|\mathbb{M}_p|$ , выраженного в длинах волн. Следует отметить, что с целью обеспечения соизмеримых вычислительных затрат кусочно-полиномиальная аппроксимация по методу [31] выполнена при разбиении раскрыва рефлектора на два одинаковых треугольных элемента.

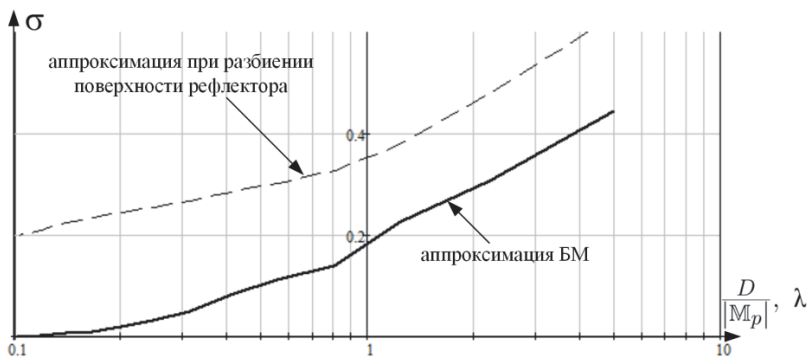


Рис. 4. Зависимость отклонения  $\sigma$  между  $\bar{J}_p(x, y)$  и  $\bar{J}(x, y)$  от  $D/|\mathbb{M}_p|$ , выраженного в  $\lambda$

Полученные результаты моделирования (рисунки 3 и 4) определяют предпочтительность использования БМ при численном решении в приближении вариационных методов Галёркина и Ритца систем СИУ вида (4) при анализе антенных систем зеркального типа. При этом точность БМ в сравнении с существующими методами значительно увеличивается при росте порядка аппроксимации  $p$  (рисунок 3) при условии соизмеримости вычислительных затрат. Более низкая точность метода [31] для выполненного решения (рисунки 3 и 4) обусловлена тем, что разбиение раскрыва рефлектора малым числом элементарных подобластей приводит к значительным погрешностям на смежных границах между отдельными подобластями. Увеличение точности, сопоставимой с БМ, по методу [31] требует разбиения  $\Omega'_1$  на как можно большее число конечных элементов. Однако это при решении общей задачи (4) неизменно приводит к существенному росту вычислительных и емкостных затрат в сравнении с разработанным решением в приближении БМ.

**6. Заключение.** В целом заданные соотношения позволяют формировать эффективные алгоритмы численного решения задач, связанных с проектированием, оптимизацией и управлением зеркальных антенн с произвольным числом излучающих и отражающих элементов. Порядок аппроксимаций базисными векторными функциями  $\vec{\gamma}_j^k(P)$  и  $\vec{\chi}_j^k(P)$  для поверхностей  $\mathcal{S}_k$  предлагается задавать различным  $p_k$  в зависимости от отношения длины волны  $\lambda$  к диаметру раскрыва апертуры  $\mathcal{S}_k$  (рисунок 4) при определении числа узловых точек аппроксимации, характеризуемого мощностью множества  $\left| \mathbb{M}_{p_k} \right|$  мультииндексов (7) с учетом правила  $D/\left| \mathbb{M}_{p_k} \right| \leq \lambda$ . Предпочтительность применения барицентрического подхода при решении систем сингулярных интегральных уравнений вида (4) заключается в удобном задании аппроксимации Ритца плотности поверхностных электрического и магнитного токов для всей области анализа в целом при учете граничных условий, уравнений Максвелла и уравнения непрерывности.

## Литература

1. Проблемы антенной техники / под ред. Л.Д. Бахраха, Д.И. Воскресенского // М.: Радио и связь. 1989. 368 с.
2. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Сомов А.М.* Анализ и структурно-параметрический синтез зеркальных антенн / под ред. А.М. Сомова // М.: Горячая линия телеком. 2017. 226 с.

3. Григорьев А.Д. Методы вычислительной электродинамики // М.: ФИЗМАТЛИТ. 2012. 432 с.
4. Gibson W.C. The method of moments in electromagnetics: second Edition // N.-Y.: Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.
5. Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г. Математические модели электродинамики // М.: Высшая школа. 1991. 224 с.
6. Незанов В.А., Клюев Д.С., Якунин В.С. Метод сингулярных интегральных уравнений в теории зеркальных антенн // Вестник СГАУ. 2010. № 2. С. 212–218.
7. Клюев Д.С., Соколова Ю.В. Электродинамический анализ зеркальных антенн самосогласованным методом // Журнал технической физики. 2014. Т. 84. № 9. С. 155–158.
8. Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Бариецентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2015. № 1(212). С. 32–40.
9. Сомов А.М., Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е. Расчет диаграммы направленности зеркальных антенн в приближении методов физической оптики и физической теории дифракции // Труды НИИР. 2015. № 2. С. 43–53.
10. Клюев Д.С. Электродинамическая теория зеркальных и полосковых антенн: диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук // Самара. 2012. 253 с.
11. Григорьев А.Д. Современные программные средства моделирования высокочастотных электромагнитных полей // Радиотехника и электроника. 2014. № 8(59). С. 804–808.
12. Peterson A.F., Mittra R. Computational methods for electromagnetics // Oxford University Press. 1998. 592 p.
13. Chen Z.N. et al. Handbook of Antenna Technologies // New York: Springer. 2016. 3470 p.
14. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент // М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
15. Вайникко Г.М., Лифанов И.К., Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения // М.: Янус-К. 2001. 508 с.
16. Борн М., Вольф Э. Основы оптики // М.: Наука. 1964. 368 с.
17. Боровиковский В.А., Кинбер Б.Е. Геометрическая теория дифракции // М.: Связь. 1978. 248 с.
18. Уфимцев П.Я. Теория дифракции краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции // М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2012. 372 с.
19. Russer P. Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering // N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 p.
20. Jin J. The Finite Element Method in Electromagnetics: third edition // Wiley-IEEE Press. 2014. 876 p.
21. Christopoulos C. The Transmission-Line Modeling Method // Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
22. Jung B.H., Sakar T.K., Zhang Y. et al. Time and Frequency Domain Solutions of EM Problems Using Integral Equations and a Hybrid Methodology // New York: IEEE Press. 2010.
23. Sabariego R.V. The fast multipole method for electromagnetic field computation in numerical and physical hybrid systems: Ph.D. thesis // University of Liège. 2004.
24. Cai W., Yu Y., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering // Int. J. Numerical Methods Eng. 2002. vol. 53. pp. 31–47.

25. *Полянский И.С.* Векторный барицентрический метод в вычислительной электродинамике // Труды СПИИРАН. 2017. № 2(51). С. 206–222.
26. *Корн Г., Корн К.* Справочник по математике для научных работников и инженеров // М.: Наука. 1970. 720 с.
27. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона–Римана // Труды СПИИРАН. 2016. № 6(49). С. 32–48.
28. *Полянский И.С.* Барицентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 30–36.
29. *Семёнов А.А.* Теория электромагнитных волн // М.: МГУ. 1968. 316 с.
30. *Colton D., Kress R.* Integral equation methods in scattering theory // Philadelphia: SIAM. 2013. 286 p.
31. *Chobanyan E., Ilie M., Notaros B.* Double-higher-order large-domain volume/surface integral equation method for analysis of composite wire-plate-dielectric antennas and scatterers // IEEE Transactions on antennas and propagation. 2013. vol. 61. no. 12. pp. 6051–6063.
32. *Graglia R.D., Peterson A.F., Boella M.* Higher-order techniques in computational electromagnetics // SciTech Publishing. 2016. 392 p.
33. *Родионов В.И.* О применении специальных многомерных сплайнов произвольной степени в числовом анализе // Вестник удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. № 4. С. 146–153.
34. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Представление отражающих поверхностей антенной системы в задачах анализа и синтеза зеркальных антенн методами физической оптики // Телекоммуникации. 2014. № 7. С. 15–21.
35. *Яковлев С.Л., Градусов В.А.* Об особенности функции Грина оператора Шрёдингера с потенциалами, сингулярными в начале координат // Вестник РУДН. 2014. № 1. С. 153–157.

**Полянский Иван Сергеевич** — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения. Число научных публикаций — 117. [van341@mail.ru](mailto:van341@mail.ru), <http://www.mathnet.ru/rus/person117188>; Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(953) 618-71-00.

**Пехов Юрий Сергеевич** — сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, методы оптимизации, методы цифровой обработки сигналов, вычислительная электродинамика, теория антенн. Число научных публикаций — 4. [leviathan.po4ta@gmail.com](mailto:leviathan.po4ta@gmail.com); Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(999)7550234.



I.S. POLANSKY, Y.S. PEHOV  
**BARYCENTRIC METHOD IN THE SOLUTION OF SINGULAR  
 INTEGRAL EQUATIONS OF ELECTRODYNAMIC THEORY OF  
 REFLECTOR ANTENNAS**

---

*Polansky I.S., Pehov Y.S. Barycentric Method in the Solution of Singular Integral Equations of Electrodynamics Theory of Reflector Antennas.*

**Abstract.** The use of barycentric method in problems of analysis of radiation characteristics of reflector antennas is proposed. Formalization of the problem is done in the approximation of electrodynamic theory of the mirror and the strip antennas while keeping to a solution of the system of singular integral equations. In the production of barycentric method the authors propose to solve the generated system numerically using variation methods of Ritz and Galerkin. To improve the effectiveness of the solution in comparison with the known methods the approximation of Ritz for regions of interest (disclose customer reflectors and emitters) can be set without partitioning into elementary subdomains (finite elements). For a given approximation the initial problem is reduced to a system of linear equations. To determine the desirability of applying barycentric method, the authors consider a sample solution for the analysis of reflector antennas when compared with existing methods that form an approximation with basis functions by splitting the conductive surface of the antenna sub-areas of simple shapes.

**Keywords:** barycentric method, method of moments, singular integral equation, mirror antenna.

---

**Polansky Ivan Sergeevich** — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping. The number of publications — 117. [van341@mail.ru](mailto:van341@mail.ru), <http://www.mathnet.ru/rus/person117188>; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(953) 618-71-00.

**Pehov Yuri Sergeevich** — researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, optimization methods, methods of digital signal processing, computational electrodynamics, the theory of antennas. The number of publications — 4. [leviathan.po4ta@gmail.com](mailto:leviathan.po4ta@gmail.com); 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(999)7550234.

### References

1. *Problemy antennoj tehniki. Pod red. L.D. Bahraha, D.I. Voskresenskogo* [Problems antenna technology. Edited by L.D. Bahrah, D.I. Voskresenskij]. Radio i svjaz. 1989. 368 p. (In Russ.).
2. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Somov A.M. *Analiz i strukturno-parametricheskij sintez zerkal'nyh anten* [Analysis of structural-parametric synthesis of reflector antennas]. Moscow: Hotline Telekom. 2017. 226 p. (In Russ.).
3. Grigorev A.D. *Metody vychislitel'noj elektrodinamiki* [Methods for computational electrodynamic]. Moscow: FIZMATLIT. 2012. 432 p. (In Russ.).
4. Gibson W.C. *The method of moments in electromagnetics: second Edition*. N.-Y.: Chapman and Hall/CRC. 2014. 450 p.

5. Ilinskij A.S., Kravcov V.V., Sveshnikov A.G. *Matematicheskie modeli jelektrodinamiki* [Mathematical models of electrodynamics]. Moscow: Vysshaja shkola. 1991. 224 p. (In Russ.).
6. Neganov V.A., Kljuev D.S., Jakunin V.S. [The method of singular integral equations in the theory of reflector antennas]. *Vestnik SGAU – Herald of Samara state aerospace University*. 2010. vol. 2. pp. 212–218. (In Russ.).
7. Kljuev D.S., Sokolova Yu.V. [Electrodynamic analysis of reflector antennas the self-consistent method]. *Zhurnal tehnichej fiziki – Journal of technical physics*. 2014. vol. 9(84). pp. 155–158. (In Russ.).
8. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Stepanov D.E. [Barycentric method in problems of analysis of the field in a regular waveguide with arbitrary cross section]. *Antenny – Antenna*. 2015. vol. 1(212). pp. 32–40. (In Russ.).
9. Somov A.M., Arhipov N.S., Poljanskij I.S., Stepanov D.E. [Calculation of the directivity pattern of reflector antennas in the approximation methods of physical optics and physical theory of diffraction]. *Trudy NIIR – Works SRIR*. 2015. vol. 2. pp. 43–53. (In Russ.).
10. Kljuev D.S. *Jelektrodinamicheskaja teorija zerkalnyh i poloskovyh antenn: dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni doktora fiziko-matematicheskijh nauk* [Electrodynamic theory of the mirror and strip antennas: dissertation on competition of a scientific degree of the doctor of physical and mathematical Sciences]. Samara. 2012. 253 p. (In Russ.).
11. Grigorev A.D. [Modern software tools for modeling high-frequency electromagnetic fields]. *Radiotekhnika i elektronika – Technology and electronics*. 2014. vol. 8(59). pp. 804–808. (In Russ.).
12. Peterson A.F., Mittra R. *Computational methods for electromagnetic*. Oxford University Press. 1998. 592 p.
13. Chen Z.N. et al. *Handbook of Antenna Technologies*. New York: Springer. 2016. 3470 p.
14. Lifanov I.K. *Metod singularnyh integralnyh uravnenij i chislennyj jeksperiment* [Method of singular integral equations and numerical experiment]. Moscow: TOO «Janus». 1995. 520 p. (In Russ.).
15. Vajnikko G.M., Lifanov I.K., Poltavskij L.N. *Chislennye metody v gipersingularnyh integralnyh uravnenijah i ih prilozhenija* [Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications]. Moscow: Janus-K. 2001. 508 p. (In Russ.).
16. Born M., Volf Je. *Osnovy optiki* [Principles of optics]. Moscow: Nauka. 1964. 368 p. (In Russ.).
17. Borovikovskij V.A., Kinber B.E. *Geometricheskaja teorija difrakcii* [Geometrical theory of diffraction]. Moscow: Svjaz. 1978. 248 p. (In Russ.).
18. Ufimcev P.Ya. *Teorija difrakcii kraevykh voln v jelektrodinamike. Vvedenie v fizicheskiju teoriju difrakcii* [Theory of diffraction edge waves in electrodynamics. Introduction to the physical theory of diffraction]. Moscow: BINOM. Laboratorija znaniy. 2012. 372 p. (In Russ.).
19. Russer P. *Electromagnetics, microwave circuit and antenna design for communications engineering*. Edited by C.F. Balanis. N.-Y.: Morgan and Claypool. 2006. 123 p.
20. Jin J. *The Finite Element Method in Electromagnetics: third edition*. Wiley-IEEE Press. 2014. 876 p.
21. Christopoulos C. *The Transmission-Line Modeling Method*. Oxford: Morgan and Claypool. 2006. 124 p.
22. Jung B.H., Sakar T.K., Zhang Y. et. al. *Time and Frequency Domain Solutions of EM Problems Using Integral Equations and a Hybrid Methodology*. New York: IEEE Press. 2010.

23. Sabariego R.V. The fast multipole method for electromagnetic field computation in numerical and physical hybrid systems: Ph.D. thesis. University of Liège. 2004.
24. Cai W., Yu Y., Yuan X.C. Singularity treatment and high-order RWG basis functions for integral equations of electromagnetic scattering. *Int. J. Numerical Methods Eng.* 2002. vol. 53. pp. 31–47.
25. Polansky I.S. [Vector barycentric method in computational electrodynamics]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2017. vol 2(51). pp. 206–222. (In Russ.).
26. Korn G., Korn K. *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook on mathematics for researchers and engineers]. Moscow: Nauka. 1970. 720 p. (In Russ.).
27. Polansky I.S. [Barycentric coordinates of Poisson–Riemann]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings.* 2016. vol 6(49). pp. 32–48. (In Russ.).
28. Polansky I.S. [Barycentric coordinates for the multidimensional Poisson approximation of the scalar potential inside an arbitrary region (Part 1)]. *Vestnik SGTU – Herald SGTU.* 2015. vol. 1(78). pp. 30–36. (In Russ.).
29. Semjonov A.A. *Teorija jelektromagnitnyh voln* [Theory of electromagnetic waves]. Moscow: MGU. 1968. 316 p. (In Russ.).
30. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. *Philadelphia: SIAM.* 2013. 286 p.
31. Chobanyan E., Ilie M., Notaros B. Double-higher-order large-domain volume/surface integral equation method for analysis of composite wire-plate-dielectric antennas and scatterers. *IEEE Transactions on antennas and propagation.* 2013. vol. 61. no. 12. pp. 6051–6063.
32. Graglia R.D., Peterson A.F., Boella M. Higher-order techniques in computational electromagnetics. SciTech Publishing. 2016. 392 p.
33. Rodionov V.I. [Finite element method for radio engineers and electrical engineers]. *Vestnik udmurtskogo universiteta. Matem. Meh. Kompjut. nauki. – University Udmurtia. Math. Mechanics. Computer science Proceedings.* 2010. vol 4. pp. 146–153. (In Russ.).
34. Arhipov N.S., Poljanskij I.S., Stepanov D.E. [Representation of reflecting surfaces of the antenna system in the tasks of analysis and synthesis of reflector antennas by the methods of physical optics]. *Telekommunikacii – Telecommunications.* 2014. vol. 7. pp. 15–21. (In Russ.).
35. Yakovlev S.L., Gradusov V.A. [On peculiarities of the green's function of the schrödinger operator with potentials singular at the origin]. *Vestnik RUDN – Herald RIFP.* 2014. vol. 1. pp. 153–157. (In Russ.).