

А. А. ИВАНОВ, О. А. ШМАКОВ
**АЛГОРИТМ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВНУТРЕННЕЙ ГЕОМЕТРИИ
МАНИПУЛЯТОРА ЗМЕЕВИДНОГО ТИПА ПРИ ДВИЖЕНИИ
ЛИДИРУЮЩЕГО ЗВЕНА ПО НАРАЩИВАЕМОЙ
ТРАЕКТОРИИ**

Иванов А.А., Шмаков О.А. Алгоритм определения внутренней геометрии манипулятора змеевидного типа при движении лидирующего звена по наращиваемой траектории.

Аннотация. Сформулированы инвариантная к системе внешних координат форма задания геометрии пространственного кинематически избыточного манипулятора с последовательно ортогональными некомпланарными осями шарниров вращения. Получены аналитические выражения для определения угловых шарнирных координат из условий принадлежности точек шарниров параметрически заданной гладкой кривой, уравнение для координат положения точек на кривой и неравенства-ограничения на взаимное положение смежных звеньев манипулятора. Предложен алгоритм решения уравнения и метод планирования законов изменения шарнирных координат, обеспечивающий перемещения точек шарниров по пространственной траектории, наращиваемой добавлением целевых точек для головного звена манипулятора. Метод применен для планирования движения гиперизбыточного манипулятора с неподвижным основанием и змеевидного робота при перемещении по траектории, выстраиваемой на основе текущих и прогнозируемых положений шарниров в декартовом пространстве.

Ключевые слова: змеевидный робот; манипуляторы змеевидного типа; гиперизбыточный манипулятор; угловые шарнирные координаты; траектория движения.

1. Введение. Роботы-манипуляторы змеевидного типа являются представителями класса манипуляторов с существенной избыточностью (гиперизбыточностью) числа управляемых внутренних степеней свободы по отношению к числу внешних координат, определяющих позицию и ориентацию полезной нагрузки в пространстве перемещения. Наименование типа связано с реализуемой в конструкции манипулятора структурой позвоночника его биологического прототипа — змеи. Начало систематических теоретических и экспериментальных исследований в области создания змеевидных роботов связано с работами японского исследователя С. Хирозе [1]. За прошедшее со времени первой публикации в 1974 году [2] направление получило развитие в многочисленных работах [3, 4]. Современное состояние зарубежных исследований подробно рассмотрено в основанном на 137-ми избранных источниках обзоре [5]. В представленной в 2015 году на конференции по мехатронике и автоматизации работе [6] проанализированы мировые достижения в теории и практике разработки змеевидных роботов. В выводах работы [6] отмечается актуальность направления и формулируются

нерешенные проблемы, среди которых проблема управления локомоциями и манипуляциями змеевидных роботов в условиях сложно структурированной внешней среды. В ЦНИИ РТК исследования и разработки в этом направлении ведутся, начиная с 2002 года [7–11].

Манипуляторы змеевидного типа используются как для перемещения полезной нагрузки с помощью цепи соединенных активно управляемыми шарнирами твердых тел с зафиксированным на неподвижном основании корневым звеном — гиперизбыточный манипулятор (ГИМ) [11] (рисунок 1), так и для организации движения по опорным поверхностям свободной цепи тел — змеевидный робот (ЗР) [10] (рисунок 2).

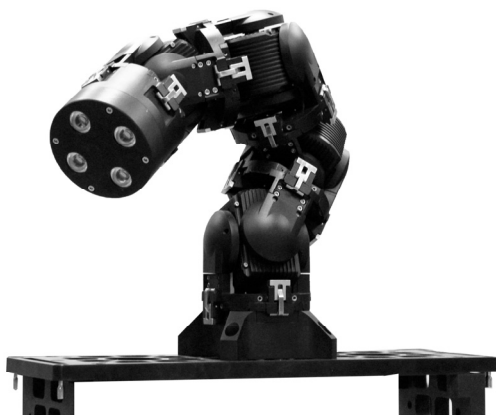


Рис. 1. Гиперизбыточный манипулятор «ГРОМ» (СПБПУ им. Петра Великого, ЦНИИ РТК)



Рис. 2. Змеевидный робот «ЗМЕЕЛОК-3м» (ЦНИИ РТК)

Кинематическая избыточность манипулятора позволяет выполнять рабочие операции в сложноструктурированном окружении. Змеевидный робот подобно своему биологическому прототипу может варьировать локомоционные моды, адаптируясь к условиям перемещения, а также за счет части не участвующих в локомоциях звеньев, манипулировать полезной нагрузкой. Реализация формы осуществляется заданием относительных угловых перемещений звеньев. Внутренние координаты определяются решением обратной задачи кинематики для избыточного манипулятора с ограничениями. Ограничения могут формулироваться в виде равенств, неравенств и критериев оптимальности для внешних и внутренних координат [4, 12–15]. В работе [8] предложен алгоритм решения обратной задачи кинематики гиперизбыточного манипулятора с ограничениями на внутренние координаты.

Моделью межпозвоночного сустава служит универсальный шарнир с ортогональными продольной оси позвонка компланарными осями вращения [16]. В технической реализации конструкции универсального шарнира используется последовательное соединение трх тел (звеньев) вращательными кинематическими парами 5-го класса. Для достижения компланарности осей необходимы специальные конструктивные решения [17]. Кинематическая схема активного универсального шарнира и пример реализации в ЗМ «ЗМЕЕЛОК-3м» представлены на рисунке 3.

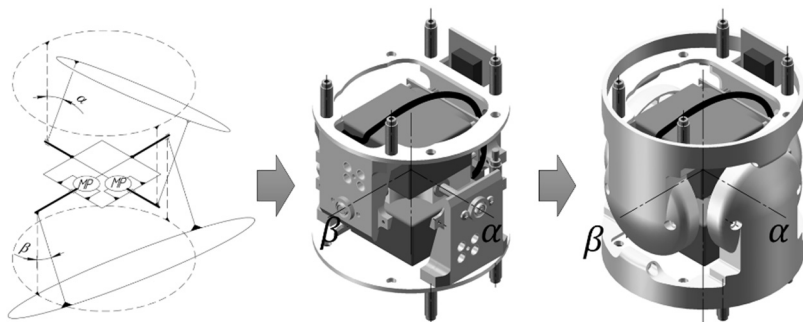


Рис. 3. Универсальный шарнир и пример реализации в ЗМ «ЗМЕЕЛОК-3м» (ЦНИИ РТК)

По этой причине во многих конструкциях змеевидных манипуляторов компланарность осей осознанно не реализуется [18–23]. На рисунке 4 приведено изображение конструкции змеевидного

робота на основе одностепенных модулей, разработанного в Carnegie Mellon University [18, 24].



Рис. 4. Змеевидный робот с некомпланарными осями «SEA» (Университет Карнеги Мелон, США)

Для планирования формы манипулятора во внутренних шарнирных координатах по задаваемой относительно внешнего окружения форме необходимо решение обратной задачи кинематики. В работе [25] для решения задачи определения внутренней геометрии змеевидного манипулятора предложен алгоритм построения ломаной, образованной отрезками, соединяющими точки расположения универсальных ортогональных шарниров на звене манипулятора. Для поиска положения точек на кривой используется процедура, содержащая пошаговое перемещение вдоль параметризованной кривой для выделения и метод половинного деления для нахождения корня уравнения, задающего пересечение кривой со сферой радиуса, равного расстоянию между центрами двухстепенных шарниров звена.

Анализ существующих конструкций змеевидных роботов и способов задания их движения позволяет констатировать, что для выполнения манипуляций и локомоций необходимо задавать в пространстве внешних координат мгновенную форму скелетной линии ЗР. Инвариантное по отношению к системе внешних координат описание геометрии ЗР в шарнирных координатах позволит планировать мгновенную форму скелетной кривой в сложноструктурированной среде. Алгоритм решения задачи определения внутренней геометрии змеевидного робота-манипулятора с вращательными шарнирами со скрещивающимися осями по положению и ориентации связанного с полезной нагрузкой звена манипулятора (лидирующего звена) на задаваемой траектории

отсутствует. Задача построения инвариантного описания и алгоритма для решения этой задачи рассматривается в настоящей статье.

2. Геометрия манипулятора. Абстрактный манипулятор представляет цепь соединенных шарнирами тел (звеньев), каждое из которых имеет не более двух одностепенных шарниров. Из литературы известны различные формы представления кинематических соотношений для манипулятора [1, 2, 4, 12, 24, 26–35]. В настоящей работе используется классическое инвариантное к используемой системе координат векторное представление, позволяющее записать соотношения для положений, скоростей и ускорений точек манипулятора в явной зависимости от шарнирных координат и их производных по времени.

Ограничимся рассмотрением манипуляторов с вращательными цилиндрическими шарнирами. Введем последовательную нумерацию цепи из n тел, начиная с первого. Для тела с номером i выделим три точки: C_i — центр связанной с телом системы координат; A_i — точка входа и B_i — точка выхода. На рисунке 5 изображена схема расположения шарниров и их осей в теле.

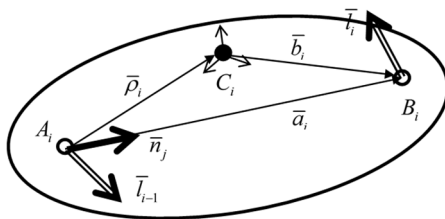


Рис. 5. Схема расположения шарниров в звене манипулятора

К точкам A_i и B_i привязаны одностепенные шарниры вращения, направление осей которых неизменно в теле. Положение центра системы координат тела с номером i относительно входной точки и выходной точки относительно центра определим векторами $\bar{\rho}_i$ и \bar{b}_i . Тогда $\bar{r}_{C,j}$ — положение центра системы координат j -го тела относительно входной точки A_1 первого в цепи тела определяется суммой:

$$\bar{r}_{C,j} = \sum_{i=1}^j \bar{\rho}_i + \sum_{i=1}^{j-1} \bar{b}_i, \quad (1)$$

а $\bar{r}_{B,j}$ — положение выходной точки j -го тела относительно входной точки первого в цепи тела определяется суммой:

$$\bar{r}_{B,j} = \bar{r}_{C,j} + \bar{b}_j. \quad (2)$$

Положение входной точки A_1 первого тела относительно неподвижной системы координат зададим вектором.

С учетом введенных обозначений формулы (1) могут быть представлены в рекуррентной форме:

$$\begin{aligned} \bar{r}_{C,j} &= \bar{\rho}_j + \bar{b}_{j-1} + \bar{r}_{C,j-1}, \\ j &= \overline{1, n}, \bar{b}_0 = 0, \bar{r}_{C,0} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Абсолютное положение произвольной точки D_i тела i , определяемой вектором $\bar{\rho}_{D,i}$ относительно C_i , задается формулой:

$$\bar{r}_{D,i} = \bar{\rho}_{D,i} + \bar{r}_{C,i}. \quad (4)$$

Взаимная ориентация соседних тел $i-1$ и i задается тензором поворота тела i относительно оси с ортом $\bar{l}_{i-1}^{(i-1)}$, связанным с телом $(i-1)$, на угол φ_i [30]:

$$\overline{\overline{Q}}_i^{(i-1)} = \cos\varphi_i \overline{\overline{E}} + \sin\varphi_i \overline{\overline{E}} \times \bar{l}_{i-1}^{(i-1)} + (1 - \cos\varphi_i) \bar{l}_{i-1}^{(i-1)} \bar{l}_{i-1}^{(i-1)}. \quad (5)$$

Тензор поворота i -го тела относительно несущего тела с номером (0) равен последовательному произведению тензоров $\overline{\overline{Q}}_i^{(i-1)}$:

$$\overline{\overline{P}}_i^{(0)} = \overline{\overline{Q}}_1^{(0)} \cdot \overline{\overline{Q}}_2^{(1)} \cdot \dots \cdot \overline{\overline{Q}}_{i-1}^{(i-2)} \cdot \overline{\overline{Q}}_i^{(i-1)} = \overline{\overline{P}}_{i-1}^{(0)} \cdot \overline{\overline{Q}}_i^{(i-1)}. \quad (6)$$

Конструкция манипулятора змеевидного типа представляет набор тел с шарнирами, оси которых ортогональны между собой, и соединяющему центры шарниров вектору. Это позволяет представить его через орты осей шарниров \bar{l}_j орты осей на теле j в точках B_j .

$$\bar{a}_j = \bar{\rho}_j + \bar{b}_j = -(-1)^j a_j \bar{l}_{j-1} \times \bar{l}_j. \quad (7)$$

Вектор положения точки B_i относительно точки A_1 с учетом (7) запишется в виде:

$$\bar{r}_{B,j} = \sum_{i=1}^j \bar{a}_i = -\sum_{i=1}^j (-1)^i a_i \bar{l}_{i-1} \times \bar{l}_i = \bar{r}_{B,j-1} - (-1)^j a_j \bar{l}_{j-1} \times \bar{l}_j. \quad (8)$$

Представление рекуррентной связи (8) в выделенном базисе через шарнирные углы текущего соединения с учетом обозначения (7) имеет вид:

$$\bar{r}_{B,j} = \bar{r}_{B,j-1} - (-1)^j a_j \overline{\overline{P}}_{j-1}^{(0)} \cdot \overline{\overline{Q}}_j^{(j-1)} \cdot (\bar{l}_{j-1}^{(j)} \times \bar{l}_j^{(j)}). \quad (9)$$

или с учетом выражения для тензора поворота относительно оси входного шарнира (5):

$$\begin{aligned} \bar{r}_{B,j} &= \bar{r}_{B,j-1} - \\ &- (-1)^j a_j \bar{P}_{j-1}^{(0)} \cdot (\cos \varphi_j (\bar{l}_{j-2}^{(j-1)} \times \bar{l}_{j-1}^{(j-1)}) - \sin \varphi_j \bar{l}_{j-1}^{(j-1)}). \end{aligned} \quad (10)$$

При заданном наборе шарнирных углов $\{\varphi_j\}$ положения центров выходных шарниров относительно несущего тела определяются по формулам (10) через пять независимых внутренних постоянных для тела j параметров a_j , $\bar{l}_{j-1}^{(j)}$ и $\bar{l}_j^{(j)}$, шарнирный угол φ_j , тензор поворота предшествующего тела относительно выделенного базиса $\bar{P}_{j-1}^{(0)}$ и вектор $\bar{r}_{B,j-1}$ абсолютного положения центра выходного шарнира предшествующего тела.

Конструкция змеевидного манипулятора имеет периодическую структуру. Периодическим элементом является модуль, состоящий из двух смежных тел с парами ортогональных шарниров. На рисунке 6 приведена схема фрагмента кинематической структуры змеевидного манипулятора.

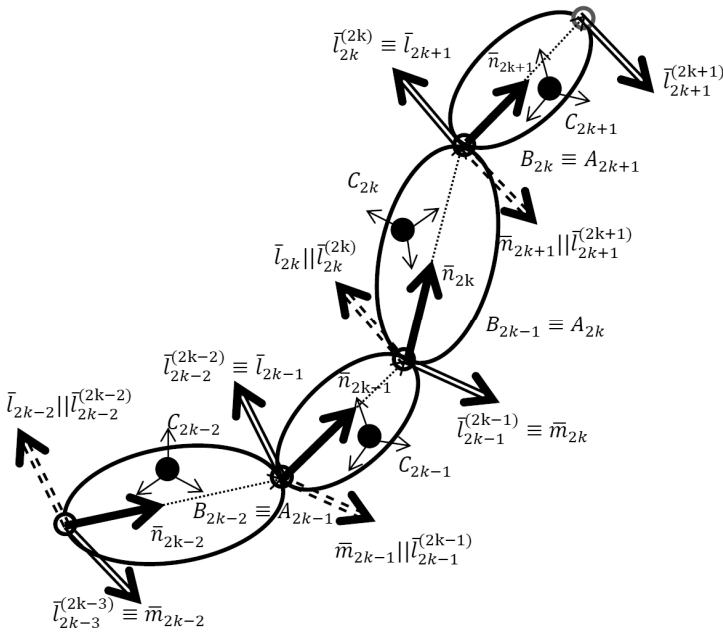


Рис. 6. Схема чередования пар звеньев в кинематической цепи

Выражение для тензора поворота тела с номером j относительно тела $j - 2$ через орты осей выходных шарниров тел $j - 2$ и $j - 1$ с учетом формулы (5) имеет вид:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{Q}}_{j-1}^{(j-2)} \cdot \overline{\overline{Q}}_j^{(j-1)} &= \cos\varphi_{j-1} \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} + \\
&+ \sin\varphi_j \sin\varphi_{j-1} (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) + \\
&+ \cos\varphi_j \sin\varphi_{j-1} (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} - (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) + \\
&+ \cos\varphi_j \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} + \sin\varphi_j \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) + \\
&+ \sin\varphi_{j-1} (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} + \\
&+ \sin\varphi_j \cos\varphi_{j-1} (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} - \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)})) + \\
&+ \cos\varphi_j \cos\varphi_{j-1} (\overline{\overline{E}} - \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)} - \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}).
\end{aligned} \tag{11}$$

Для последовательности поворотов относительно двух ортогональных осей, соответствующих углам курса (первый поворот вокруг орта $\overline{\overline{l}}_{2k-2}$) и тангажа (второй поворот вокруг орта $\overline{\overline{m}}_{2k-1}$), формула (11) имеет инвариантное представление:

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{Q}}_{2k}^{(2k-2)}(\varphi_{2k-1}, \varphi_{2k}) &= \overline{\overline{Q}}_{2k-1}^{(2k-2)} \cdot \overline{\overline{Q}}_{2k}^{(2k-1)} = \\
&= \cos\varphi_{2k} \overline{\overline{l}}_{2k-2} \overline{\overline{l}}_{2k-1} + \sin\varphi_{2k} \overline{\overline{l}}_{2k-2} \overline{\overline{n}}_{2k-1} + \\
&+ \sin\varphi_{2k-1} \sin\varphi_{2k} \overline{\overline{m}}_{2k-2} \overline{\overline{l}}_{2k-1} + \cos\varphi_{2k-1} \overline{\overline{m}}_{2k-2} \overline{\overline{m}}_{2k-1} - \\
&- \sin\varphi_{2k-1} \cos\varphi_{2k} \overline{\overline{m}}_{2k-2} \overline{\overline{n}}_{2k-1} + \\
&- \cos\varphi_{2k-1} \sin\varphi_{2k} \overline{\overline{n}}_{2k-2} \overline{\overline{l}}_{2k-1} + \sin\varphi_{2k-1} \overline{\overline{n}}_{2k-2} \overline{\overline{m}}_{2k-1} + \\
&+ \cos\varphi_{2k-1} \cos\varphi_{2k} \overline{\overline{n}}_{2k-2} \overline{\overline{n}}_{2k-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

в котором коэффициенты при диадных (декартовых) произведениях ортов соответствуют компонентам матрицы поворота в самолетных углах Эйлера: курса $\psi = \varphi_{2k-1}$ и тангажа $\theta = \varphi_{2k}$.

Орты $\overline{\overline{n}}_{2k-2}$ и $\overline{\overline{n}}_{2k-1}$ определяются через орты входных $\overline{\overline{l}}_{2k-3}^{(2k-2)}$, $\overline{\overline{l}}_{2k-2}^{(2k-1)}$ и выходных шарниров $\overline{\overline{l}}_{2k-2}^{(2k-2)}$, $\overline{\overline{l}}_{2k-1}^{(2k-1)}$ тел $(2k - 2)$ и $2k$:

$$\overline{\overline{n}}_{2k-2} = \overline{\overline{l}}_{2k-2} \times \overline{\overline{m}}_{2k-2} = \overline{\overline{l}}_{2k-2}^{(2k-2)} \times \overline{\overline{l}}_{2k-3}^{(2k-2)}, \tag{13}$$

$$\overline{\overline{n}}_{2k-1} = \overline{\overline{l}}_{2k-1} \times \overline{\overline{m}}_{2k-1} = \overline{\overline{l}}_{2k-1}^{(2k-1)} \times \overline{\overline{l}}_{2k-2}^{(2k-1)}. \tag{14}$$

Верхний индекс в обозначениях формул (13-14) введен для явного указания номера связанной с телом системы координат представления ортов:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{P}}_0^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{B,j} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}) &= (\overline{\overline{r}}_{Bj}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}) = \\ &= \left((\cos\varphi_{j-1} \overline{\overline{E}} + \sin\varphi_{j-1} \overline{\overline{E}} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}) \right. \\ &\quad \left. + (1 - \cos\varphi_{j-1}) \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \right) \cdot \\ &\cdot \left(a_{j-1} (\overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-1)} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) \right. \\ &\quad \left. - a_j (\cos\varphi_j (\overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-1)} \times \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) - \sin\varphi_j \overline{\overline{l}}_{j-1}^{(j-1)}) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

и представляет векторную запись положения точки B_j относительно B_{j-2} на поверхности тора с расстоянием a_{j-1} до оси вращения с ортом $\overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}$ и радиусом вращаемой окружности a_j .

3. Рекуррентные соотношения для шарнирных координат и алгоритм решения при движении по прокладываемому маршруту. Проекция равенства (15) на орты базиса, связанного с $(j-2)$ -ым телом и ортами его шарниров, дают скалярные соотношения между шарнирными углами и положением точки на поверхности тора:

$$(-1)^j \sin\varphi_j a_j = \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{Bj}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}), \quad (16)$$

$$-(-1)^j \sin\varphi_{j-1} (a_{j-1} + a_j \cos\varphi_j) = \overline{\overline{l}}_{j-3}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{Bj}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}), \quad (17)$$

$$\begin{aligned} (-1)^j \cos\varphi_{j-1} (a_{j-1} + a_j \cos\varphi_j) \\ = (\overline{\overline{l}}_{j-3}^{(j-2)} \times \overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot (\overline{\overline{r}}_{Bj}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}). \end{aligned} \quad (18)$$

Из равенств (16-18) вытекают ограничения для радиус-вектора $(\overline{\overline{r}}_{B,j}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)})$:

$$\begin{aligned} |\overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{B,j}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)})| &\leq a_j, \\ \left| \overline{\overline{l}}_{j-3}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{B,j}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}) \right| &\leq \\ \left| a_{j-1} + \sqrt{a_j^2 - (\overline{\overline{l}}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\overline{\overline{r}}_{B,j}^{(j-2)} - \overline{\overline{r}}_{B,j-2}^{(j-2)}))^2} \right|, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\left| (\vec{l}_{j-3}^{(j-2)} \times \vec{l}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)}) \right| \leq \left| a_{j-1} + \sqrt{a_j^2 - (\vec{l}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)}))^2} \right|.$$

При записи неравенств (19) сделано допущение $\varphi_j \in [-\pi/2, \pi/2]$, которое, как правило, выполняется в конструкции модулей змеевидных манипуляторов.

Из равенств (16-18) вытекают однозначные выражения для шарнирных углов через радиус-вектор $(\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)})$:

$$\sin \varphi_j = (-1)^j \vec{l}_{j-2}^{(j-2)} \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)}) / a_j, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_{j-1} &= \\ &= -\vec{l}_{j-3}^{(j-2)} \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)}) / (\vec{l}_{j-3}^{(j-2)} \times \vec{l}_{j-2}^{(j-2)}) \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(j-2)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(j-2)}), \end{aligned} \quad (21)$$

а также неявное представление части поверхности тора для $\varphi_j \in [-\pi/2, \pi/2]$:

$$\begin{aligned} F(\vec{r}_{B,j}^{(0)}) &= a_{j-1}^2 + a_j^2 - \\ &- (\vec{r}_{B,j}^{(0)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(0)}) \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(0)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(0)}) + \\ &+ 2a_{j-1} \sqrt{a_j^2 - (\vec{l}_{j-2}^{(0)} \cdot (\vec{r}_{B,j}^{(0)} - \vec{r}_{B,j-2}^{(0)}))^2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Соотношения (20-21) позволяют определить шарнирные координаты змеевидного манипулятора, шарниры $j-1$ и j которого лежат на заданной пространственной кусочно-гладкой кривой.

Пусть $\bar{R} = \bar{R}(s)$ — параметрически заданная кривая. Параметр s изменяется от нуля до s_f , $\vec{r}_{B,2n-2k}^{(0)} = \bar{R}(s_k)$, $s_0 = 0$. Значение параметра s_k , соответствующего точке шарнира с номером $j = 2k$, может быть найдено из уравнения вида (22):

$$\begin{aligned} F(\bar{R}(s_k)) &= a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 - \\ &- (\bar{R}(s_k) - \bar{R}(s_{k-1})) \cdot (\bar{R}(s_k) - \bar{R}(s_{k-1})) + \\ &+ 2a_{2k-1} \sqrt{a_{2k}^2 - (\vec{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot (\bar{R}(s_k) - \bar{R}(s_{k-1})))^2} = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Алгоритм для нахождения решения уравнения (23) по методу Ньютона имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta s_0 &= a_{2k-1} + a_{2k}, \\
 \text{enter: } \tilde{s} &= s_{k-1} + \Delta s_0, \\
 \tilde{r} &= \bar{R}(\tilde{s}), \\
 \tilde{r}' &= \bar{R}'(\tilde{s}), \\
 \Delta \bar{R} &= \tilde{r} - \bar{r}_{B2k-2}, \\
 \Delta R_l &= \bar{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot \Delta \bar{R}, \\
 \Delta s &= \frac{a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 - \Delta \bar{R} \cdot \Delta \bar{R} + 2a_{2k-1} \sqrt{a_{2k}^2 - (\Delta R_l)^2}}{2 \left(\Delta \bar{R} + \frac{a_{2k-1} \bar{l}_{2k-2} \Delta R_l}{\sqrt{a_{2k}^2 - (\Delta R_l)^2}} \right) \cdot \tilde{r}'}, \\
 \text{IF}(|\Delta s - \Delta s_0| \leq \varepsilon) &: s_k = s_{k-1} + \Delta s \\
 \bar{r}_{B2k} &= \bar{R}(s_k), \\
 \Delta s_0 &= \Delta s; \\
 \text{goto } &\text{enter.}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Алгоритм метода хорд имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Delta s_0 &= 0; \\
 \Delta s_1 &= a_{2k-1} + a_{2k}; \\
 F_0 &= \Delta s_1^2; \\
 F &= F_0; \\
 s_k &= s_{k-1} + \Delta s_1; \\
 \bar{r}_{B2k} &= \bar{R}(s_k); \\
 \Delta \bar{R} &= \bar{r}_{B2k} - \bar{r}_{B2k-2}; \\
 \Delta R_l &= \bar{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot \Delta \bar{R}; \\
 F_1 &= a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 - \Delta \bar{R} \cdot \Delta \bar{R} + 2a_{2k-1} \sqrt{a_{2k}^2 - (\Delta R_l)^2}; \\
 \text{WHILE}(\text{ABS}(F) > \varepsilon) &, \\
 \Delta s &= (\Delta s_1 - \Delta s_0) F_0 / (F_0 - F_1) + \Delta s_0; \\
 s_k &= s_{k-1} + \Delta s; \\
 \bar{r}_{B2k} &= \bar{R}(s_k); \\
 \Delta \bar{R} &= \bar{r}_{B2k} - \bar{r}_{B2k-2}; \\
 \Delta R_l &= \bar{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot \Delta \bar{R}; \\
 F &= a_{2k-1}^2 + a_{2k}^2 - \Delta \bar{R} \cdot \Delta \bar{R} + 2a_{2k-1} \sqrt{a_{2k}^2 - (\Delta R_l)^2}; \\
 \text{IF}(F > 0) &: F_0 = F; \Delta s_0 = \Delta s, F_1 = F; \Delta s_1 = \Delta s)
 \end{aligned} \tag{25}$$

Шарнирные углы определяются по найденному положению точки B_{2k} на заданной кривой:

$$\varphi_{2k} = \arcsin(\bar{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot (\bar{r}_{B2k}^{(0)} - \bar{r}_{B2k-2}^{(0)})/a_{2k}), \quad (26)$$

$$\varphi_{2k-1} = -\arctg(\bar{l}_{2k-3}^{(0)} \cdot (\bar{r}_{B2k}^{(0)} - \bar{r}_{B2k-2}^{(0)})/(\bar{l}_{2k-3}^{(0)} \times \bar{l}_{2k-2}^{(0)} \cdot (\bar{r}_{B2k}^{(0)} - \bar{r}_{B2k-2}^{(0)})). \quad (27)$$

Полученные уравнения могут быть применены для планирования маршрута движения ГИМ на подвижном основании внутри узкого канала. В исходном положении параметрическая зависимость $\bar{R} = \bar{R}(s)$ может быть построена в виде дифференцируемого интерполяционного сплайна по множеству точек $\{\bar{r}_{B,2k}^{(0)}\}$, совпадающих с входными узлами двухстепенных модулей манипулятора, полученным по известным внутренним координатам из формул (9). Зададим $\bar{r}_g^{(0)}$ — новое положение точки B_{2n} , принадлежащей лидирующему звену манипулятора. Построим интерполирующий сплайн $\bar{R} = \bar{R}(s; \{\{\bar{r}_{B,2k}^{(0)}\}, \bar{r}_g^{(0)}\})$ на основе множества $\{\{\bar{r}_{B,2k}^{(0)}\}, \bar{r}_g^{(0)}\}$. Найдем новый набор углов из формул (22, 26, 27) и новое множество точек $\{\bar{r}_{B,2k}^{(0)}\}$. Точка $\bar{r}_{B,0}^{(0)}$ будет соответствовать новому положению расположенного на подвижном основании входного шарнира корневого модуля. Повторяя процедуру, получим маршрут движения ГИМ по траектории, которая формируется выбором направления и позиции лидирующего звена.

Описанная процедура планирования маршрута движения ГИМ применима для планирования движения змеевидного робота в среде с препятствиями в локомоционной моде, реализуемой с помощью бегущей к лидирующему звену волны изгибаний в перпендикулярном опорной плоскости направлении [10].

4. Заключение. Предложено инвариантное описание геометрии кинематически избыточного манипулятора периодической структуры. Получена аналитическая форма решения геометрической обратной задачи кинематики для гиперизбыточного манипулятора из двухстепенных модулей с ортогональными некомпланарными осями шарниров. Варианты итерационного алгоритма решения уравнения для определения положения точек входных шарниров модулей представлены в явной форме. Алгоритм применяется в ЦНИИ РТК для оперативного планирования при управлении движением ГИМ и ЗР.

Литература

1. *Hirose S.* Biologically Inspired Robots: Snake-Like Locomotors and Manipulators // Oxford University Press. 1993. pp. 1–125.
2. *Umetani Y., Hirose S.* Biomechanical Study of Serpentine Locomotion // Proc.1st RoManSy Symp. '73. 1974. pp. 171–184.
3. *Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavadahl Ø., Gravdahl J.T.* Snake Robots Modelling, Mechatronics, and Control // Springer-Verlag London. 2013. 317 p.
4. *Walker I.D., Choset H., Chirikjian G.S.* Snake-Like and Continuum Robots // Springer Handbook of Robotics 2nd Edition. Springer. 2016. pp. 481–498.
5. *Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavadahl Ø., Gravdahl J.T.* A Review on Modelling, Implementation, and Control of Snake Robots // Robotics and Autonomous Systems. 2012. vol. 60. no. 1. pp. 29–40.
6. *Shao L., Guo B., Wang Y., Chen X.* An overview on theory and implementation of snake-like robots // Proceedings of IEEE International Conference Mechatronics and Automation (ICMA). 2015. pp. 70–75.
7. *Иванов А.А., Носов В.Н.* Кинематика качения змеевидного бесколёсного робота // МАУ. 2002. № 6. С. 16–21.
8. *Иванов А.А.* Метод планирования формы гиперизбыточного манипулятора с ограниченным диапазоном изменения шарнирных координат // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия "Информатика. Телекоммуникации. Управление". 2012. Вып. 6 (163). С.112–118.
9. *Иванов А.А., Демидов Д.А., Шмаков О.А.* Мобильные змеевидные роботы: теория и практика // Известия вузов. Машиностроение. «Специальная робототехника и мехатроника». Специальный выпуск. 2011. С.32–41.
10. *Иванов А.А., Шмаков О.А., Демидов Д.А.* Змеевидный робот ЗМЕЕЛОК-3 и экспериментальное исследование его локомоций // Научно-технические ведомости СПбГПУ, Серия "Информатика. Телекоммуникации. Управление". 2012. Вып.1(164). С. 132–138.
11. *Иванов А.А. и др.* Модульный гиперизбыточный манипулятор: архитектура, алгоритмы управления, реализация // Робототехника и техническая кибернетика. 2014. №2 (3). С. 55–60.
12. *Siciliano B., Khatib O.* Springer Handbook of Robotics // Springer. 2008. 1611 p.
13. *Roa D., Melo K.* Mechanical Stability Margin for Scouting Poses in Modular Snake Robots // Proceedings of IEEE International Symposium on Safety, Security and Rescue Robotics. 2016. pp. 182–188.
14. *Melo K.* Modular Snake Robot Velocity for Side-Winding Gaits // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2015. pp. 3716–3722.
15. *Nor N.M., Ma S.* CPG-based Locomotion Control of a Snake-like Robot for Obstacle Avoidance // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation. 2014. pp. 347–352.
16. *Gray J.* The mechanism of locomotion in snakes // Journal of Experimental Biology. 1946. vol. 23. no. 2. pp. 101–120.
17. *Иванов А.А.* Анализ конструктивных компоновок двухстепенного мехатронного модуля для змеевидного робота // Экстремальная робототехника. Сборник докладов международной научно-технической конференции. 2011. С.104–110.
18. *Wright C. et al.* Design of a modular snake robot // Proceedings of IEEE/RSJ International Conference Intelligent Robots and Systems. 2007. pp. 2609–2614.
19. *Wright C. et al.* Design and Architecture of the Unified Modular Snake Robot // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2012. pp.4347–4354.

20. *Rollinson D., Ford S., Brown B., Choset H.* Design and Modeling of a Series Elastic Element for Snake Robots // Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Conference (DSCC). 2013. pp.V001T08A002–V001T08A002.
21. *Boyle J.H., Johnson S., Dehghani-Saniij A.A.* Adaptive Undulatory Locomotion of a C. elegans Inspired Robot // TMECH. 2013. pp. 439–448.
22. *Rollinson D. et al.* Design and architecture of a series elastic snake robot // Proceedings of IEEE/RSJ international conference Intelligent Robots and Systems (IROS 2014). 2014. pp. 4630–4636.
23. *Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavdahl Ø., Gravdahl J.T.* Mamba - A Waterproof Snake Robot with Tactile Sensing // Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2014. pp. 294–301.
24. *Жилин П.А.* Теоретическая механика. Фундаментальные законы механики: учеб. Пособие // СПб.: Изд-во СПбГПУ. 2003. 340 с.
25. *Andersson S.B.* Discretization of a continuous curve // IEEE Transaction on robotics. 2008. vol. 24. no. 2. pp. 456–461.
26. *Фу К., Гонсалес Р., Лу К.* Робототехника / Пер. с англ. // Москва: Мир. 1989. 624 с.
27. *Zinkovskiy A.V., Sholuha V.A., Ivanov A.A.* Mathematical Modelling and Computer Simulation of Biomechanical Systems // World Scientific Publishing. 1997. 216 p.
28. *Иванов А.А., Шолуха В.А.* Модели опорно-двигательного аппарата человека и животных // В кн.: Математические модели и компьютерное моделирование в биомеханике: учебное пособие. Изд-во Политехн. ун-та. 2004. С.119–154.
29. *Кулаков Ф.М., Новаченко С.И., Павлов В.А.* Динамическая модель робота // В кн.: Теория, принципы устройства и применение роботов и манипуляторов. Л.: ЛПИ. 1974. С.123–126.
30. *Зенкевич С.Л., Ющенко А.С.* Основы управления манипуляционными роботами / Учебник для вузов. – 2-е изд., исправ. и доп. // Москва: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана. 2004. 480 с.
31. *Revzen S., Bhoite M., Macasieb A., Yim M.* Structure synthesis on-the-fly in a modular robot // Proceedings of IEEE International conference Intelligent Robots and Systems (IROS) 2011. pp. 4797–4802.
32. *Torres L.G., Alterovitz R.* Motion planning for concentric tube robots using mechanics-based models // Proceedings of IEEE/RSJ International conference Intelligent Robots and Systems (IROS). 2011. pp. 5153–5159.
33. *Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavdahl Ø., Gravdahl J.T.* Experimental investigation of obstacle-aided locomotion with a snake robot // Proceedings of IEEE Transactions on Robotics. 2011. vol. 99. pp. 1–8.
34. *Sato T., Kano K., Ishiguro A.* A decentralized control scheme for an effective coordination of phasic and tonic control in a snake-like robot // Bioinspiration & biomimetics. 2011. vol. 7. no. 1. pp. 016005.
35. *Johnson A. et al.* A Novel Architecture for Modular Snake Robots // Technical Report CMU-RI-TR-11-29. Carnegie Mellon Univ. 2011.

Иванов Александр Александрович — к-т техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник, Государственный научный центр Российской Федерации федеральное государственное автономное научное учреждение «Центральный научно-исследовательский институт робототехники и технической кибернетики» (ЦНИИ РТК). Область научных интересов: робототехника, биомеханика, вычислительная математика. Число научных публикаций — 150. al_ivanov@rtc.ru; Тихорецкий пр., 21, Санкт-Петербург, 194064; р.т.: +7(812)552-41-98, Факс: +7(812)556-36-92.

Шмаков Олег Александрович — начальник отдела специальной техники, Государственный научный центр Российской Федерации федеральное государственное автономное научное учреждение «Центральный научно-исследовательский институт робототехники и технической кибернетики» (ЦНИИ РТК). Область научных интересов: робототехника, мехатроника, системы управления, гиперизбыточные системы, змеевидные роботы, алгоритмы управления, наземные автономные системы, беспилотные аппараты. Число научных публикаций — 20. shmakov@rtc.ru, <http://www.rtc.ru>; Тихорецкий пр., 21, Санкт-Петербург, 194064; р.т.: +7 (921) 923-78-80, Факс: +7 (812) 556-36-92.

A.A. IVANOV., O.A. SHMAKOV

**ALGORITHM FOR DEFINING THE INNER GEOMETRY OF
A SNAKELIKE MANIPULATOR IN CASE OF LEADING LINK
MOVEMENTS ALONG THE INCREMENTAL TRAJECTORY**

Ivanov A.A., Shmakov O.A. Algorithm for defining the inner geometry of a snakelike manipulator in case of leading link movements along the incremental trajectory.

Abstract. In the paper, we have formulated the invariant description form for geometry of a spatial, kinematically redundant manipulator with the orthogonal non-coplanar axes of rotation of the joints. We have obtained the explicit equations for determining the angular coordinates from the condition that points of joints belong to the smooth parametrically given curve. Inequality constraints on the relative position of neighboring parts of the manipulator have been formulated. We have proposed an algorithm for solving equations and the method of planning changes for hinge coordinates for the movement of joints points along the spatial curve that is formed by incremental addition of target points for the head link positions of the manipulator. The method has been applied for planning movements of a hyper-redundant manipulator with a fixed root link and a snakelike robot when moving along the path built on the basis of current and forecasted positions of joints in the Cartesian space.

Keywords: snakelike manipulators; hyper-redundant manipulator; snakelike robot; angular joints coordinates; trajectory of movement.

Ivanov Aleksandr Aleksandrovich — Ph.D., associate professor, leading researcher, The Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics (RTC). Research interests: robotics, biomechanics, mathematics of computations. The number of publications — 150. al_ivanov@rtc.ru; 21, Tikhoretsky pr., Saint Petersburg, 194064; office phone: +7(812)552-41-98, Fax: +7(812)556-36-92.

Shmakov Oleg Aleksandrovich — head of special robotics department, The Russian State Scientific Center for Robotics and Technical Cybernetics (RTC). Research interests: robotics, mechatronics, control systems, hyper-redundant systems, snake-like robots, unmanned ground vehicles, unmanned aerial vehicles, robotics testing systems. The number of publications — 20. shmakov@rtc.ru, <http://www.rtc.ru>; 21, Tikhoretsky pr., Saint Petersburg, 194064; office phone: +7 (921) 923-78-80, Fax: +7 (812) 556-36-92.

References

1. Hirose S. Biologically Inspired Robots: Snake-Like Locomotors and Manipulators. Oxford University Press. 1993. pp. 1–125.
2. Umetani Y., Hirose S. Biomechanical Study of Serpentine Locomotion. Proc. 1st RoManSy Symp. '73. 1974. pp. 171–184.
3. Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavdahl Ø., Gravdahl J.T. Snake Robots Modelling, Mechatronics, and Control. Springer-Verlag London. 2013. 317 p.
4. Walker I.D., Choset H., Chirikjian G.S. Snake-Like and Continuum Robots. Springer Handbook of Robotics 2nd Edition. Springer. 2016. pp. 481–498.
5. Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavdahl Ø., Gravdahl J.T. A Review on Modelling, Implementation, and Control of Snake Robots. *Robotics and Autonomous Systems*. 2012. vol. 60. no. 1. pp. 29–40.

6. Shao L., Guo B., Wang Y., Chen X. An overview on theory and implementation of snake-like robots. Proceedings of IEEE International Conference Mechatronics and Automation (ICMA). 2015. pp. 70–75.
7. Ivanov A., Nosov V. [Kinematics of the rolling wheel-less snake-like robot]. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravljenje – Mechatronics, Automation, Control*. 2002. vol. 6. pp. 16–21 (In Russ.).
8. Ivanov A. [The method of planning forms hyper-redundant manipulator with a limited range of variation of joint coordinates]. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Serija "Informatika. Telekommunikacii. Upravljenje" – Scientific and technical sheets SPBGPU: «Informatics, Telecommunications, Control»*. 2012. vol. 6(163). pp. 112–118 (In Russ.).
9. Ivanov A., Demidov D., Shmakov O. [Mobile snake-like robots: Theory and Practice]. *Izvestija vuzov. Mashinostroenie. «Special'naja robototehnika i mehatronika». Special'nyj vypusk – Proceedings of the universities. Mechanical Engineering. "Special Robotics and Mechatronics". Special edition*. 2011. Moscow. pp. 32–41. (In Russ.).
10. Ivanov A., Shmakov O., Demidov D. [Snake-like robot SnakeLoc-3 and an experimental research its locomotion]. *Nauchno-tehnicheskie vedomosti SPbGPU. Serija "Informatika. Telekommunikacii. Upravljenje" – Scientific and technical sheets SPBGPU: «Informatics, Telecommunications, Control»*. 2012. vol. 1(164). pp. 132–138 (In Russ.).
11. Ivanov A. et al. [Modular hyper-redundant manipulator: architecture, control algorithms, implementation]. *Robototehnika i tehničeskaja kibernetika – Robotics and Technical Cybernetics*. 2014. vol. 2(3). pp. 55–60 (In Russ.).
12. Siciliano B., Khatib O. Springer Handbook of Robotics. Springer. 2008. 1611 p.
13. Roa D., Melo K. Mechanical Stability Margin for Scouting Poses in Modular Snake Robots. Proceedings of IEEE International Symposium on Safety, Security and Rescue Robotics 2016. pp. 182–188.
14. Melo K. Modular Snake Robot Velocity for Side-Winding Gaits. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2015. pp. 3716–3722.
15. Nor N.M., Ma S. CPG-based Locomotion Control of a Snake-like Robot for Obstacle Avoidance. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics & Automation. 2014. pp. 347–352.
16. Gray J. The mechanism of locomotion in snakes. *Journal of Experimental Biology*. 1946. vol. 23. no. 2. pp. 101–120.
17. Ivanov A. [Analysis of 2 DoF design configurations mechatronic module for snake-like robot]. *Jekstremal'naja robototehnika. Sbornik dokladov mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoj konferencii. – Extreme Robotics. Proceedings of the International Scientific and Technical Conference*. 2011. pp.104-110. (In Russ).
18. Wright C. et al. Design of a modular snake robot. Proceedings of IEEE/RSJ International Conference Intelligent Robots and Systems. 2007. pp. 2609–2614.
19. Wright C. et al. Design and Architecture of the Unified Modular Snake Robot. Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2012. pp. 4347–4354.
20. Rollinson D., Ford S., Brown B., Choset H. Design and Modeling of a Series Elastic Element for Snake Robots. Proceedings of ASME Dynamic Systems and Control Conference (DSCC). 2013. pp. V001T08A002–V001T08A002.
21. Boyle J.H., Johnson S., Deghani-Sanij A.A. Adaptive Undulatory Locomotion of a C. elegans Inspired Robot. TMECH. 2013. pp. 439–448.
22. Rollinson D. et al. Design and architecture of a series elastic snake robot. Proceedings of IEEE/RSJ international conference Intelligent Robots and Systems (IROS 2014). 2014. pp. 4630–4636.

23. Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavadahl Ø., Gravdahl J.T. Mamba - A Waterproof Snake Robot with Tactile Sensing. Proceedings of IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2014. pp. 294–301.
24. Zhilin P. *Teoreticheskaja mehanika. Fundamental'nye zakony mehaniki*. [Theoretical Mechanics. The fundamental laws of mechanics]. SPbGPU publ. 2003. 340 p. (In Russ).
25. Andersson S.B. Discretization of a continuous curve. IEEE Transaction on robotics. 2008. vol. 24. no. 2. pp. 456–461.
26. Fu K.S., Gonzalez R.C., Lee C.S.G. *Robotics: Control, Sensing, Vision and Intelligence*. McGraw-Hill Book Company. 1987. 580 p. (Russ. ed.: Fu K., Gonsales R., Li K. *Robototehnika*. Moscow. Mir Publ. 1989. 624 p.)
27. Zinkovsky A.V., Sholuha V.A., Ivanov A.A. *Mathematical Modelling and Computer Simulation of Biomechanical Systems*. World Scientific Publishing. 1997. 216 p.
28. Ivanov A., Sholuha V. [Models of the locomotor apparatus of man and animals]. *Matematicheskie modeli i komp'yuternoe modelirovanie v biomehanike: uchebnoe posobie – Mathematical models and computer simulations in biomechanics: a tutorial*. Saint-Petersburg. SPbGPU. 2004. pp.119–154. (In Russ).
29. Kulakov F., Novachenko S., Pavlov V. [Dynamic model of robot]. *Teorija, principy ustrojstva i primenenie robotov i manipulatorov – The theory, principles of design and application of robots and manipulators*. Leningrad. LPI. 1974. pp. 123–126.
30. Zenkevich S., Jushhenko A. *Osnovy upravlenija manipuljacionnymi robotami* [Basics of control manipulator robots]. Moscow. MGТУ im. Baumana. 2004. 480 p. (In Russ).
31. Revzen S., Bhoite M., Macasieb A., Yim M. Structure synthesis on-the-fly in a modular robot. Proceedings of IEEE International conference Intelligent Robots and Systems (IROS) 2011. pp. 4797–4802.
32. Torres L.G., Alterovitz R. Motion planning for concentric tube robots using mechanics-based models. Proceedings of IEEE/RSJ International conference Intelligent Robots and Systems (IROS). 2011. pp. 5153–5159.
33. Liljebäck P., Pettersen K.Y., Stavadahl Ø. Gravdahl J.T. Experimental investigation of obstacleaided locomotion with a snake robot. Proceedings of IEEE Transactions on Robotics. 2011. vol. 99. pp. 1–8.
34. Sato T., Kano K., Ishiguro A. A decentralized control scheme for an effective coordination of phasic and tonic control in a snake-like robot. *Bioinspiration & biomimetics*. 2011. vol. 7. no. 1. pp. 016005.
35. Johnson A. et al. A Novel Architecture for Modular Snake Robots. Technical Report CMU-RI-TR-11-29. Carnegie Mellon Univ. 2011.