

И.С. ПОЛЯНСКИЙ
**БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ ПУАССОНА —
 РИМАНА**

Полянский И.С. Бариеентрические координаты Пуассона — Римана.

Аннотация. В статье выполнено решение задачи нахождения барицентрических координат для произвольных односвязных замкнутых дискретных областей, заданных в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . Барицентрические координаты задаются набором скалярных параметров, однозначно определяющих точку аффинного пространства внутри односвязной замкнутой дискретной области через заданный точечный базис. Точечный базис задается вершинами односвязной замкнутой дискретной области. Определяемые барицентрические координаты для односвязной замкнутой дискретной области являются гармоническими и удовлетворяют свойствам аффинной инвариантности, положительной определенности и равенстве единице. Решение основано на теореме Римана о единственности конформного отображения и интегральной формуле Пуассона для шара. Приведены примеры аппроксимации потенциала внутри произвольных односвязных замкнутых дискретных областей по предложенному методу в сравнении с аппроксимацией методом конечных элементов.

Ключевые слова: гармонические барицентрические координаты, интеграл Пуассона, односвязная замкнутая дискретная область.

1. Введение. Применение барицентрических координат (БК) распространяется на эффективное численное решение широкого класса краевых задач математической физики в постановке барицентрического метода [1] и метода конечных ячеек [2, 3]. Барицентрические координаты задаются набором скалярных параметров $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N$, однозначно определяющих точку P аффинного пространства через заданный точечный базис P_1, P_2, \dots, P_N . Для БК аффинное пространство с заданным точечным базисом обобщает аффинные свойства Евклидова пространства \mathbb{R}^n ($n \geq 2$) в дискретной односвязной замкнутой области Ω . Точечный базис задан N вершинами Ω . Основная особенность нахождения БК заключается в том, что в общем случае $N-1 \geq n$. При этом для $N-1 > n$ неполнота формируемой системы линейных уравнений [4] при сопоставлении прямоугольных координат Евклидова пространства \mathbb{R}^n затрудняет обобщение некоторых свойств БК при $N-1 = n$ из геометрии масс [5]. Для устранения указанной особенности при сохранении свойств аффинной инвариантности
$$\sum_{j=1}^N \zeta_j(P) P_j = P, \quad \text{положительной}$$

определенности $\zeta_j \geq 0$ ($j = \overline{1, N}$) и равенстве единице $\sum_{j=1}^N \zeta_j = 1$ БК в [6] определено, что БК должны быть гармоническими $\Delta \zeta_j = 0$. Краткий обзор существующих методов определения БК с представлением дополнительных решений проведен в [7, 8].

На сегодняшний момент известны следующие основные методы определения БК [7]:

1) Wachspress (WP) координаты — одни из первых БК, введенные для выпуклых Ω [9];

2) Mean value coordinates (MVC) — БК, введенные Флотером [10] для произвольного Ω без самопересечений, и Positive (положительные) MVC (PMVC) [11];

3) Gordon-Wixom (GP) [12] и Positive (положительные) GP (PGP) координаты [13];

4) Maximum entropy coordinates (максимальной энтропии — MCE) [14];

5) Moving least squares coordinates (перемещающихся наименьших квадратов — MLSC) [15];

6) Poisson coordinates (БК Пуассона — PC) [7, 8, 16].

Беляевым в [6] доказано, что ни WP, ни MVC БК не являются псевдогармоническими. Бариецентрические координаты GP, PGP, MCE, MLSC являются всегда положительными и гладкими, однако их определение для произвольной точки $P \in \Omega$ сопряжено со значительными вычислительными затратами. Подробное сравнение GP, PGP, MCE, MLSC БК выполнено в [17] при этом указано, что они являются псевдогармоническими. В [16] показано, что БК PC псевдогармонические.

Таким образом, существующие методы позволяют в лучшем случае определять псевдогармонические БК для выпуклой Ω , заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 . При этом в большинстве случаев предполагается [8, 18], что грани области Ω в \mathbb{R}^3 при определении БК заданы в виде треугольников. В работе [19] предложено решение по определению сферических БК (Spherical barycentric coordinates — SBC) для области Ω в \mathbb{R}^3 с произвольными гранями. Однако SBC не являются гармоническими. Вышеизложенное приводит к ограничению барицентрического метода [1] и метода конечных ячеек [2, 3] и к возникновению ошибок интерполяции [20] при применении известных методов нахождения БК для Ω при решении задач математической физики.

Целью настоящей работы является определение методов нахождения гармонических БК для дискретной односвязной замкнутой области Ω , заданной в \mathbb{R}^2 и \mathbb{R}^3 .

2. Бариецентрические координаты Пуассона — Римана для многоугольника. В [6] предложено обобщение БК для Ω с конечным множеством вершин до непрерывных (трансфинитных [21]) БК односвязной области $\tilde{\Omega}$ с непрерывной замкнутой границей $\tilde{\Gamma}$. Трансфинитные БК определяются некоторой вещественной функцией ядра $H(\zeta, P)$, где $\zeta \in \tilde{\Gamma}$, $P \in \tilde{\Omega}$. Аппроксимация потенциала $\Phi(P)$ в $\tilde{\Omega}$ задается средневзвешенным значением:

$$\Phi(P) = \oint_{\tilde{\Gamma}} H(\zeta, P) \Phi(\zeta) dS(\zeta), \quad (1)$$

где $dS(\zeta)$ — элемент площади $\tilde{\Omega}$.

Согласно [6] ядро $H(\zeta, P)$ должно быть гладким и удовлетворять требованиям: 1) положительной определенности $H(\zeta, P) \geq 0$; 2) равенства единице $\oint_{\tilde{\Gamma}} H(\zeta, P) dS(\zeta) = 1$; 3) линейной прецессии $\oint_{\tilde{\Gamma}} \zeta H(\zeta, P) dS(\zeta) = P$.

Одним из основных свойств $H(\zeta, P)$ при формировании БК является:

$$\oint_{\tilde{\Gamma}} (\zeta - P) H(\zeta, P) dS(\zeta) = 0. \quad (2)$$

С одной стороны, известно, что ядро $H(\zeta, z)$, задающее гармоническую аппроксимацию для единичного круга B'_P , называется ядром Пуассона и задается для (1) соотношением [16]

$$H(\zeta, z) = |\zeta - z|^{-2}. \quad (3)$$

С другой стороны, одним из важных свойств конформных отображений [22, 23] является сохранение гармоничности некоторой функции. С учетом теоремы Римана об отображении для односвязной

области $\tilde{\Omega}$ существует голоморфная функция f на единичном круге B'_p , отображающая его на $\tilde{\Omega}$ взаимно однозначно.

Указанные соображения позволяют определить для $\Omega \subset \mathbb{C}$ (нумерация вершин $P_j = r_j e^{i\varphi_j}$ задана в порядке положительного обхода $\Omega : \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$) БК Пуассона — Римана, являющиеся гармоническими $\Delta \zeta_j = 0$ ($j = \overline{1, N}$) и удовлетворяющие для произвольного Ω в \mathbb{R}^2 требованиям [7].

Теорема 1. Бариецентрические координаты $\zeta_j(P)$ ($j = \overline{1, N}$) для $\Omega \subset \mathbb{C}$ с вершинами $P_j = r_j e^{i\varphi_j}$ при $\varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_N$ определяются выражением:

$$\zeta_j(P) = \frac{w_j(P)}{\sum_{j=1}^N w_j(P)}; \quad (4)$$

$$w_j(P) = \frac{|\overline{PP'_{j-1}}| - |\overline{PP'_j}| \cos \phi_{j-1}}{|\overline{PP'_j}| \sin \phi_{j-1}} + \frac{|\overline{PP'_{j+1}}| - |\overline{PP'_j}| \cos \phi_{j-1}}{|\overline{PP'_j}| \sin \phi_{j-1}}.$$

В выражении (4) $P'_j = e^{i\varphi_j} + \kappa$ — прообразы вершин P_j многоугольника Ω при его конформном отображении на единичный круг $B'_p = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| < 1\}$ с центром в $\kappa = P - P'$ при $\overline{PP'_{j-1}} \cdot \overline{PP'_{j-1}} = \overline{PP'_j} \cdot \overline{PP'_j} = \overline{PP'_{j+1}} \cdot \overline{PP'_{j+1}} = 0$; P' — точка, заданная конформным отображением $P \in \Omega$ на единичный круг с центром в 0.

Доказательство. Пусть точки $P'_j = e^{i\varphi_j} + \kappa$, расположенные на единичной окружности $\partial B'_p \subset \mathbb{C}$ с центром в κ , являются прообразами вершин P_j многоугольника Ω при его конформном отображении на единичный круг $B'_p = \{z \in \mathbb{C} : |z - \kappa| < 1\}$. При этом точки P'_j расположены так, что $\overline{PP'_{j-1}} \cdot \overline{PP'_{j-1}} = \overline{PP'_j} \cdot \overline{PP'_j} = \overline{PP'_{j+1}} \cdot \overline{PP'_{j+1}} = 0$ (рисунок 1), а прямое и обратное конформное отображение задают некоторые функции $f : B'_p \rightarrow \Omega$ и $F : \Omega \rightarrow B'_p$.

Тогда из (1), (2) и теоремы о циркуляции для $H(\tau, P) = \left| 1 - e^{i\tau} \bar{P} \right|^{-2}$ следует:

$$\int_0^{2\pi} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') d\tau = 0;$$

$$\int_{\varphi'_{j-1}}^{\varphi'_j} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') = \bar{r}_{j-1}; \quad \int_{\varphi'_j}^{\varphi'_{j+1}} (e^{i\tau} - P') H(\tau, P') = \bar{r}_j, \quad (5)$$

где \bar{r}_{j-1}, \bar{r}_j — внешние нормали к соответствующим дугам $e'_{j-1} = \{P'_{j-1}, P'_j\}$, $e'_j = \{P'_j, P'_{j+1}\}$ единичной окружности $\partial B'_P$ (рисунок 1).

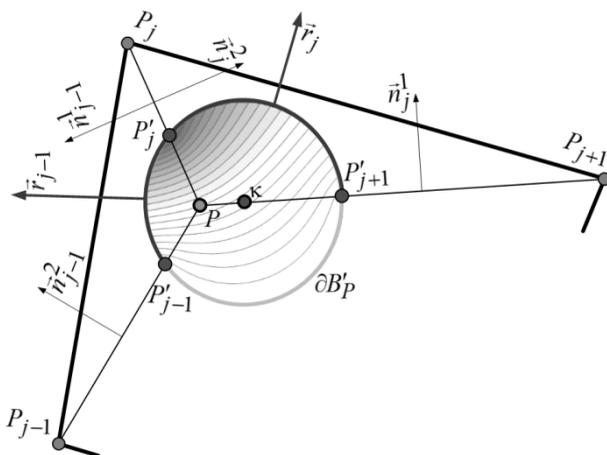


Рис. 1. Геометрия задачи определения БК Пуассона — Римана

С учетом свойств БК [7] определим значение для j -й граничной функции $\Phi_j(\tau)$, поставленное в соответствие $\zeta_j(z)$, для $\tau \in \partial B'_P$, $z \in B'_P$ с учетом правила:

$$\Phi_j(\tau) = \begin{cases} (\tau - \varphi'_{j-1}) / \varphi_j'^{\Delta} & \text{if } \varphi'_{j-1} \leq \tau \leq \varphi'_j; \\ (\varphi'_{j+1} - \tau) / \varphi_{j+1}'^{\Delta} & \text{if } \varphi'_j < \tau \leq \varphi'_{j+1}; \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \quad (6)$$

где $\varphi_j'^{\Delta} = \varphi'_j - \varphi'_{j-1}$.

Из (1), (6) при $\varphi'_{j+1} \leq \tau \wedge \tau \leq \varphi'_{j-1}$: $\Phi_j(\tau) = 0$,
 $H(\tau, P) = |1 - e^{i\tau \bar{P}}|^{-2}$ интеграл:

$$\zeta_j(z) = \frac{1 - |z - \kappa|^2}{2\pi} \int_{\varphi'_{j-1}}^{\varphi'_{j+1}} \Phi_j(\tau) H(\tau, z - \kappa) d\tau \quad (7)$$

определяет $\zeta_j(z)$, где $z \in B'_P$.

Поскольку (7) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta \zeta_j(z) = 0$ при $z \in B'_P$ для граничных условий (6), то подставив определение $z = F(P)$ в $\Delta \zeta_j(z) = 0$ и применив правило дифференцирование сложных функций, получим:

$$\Delta \zeta_j(z) = \Delta \zeta_j(P) |F'(P)|^2 = 0, \quad (8)$$

что $\zeta_j(P)$ является решением уравнения Лапласа $\Delta \zeta_j(P) = 0$ для Ω .

Известно [24], что $\zeta_j(P)$ может быть задана $\zeta_j(P) = w_j(P) / \sum_{j=1}^N w_j(P)$ через однородные весовые функции $w_j(P)$.

Для дискретного случая (2) $w_j(P)$ условия (5) запишутся в виде:

$$\sum_{j=1}^N w_j(P) (P_j - P) = 0; \quad \frac{w_{j-1}(P) \overline{PP}_{j-1} + w_j(P) \overline{PP}_j}{|w_{j-1}(P) \overline{PP}_{j-1} + w_j(P) \overline{PP}_j|} = \frac{\bar{r}_{j-1}}{|\bar{r}_{j-1}|}; \quad (8)$$

$$\frac{w_j(P) \overline{PP}_j + w_{j+1}(P) \overline{PP}_{j+1}}{|w_j(P) \overline{PP}_j + w_{j+1}(P) \overline{PP}_{j+1}|} = \frac{\bar{r}_j}{|\bar{r}_j|}.$$

По правилу параллелограмма через пару векторов \overline{PP}_{j-1} , \overline{PP}_j можно представить вектор \vec{r}_{j-1} соотношением:

$$\vec{r}_{j-1} = u_{j-1}^1 \overline{PP}_{j-1} + u_{j-1}^2 \overline{PP}_j, \quad (9)$$

где u_{j-1}^1 , u_{j-1}^2 — некоторые коэффициенты.

Из (8), (9) и теоремы о среднем следует, что $w_j(P)$ может быть задана суммой коэффициентов:

$$w_j(P) = u_{j-1}^1 + u_j^2, \quad (10)$$

при определении $w_j(P)$ в качестве средневзвешенного значения точки $P \in \Omega$ по отношению к вершине P_j [24].

Из того, что вектора \vec{r}_{j-1} , \vec{r}_j определяются через единичные нормали соответствующих треугольных областей [4] и (9) следует, что коэффициенты u_{j-1}^1 и u_j^2 могут быть определены в виде:

$$u_{j-1}^1 = \vec{r}_{j-1} \vec{n}_{j-1}^2 / (\overline{PP}_j \vec{n}_{j-1}^2); \quad u_j^2 = \vec{r}_j \vec{n}_j^1 / (\overline{PP}_j \vec{n}_j^1). \quad (11)$$

Используя определение единичных нормалей $\vec{n}_{j-1}^2 = \vec{N}_{j-1}^2 / |\vec{N}_{j-1}^2|$, $\vec{n}_j^1 = \vec{N}_j^1 / |\vec{N}_j^1|$ при нормировке приведем (11) к виду:

$$\begin{aligned} u_{j-1}^1 &= (d_j \vec{N}_{j-1}^1 \vec{N}_{j-1}^2 / |\vec{N}_{j-1}^1| + d_{j-1} |\vec{N}_{j-1}^2|) / (\overline{PP}_{j-1} \wedge \overline{PP}_j); \\ u_j^2 &= (d_j \vec{N}_j^1 \vec{N}_j^2 / |\vec{N}_j^2| + d_{j+1} |\vec{N}_j^1|) / (\overline{PP}_j \wedge \overline{PP}_{j+1}), \end{aligned} \quad (12)$$

где:

$$\vec{N}_{j-1}^1 = \begin{pmatrix} y_j - y \\ x - x_j \end{pmatrix} \overline{PP}_{j-1} \wedge \overline{PP}_j; \quad \vec{N}_j^1 = \begin{pmatrix} y_{j+1} - y \\ x - x_{j+1} \end{pmatrix} \overline{PP}_j \wedge \overline{PP}_{j+1}; \quad (13)$$

$$\vec{N}_{j-1}^2 = \begin{pmatrix} y - y_{j-1} \\ x_{j-1} - x \end{pmatrix} \overline{PP}_{j-1} \wedge \overline{PP}_j; \quad \vec{N}_j^2 = \begin{pmatrix} y_j - y \\ x - x_j \end{pmatrix} \overline{PP}_j \wedge \overline{PP}_{j+1}. \quad (14)$$

В выражениях (13), (14) \wedge — внешнее произведение векторов в \mathbb{R}^2 . Подставив в (12) выражения (13), (14) получим:

$$\begin{aligned}
u_{j-1}^1 &= \frac{d_{j-1} \left| \overline{PP'}_{j-1} \right| \left| \overline{PP'}_j \right| - d_j \overline{PP'}_{j-1} \overline{PP'}_j}{\left| \overline{PP'}_j \right| \left| \overline{PP'}_{j-1} \wedge \overline{PP'}_j \right|}; \\
u_j^2 &= \frac{d_{j+1} \left| \overline{PP'}_{j+1} \right| \left| \overline{PP'}_j \right| - d_j \overline{PP'}_j \overline{PP'}_{j+1}}{\left| \overline{PP'}_j \right| \left| \overline{PP'}_j \wedge \overline{PP'}_{j+1} \right|}.
\end{aligned} \tag{15}$$

С учетом равенств $\cos \phi_j = \overline{PP'}_j \overline{PP'}_{j+1} \left| \overline{PP'}_j \right|^{-1} \left| \overline{PP'}_{j+1} \right|^{-1}$;
 $d_j = \overline{PP'}_j \overline{PP'}_j / \left| \overline{PP'}_j \right|$; $\sin \phi_j = \overline{PP'}_j \wedge \overline{PP'}_{j+1} \left| \overline{PP'}_j \right|^{-1} \left| \overline{PP'}_{j+1} \right|^{-1}$
представим (15) соотношением:

$$u_{j-1}^1 = \frac{\left| \overline{PP'}_{j-1} \right| - \left| \overline{PP'}_j \right| \cos \phi_{j-1}}{\left| \overline{PP'}_j \right| \sin \phi_{j-1}}; \quad u_j^2 = \frac{\left| \overline{PP'}_{j+1} \right| - \left| \overline{PP'}_j \right| \cos \phi_j}{\left| \overline{PP'}_j \right| \sin \phi_j}. \tag{16}$$

Подставив (16) в (10) получим соотношение (4), что и требовалось доказать.

Полученное соотношение (4) согласуется с результатами [24-26], обобщающими представление БК.

Определение БК $\zeta_j(P)$ Пуассона — Римана по правилу (4) допустимо, если $\arg(\overline{PP'}_{j-1}) < \arg(\overline{PP'}_j) < \arg(\overline{PP'}_{j+1})$. В противном случае для некоторых точек $P \in \Omega$ вогнутых Ω с учетом свойств конформного отображения (8) и выражений (6), (7) БК $\zeta_j(P)$ Пуассона — Римана задаются следующим образом.

Следствие 1. Для $\Omega \subset \mathbb{C}$ весовые функции $w_j(P)$ БК $\zeta_j(P)$ Пуассона–Римана в точке $P \in \Omega$ определяются соотношением:

$$w_j(P) = D_j(P) + G_j(P), \tag{17}$$

где при $\varphi_j^{\Delta} = \varphi'_j - \varphi'_{j-1}$ и $b_j = e^{i\varphi_j^{\Delta}}$ параметры $D_j(P)$ и $G_j(P)$ определяются выражениями:

$$D_j(P) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\Phi'_{j-1}}{\Delta\Phi'_j} C_{j-1}(P) + \frac{\Phi'_{j+1}}{\Delta\Phi'_{j+1}} C_{j+1}(P) - \frac{\Phi'_{j+1}\Delta\Phi'_j + \Phi'_{j-1}\Delta\Phi'_{j+1}}{\Delta\Phi'_{j+1}\Delta\Phi'_j} C_j(P) \right];$$

$$G_j(P) = \frac{1 - |F(P)|^2}{2\pi\Delta\Phi'_{j+1}\Delta\Phi'_j} \left[\Delta\Phi'_{j+1} \int_{\Phi'_j}^{\Phi'_{j+1}} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} F(z)|^2} d\tau - \Delta\Phi'_j \int_{\Phi'_{j-1}}^{\Phi'_j} \frac{\tau}{|1 - e^{i\tau} F(z)|^2} d\tau \right];$$

$$C_j(P) = \arctg \frac{|F(P)| (b_j (1 + |F(P)|) - F(P)) - F(P)}{i (|F(P)| (b_j (1 - |F(P)|) - F(P)) + F(P))}.$$

С учетом заданных соотношений и геометрических представлений по формированию гармонических БК в \mathbb{R}^2 определим решение задачи в \mathbb{R}^3 .

3. Бариецентрические координаты Пуассона — Римана для многогранника с произвольными гранями. Геометрия задачи определения БК Пуассона—Римана для Ω в \mathbb{R}^3 представлена на рисунке 2.

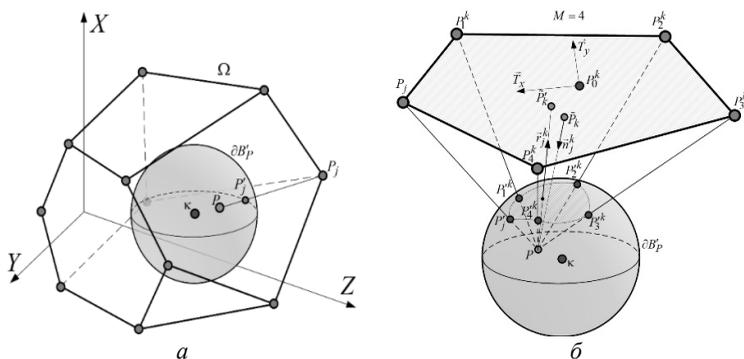


Рис. 2. Геометрическое представление определения проекции граней произвольного многогранника Ω на сегмент E_j единичной сферы ∂B_P для бариецентрических координат Пуассона — Римана

Основной момент нахождения БК $\zeta_j(P)$ для произвольной $P \in \Omega$ связан [3, 19] с проекцией K граней $E_j^k = \{P_j, P_1^k, \dots, P_M^k\}$, $k = \overline{1, K}$ многогранника Ω на соответствующие сегменты $E_j^{k'} = \{P_j', P_1^{k'}, \dots, P_M^{k'}\}$, единичной сферы $\partial B_p'$ с центром в κ (рисунок 2,б). Набор граней E_j^k формируют грани Ω , содержащие вершину P_j . Переменная $M+1$ определяет число вершин грани E_j^k . Точки $P_j', P_1^{k'}, \dots, P_M^{k'}$ — прообразы вершин P_j, P_1^k, \dots, P_M^k грани E_j^k многогранника Ω при его конформном отображении на единичный шар B_p' с центром в $\kappa = P - P'$ при $\overline{PP'}_j \cdot \overline{PP'}_j = \overline{PP'}_1^k \cdot \overline{PP'}_1^k = \dots = \overline{PP'}_M^k \cdot \overline{PP'}_M^k = 0$; P' — точка, заданная конформным отображением $P \in \Omega$ на единичный шар с центром в 0.

Теорема 2. Бариецентрические координаты $\zeta_j(P)$ ($j = \overline{1, N}$) для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с вершинами P_j определяются выражением:

$$\zeta_j(P) = w_j(P) / \sum_{j=1}^N w_j(P); \quad w_j(P) = \sum_{k=1}^K \tilde{\zeta}_j^k(P) \frac{\vec{r}_j^k \vec{n}_j^k}{|P - \tilde{P}_k| |\vec{r}_j^k|}, \quad (18)$$

где $\tilde{\zeta}_j^k(P)$ — бариецентрическая координата многоугольника E_j^k относительно точки \tilde{P}'_k проекции $P \in \Omega$ на грань E_j^k в направлении вектора \vec{r}_j^k внешней нормали к сегменту $E_j^{k'}$; $\vec{n}_j^k = \overline{P_j P_1^k} \times \overline{P_j P_M^k} / \left| \overline{P_j P_1^k} \times \overline{P_j P_M^k} \right|$ — единичная внутренняя нормаль к E_j^k ; $\tilde{P}_k = P - \vec{n}_j^k \left[(P - P_0^k) \vec{n}_j^k \right]$ — точка проекции $P \in \Omega$ на грань E_j^k ; $P_0^k = \frac{1}{M+1} \left(P_j + \sum_{m=1}^M P_m^k \right)$.

Доказательство. С учетом (8) и обобщении (5), (6) в \mathbb{R}^3 и сохранения гармоничности функции $\zeta_j(P)$ при конформном

отображение $F: \Omega \rightarrow B'_P$ требования к $w_j(P)$ для произвольного многогранника Ω примут вид:

$$\sum_{j=1}^N w_j(P)(P_j - P) = 0; \quad \frac{w_j(P)\overline{PP}_j + \sum_{m=1}^M w_{j,k}^m(P)\overline{PP}_m^k}{\left| w_j(P)\overline{PP}_j + \sum_{m=1}^M w_{j,k}^m(P)\overline{PP}_m^k \right|} = \frac{\vec{r}_j}{|\vec{r}_j|}, \quad (19)$$

где $k = \overline{1, K}$; $w_{j,k}^m(P)$ — весовые функции вершин P_m^k .

С одной стороны, с учетом свойств барицентрических координат, заданных для многоугольника E_j^k , определим вектор \vec{r}_j^k аффинным преобразованием:

$$\vec{r}_j^k = \zeta_j^k(P)\overline{PP}_j^k + \sum_{m=1}^M \zeta_{j,k}^m(P)\overline{PP}_m^k, \quad (20)$$

где $\zeta_j^k(P)$, $\zeta_{j,k}^m(P)$ — БК в плоскости многоугольника E_j^k .

Для того чтобы равенство (20) выполнялось, БК $\zeta_j^k(P)$, $\zeta_{j,k}^m(P)$ должны быть определены в точке $\tilde{P}'_k = (x'_k, y'_k)$ проекции $P \in \Omega$ на грань E_j^k в направлении вектора \vec{r}_j^k :

$$x'_k = (\tilde{P}'_k - P_0^k)\vec{T}_x; \quad y'_k = (\tilde{P}'_k - P_0^k)\vec{T}_y; \quad \tilde{P}'_k = P - \vec{r}_j^k \left[(P - P_0^k)\vec{r}_j^k \right], \quad (21)$$

где \vec{T}_x , \vec{T}_y — единичные векторы, задающие ориентацию соответствующих координатных осей \overline{OX} и \overline{OY} в плоскости грани E_j^k .

С другой стороны, вектор \vec{r}_j^k может быть задан через единичные нормали $\vec{n}_{j,k}^m$ граней (рисунок 2) пирамиды $\Delta(P, P_j, P_1^k, \dots, P_M^k)$ с вершиной в P и основанием $(P_j, P_1^k, \dots, P_M^k)$ выражением:

$$\vec{r}_j^k = \sum_{m=1}^M d_{j,k}^m \vec{n}_{j,k}^m, \quad (22)$$

где $\vec{n}_{j,k}^1, \vec{n}_{j,k}^2, \dots, \vec{n}_{j,k}^M$ — орты нормалей к соответствующим граням $(P, P_j, P_1^k), (P, P_1^k, P_2^k), \dots, (P, P_M^k, P_j)$ пирамиды $\Delta(P, P_j, P_1^k, \dots, P_M^k)$; $d_{j,k}^1, d_{j,k}^m, \dots, d_{j,k}^m$ — площади секторов единичного круга, образованного сечением шара B'_P соответствующими гранями $(P, P_j, P_1^k), (P, P_1^k, P_2^k), \dots, (P, P_M^k, P_j)$ пирамиды $\Delta(P, P_j, P_1^k, \dots, P_M^k)$.

Объединив (19), (20) и (22) получим выражение:

$$w_j(P) = \sum_{k=1}^K \zeta_j^k(P) \frac{\vec{r}_j^k \vec{n}_j^k}{|P - \tilde{P}_k| |\vec{r}_j^k|}, \quad (23)$$

соответствующее исходному (18), что и требовалось доказать.

В заданном геометрическом представлении (рисунок 2) при конформном отображении $F: \Omega \rightarrow B'_P$ координаты точек P'_j прообразов вершин P_j является корнями системы трех уравнений пересечения вектора \overline{PP}_j с единичной сферой $\partial B'_P$. Корнями этой системы уравнений являются координаты:

$$\begin{aligned} x'_j &= \frac{(x \operatorname{tg} \varphi + \kappa_3 - z) \operatorname{tg} \varphi + (x \operatorname{tg} \theta + \kappa_2 - y) \operatorname{tg} \theta + \kappa_1 \pm \sqrt{D}}{\operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi + 1}; \\ y'_j &= (x'_j - x) \operatorname{tg} \theta + y; \quad z'_j = (x'_j - x) \operatorname{tg} \varphi + z, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= (x_j - y) / (y_j - x); \quad \operatorname{tg} \varphi = (z_j - z) / (x_j - x); \\ D &= \operatorname{tg}^2 \theta + \operatorname{tg}^2 \varphi + 1 - [(z - \kappa_3) \operatorname{tg} \theta - (y - \kappa_2) \operatorname{tg} \varphi]^2 - \\ &- [(x - \kappa_1) \operatorname{tg} \varphi - (z - \kappa_3)]^2 - [(x - \kappa_1) \operatorname{tg} \theta - (y - \kappa_2)]^2, \\ &\text{при } P = (x, y, z); \quad P_j = (x_j, y_j, z_j). \end{aligned} \quad (25)$$

Из пары корней (24) точка, соответствующая P'_j , выбирается аналогично двумерному решению [7]: из условия минимального расстояния до вершины P_j .

На рисунке 3 приведены примеры аппроксимации скалярного потенциала БК Пуассона — Римана и кусочно-линейными функциями (методом конечных элементов, дискретизация области выполнена путем разбиения на 400 треугольных элементов) внутри вогнутой области Ω в случае задание значения потенциала единицы в одной вершине и нулю для всех остальных.

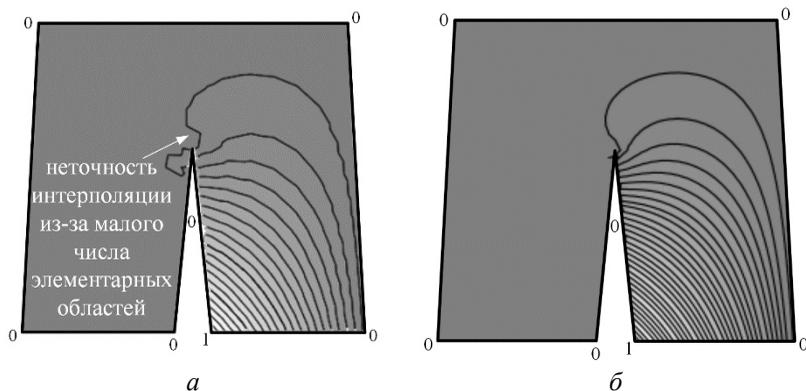


Рис. 3. Пример аппроксимации потенциала внутри вогнутого многоугольника: *а* – методом конечных элементов; *б* – БК Пуассона–Римана

На рисунке 4 представлены примеры аппроксимации потенциала внутри куба БК Пуассона — Римана в случае равенства минус единицы его значений для одной вершины и нулю для всех остальных.

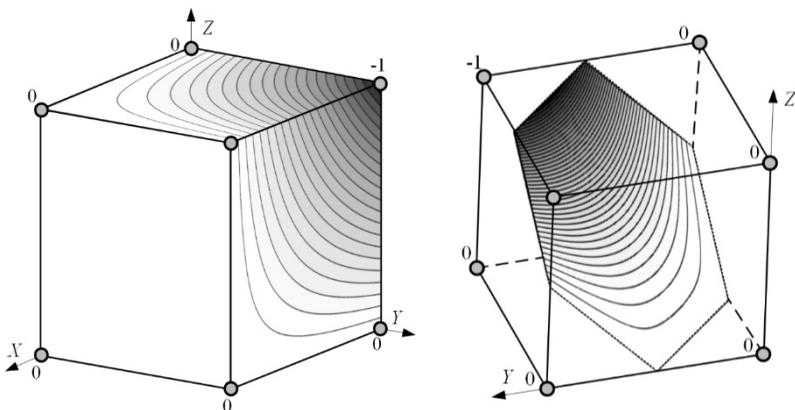


Рис. 4. Аппроксимация потенциала барицентрическими координатами Пуассона — Римана внутри куба

4. Заключение. Полученные соотношения (4), (17) позволяют определить БК, являющиеся с учетом теоремы Римана о единственности конформного отображения гармоническими для Ω в \mathbb{R}^2 . С позиции вычислительных затрат критическим является построение обратного конформного отображения $F: \Omega \rightarrow B'_p$ [22] и

вычисление интегралов вида $\int_a^b \tau / |1 - e^{i\tau/t}|^2 d\tau$ в (16) в точках $P \in \Omega$,

для которых условие $\arg(\overline{PP'_{j-1}}) < \arg(\overline{PP'_j}) < \arg(\overline{PP'_{j+1}})$ не выполняется. Однако в сравнении с кусочно-линейной аппроксимацией вычислительные затраты определения БК Пуассона — Римана значительно ниже. Это связано с тем, что для получения требуемой точности аппроксимации БК Пуассона — Римана не требуют применения дополнительных процедур дискретизации Ω на как можно большее число элементарных подобластей (рисунок 3).

Заданное выражение (18) позволяет определить БК Пуассона—Римана для Ω в \mathbb{R}^3 с произвольными гранями. При этом если многогранник вогнутый, то БК $\tilde{\zeta}_j^k(P)$ в точке \check{P}'_k проекции P для грани E_j^k , представленной вогнутым многоугольником, определяются с учетом правил (4), (17).

Литература

1. *Архипов Н.С., Полянский И.С., Степанов Д.Е.* Бариецентрический метод в задачах анализа поля в регулярном волноводе с произвольным поперечным сечением // Антенны. 2014. № 10. С. 10–21.
2. *Duczek S., Gabbert U.* The finite cell method for polygonal meshes: poly-FCM // Computational Mechanics. 2016. vol. 58. pp. 587–618.
3. *Kraus M., Steinmann P.* Finite element formulations for 3D convex polyhedra in nonlinear continuum mechanics // International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics. 2012. vol. 19. pp. 121–134.
4. *Голованов Н.Н.* Геометрическое моделирование // Москва: Изд-во физ.-мат. лит. 2002. 472 с.
5. *Балк М.Б., Болтянский В.Г.* Геометрия масс // М.: Наука. 1973. 197 с.
6. *Belyaev A.* On Transfinite Barycentric Coordinates // Proc. Fourth Eurographics Symp. Geometry Processing (SGP '06). 2006. pp. 89–99.
7. *Полянский И.С.* Бариецентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 1) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 30–36.
8. *Полянский И.С.* Бариецентрические координаты Пуассона для многомерной аппроксимации скалярного потенциала внутри произвольной области (Часть 2) // Вестник СГТУ. 2015. № 1(78). С. 36–42.
9. *Wachspress E.L.* A Rational Finite Element Basis // New York: Academic Press. 1975. 331 p.

10. *Michael S. Floater* Mean value coordinates // *Computer Aided Geometric Design*. 2003. vol. 1(20). pp. 19–27.
11. *Lipman Ya., Kopf J., Cohen-Or D., Levin D.* In A. Belyaev and M. Garland editors. GPU-assisted Positive Mean Value Coordinates for Mesh Deformations // *Geometry Processing, Eurographics Symposium Proceedings*. 2007. pp. 117–123.
12. *Gordon W.J., Wixom J.A.* Pseudo-harmonic interpolation on convex domains // *SIAM J. Numer. Anal.* 1974. vol 11. pp. 909–933.
13. *Manson J., Li K., Schaefer S.* Positive Gordon-Wixom Coordinates. *Computer Aided Design*. 2011. vol. 43. no. 11. pp. 1422–1426.
14. *Hormann K., Sukumar N.* Maximum Entropy Coordinates for Arbitrary Polytopes // *Computer Graphics Forum*. 2008. vol. 27. no. 5. pp. 1513–1520.
15. *Manson J., Schaefer S.* Moving Least Squares Coordinates // *Proc. Symp. Geometry Processing*. 2010. pp. 1517–1524.
16. *Li X.Y., Hu S.M.* Poisson Coordinates // *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*. 2013. vol. 19. no. 2. pp. 344–352.
17. *Chan R., Gotsman C.* On pseudo-harmonic barycentric coordinates // *Computer aided geometric design*. 2016. vol. 44. pp. 15–35.
18. *Thiery J.-M., Tierny J., Boubekeur T.* Jacobians and Hessians of mean value coordinates for closed triangular meshes // *The Visual Computer*. 2013.
19. *Langer T., Belyaev A., Seidel H.-P.* Spherical barycentric coordinates // *SGP 2006: Fourth Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*. 2006. pp. 81–88.
20. *Gillette A., Rand A., Bajaj C.* Error estimates for generalized barycentric interpolation // *Adv. Comp. Math*. 2012. vol 37. pp. 417–439.
21. *Chan R., Gotsman C.* Complex transfinite barycentric mappings with similarity kernels // *Eurographics Symposium on Geometry Processing*. 2016. vol. 35. no. 19.
22. *Радыгин В.М., Полянский И.С.* Модифицированный метод последовательных конформных отображений наперед заданных многоугольных областей // *Вестник ТГУ. Математика и механика*. 2016. №1(39). С. 25–35.
23. *Лаврентьев М.А.* Конформное отображение с приложениями к некоторым вопросам механики. Москва: ОГИЗ. 1946. 159 с.
24. *Ju T., Liepa P., Warren J.* A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope // *Computer Aided Geometric Design*. 2007. vol. 3(24). pp. 161–178.
25. *Floter M.S.* Generalized barycentric coordinates and applications // *Cambridge University Press*. 2016. 50 p.
26. *Floter M.S., Hormann K., Kos G.* A general construction of barycentric coordinates over convex polygons // *Advances in Computational Mathematics*. 2006. vol. 24. no. 1–4. pp. 311–331.

Полянский Иван Сергеевич — к-т техн. наук, сотрудник, Академия Федеральной службы охраны Российской Федерации. Область научных интересов: математическое моделирование, динамические системы, дифференциальные уравнения, методы оптимизации, оптимальное управление, конформные отображения. Число научных публикаций — 112. van341@mail.ru; Приборостроительная, 35, Орел, 302034; р.т.: +7(953) 618-71-00.

I.S. POLANSKY

BARYCENTRIC COORDINATES OF POISSON — RIEMANN*Polansky I.S. Barycentric coordinates of Poisson — Riemann.*

Abstract. The article deals with the problem of finding barycentric coordinates for arbitrary, simply connected, closed, discrete regions that are defined in \mathbb{R}^2 and \mathbb{R}^3 . Barycentric coordinates are given by a set of scalar parameters that unambiguously define a point of the affine space inside a simply connected, closed, discrete region through a specified point basis, which is given by the vertices of the region. Barycentric coordinates being defined for the simply connected, closed, discrete region are harmonic and satisfy the properties of affine invariance, positive definiteness and equality to unit. The solution is based on the Riemann theorem on the uniqueness of conformal mapping and the Poisson integral formula for the ball. The paper shows the examples of approximation of the potential inside arbitrary, simply connected, closed, discrete regions using the proposed method, compared with the approximation using the finite element method.

Keywords: harmonic barycentric coordinates, the Poisson integral, simply connected closed discrete area.

Polansky Ivan Sergeyevich — Ph.D., researcher, The Academy of Federal Security Guard Service of the Russian Federation. Research interests: mathematical modeling, dynamical systems, differential equations, optimization methods, optimal control, conformal mapping. The number of publications — 112. van341@mail.ru; 35, Priborostroitel'naya Street, Orel, 302034, Russia; office phone: +7(953) 618-71-00.

References

1. Arkhipov N.S., Polansky I.S., Stepanov D.E. [Barycentric method in problems of analysis of the field in a regular waveguide with arbitrary cross section]. *Antenny – Antenna*. 2014. vol. 10. pp. 10–21. (In Russ.).
2. Sascha Duzcek, Ulrich Gabbert. The finite cell method for polygonal meshes: poly-FCM. *Computational Mechanics*. 2016. vol. 58. pp. 587–618.
3. Kraus M., Steinmann P. Finite element formulations for 3D convex polyhedra in nonlinear continuum mechanics. *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*. 2012. vol. 19. pp. 121–134.
4. Golovanov N.N. *Geometricheskoe modelirovanie* [Geometric modeling]. Moscow: Publishing house of physico-mathematical literature. 2002. 472 p. (In Russ.).
5. Balk M.B., Boltjanskij V.G. *Geometrija mass* [The geometry of the masses]. Moscow: Science. 1973. 197 p. (In Russ.).
6. Belyaev A. On Transfinite Barycentric Coordinates. Proc. Fourth Eurographics Symp. Geometry Processing (SGP '06). 2006. pp. 89–99.
7. Polansky I.S. [Barycentric coordinates for the multidimensional Poisson approximation of the scalar potential inside an arbitrary region (Part 1)]. *Vestnik SGTU – Herald SGTU*. 2015. vol. 1(78). pp. 30–36. (In Russ.).
8. Polansky I.S. [Barycentric coordinates for the multidimensional Poisson approximation of the scalar potential inside an arbitrary region (Part 2)]. *Vestnik SGTU – Herald SGTU*. 2015. vol. 1(78). pp. 36–42. (In Russ.).
9. Wachspress E.L. *A Rational Finite Element Basis*. New York: Academic Press. 1975. 331 p.

10. Michael S. Floater Mean value coordinates. *Computer Aided Geometric Design*. 2003. vol. 1(20). pp. 19–27.
11. Lipman Ya., Kopf J., Cohen-Or D., Levin D. In A. Belyaev and M. Garland editors. GPU-assisted Positive Mean Value Coordinates for Mesh Deformations. *Geometry Processing, Eurographics Symposium Proceedings*. 2007. pp. 117–123.
12. Gordon W.J., Wixom J.A. Pseudo-harmonic interpolation on convex domains. *SIAM J. Numer. Anal.* 1974. vol 11. pp. 909–933.
13. Manson J., Li K., Schaefer S. Positive Gordon-Wixom Coordinates. *Computer Aided Design*. 2011. vol. 43. no. 11. pp. 1422–1426.
14. Hormann K., Sukumar N. Maximum Entropy Coordinates for Arbitrary Polytopes. *Computer Graphics Forum*. 2008. vol. 27. no. 5. pp. 1513–1520.
15. Manson J., Schaefer S. Moving Least Squares Coordinates. *Proc. Symp. Geometry Processing*. 2010. pp. 1517–1524.
16. Li X.Y., Hu Sh.M. Poisson Coordinates. *IEEE Transactions on visualization and computer graphics*. 2013. vol. 19. no. 2. pp. 344–352.
17. Chan R., Gotsman C. On pseudo-harmonic barycentric coordinates. *Computer aided geometric design*. 2016. vol. 44. pp. 15–35.
18. Thierry J.-M., Tierny J., Boubekur T. Jacobians and Hessians of mean value coordinates for closed triangular meshes. *The Visual Computer*. 2013.
19. Langer T., Belyaev A., Seidel H.-P. Spherical barycentric coordinates. *SGP 2006: Fourth Eurographics/ACM SIGGRAPH Symposium on Geometry Processing*. 2006. pp. 81–88.
20. Gillette A., Rand A., Bajaj C. Error estimates for generalized barycentric interpolation. *Adv. Comp. Math*. 2012. vol 37. pp. 417–439.
21. Chan R., Gotsman C. Complex transfinite barycentric mappings with similarity kernels. *Eurographics Symposium on Geometry Processing*. 2016. vol. 35. no. 19.
22. Radygin V.M., Poljansky I.S. [Modified method of consecutive conformal mappings beforehand polygon areas]. *Vestnik TGU. Matematika i mehanika – Herald TGU. Mathematics and mechanics*. 2016. vol. 1(39). pp. 25–35. (In Russ.).
23. Lavrentev M.A. *Konformnoe otobrazhenie s prilozhenijami k nekotorym voprosam mehaniki* [Conformal mapping with applications to some problems of mechanics]. Moscow: OGIZ, 1946. 159 p. (In Russ.).
24. Ju T., Liepa P., Warren J. A general geometric construction of coordinates in a convex simplicial polytope. *Computer Aided Geometric Design*. 2007. vol. 3(24). pp. 161–178.
25. Floater M.S. *Generalized barycentric coordinates and applications*. Cambridge University Press. 2016. 50 p.
26. Floater M.S., Hormann K., Kos G. A general construction of barycentric coordinates over convex polygons. *Advances in Computational Mathematics*. 2016. vol. 24. no. 1–4. pp. 311–331.