

Б.Р. АНДРИЕВСКИЙ, Н.В. КУЗНЕЦОВ, О.А. КУЗНЕЦОВА, Г.А. ЛЕОНОВ,  
Т.Н. МОКАЕВ

## ЛОКАЛИЗАЦИЯ СКРЫТЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ ПОЛЕТОМ

*Андриевский Б.Р., Кузнецов Н.В., Кузнецова О.А., Леонов Г.А., Мокаев Т.Н.*  
**Локализация скрытых колебаний в системах управления полетом.**

**Аннотация.** В статье исследуется задача управления с ограничениями на величину и скорость управляющего воздействия в применении к системам управления летательными аппаратами (ЛА). Известно, что в системе с ограничениями на скорость и величину отклонения рулевых органов могут возникнуть автоколебания значительной амплитуды, так называемая «потеря устойчивости в большом». Если ЛА аэродинамически устойчив, то в угловом продольном движении могут существовать устойчивый предельный цикл с малой амплитудой и неустойчивый — с большой. Если ЛА аэродинамически неустойчив, то может реализоваться один из двух устойчивых предельных циклов с малой амплитудой. Кроме того, имеется и неустойчивый предельный цикл, наличие которого делает необходимым исследование устойчивости самолета «в большом», то есть при воздействии на самолет больших возмущений, которые выводят его за границу амплитуды неустойчивого предельного цикла. Влияние нелинейностей типа «насыщение» может вызвать и так называемую «раскачку самолета летчиком», нарушающую процесс пилотирования.

Для исследования процессов, которые могут возникнуть в нелинейных системах управления ЛА, простое компьютерное моделирование является ненадежным инструментом, который может привести к неправильным выводам. Для получения достоверных результатов моделирования следует аналитически исследовать условие единственности предельного решения либо применить специальные аналитико-численные методы, позволяющие найти скрытые колебания.

В статье описан аналитико-численный метод для локализации и определения параметров скрытых колебаний в нелинейных системах и показано его применение для анализа динамики систем управления летательными аппаратами различных типов: управление углом рыскания ракеты-носителя с учетом жесткости ее конструкции, системы автопилотирования самолета при управлении углом атаки, а также человеко-машинной системы самолет-пилот, снабженной средствами автоматизации управления.

**Ключевые слова:** гармоническая линеаризация, скрытые колебания, ограничения по положению и скорости, управление полетом, пилот-самолет, раскачка самолета летчиком.

**1. Введение.** Задача управления с ограничениями на величину, скорость, энергию управляющего воздействия вследствие своей актуальности давно привлекает внимание ученых и разработчиков систем автоматического управления летательными аппаратами (ЛА) [1-10]. Современные исследования по этой проблематике представлены в работах [11-26].

При определенных сочетаниях характеристик ЛА и внешних воздействиях в системе с ограничениями на скорость и величину отклонения рулевых органов могут возникнуть автоколебания

значительной амплитуды, так называемая «потеря устойчивости в большом». Анализ этого явления для систем управления ЛА (как пилотируемых, так и беспилотных) на основе метода гармонической линеаризации можно найти в [4, 27]. В частности, в [4] показано, что в угловом продольном движении для аэродинамически устойчивого ЛА могут существовать устойчивый предельный цикл с малой амплитудой и неустойчивый — с большой амплитудой. Похожие результаты получены и в [27], где основное внимание уделяется нелинейности типа «насыщение», характерной для приводов систем управления ЛА.

Влияние нелинейностей типа «насыщение» может вызвать и так называемую «*раскачку самолета летчиком*» (РСЛ) (англ. — *Pilot Induced Oscillations, PIO*), нарушающих процесс пилотирования ЛА [4-7, 28-33]. Это явление характеризуется быстро развивающимися колебаниями с нарастающей амплитудой по угловым скоростям, перегрузкам и угловым движениям пилотируемого ЛА. Основным нелинейным фактором, приводящим к РСЛ, является, как правило, *ограничение скорости отклонения* органов управления ЛА (управляющих аэродинамических поверхностей самолета). Это ограничение может привести к задержке отклика самолета на команды летчика.

Как отмечено в [5, 34], РСЛ обычно возникает в ситуациях, когда летчик пытается точно маневрировать самолетом. Хорошо известен ряд катастроф ЛА, вызванных РСЛ, а также случаи входа космического аппарата в неконтролируемое вращение [8, 9]. Исследование переходных режимов при таком движении приводит к необходимости разработки математической теории глобального анализа систем ориентации. Возможность появления скрытых периодических колебаний и скрытых хаотических аттракторов в нелинейных системах, не имеющих устойчивого состояния равновесия, или в системах с единственным состоянием равновесия представлена в [35-40], где дана классификация различных видов аттракторов и приведены примеры появления скрытых колебаний, в том числе в системах управления ЛА.

Таким образом, для исследования процессов, которые могут возникнуть в нелинейных системах управления ЛА (в том числе — нелинейных колебаний), простое компьютерное моделирование без применения аналитико-численных методов является ненадежным инструментом, который может привести к неправильным выводам. Для получения достоверных результатов моделирования следует аналитически исследовать условие единственности предельного решения (т.е. свойство *конвергентности* системы [41-44]) либо применить специальные аналитико-численные методы, позволяющие

найти скрытые колебания [35, 45–48]. Применение аналитико-численного метода для определения скрытых колебаний в системах управления ЛА показано в настоящей статье.

**2. Аналитико-численный метод определения скрытых колебаний.** Приведем краткое описание аналитико-численной процедуры определения скрытых аттракторов. Более подробное описание можно найти в [35, 36, 38, 46–48].

В первой половине прошлого века в начальный период развития теории нелинейных колебаний основное внимание было уделено анализу и синтезу колебательных систем, для которых задача о существовании колебаний может быть решена с относительной легкостью. Структура многих рассматриваемых технических систем была такова, что существование колебаний было «почти очевидно» — колебания возбуждались от неустойчивого состояния равновесия (так называемые *автоколебания*). С вычислительной точки зрения это позволяет использовать стандартную вычислительную процедуру, в которой после переходного процесса траектория, начинаясь с точки неустойчивого многообразия в окрестности равновесия, достигает автоколебаний, поэтому такие колебания можно легко идентифицировать.

Как показали дальнейшие исследования, самовозбуждающиеся периодические и хаотические колебательные процессы не дают исчерпывающей информации о возможных типах колебаний. В середине 20-го века было найдено несколько примеров периодических и хаотических колебаний другого типа — так называемых «*скрытых колебаний*» и «*скрытых аттракторов*» [47]. Колебательная траектория называется скрытыми колебаниями, если *ее область притяжения не пересекает достаточно малой окрестности состояний равновесия*.

Численное определение положения, вычисление параметров и аналитическое исследование скрытых аттракторов представляет собой гораздо более сложную проблему, так как в этом случае информация о состояниях равновесия не может быть непосредственно использована в стандартных вычислительных процедурах. Таким образом, скрытые аттракторы не могут быть численно найдены с помощью обычных численных методов. Кроме того, в этом случае маловероятно, что интегрирование траекторий при случайных начальных условиях позволит локализовать скрытый аттрактор, поскольку область его притяжения может быть относительно небольшой, а его размерность скрытого аттрактора может быть гораздо меньше, чем размерность рассматриваемой системы.

Рассмотрим процедуру применения эффективного аналитически-численного метода локализации скрытых колебаний,

основанного на применении методов малого параметра, гармонического баланса и гармонической линеаризации нелинейностей. Заметим, что в инженерной практике широко используется метод гармонического баланса [49]. Однако этот классический метод не имеет строгого математического обоснования и может привести к неверным результатам (например, из него следует справедливость гипотез Айзермана и Калмана об абсолютной устойчивости, в то время как хорошо известны контрпримеры существования скрытых колебаний [35, 36]).

Рассматриваемая модификация метода гармонической линеаризации, основанная на методе малого параметра, позволяет получить строгое обоснование существования периодического решения и определить его начальные условия. Затем применяется определенная многошаговая численная процедура, основанная на принципе продолжения, которая позволяет численно преобразовывать исходное периодическое решение для некоторой вспомогательной системы (которое определяется аналитически) к периодическому решению или хаотическому аттрактору исходной системы.

Рассмотрим систему с одной скалярной нелинейностью:

$$\frac{dx}{dt} = Px + q\varphi(r^*x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где  $P$  — постоянная  $(n \times n)$ -матрица,  $q, r$  — постоянные  $n$ -мерные векторы,  $*$  — операция транспонирования,  $\varphi(\sigma)$  — непрерывная кусочно-дифференцируемая скалярная функция,  $\varphi(0) = 0$ .

Пусть  $\varphi^0(\sigma) = \varepsilon\varphi(\sigma)$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр. Для определения начальной точки  $x_0$  начального периодического решения система:

$$\frac{dx}{dt} = P_0x + q\varphi^j(r^*x), x \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

при  $j = 0$  приводится с помощью линейного невырожденного преобразования координат  $x = Sy$  к форме:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega_0 y_2 + b_1 \varphi^0(y_1 + c_3^* y_3), \\ \dot{y}_2 = \omega_0 y_1 + b_2 \varphi^0(y_1 + c_3^* y_3), \\ y_3 = A_3 y_3 + b_3 \varphi^0(y_1 + c_3^* y_3), \end{cases} \quad (3)$$

где переменные  $y_1, y_2$  — скаляры, переменная  $y_3$  —  $(n - 2)$ -мерный вектор;  $b_3, c_3$  —  $(n - 2)$ -мерные вектора,  $b_1, b_2$  — вещественные

числа;  $A_3$  —  $((n-2) \times (n-2))$ -матрица, все собственные значения которой имеют отрицательные вещественные части. Не умаляя общности, можно предположить, что для матрицы  $A_3$  существует положительное число  $d > 0$ , такое что  $y_3^*(A_3 + A_3^*)y_3 \leq -2d|y_3|^2$ ,  $\forall y_3 \in \mathbb{R}^{n-2}$ . Введем описывающую функцию:

$$\Phi(a) = \int_0^{2\pi/\omega_0} \phi(a \cos(\omega_0 t)) \cos(\omega_0 t) dt \quad (4)$$

и предположим существование ее производной. Известна следующая Теорема 1 [35, 36, 45, 50]. Пусть существует число  $a_0 > 0$ , для которого выполнены условия :

$$\Phi(a_0) = 0, b_1 \frac{d\Phi(a)}{da} \Big|_{a=a_0} < 0. \quad (5)$$

Тогда при достаточно малых  $\varepsilon > 0$  система (3) имеет периодическое решение с начальными данными:

$$y_1(0) = a_0 + O(\varepsilon), y_2(0) = 0, y_3(0) = O_{n-2}(\varepsilon) \quad (6)$$

и с периодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0} + O(\varepsilon)$ .

**3. Локализация скрытого колебания упругой ракеты-носителя.** Рассмотрим следующую модель динамики ракеты-носителя (РН) с учетом первого тона упругих колебаний корпуса [2, 3, 10, 41]:

$$\begin{cases} \ddot{\psi}(t) + a_y^\psi \dot{\psi}(t) + a_y^\psi \psi(t) = a_{y_r}^{\delta_r} \delta_r(t) + f_y(t), \\ \ddot{\tilde{\psi}}(t) + 2\xi_1 \omega_1 \dot{\tilde{\psi}}(t) + \omega_1^2 \tilde{\psi}(t) = l_1 \omega_1^2 \delta_r(t) + \tilde{f}_y(t), \\ \psi_g(t) = \psi(t) + \tilde{\psi}(t), \end{cases} \quad (7)$$

где  $\psi$  — угол рыскания,  $\delta_r$  — отклонение руля направления;  $\tilde{\psi}$  — угол упругих колебаний в точке расположения гироскопического датчика;  $\psi_g$  — сигнал измерений с гироскопического датчика;  $a_y^\psi$ ,  $a_{y_r}^{\delta_r}$  — параметры РН как твердого тела на рассматриваемом участке полета;  $\xi_1$ ,  $\omega_1$ ,  $l_1$  — параметры модели первого тона упругих колебаний корпуса РН;  $f_y(t)$ ,  $\tilde{f}_y(t)$  —

внешние (атмосферные) возмущения.

Пренебрегая динамикой рулевого привода, но с учетом его насыщения, используем следующую модель привода:

$$\delta_r(t) = M \operatorname{sat} \left( \frac{u(t)}{M} \right), \quad (8)$$

где  $u(t)$  — сигнал управления.

Рассмотрим использование типового ПД-закона стабилизации:

$$u(t) = -k_P \psi_g(t) - k_D \dot{\psi}_g(t), \quad (9)$$

с параметрами  $k_P, k_D$ .

Пусть координатный вектор имеет следующий вид  $x \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4) = (\psi, \tilde{\psi}, \dot{\psi}, \dot{\tilde{\psi}})$ . Тогда система (7) представляется в виде (1) со следующими матрицами:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_y^\psi & 0 & -a_y^{\dot{\psi}} & 0 \\ 0 & -\omega_1^2 & 0 & -2\xi_1\omega_1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_y^{\delta_r} \\ l_1\omega_1^2 \end{pmatrix}, r = - \begin{pmatrix} k_P \\ k_P \\ k_D \\ k_D \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Пусть параметры системы имеют следующие безразмерные значения:

$$a_y^{\delta_r} = 12.6, a_y^\psi = -4, a_y^{\dot{\psi}} = 0.4, l_1 = -0.108, \xi_1 = 0.03, \quad (11)$$

$$\omega_1 = 2, M = 0.0873, k_P = 6, k_D = 2.$$

С помощью линейного невырожденного преобразования координат  $x = Sy$  приведем систему (7) к соответствующей системе вида (3), где:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 & 0 \\ \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -h_1 \\ -h_2 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Для параметров (11) получаем следующие значения матрицы преобразования:

$$S = \begin{pmatrix} -0.0841 & -0.0084 & 284.9 & 65.81 \\ -0.0321 & 0.085 & 9.846 & 0.5826 \\ 0.0166 & -0.1663 & -28.93 & -112.9 \\ -0.1681 & -0.0634 & -1.0 & -1.0 \end{pmatrix}$$

и параметров в уравнениях (12):

$$\begin{aligned} \omega_0 &= -1.9775, k = 0.0533, d_1 = -0.1016, d_2 = -1.7164, \\ b_1 &= 3.5162, b_2 = 1.1096, b_3 = 0.0279, b_4 = -0.1166, \\ h_1 &= 1708, h_2 = 170.4. \end{aligned}$$

Теперь воспользуемся теоремой 1 и выберем начальные данные для локализации периодической орбиты как  $x(0) = Sy(0) = (a_0s_{11}, a_0s_{21}, a_0s_{31})$ . Значение  $a_0$  можно вычислить из равенства  $\Phi(a_0) = 0$ . Для нелинейности (8) интеграл берется и описывающая функция примет следующий вид:

$$\Phi(a_0) = 2 \left( \frac{\pi a}{2} - a \arccos \frac{M}{a} + M \sqrt{1 - \frac{M^2}{a^2}} \right) - \pi a k = 0,$$

а ее производная соответственно:

$$\frac{d\Phi(a)}{da} = 2 \left( \arcsin \frac{M}{a} - \frac{M}{a} \sqrt{1 - \frac{M^2}{a^2}} \right) - \pi k.$$

Для параметров (11) получаем:

$$a_0 = 2.0825, b_1 \frac{d\Phi(a)}{da} \Big|_{a=a_0} = -0.5888,$$

и численное моделирование показывает, что при  $\varepsilon = 0.1$  можно локализовать периодическое решение. Таким образом, применяя метод гармонической линейризации и процедуру продолжения по параметру можно локализовать скрытое колебание в системе (7) (рисунок 1).

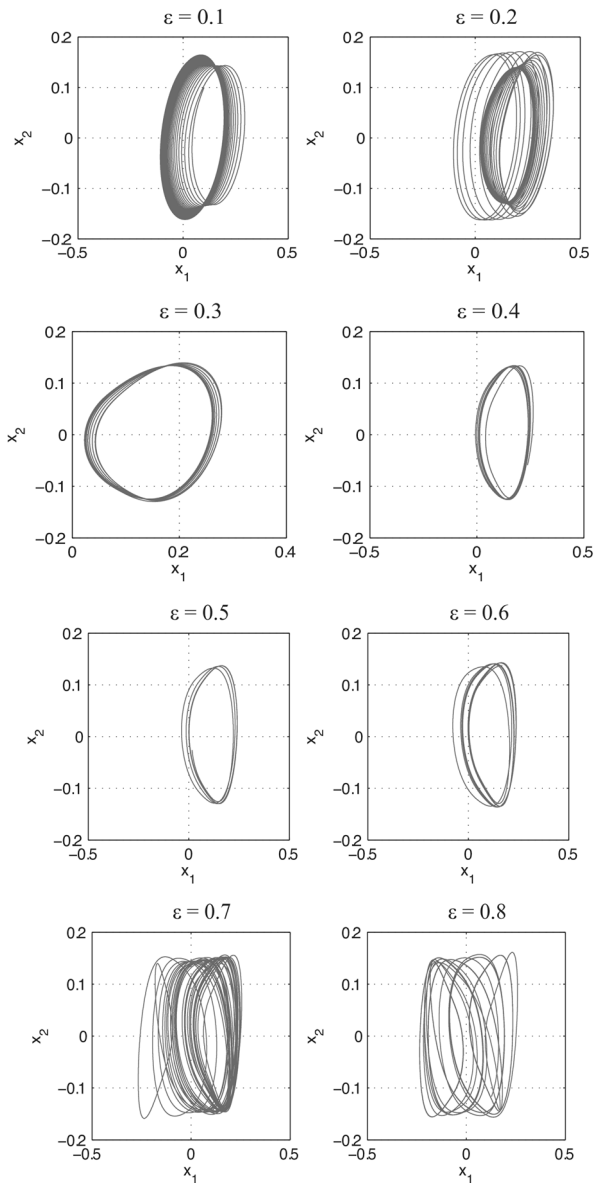


Рис. 1 (а). Процедура локализации скрытого колебания в системе (7), описывающей динамику упругой ракеты-носителя для  $\varepsilon$  от 0.1 до 0.8



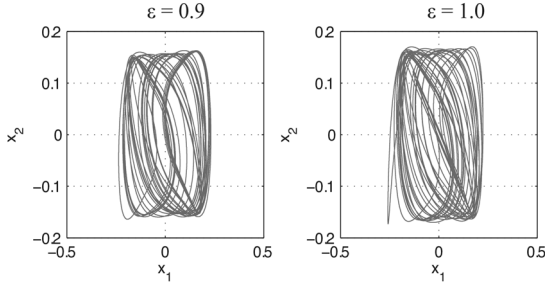


Рис. 1 (b). Процедура локализации скрытого колебания в системе (7), описывающей динамику упругой ракеты-носителя для  $\varepsilon$  от 0.9 до 1.0

**4. Локализация скрытого колебания в системе управления углом атаки ЛА.** Рассмотрим следующую модель динамики короткопериодического углового движения самолета относительно продольной оси, линеаризованную в окрестности балансировочных значений углов атаки и отклонения рулей высоты  $\alpha_{\text{trim}}$ ,  $\delta_{e,\text{trim}}$  [51-53]:

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = Z_{\alpha}\alpha + \omega_z + Z_{\delta}\delta_e, \\ \dot{\omega}_z = M_{\alpha}\alpha + M_{\omega_z}\omega_z + M_{\delta}\delta_e, \end{cases} \quad (13)$$

где  $\alpha$ ,  $\delta_e$  — отклонения углов атаки и рулей высоты от балансировочных значений для данных условий полета,  $\omega_z$  — скорость тангажа в связанной системе координат [1, 54],  $M_{\alpha}$ ,  $M_q$ ,  $M_{\delta}$ ,  $Z_{\alpha}$ ,  $Z_{\delta}$  — параметры линеаризованной модели для данных условий полета. Положим, что угол отклонения руля высоты ограничен симметрично относительно балансировочного значения:  $\delta_{e,\text{trim}} : |\delta_e| \leq \bar{\delta}_e$ . Также будем рассматривать использование пропорционально-интегрально-дифференцирующего (ПИД) автопилота для управления углом атаки, обозначив управляющий сигнал на выходе через  $u(t)$ , и описывать динамику привода руля высоты к переменной  $\tilde{\delta}_e(t)$  (без учета насыщения) вместе с последовательным корректирующим звеном в канале тангажа следующей передаточной функцией:

$$W(s) = \left\{ \frac{\tilde{\delta}_e}{u} \right\} = \frac{k(T_2^2 s^2 + 2\xi_2 T_2 s + 1)}{T_1^2 s^2 + 2\xi_1 T_1 s + 1}, \quad (14)$$

где  $k$  — статический коэффициент передачи привода;  $T_1$ ,  $T_1$  — постоянные времени;  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  — коэффициенты демпфирования.

Окончательно отклонение выхода привода (отклонение руля высоты) с учетом насыщения находится как:

$$\delta_e(t) = \bar{\delta}_e \text{sat}\left(\frac{\tilde{\delta}_e(t)}{\bar{\delta}_e}\right), \quad (15)$$

где  $\text{sat}(\cdot)$  — функция насыщения.

Далее используются следующие значения параметров [55]:  $Z_\alpha = -1.0 \text{ с}^{-1}$ ,  $Z_\delta \approx 0$ ,  $M_\alpha = 15 \text{ с}^{-2}$ ,  $M_q = 3.0 \text{ с}^{-1}$ ,  $M_\delta = -18$ ,  $\bar{\delta}_e = 20$  град ( $\approx 0.35$  рад),  $k = 10$ ,  $T_1 = 0.083 \text{ с}$ ,  $T_2 = 0.057 \text{ с}$ ,  $\xi_1 = 0.1$ ,  $\xi_2 = 0.4$ . Нетрудно убедиться, что рассматриваемый ЛА статически неустойчив — собственные числа  $s_{1,2}$  системы (38) имеют значения  $s_1 = -6$ ,  $s_2 = 2$ .

Пусть цель управления состоит в отработке командного угла атаки  $\alpha^*(t)$ . Для устранения статической ошибки и обеспечения заданных характеристик переходного процесса по углу атаки для «номинальной системы» (при отсутствии насыщения) можно использовать следующий классический ПИД-регулятор:

$$u(t) = k_I \sigma_I(t) + k_P e(t) + k_D \omega_z(t),$$

$$\sigma_I(t) = \int_0^t e(\tau) d\tau, \sigma(0) = 0, \quad (16)$$

где  $e(t) = \alpha(t) - \alpha^*(t)$  — ошибка слежения,  $k_P$ ,  $k_I$ ,  $k_D$  — коэффициенты усиления пропорциональной, интегрирующей и дифференцирующей составляющих регулятора соответственно.

Коэффициенты  $k_I$ ,  $k_P$ ,  $k_D$  найдем для номинального режима используя корневой метод так, чтобы обеспечить наименьшую степень устойчивости  $\eta = 5.6$  (чтобы удовлетворить требованиям по быстродействию системы) и минимальным коэффициентом демпфирования  $\xi = 0.3$  (для избежания перерегулирования). Получим следующие значения:  $k_P = 5.5$ ,  $k_D = 0.55 \text{ с}$ ,  $k_I = 19 \text{ с}^{-1}$ . Для выбранных параметров показатель колебательности [49]  $M = H_\infty$  замкнутой системы имеет значение  $H_\infty = 1.13$ , а запас устойчивости по фазе  $\mu = 75$  град.

Наличие насыщения (15) в контуре управления может кардинально изменить поведение замкнутой системы, как это видно из сравнения процессов (а) и (б) на рисунке 2.

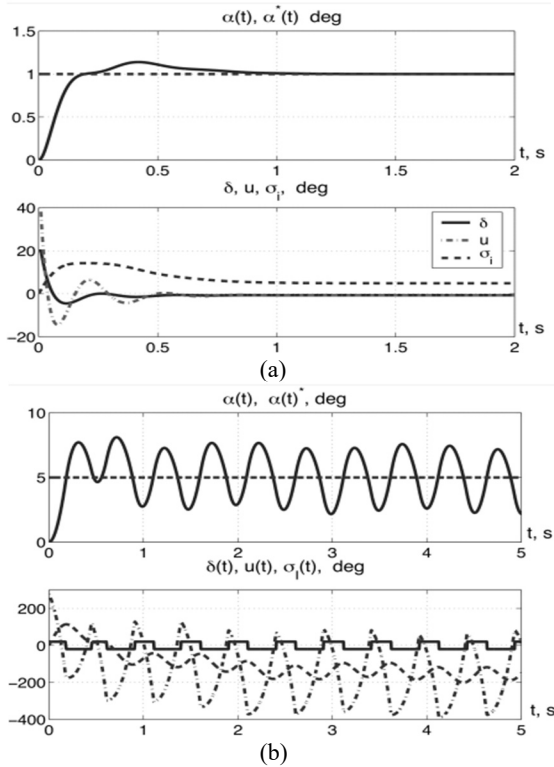


Рис. 2. Графики процессов  $\alpha$ ,  $\delta_e$ ,  $u$ ,  $\sigma_I$  при  $\alpha^* = 1$  град: (а) насыщение не активно, (б) насыщение проявляется

Рассмотрим поведение замкнутой системы управления при действии насыщения привода руля высоты. Основное внимание в исследовании уделим возможности возникновения скрытых колебаний в замкнутой системе. С этой целью используем применение описанного в разделе 2 метода к системе (13)-(16).

На первом шаге найдем для рассматриваемой системы матрицы  $P$ ,  $q$ ,  $r$  в (1). Несложно получить, что модель (13), (14), (16) в уравнениях состояния представляется следующими матрицами:

$$P = \begin{pmatrix} Z_\alpha & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_\alpha & 0 & M_q & 0 & 0 \\ -k_P & k_I & -k_D & -2\xi_1 T_1^{-1} & -T_1^{-2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -Z_\delta \\ 0 \\ -M_\delta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r^* = (-kk_p T_2^2 T_1^{-2}, kk_i T_2^2 T_1^{-2}, -kk_D T_2^2 T_1^{-2}, \\ k(2\xi_2 T_2 - 2\xi_1 T_2^2 T_1^{-1}) T_1^{-2}, k(1 - T_2^2 T_1^{-2}) T_1^{-2}).$$

Нелинейность  $\psi(\cdot)$  в (1) имеет вид (15).

Численно, при указанных выше значениях параметров, матрицы  $P$ ,  $q$ ,  $r$  имеют вид:

$$P = \begin{pmatrix} -1.0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 15.0 & 0 & -3.0 & 0 & 0 \\ -5.56 & 19.1 & -0.556 & -2.41 & -145 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18.0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ r^* = (-26.1, 89.6, -2.61, 54.5, 763).$$

Применение описанной выше многошаговой процедуры локализации позволяет в конечном итоге найти скрытые колебания в рассматриваемой системе (рисунок 3).

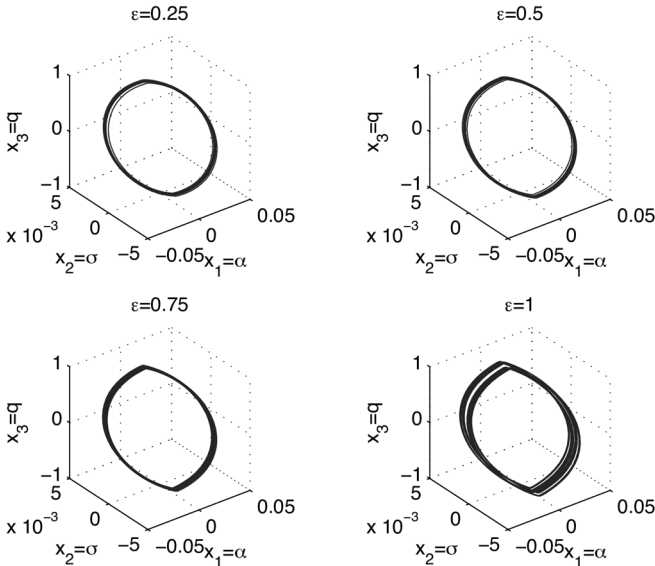


Рис. 3. Многошаговая локализация скрытых колебаний:  $\epsilon^j = j/4$ . На последнем шаге (т.е. при  $j = m$  в (2)) находится устойчивое нулевое состояние равновесия, сосуществующее с устойчивыми колебаниями (скрытыми колебаниями)

**5. Скрытые колебания в системе самолет-пилот.** Обратимся к задаче управления пилотируемым самолетом со средствами автоматизации. В данной системе пилот включается в замкнутый контур управления, и следовательно, динамика замкнутой системы зависит также от реакции пилота.

В качестве примера рассмотрим задачу управления по тангажу исследовательским самолетом *X-15*, передаточная функция которого от угла отклонения рулей к углу тангажа  $\vartheta$  имеет вид [56, 57]:

$$W_{\delta_e}^{\vartheta}(s) = \left\{ \frac{\vartheta}{\delta_e} \right\} = \frac{86.9(s + 0.883)(s + 0.0292)}{(s + 25)(s + 0.3516)(s + 0.02845)(s^2 + 1.68s + 5.29)}, \quad (17)$$

где  $\delta_e(t)$  — отклонение руля высоты от балансирующего значения,  $\vartheta(t)$  — угол тангажа (численные значения всех переменных даны в системе СИ),  $s \in \mathbb{C}$  — аргумент преобразования Лапласа.

Привод описываем аperiodическим звеном первого порядка с ограничением на скорость отклонения:

$$\dot{\delta}_e(t) = \text{sat}_{\bar{\omega}}(T^{-1}(u(t) - \delta_e(t))), \quad (18)$$

где  $\text{sat}_{\bar{\omega}}(\cdot)$  — функция насыщения на уровне  $\bar{\omega}$  (для простоты изложения принято, что привод имеет единичный статический коэффициент передачи).

Пилот обычно моделируется как последовательно включенный элемент в контуре управления [4, 58, 59]. Рассматриваются модели пилота в виде статического (безынерционного) элемента [56, 57, 60, 61] с коэффициентом передачи  $K_p$ , воздействующего на сигнал рассогласования по тангажу, то есть:

$$u(t) = K_p(\vartheta^*(t) - \vartheta(t)), \quad (19)$$

либо, более сложно, как интегро-дифференцирующее звено с запаздыванием [11, 55, 58, 62, 63]:

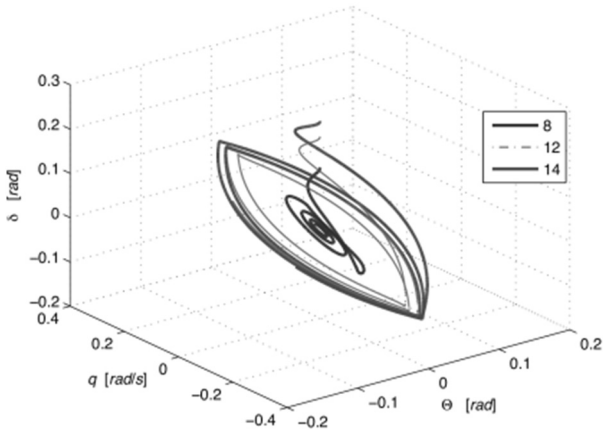
$$W_p(s) = \left\{ \frac{u}{\Delta\vartheta} \right\} = K_p \frac{T_L s + 1}{T_I s + 1} e^{-\tau_e s}, \quad (20)$$

где  $\Delta\vartheta$  — ошибка слежения по тангажу;  $u(t)$  — управляющее воздействие пилота на регулятор сервопривода руля;  $K_p$  —

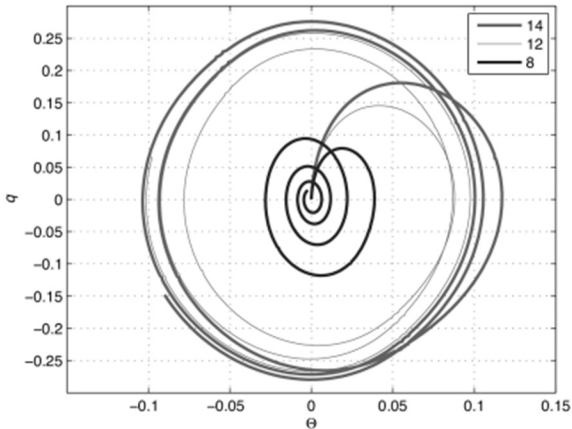
статический коэффициент передачи пилота;  $T_L$  — постоянная времени дифференцирования;  $T_I$  — постоянная времени замедления;  $\tau_e$  — эффективное временное запаздывание, включающее транспортное запаздывание и нервно-мышечные задержки в области высоких частот. Как указано в [4, 11, 58, 59, 64, 65], пилот старается настроить постоянные времени дифференцирования и замедления так, чтобы чувствительность системы к их изменениям в области нижних частот была малой и оставляя эффективную временную задержку в качестве своего основного средства для контроля за устойчивостью замкнутого контура и доминирующих режимов.

Исследуем численно поведение замкнутой системы (17)-(20) предполагая, что действие пилота  $u(t)$  получается как обратная связь по рассогласованию по тангажу. Следуя [56, 57], примем, что имеется ограничение по скорости руля  $\bar{\omega} = 15/57.3$  градус/с. Постоянную времени привода (18) примем равной  $T = 0.02$  с, а модель пилота возьмем в виде статического коэффициента передачи (19). Таким образом, мы рассматриваем систему (17), (18), (19).

*Динамика собственных движений.* Пусть в (19) принято значение  $K_p = 2.8$ . Линеаризация уравнений (17), (18), (19) в окрестности состояния равновесия показывает, что замкнутая система асимптотически устойчива в некоторой окрестности нуля. Собственные числа  $\lambda_i$  линеаризованной модели системы имеют значения  $\lambda_i = \{-50, -26, -0.36 \pm 3.7i, -0.72, -0.03\}$ . Однако, применяя описанный в разделе 2 метод, получим существование у замкнутой системы скрытого аттрактора, что иллюстрируется графиками на рисунке 4. На рисунке показаны фазовые траектории в пространстве  $(\vartheta, \omega_z, \delta_e)$  и переходные процессы в системах (17), (18), (19) для различных начальных значений  $\delta_e(0)$  (начальные значения остальных переменных состояния взяты нулевыми). Значение  $\delta_e(0) = 12$  град (при нулевых начальных условиях для остальных переменных) может рассматриваться как некоторая граница скрытого аттрактора — траектории, начинающиеся при меньших значениях  $\delta_e(0)$  стремятся к состоянию устойчивого равновесия. Соответствующие переходные процессы в системе (17), (18), (19) при  $K_p = 2.8$  для  $\delta_e(0) \in \{8, 12, 14\}$  град показаны на рисунке 5а.



(a)

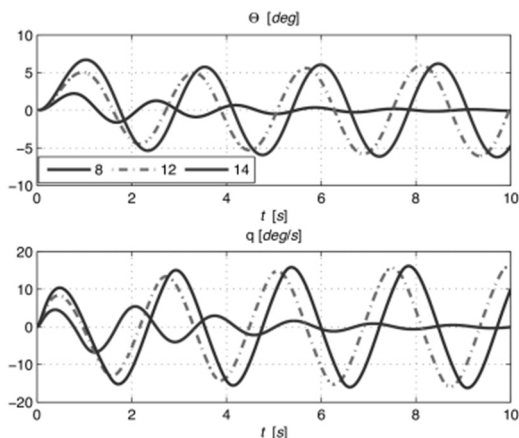


(b)

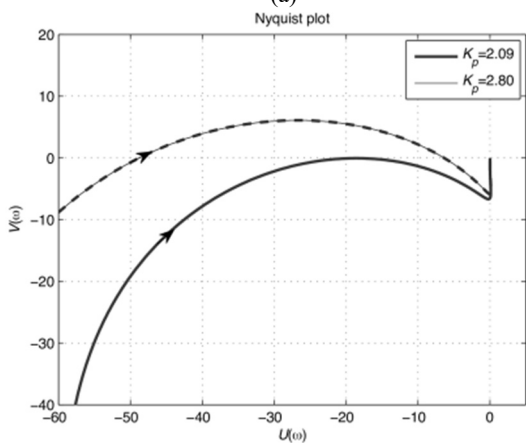
Рис. 4. Проекция фазовых траекторий системы (17), (18), (19) при  $\delta_e(0) \in \{8, 12, 14\}$  град.  $K_p = 2.8$  на подпространства  $(\theta, \omega_z, \delta_e)$  и  $(\theta, \omega_z)$ . Видно наличие скрытого аттрактора (а) фазовые траектории в пространстве  $(\theta, \omega_z, \delta_e)$ , (б) фазовые траектории в пространстве  $(\theta, \omega_z)$

Кривые Найквиста линейной части системы, приведенные на рисунке 5б, показывают что, согласно методу гармонического баланса, значение  $K_p = 2.09$  является некоторой границей, ниже которой скрытые колебания отсутствуют и траектории свободного движения системы стремятся к началу координат. Этот вывод подтверждается численной процедурой раздела 2 и компьютерным моделированием.

Кривая Найквиста на рисунке 5б позволяет сделать вывод, что при  $K_p \geq 2.09$  в системе может иметься два предельных цикла — устойчивый и неустойчивый.



(a)



(b)

Рис. 5. Переходные процессы в системе (17), (18), (19) и кривые Найквиста линейной части системы: (а) переходные процессы по углу и угловой скорости тангажа в системе (42), (43), (44) при  $\delta_e(0) \in \{8,12,14\}$  град,  $K_p = 2.8$ , (б) кривые Найквиста линейной части системы при  $K_p \in \{2.09,2.80\}$

*Динамика вынужденных движений.* Поведение неавтономной системы имеет сложный характер, так как оно зависит не только от



начальных условий, но и от внешних воздействий, которые могут иметь самый разнообразный характер. Рисунки 6а, 6б показывают реакцию системы (17), (18), (19) на кусочно-постоянное задающее воздействие по тангажу  $\vartheta^*(t)$  при нулевых начальных условиях и  $K_p = 2.80$ ,  $K_p = 2.09$ . Из графиков видно, что если  $\vartheta^*$  достаточно велико, то при  $K_p = 2.80$  в системе возникают колебания, которых нет при  $K_p = 2.09$ .

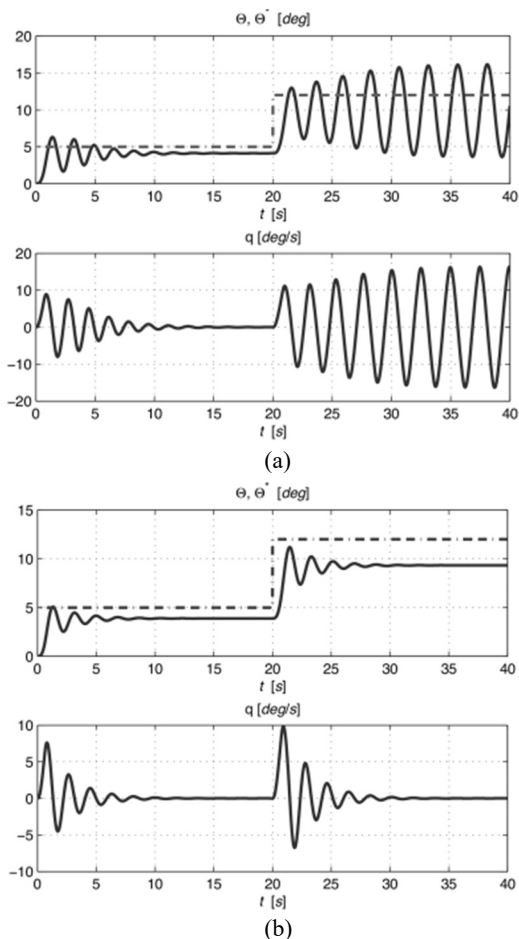


Рис. 6. Переходные процессы в системе (17), (18), (19) при кусочно-постоянном задающем воздействии  $\vartheta^*(t)$ : (а)  $K_p = 2.80$ , (б)  $K_p = 2.09$

Для предотвращения появления нелинейных колебаний в системах управления ЛА предложено использование последовательных корректирующих устройств (префильтров) [34, 57, 60, 61] и методов антивиндап коррекции [7, 30-33, 39, 40-43, 52, 53, 55].

**6. Заключение.** Задача управления с ограничениями на величину, скорость, энергию управляющего воздействия весьма актуальны для разработки систем автоматического управления летательными аппаратами (ЛА). При определенных сочетаниях характеристик ЛА и внешних воздействиях в системе с ограничениями на скорость и величину отклонения рулевых органов могут возникнуть автоколебания значительной амплитуды, так называемая «потеря устойчивости в большом». Влияние нелинейностей типа «насыщение» может вызвать и так называемую «раскачку самолета зреником» (РСЛ), которая является весьма опасным явлением с точки зрения безопасности полета. Для исследования процессов, которые могут возникнуть в нелинейных системах управления ЛА, простое компьютерное моделирование может привести к неправильным выводам. Для численного нахождения возможных предельных процессов можно применить специальные аналитико-численные методы, позволяющие найти скрытые колебания. Применение такого метода для анализа систем управления ЛА показано в настоящей статье. Описана модификация метода гармонической линеаризации, основанная на методе малого параметра, которая позволяет получить строгое обоснование существования периодического решения и определить его начальные условия, а многошаговая численная процедура позволяет затем численно преобразовывать исходное периодическое решение для некоторой вспомогательной системы к периодическому решению или хаотическому аттрактору исходной системы. Показано применение метода к локализации и определению параметров скрытых колебаний для конкретных числовых примеров различных летательных аппаратов — ракеты-носителя с учетом нежесткости конструкции, системы автопилотирования самолета при управлении углом атаки и человеко-машинной системы самолет-пилот, снабженной средствами автоматизации управления.

### Литература

1. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом // М.: Наука. 1987. 232 с.
2. Топчев Ю.И., Потемкин В.Г., Иваненко В.Г. Системы стабилизации // М.: Машиностроение. 1974. 248 с.
3. Боднер В.А. Системы управления летательными аппаратами // М.: Машиностроение. 1973. 504 с.
4. Бюнгенс Г. С., Студнев Р. В. Аэродинамика самолета: Динамика продольного и

- бокового движения // М.: Машиностроение. 1979. 352 с.
5. Aviation Safety and Pilot Control: Understanding and Preventing Unfavorable Pilot-Vehicle Interactions / Edited by D. T. McRuer and J. D. Warner // Washington. DC: Committee on the Effects of Aircraft-Pilot Coupling on Flight Safety Aeronautics and Space Engineering Board Commission on Engineering and Technical Systems National Research Council National Academy Press. 1997. 208 p. URL: <http://www.nap.edu/catalog/5469.html>. (дата обращения: 28.11.2016).
  6. Аэродинамика, устойчивость и управляемость сверхзвуковых самолетов / Под ред. Г.С. Бюшгенга // М: Наука. Физматлит. 1998. 816 с.
  7. Brieger O. et al. Anti-windup compensation of rate saturation in an experimental aircraft // Proceedings of American Control Conference (ACC 2007). 2007. pp. 924–929.
  8. Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. Управление ориентацией космических аппаратов // М.: Наука. 1974. 600 с.
  9. Каргу Л.И. Системы угловой стабилизации космических аппаратов: изд. 2-е, перераб. и доп. // М: Машиностроение. 1980. 172 с.
  10. Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П. и др. Динамика ракет: Учебник для студентов вузов // М.: Машиностроение. 1990. 464 с.
  11. Ефремов А.В. и др. Математическое моделирование характеристик управляющих действий летчика при исследовании задач ручного управления // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. Т. 2. С. 34–40.
  12. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Output control of the spectrum of a descriptor dynamical system // Doklady Mathematics. 2016. vol. 93. no. 3. pp. 259–261.
  13. Zubov N., Mikrin E., Oleinik A., Ryabchenko V. Terminal control of the trajectory and rotational motion of an active spacecraft during a rendezvous with a passive spacecraft // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2016. vol. 55. no. 3. pp. 435–445.
  14. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Output control of the longitudinal motion of a flying vehicle // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. vol. 54. no. 5. pp. 825–837.
  15. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Spacecraft attitude control with simultaneous unloading of the angular momentum of inertial actuators // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. vol. 54. no. 4. pp. 621–628.
  16. Zubov N., Mikrin E., Ryabchenko V., Proletarskii A. Analytical synthesis of control laws for lateral motion of aircraft // Russian Aeronautics. 2015. vol. 58. no. 3. pp. 263–270.
  17. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Stabilization of coupled motions of an aircraft in the pitch-yaw channels in the absence of information about the sliding angle: Analytical synthesis // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2015. vol. 54. no. 1. pp. 93–103.
  18. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Finite eigenvalue assignment for a descriptor system // Doklady Mathematics. 2015. vol. 91. no. 1. pp. 64–67.
  19. Zubov N. et al. Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. vol. 53. no. 3. pp. 430–444.
  20. Zubov N. et al. Output control of a spacecraft motion spectrum // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2014. vol. 53. no. 4. pp. 576–586.
  21. Zubov N., Lapin A., Mikrin E. Synthesis of decoupling laws for controlling the angular motion of landing module with solid-fuel landing engine minimizing the transient time // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. vol. 52. no. 3. pp. 480–490.
  22. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. vol. 52. no. 2. pp. 279–292.

23. Zubov N. et al. The use of the exact pole placement algorithm for the control of spacecraft motion // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2013. vol. 52. no. 1. pp. 129–144.
24. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the closed-loop control system // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. vol. 51. no. 3. pp. 431–444.
25. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2012. vol. 51. no. 1. pp. 80–96.
26. Zubov N. et al. Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann's formula // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. vol. 50. no. 1. pp. 93–103.
27. Берко В.С., Живов Ю.Г., Поединок А.М. Приближенный критерий устойчивости вынужденных колебаний регулируемых объектов с нелинейным приводом // Ученые записки ЦАГИ. 1984. Т. XV. №. 4. С. 72–80.
28. Powers B. Space Shuttle Pilot-Induced-Oscillation Research Testing // Report No. AGARDograph No. 262. In AGARD Ground and Flight Testing for Aircraft Guidance and Control (N85-22350 13-01). 1984.
29. Pachter M., Miller R. Manual flight control with saturating actuators // IEEE Control Syst. Mag. 1998. vol. 18. no. 1. pp. 10–19.
30. Brieger O. et al. Flight testing of low-order anti-windup compensators for improved handling and PIO suppression // Proceedings of American Control Conference (ACC 2008). 2008. pp. 1776–1781.
31. Brieger O. et al. Flight testing of a rate saturation compensation scheme on the ATTAS aircraft // Aerospace Science and Technology. 2009. vol. 13. no. 2–3. pp. 92–104.
32. Brieger O. et al. Pilot-Involved-Oscillation Suppression Using Low-Order Antiwindup: Flight-Test Evaluation // J. Guidance, Control, and Dynamics. 2012. vol. 35. no. 2. pp. 471–483.
33. Acosta D.M., Yildiz Y., Klyde D.H. Avoiding Pilot-Induced Oscillations in Energy-Efficient Aircraft Designs // The Impact of Control Technology – 2<sup>nd</sup> Ed. (IEEE CSS). 2014. URL: <http://ieeecs.org/sites/ieeecs.org/files/CSSIoCT2Update/IoCT2-RC-Acosta-1.pdf>. (дата обращения: 28.11.2016).
34. Duda H. Flight control system design considering rate saturation // Aerospace Science and Technology. 1998. vol. 4. pp. 265–215.
35. Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua's Circuits // Journal of Computer and Systems Sciences International. 2011. vol. 50. no. 4. pp. 511–543.
36. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits // Int J. Bifurcation and Chaos. 2013. vol. 23. no. 1. pp. 1–69.
37. Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Hidden Periodic and Chaotic Oscillations in Nonlinear Dynamical Systems // Proc. 19th IFAC World Congress. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. vol. 19. pp. 5445–5454. URL: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/66959.html>. (дата обращения: 28.11.2016).
38. Dudkowski D. et al. Hidden attractors in dynamical systems // Physics Reports. 2016. vol. 637. pp. 1 – 50. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316300928>. (дата обращения: 28.11.2016).
39. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators // Proc. 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA 2013). IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2013. vol. 19(1). pp. 37–41. URL:

- <http://www.ifac-papersonline.net/Detailed/63129.html>. (дата обращения: 28.11.2016).
40. *Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Pogromsky A.Y.* Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation // IFAC Proceedings Volumes. 2013. vol. 46. no. 12. pp. 75–79.
  41. *van den Berg R., Pogromsky A.Y., Rooda J.E.* Convergent Systems Design: Anti-Windup for Marginally Stable Plants // Proc. 45th IEEE Conf. Decision & Control (CDC 2006). IEEE Press. 2006. pp. 5441–5446.
  42. *Pogromsky A., Andrievsky B., Rooda J.* Aircraft flight control with convergence-based anti-windup strategy // Proc. IFAC Workshop Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems (AGNFCS 09). IFAC. 2009.
  43. *Leonov G.A., Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Pogromsky A.Y.* Control of aircrafts with AW-compensation // Differential Equations. 2012. vol. 48. no. 13. pp. 1700–1720.
  44. *Pogromsky A.Y., van Den Berg R.* Frequency domain performance analysis of Lur'e systems // IEEE Trans. Contr. Syst. Technol. 2014. vol. 22. no. 5. pp. 1949–1955.
  45. *Леонов Г.А.* Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах // Прикладная математика и механика. 2010. Вып. 74. №. 1. С. 37–73.
  46. *Leonov G. A., Kuznetsov N. V.* Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems // IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2011. vol. 18. no. 1. pp. 2494–2505.
  47. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* Localization of hidden Chua's attractors // Physics Letters A. 2011. vol. 375. no. 23. pp. 2230–2233.
  48. *Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I.* Hidden attractor in smooth Chua systems // Physica D. 2012. vol. 241. no. 18. pp. 1482–1486.
  49. *Бесекерский В.А., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования // М.: Наука. 1975. 768 с.
  50. *Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Юлдашев М.В., Юлдашев Р.В.* Вычисление характеристик фазового для сигналов общего вида // Доклады Академии Наук. 2011. Т. 439. № 4. С. 459–463.
  51. *Reichert R.* Dynamic scheduling of modern robust control autopilot design for missiles // IEEE Control Syst. Mag. 1992. vol. 12. no. 5. pp. 35–42.
  52. *Ferreres G., Biannic J.* Convex Design of a Robust Antiwindup Controller for an LFT Model // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. vol. 52. no. 11. pp. 2173–2177.
  53. *Biannic J., Tarbouriech S.* Optimization and implementation of dynamic anti-windup compensators with multiple saturations in flight control systems // Control Engineering Practice. 2009. vol. 17. pp. 703–713.
  54. ГОСТ 20058-80. Динамика летательных аппаратов в атмосфере: Термины, определения и обозначения // М.: Изд-во стандартов. 1981.
  55. *Barbu C., Reginatto R., Teel A. R., Zaccarian L.* Anti-windup design for manual flight control // Proc. American Control Conf. (ACC'99). 1999. vol. 5. pp. 3186–3190.
  56. *Mehra R., Prasanth R.* Application of nonlinear global analysis and system identification to aircraft-pilot coupled oscillations // Proc. Int. Conf. Control Applications (CCA'98). 1998. vol. 2. pp. 1404–1408.
  57. *Alcalá I., Gordillo E., Aracil J.* Phase compensation design for prevention of PIO due to actuator rate saturation // Proc. American Control Conf. (ACC 2004). AACC. 2004. pp. 4686–4691.
  58. *McRuer D. T., Jex H. R.* A Review of Quasi-Linear Pilot Models // IEEE Trans. Hum. Factors Electron. 1967. vol. HFE-8. no. 3. pp. 231–249.
  59. *Ефремов А.В., Оглоблин А.В., Предтеченский А.Н., Родченко В.В.* Летчик как динамическая система // М.: Машиностроение. 1992. 330 с.
  60. *Rundqvist L., Stahl-Gunnarsson K.* Phase compensation of rate limiters in unstable aircraft // Proc. Int. Conf. Control Applications (CCA'96). 1996. pp. 19–24.
  61. *Andrievsky B. et al.* Nonlinear Phase Shift Compensator for Pilot-Induced Oscillations Prevention // Proc. 9th IEEE Europ. Modelling Symp. on Mathematical Modelling

- and Computer Simulation (EMS 2015). 2015. URL: <http://uksim.info/ems2015/start.pdf>. (дата обращения: 28.11.2016).
62. *Efremov A. V., Ogloblin A. V.* Progress in pilot-in the loop investigations for flying qualities prediction and evaluation // Proc. 25th International Congress of Aeronautical Sciences (ICAS 2006). 2006. URL: [http://www.icas.org/ICAS\\_ARCHIVE/ICAS2006/PAPERS/175.PDF](http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2006/PAPERS/175.PDF). (дата обращения: 28.11.2016).
63. *Lone M., Cooke A.* Review of pilot models used in aircraft flight dynamics // Aerospace Science and Technology. 2014. vol. 34. pp. 55–74.
64. *McRuer D.T., Krendel E.S.* The human operator as a servo system element // J. Franklin Inst. 1959. vol. 267. pp. 381–403.
65. *McRuer D., Graham D., Krendel E., Reiserer, Jr.W.* Human pilot dynamics in compensatory systems-theory, models, and experiments with controlled element and forcing function variations // Wright-Patterson AFB (OH): Air Force Flight Dynamics Laboratory. 1965.

**Андривеский Борис Ростиславич** — д-р техн. наук, доцент, ведущий научный сотрудник лаборатории управления сложными системами, Институт проблем машиноведения РАН (ИПМаш РАН), профессор кафедры управления сложными системами, Университет ИТМО. Область научных интересов: автоматическое управление, адаптация, нелинейные колебания, скользящие режимы, робастное управление, применения в управлении полетом, подвижными роботами. Число научных публикаций — 230. [bandri@yandex.ru](mailto:bandri@yandex.ru), <http://www.ipme.ru/ipme/labs/csc/win/andri.htm>; Большой пр. В.О., 61, к. 43, Санкт-Петербург, 199178; р.т.: +7 812 321 4766, Факс: +7 812 321 4771.

**Кузнецов Николай Владимирович** — к-т физ.-мат. наук, доцент кафедры прикладной кибернетики, математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ). Область научных интересов: теория колебаний, динамические системы. Число научных публикаций — 200. [nkuznetsov239@gmail.com](mailto:nkuznetsov239@gmail.com); Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504; р.т.: +7(812)428-4015, Факс: +7(812)428-6998.

**Кузнецова Ольга Александровна** — к-т физ.-мат. наук, главный научный сотрудник кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ). Область научных интересов: системы фазовой автоподстройки, динамические системы. Число научных публикаций — 30. [kuznetsova@mail.ru](mailto:kuznetsova@mail.ru); Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504; р.т.: +7(812)428-4015, Факс: +7(812)428-6998.

**Леонов Геннадий Алексеевич** — д-р физ.-мат. наук, профессор, член-корреспондент РАН, декан математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет, заведующий кафедрой прикладной кибернетики, Санкт-Петербургский государственный университет. Область научных интересов: теория колебаний, фазовая синхронизация, динамические системы. Число научных публикаций — 491. [leonov@math.spbu.ru](mailto:leonov@math.spbu.ru); Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504; р.т.: +7-812-428-6944, Факс: +7-812-428-6944.

**Мокаев Тимур Назирович** — к-т физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник кафедры прикладной кибернетики математико-механического факультета, Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ). Область научных интересов: теория динамических систем, хаотическая динамика, теория размерности. Число научных публикаций — 10. [tim.mokaev@gmail.com](mailto:tim.mokaev@gmail.com); Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504; р.т.: +7(812)428-6944, Факс: +7(812)428-6944.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-51-45002).

B.R. ANDRIEVSKY, N.V. KUZNETSOV, O.A.KUZNETSOVA, G.A.LEONOV,  
T.N. MOKAEV

## LOCALIZATION OF HIDDEN OSCILLATIONS IN FLIGHT CONTROL SYSTEMS

*Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Kuznetsova O.A., Leonov G.A., Mokaev T.N.* **Localization of hidden oscillations in flight control systems.**

**Abstract.** In the paper we study the problem of control under the magnitude and rate limitations imposed to the control input in application to flight control systems. In the case of the control surfaces magnitude and rate limitations, the self-oscillations of considerable amplitude may occur, which is often referred to as “the loss of stability in large”. If the aircraft is weathercock stable, then two limit cycles may co-exist: a stable cycle of small magnitude and an unstable one with a large magnitude. If the aircraft is weathercock unstable, then one cycle from a pair of stable limit cycles with small magnitude may arise. In addition, there is also an unstable limit cycle, the presence of which makes it necessary to study the stability of the aircraft with automatic longitudinal control “in large”, i.e. when large disturbances act onto the aircraft and move the aircraft out of the border of unstable limit cycle. Influence of such nonlinearities as “saturation” may cause the so-called “*Pilot Involved Oscillations*”, which degrades the piloting of the aircraft.

For studying the processes that occur in nonlinear flight control systems (including nonlinear oscillations), a simple computer simulation is an unreliable tool, which can lead to wrong conclusions. To obtain reliable simulation results, analytical validation of the condition of the uniqueness of the limit solution should be fulfilled or special analytical and numerical methods to find the hidden oscillations should be employed.

In the paper, the analytical-numerical procedure and numerical methods for localization and parameter determination of hidden oscillations in nonlinear systems are described, and their applications are demonstrated for an analysis of dynamics for various kinds of flying vehicles, such as yaw control of non-rigid rocket carrier, automatic control of aircraft angle of attack, as well as man-machine aircraft-pilot system, supplied by stability augmentation system.

**Keywords:** describing function, hidden oscillations, position and rate limitations, flight control, pilot-aircraft, pilot-involved oscillations.

**Andrievsky Boris Rostislavich** — Ph.D., Dr. Sci., associate professor, leading research of control of complex systems laboratory, Institute of Problems in Mechanical Engineering of Russian academy of science (IPME RAS), professor of control of complex systems department, ITMO University. Research interests: adaptive and variable structure control, control of oscillations, computer-aided control systems design, applications to control in aerospace, control of mechanical systems and signal processing. The number of publications — 230. [bandri@yandex.ru](mailto:bandri@yandex.ru), <http://www.ipme.ru/ipme/labs/ccs/win/andri.htm>; 61, Bolshoj pr., V.O., St. Petersburg, 199178; office phone: +7 812 321 4766, Fax: +7(812)321-47-71.

**Kuznetsov Nikolay Vladimirovich** — Ph.D., associate professor of applied cybernetics department of mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University. Research interests: theory of oscillations, dynamical systems. The number of publications — 200. [nkuznetsov239@gmail.com](mailto:nkuznetsov239@gmail.com); 28, Universitetsky pr., St. Petersburg, 198504; office phone: +7(812)428-4015, Fax: +7(812)428-6998.

**Kuznetsova Olga Aleksandrovna** — Ph.D., chief researcher of applied cybernetics department of mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University. Research interests: phase synchronization, dynamical systems. The number of publications — 30. [o\\_a\\_kuznetsova@mail.ru](mailto:o_a_kuznetsova@mail.ru); 28, Universitetsky pr., St. Petersburg, 198504; office phone: +7(812)428-4015, Fax: +7(812)428-6998.

**Leonov Gennady Alekseevich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, Corr. Member of RAS, dean of mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University, head of applied cybernetics department of mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University. Research interests: theory of oscillations, phase synchronization, dynamical systems. The number of publications — 491. leonov@math.spbu.ru; 28, Universitetsky pr., St. Petersburg, 198504; office phone: +7-812-428-6944, Fax: +7-812-428-6944.

**Mokaev Timur Nazirovich** — Ph.D., leading researcher of applied cybernetics department of mathematics and mechanics faculty, St.Petersburg State University. Research interests: dynamical systems, chaotic dynamics. The number of publications — 10. tim.mokaev@gmail.com; 28, Universitetsky pr., St. Petersburg, 198504; office phone: +7(812)428-6944, Fax: +7(812)428-6944.

**Acknowledgements.** This research is supported by RFBR (grant 16-51-45002).

## References

1. Bukov V.N. *Adaptivnyye prognozirujushhie sistemy upravlenija poletom* [Adaptive predictive flight control system]. M.: Nauka. 1987. 232 p. (In Russ.).
2. Topcheev Ju.I., Potemkin V.G., Ivanenko V.G. *Sistemy stabilizacii* [Stabilization systems]. M.: Mashinostroenie. 1974. 248 p. (In Russ.).
3. Bodner V.A. *Sistemy upravlenija letatel'nyimi apparatami* [Aircraft control systems]. M.: Mashinostroenie. 1973. 504 p. (In Russ.).
4. Bjughgens G.S., Studnev R.V. *Ajerodinamika samoleta: Dinamika prodol'nogo i bokovogo dvizhenija* [Aircraft aerodynamics: Dynamics of longitudinal and lateral movement]. M.: Mashinostroenie. 1979. 352 p. (In Russ.).
5. Aviation Safety and Pilot Control: Understanding and Preventing Unfavorable Pilot-Vehicle Interactions. Edited by D.T. McRuer and J.D. Warner. Washington. DC: Committee on the Effects of Aircraft-Pilot Coupling on Flight Safety Aeronautics and Space Engineering Board Commission on Engineering and Technical Systems National Research Council National Academy Press. 1997. 208 p. Available at: <http://www.nap.edu/catalog/5469.html>. (accessed 28.11.2016).
6. *Ajerodinamika, ustojchivost' i upravljaemost' sverhzvukovyh samoletov. Pod red. G.S. Bjughgensa* [Aerodynamics, stability and control of supersonic aircraft. Edited by Bjughgens G.S.]. M.: Nauka. Fizmatlit. 1998. 816 p. (In Russ.).
7. Brieger O. et al. Anti-windup compensation of rate saturation in an experimental aircraft. Proc. American Control Conf. (ACC 2007). 2007. pp. 924–929.
8. Raushenbah B.V., Tokar' E.N. *Upravlenie orientaciej kosmicheskikh apparatov* [Spacecraft orientation Control]. M.: Nauka. 1974. 600 p. (In Russ.).
9. Kargu L.I. *Sistemy uglovoj stabilizacii kosmicheskikh apparatov* [Angular stabilization systems of spacecrafts]. M.: Mashinostroenie. 1980. 172 p. (In Russ.).
10. Abgarjan K.A., Kaljazin Je.L., Mishin V.P. *Dinamika raket: Uchebnik dlja studentov vuzov* [Rocket dynamics: A textbook for university students]. M.: Mashinostroenie. 1990. 464 p. (In Russ.).
11. Efremov A.V. et al. [Mathematical modeling of pilot control response characteristics in studying the manual control tasks]. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Aviacionnaja tehnika. – Russian Aeronautics (Iz VUZ)*. 2015. vol. 2. pp. 34–40. (In Russ.).
12. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Output control of the spectrum of a descriptor dynamical system. *Doklady Mathematics*. 2016. vol. 93. no. 3. pp. 259–261.
13. Zubov N., Mikrin E., Oleinik A., Ryabchenko V. Terminal control of the trajectory and rotational motion of an active spacecraft during a rendezvous with a passive



- spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2016. vol. 55. no. 3. pp. 435–445.
14. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Output control of the longitudinal motion of a flying vehicle. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. vol. 54. no. 5. pp. 825–837.
  15. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Spacecraft attitude control with simultaneous unloading of the angular momentum of inertial actuators. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. vol. 54. no. 4. pp. 621–628.
  16. Zubov N., Mikrin E., Ryabchenko V., Proletarskii A. Analytical synthesis of control laws for lateral motion of aircraft. *Russian Aeronautics*. 2015. vol. 58. no. 3. pp. 263–270.
  17. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Stabilization of coupled motions of an aircraft in the pitch-yaw channels in the absence of information about the sliding angle: Analytical synthesis. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2015. vol. 54. no. 1. pp. 93–103.
  18. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Finite eigenvalue assignment for a descriptor system. *Doklady Mathematics*. 2015. vol. 91. no. 1. pp. 64–67.
  19. Zubov N. et al. Terminal bang-bang impulsive control of linear time invariant dynamic systems. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2014. vol. 53. no. 3. pp. 430–444.
  20. Zubov N. et al. Output control of a spacecraft motion spectrum. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2014. vol. 53. no. 4. pp. 576–586.
  21. Zubov N., Lapin A., Mikrin E. Synthesis of decoupling laws for controlling the angular motion of landing module with solid-fuel landing engine minimizing the transient time. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 52. no. 3. pp. 480–490.
  22. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Modification of the exact pole placement method and its application for the control of spacecraft motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 52. no. 2. pp. 279–292.
  23. Zubov N. et al. The use of the exact pole placement algorithm for the control of spacecraft motion. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2013. vol. 52. no. 1. pp. 129–144.
  24. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Synthesis of controls for a spacecraft that optimize the pole placement of the closed-loop control system. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2012. vol. 51. no. 3. pp. 431–444.
  25. Zubov N., Mikrin E., Misrikhanov M., Ryabchenko V. Synthesis of decoupling laws for attitude stabilization of a spacecraft. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2012. vol. 51. no. 1. pp. 80–96.
  26. Zubov N. et al. Synthesis of stabilizing spacecraft control based on generalized Ackermann's formula. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2011. vol. 50. no. 1. pp. 93–103.
  27. Berko V.S., Zhivov Ju.G., Poedinok A.M. An approximate stability criterion of forced oscillations of the controlled object with a non-linear drive. *Uchenye zapiski CAGI - Central Aerohydrodynamic Institute Science Journal*. 1984. Issue XV. vol. 4. pp. 72–80. (In Russ.).
  28. Powers B. Space Shuttle Pilot-Induced-Oscillation Research Testing. Report No. AGARDograph No. 262. In AGARD Ground and Flight Testing for Aircraft Guidance and Control (N85-22350 13-01). 1984.
  29. Pachter M., Miller R. Manual flight control with saturating actuators. *IEEE Control Syst. Mag.* 1998. vol. 18. no. 1. pp. 10–19.
  30. Brieger O. et al. Flight testing of low-order anti-windup compensators for improved handling and PIO suppression. Proceedings of American Control Conference (ACC 2008). 2008. pp. 1776–1781.

31. Brieger O. et al. Flight testing of a rate saturation compensation scheme on the ATTAS aircraft. *Aerospace Science and Technology*. 2009. vol. 13. no. 2–3. pp. 92–104.
32. Brieger O. et al. Pilot-Involved-Oscillation Suppression Using Low-Order Antiwindup: Flight-Test Evaluation. *J. Guidance, Control, and Dynamics*. 2012. Vol. 35, no. 2. pp. 471–483.
33. Acosta D.M., Yildiz Y., Klyde D.H. Avoiding Pilot-Induced Oscillations in Energy-Efficient Aircraft Designs. The Impact of Control Technology – 2<sup>nd</sup> Ed. (IEEE CSS). 2014. Available at: <http://ieeecss.org/sites/ieeecss.org/files/CSSIoCT2Update/loCT2-RC-Acosta-1.pdf>. (accessed 28.11.2016).
34. Duda H. Flight control system design considering rate saturation. *Aerospace Science and Technology*. 1998. vol. 4. pp. 265–215.
35. Bragin V.O., Vagaitsev V.I., Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Algorithms for Finding Hidden Oscillations in Nonlinear Systems. The Aizerman and Kalman Conjectures and Chua’s Circuits. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2011. vol. 50. no. 4. pp. 511–543.
36. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Hidden attractors in dynamical systems. From hidden oscillations in Hilbert-Kolmogorov. Aizerman and Kalman problems to hidden chaotic attractors in Chua circuits. *Int J. Bifurcation and Chaos*. 2013. vol. 23, no. 1. pp. 1–69.
37. Kuznetsov N.V., Leonov G.A. Hidden Periodic and Chaotic Oscillations in Nonlinear Dynamical Systems. Proc. 19th IFAC World Congress. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2014. vol. 19. pp. 5445–5454. Available at: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailled/66959.html>. (accessed 28.11.2016).
38. Dudkowski D. et al. Hidden attractors in dynamical systems. Physics Reports. 2016. vol. 637. pp. 1–50. Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370157316300928>. (accessed 28.11.2016).
39. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Seledzhi S.M. Hidden oscillations in stabilization system of flexible launcher with saturating actuators. Proc. 19th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace (ACA 2013). IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2013. vol. 19(1). pp. 37–41. Available at: <http://www.ifac-papersonline.net/Detailled/63129.html>. (accessed 28.11.2016).
40. Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Leonov G.A., Pogromsky A.Y. Hidden Oscillations in Aircraft Flight Control System with Input Saturation. IFAC Proceedings Volumes. 2013. vol. 46. no. 12. pp. 75–79.
41. van den Berg R., Pogromsky A.Y., Rooda J.E. Convergent Systems Design: Anti-Windup for Marginally Stable Plants. Proc. 45th IEEE Conf. Decision & Control (CDC 2006). IEEE Press. 2006. pp. 5441–5446.
42. Pogromsky A.Y., Andrievsky B.R., Rooda J. Aircraft flight control with convergence-based anti-windup strategy. Proc. IFAC Workshop Aerospace Guidance, Navigation and Flight Control Systems (AGNFCS 09). IFAC. 2009.
43. Leonov G.A., Andrievsky B.R., Kuznetsov N.V., Pogromsky A.Y. Control of aircrafts with AW-compensation. *Differential Equations*. 2012. vol. 48. no. 13. pp. 1700–1720.
44. Pogromsky A., van Den Berg R. Frequency domain performance analysis of Lur’e systems. *IEEE Trans. Contr. Syst. Technol.* 2014. vol. 22. no. 5. pp. 1949–1955.
45. Leonov G.A. [Effective methods for finding periodic oscillations in dynamic systems] *Prikladnaja matematika i mehanika – Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2010. vol. 74. no. 1. pp. 37–73. (In Russ.).
46. Leonov G.A., Kuznetsov N.V. Analytical-numerical methods for investigation of hidden oscillations in nonlinear control systems. IFAC Proceedings Volumes (IFAC-PapersOnline). 2011. vol. 18. no. 1. pp. 2494–2505.

47. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I. Localization of hidden Chua's attractors. *Physics Letters A*. 2011. vol. 375. no. 23. pp. 2230–2233.
48. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Vagaitsev V.I. Hidden attractor in smooth Chua systems. *Physica D*. 2012. vol. 241. no. 18. pp. 1482–1486.
49. Besekerskij V.A., Popov E.P. *Teorija sistem avtomaticheskogo regulirovanija* [The theory of automatic control systems]. M.: Nauka. 1975. 768 p. (In Russ.).
50. Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Yuldashev M.V., Yuldashev R.V. [Computation of phase detector characteristics in synchronization systems]. *Doklady Akademii Nauk – Doklady Mathematics*. 2011. vol. 439. no. 4. pp. 459–463. (In Russ.).
51. Reichert R. Dynamic scheduling of modern robust control autopilot design for missiles. *IEEE Control Syst. Mag.* 1992. vol. 12. no. 5. pp. 35–42.
52. Ferreres G., Biannic J. Convex Design of a Robust Antiwindup Controller for an LFT Model. *IEEE Trans. Automat. Contr.* 2007. vol. 52. no. 11. pp. 2173–2177.
53. Biannic J., Tarbouriech S. Optimization and implementation of dynamic anti-windup compensators with multiple saturations in flight control systems. *Control Engineering Practice*. 2009. vol. 17. pp. 703–713.
54. GOST 20058-80. [Dynamics of aircraft in the atmosphere: Terms, definitions and notations]. M.: Izdatelstvo standartov. 1981. (In Russ.).
55. Barbu C., Reginatto R., Teel A. R., Zaccarian L. Anti-windup design for manual flight control. Proc. American Control Conf. (ACC'99). 1999. vol. 5. pp. 3186–3190.
56. Mehra R., Prasanth R. Application of nonlinear global analysis and system identification to aircraft-pilot coupled oscillations. Proc. Int. Conf. Control Applications (CCA'98). 1998. vol. 2. pp. 1404–1408.
57. Alcalá I., Gordillo E., Aracil J. Phase compensation design for prevention of PIO due to actuator rate saturation. Proc. American Control Conf. (ACC 2004). AACC. 2004. pp. 4686–4691.
58. McRuer D.T., Jex H.R. A Review of Quasi-Linear Pilot Models. *IEEE Trans. Hum. Factors Electron.* 1967. vol. HFE-8. no. 3. pp. 231–249.
59. Efremov A.V., Ogloblin A.V., Predtechenskij A.N., Rodchenko V.V. *Letchik kak dinamicheskaja sistema* [Pilot as a dynamic system]. M.: Mashinostroenie. 1992. 330 p. (In Russ.).
60. Rundqwist L., Stahl-Gunnarsson K. Phase compensation of rate limiters in unstable aircraft. Proc. Int. Conf. Control Applications (CCA'96). 1996. pp. 19–24.
61. Andrievsky B.R. et al. Nonlinear Phase Shift Compensator for Pilot-Induced Oscillations Prevention. Proc. 9th IEEE Europ. Modelling Symp. on Mathematical Modelling and Computer Simulation (EMS 2015). 2015. Available at: <http://uksim.info/ems2015/start.pdf>. (accessed 28.11.2016).
62. Efremov A. V., Ogloblin A. V. Progress in pilot-in-the-loop investigations for flying qualities prediction and evaluation Proc. 25th International Congress of Aeronautical Sciences (ICAS 2006), 2006. Available at: [http://www.icas.org/ICAS\\_ARCHIVE/ICAS2006/PAPERS/175.PDF](http://www.icas.org/ICAS_ARCHIVE/ICAS2006/PAPERS/175.PDF). (accessed 28.11.2016).
63. Lone M., Cooke A. Review of pilot models used in aircraft flight dynamics. *Aerospace Science and Technology*. 2014. vol. 34. pp. 55–74.
64. McRuer D.T., Krendel E.S. The human operator as a servo system element. *J. Franklin Inst.* 1959. vol. 267. pp. 381–403.
65. McRuer D., Graham D., Krendel E., Reisener, Jr.W. Human pilot dynamics in compensatory systems-theory, models, and experiments with controlled element and forcing function variations. Wright-Patterson AFB (OH): Air Force Flight Dynamics Laboratory. 1965.