УДК 681.5.075

В.Н. Дроздов, А.А. Абдуллин

ПРОБЛЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ С НУЛЯМИ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Дроздов В.Н., Абдуллин А.А. **Проблемы управления объектами с нулями передаточной функции.**
Аннотация. Нули объектов управления являются причиной возникновения сложностей при проектировании регуляторов для таких объектов. Это влияние, в частности, проявляется в безредукторных приводах с упругой нагрузкой, конечномерные модели которых имеют нули. В текущей литературе трудности проектирования регуляторов объясняются ослаблением свойств управляемости или наблюдаемости объектов с нулями. В статье показывается, что свойства управляемости и наблюдаемости не могут объяснить трудности построения регуляторов для объектов с нулями, т.к. эти свойства не инвариантны к выбору базиса. Предлагается вместо свойств управляемости и наблюдаемости рассматривать свойство полноты объекта. Близость объекта к вырождению, к потере полноты, определяет трудности проектирования регуляторов. Анализируется один из способов регуляризации процедуры синтеза - редукция модели объекта.
Ключевые слова: количественные меры управляемости и наблюдаемости, полнота объекта, вырожденность объекта, синтез регулятора, регуляризация синтеза, безредукторный привод, упругий объект.

Drozdov V.N., Abdullin A.A. **Control Problems of Objects with Zeros of the Transfer Function.**
Abstract. Zeros of the control objects are the cause of difficulties in control system design process. In particular, this effect takes place in direct drive servo with elastic coupling whose finite-dimensional models have zeros. In modern literature, these difficulties are associated with the attenuation of controllability and observability of the objects with zeros. This article shows that controllability and observability properties could not explain the problem of the control system design process for objects with zeros because these properties are not invariant to the choice of basis. It is proposed to consider the completeness property of the object instead of the controllability and observability properties. The proximity of the object to singularity or to a loss of the completeness determines the difficulty of the control system design process. The article analyzes one of the methods to regularize the control system synthesis procedure.
Keywords: quantitative measures of controllability and observability, completeness of the object, singularity of the object, synthesis of the controller, regularization of the synthesis, direct drive servo, object with elastic coupling.

1. Введение. Основное внимание исследователей, занимающихся разработкой регуляторов состояния, традиционно сосредоточено на распределении собственных чисел в проектируемой системе. Однако игнорирование наличия нулей у объекта управления может привести к нежелательным последствиям. На этот факт, в частности, обратили внимание специалисты, работающие с безредукторным приводом. Отказ от понижающих редукторов повлёк за собой существенное влияние упругих свойств объектов управления на свойства электропривода [1–5]. Упругие конструкции являются объектами с распределёнными параметрами, модели которых имеют вид дифференциальных уравнений в частных производных. При решении практических задач в подобных случаях строятся аппроксимирующие модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений [1–5]. Особенность конечномерных моделей объектов с упругими связями состоит в том, что они имеют нули.

Наличие нулей влияет на такие важные характеристики системы, как матрицы управляемости и наблюдаемости. Введённые в обиход теории управления Р. Калманом [6], эти матрицы позволяют устанавливать свойства управляемости и наблюдаемости динамических систем. При введении понятий управляемости и наблюдаемости Калман обходит вниманием вопрос количественной меры управляемости и наблюдаемости. Однако от числовых характеристик этих матриц, в сильной степени зависят результаты процедуры синтеза регуляторов. В связи со сказанным в последнее время появились работы, в которых предпринимаются попытки построения количественных мер управляемости и наблюдаемости объектов [2, 7–15]. Более того, на основании сравнения мер управляемости и наблюдаемости принимаются решения о выборе структуры регулятора [2, 13].

Количественные меры управляемости и наблюдаемости в перечисленных работах связываются с какими-либо числовыми характеристиками матриц управляемости $\mathbf{P}_c$ и наблюдаемости $\mathbf{P}_o$ в некотором исходном или первичном базисе. Определение первичного базиса остаётся за кадром, а свойства указанных матриц меняются кардинальным образом при изменении базиса в пространстве состояний анализируемого объекта. Замена матриц управляемости и наблюдаемости грамианами кардинально ничего не меняет, т.к. грамиан управляемости равен $\mathbf{G}_c = \mathbf{P}_c \mathbf{P}_c^{\mathrm{T}}$, а грамиан наблюдаемости $\mathbf{G}_o = \mathbf{P}_o^{\mathrm{T}} \mathbf{P}_o$ [16].

2. Управляемость и наблюдаемость объектов с нулями. Матрицы управляемости и наблюдаемости непрерывных объектов:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u, \\ y = \mathbf{C}\mathbf{x}, \end{cases} \tag{1}$$

а также дискретных объектов:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_m + \mathbf{B}u_m, \\ y_m = \mathbf{C}\mathbf{x}_m, \end{cases} \tag{2}$$

с одномерным входом и одномерным выходом, как известно [6], равны:

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{AB} & \dots & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \ \mathbf{P}_o = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} & \left(\mathbf{CA}\right)^{\mathrm{T}} & \dots & \left(\mathbf{CA}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Выполним преобразование базиса согласно выражению $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{Mx}$ в пространстве состояний объектов (1) и (2), матрицы модели состояния объектов в новом базисе будут:

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{MAM}^{-1}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{MB}, \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{CM}^{-1}.$$

Матрицы управляемости и наблюдаемости в новом базисе:

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{B}} & \dots & \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix}, \ \tilde{\mathbf{P}}_o = \begin{bmatrix} \left(\tilde{\mathbf{C}}\right)^{\mathrm{T}} & \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}\right)^{\mathrm{T}} & \dots & \left(\tilde{\mathbf{C}}\tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

или

$$\tilde{\mathbf{P}}_c = \mathbf{MP}_c, \ \tilde{\mathbf{P}}_o = \mathbf{P}_o\mathbf{M}^{-1}. \tag{3}$$

Выбирая различные базисы, будем получать различные свойства матриц управляемости и наблюдаемости. Отсюда следует, что употреблять выражения «управляемость объекта» или «наблюдаемость объекта» надо с осторожностью. Правильнее будет судить об управляемости или наблюдаемости соответствующей пары матриц $\left(\mathbf{A}, \mathbf{B}\right)$ или $\left(\mathbf{A}, \mathbf{C}\right)$. Тем более сомнительным является принятие в качестве основы метода синтеза регулятора количественную оценку степени управляемости или степени наблюдаемости объекта управления.

Напрашивается вывод, что вместо управляемости и наблюдаемости целесообразно рассматривать некоторое инвариантное свойство объекта, не зависящее от выбора базиса в пространстве состояний. Характеристикой такого свойства может служить матрица:

$$\mathbf{P}_{oc} = \mathbf{P}_o\mathbf{P}_c. \tag{4}$$

В соответствии с (3):

$$\tilde{\mathbf{P}}_{oc} = \tilde{\mathbf{P}}_o\tilde{\mathbf{P}}_c = \mathbf{P}_o\mathbf{M}^{-1}\mathbf{MP}_c = \mathbf{P}_o\mathbf{P}_c = \mathbf{P}_{oc}.$$

Матрицы такого типа называются матрицами Ганкеля. Эта матрица инвариантна относительно преобразования базисов и имеет прозрачный физический смысл, она описывает эксперимент Ганкеля, характеризующий связь пространств прошлых входных и будущих выходных сигналов [12, 16–19]. Содержание эксперимента Ганкеля удобнее всего проиллюстрировать для дискретного объекта (2). Решение разностного уравнения (2) при нулевом начальном состоянии имеет вид:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}u_0 + \mathbf{A}^{n-2}\mathbf{B}u_1 + \ldots + \mathbf{AB}u_{n-2} + \mathbf{B}u_{n-1}.$$

Преобразуем последнее выражение следующим образом:

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{P}_c\mathbf{u}, \quad \mathbf{u}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} u_0 & u_1 & \ldots & u_{n-1} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Пусть теперь $u_n = u_{n+1} = \ldots = 0$ и будем вычислять выходной сигнал системы, тогда получим:

$$\begin{aligned} &y_n = \mathbf{Cx}_n, \\ &y_{n+1} = \mathbf{CAx}_n, \\ &\ldots \\ &y_{2n-1} = \mathbf{CA}^{n-1}\mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Представим вектор значений выходного сигнала в виде $\mathbf{y} = \mathbf{P}_o\mathbf{x}_n$, $\mathbf{y}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} y_{n+1} & y_{n+2} & \ldots & y_{2n-1} \end{bmatrix}$. Воспользовавшись (5), это выражение запишем в виде:

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}_o\mathbf{P}_c\mathbf{u} = \mathbf{P}_{oc}\mathbf{u}. \tag{6}$$

Ганкелев оператор с матрицей (4) , в отличие от передаточной функции, не только отображает пространство входных сигналов в пространство выходных, но и характеризует степень (интенсивность) участия различных собственных подпространств объекта в этой процедуре отображения. Эта степень участия оценивается сингулярными числами матрицы (4). Сама матрица согласно [20] называется матрицей полноты объекта. В том случае, когда матрица $\mathbf{P}_{oc}$ не вырождена, объект называется полным, он полностью управляем и полностью наблюдаем, независимо от базиса. Если же $rang\left(\mathbf{P}_{oc}\right)$ меньше размерности пространства состояний, то объект вырождается, степень знаменателя передаточной функции становится меньше размерности пространства состояний. По этой причине матрицу $\mathbf{P}_{oc}$ можно назвать также матрицей вырожденности. Приближение определителя матрицы вырожденности к нулю говорит об ослаблении связи между пространствами входа и выхода.

Проиллюстрируем сказанное простейшим примером. Рассмотрим управление объектом с передаточной функцией:

$$W(s)=\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}. \tag{7}$$

Для получения модели состояния представим структурную схему объекта в следующем виде (рисунок 1).

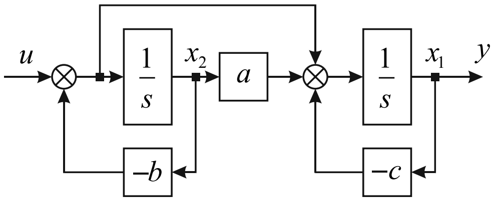

Рис. 1. Структурная схема объекта в первом базисе

Матрицы модели состояния объекта в этом базисе равны:

$$\mathbf{A}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}-c & a-b\\ 0 & -b\end{bmatrix},\ \mathbf{B}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}_{\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}. \tag{8}$$

Матрица управляемости объекта и её определитель равны:

$$\mathbf{P}_{c\_\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}1 & a-b-c\\ 1 & -b\end{bmatrix}, d_{c\_\mathrm{I}}=c-a. \tag{9}$$

Матрица наблюдаемости объекта и её определитель равны:

$$\mathbf{P}_{o\_\mathrm{I}}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -c & a-b\end{bmatrix},\ d_{o\_\mathrm{I}}=a-b. \tag{10}$$

Из (9) следует, что при $a\to c$ в случае изменения параметров объект становится неуправляемым. В структурной схеме на рисунке 1 неуправляемой становится координата состояния x_1. Согласно (10) при $a\to b$ объект становится ненаблюдаемым. В структурной схеме на рисунке 1 ненаблюдаемой становится координата состояния x_2.

Выполнив преобразование координат в пространстве состояний исследуемого объекта с матрицей преобразования:

$$\mathbf{M}=\frac{1}{a-c}\begin{bmatrix}b-c & a-b\\ 1 & -1\end{bmatrix}.$$

В соответствии с (3) получим в новом базисе матрицу управляемости и её определитель:

$$\mathbf{P}_{c\_\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ d_{c\_\mathrm{II}} = 1\,.$$

В этом базисе объект всегда будет представляться полностью управляемым.

Матрица наблюдаемости объекта и её определитель во втором базисе будут:

$$\mathbf{P}_{o\_\mathrm{II}} = \begin{bmatrix} 1 & a-b \\ a-b-c & b^2-ab \end{bmatrix},\ d_{o\_\mathrm{II}} = (a-b)(c-a)\,. \quad (11)$$

Из (11) следует, что при совпадении нуля a с любым из полюсов оказывается ненаблюдаемой координата состояния, соответствующая этому полюсу.

В каноническом управляемом базисе матрица управляемости объекта и её определитель равны:

$$\mathbf{P}_{c\_\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b-c \end{bmatrix},\ d_{c\_\mathrm{III}} = -1\,.$$

Естественно, что в этом случае объект всегда будет представляться полностью управляемым.

Матрица наблюдаемости объекта и её определитель в этом базисе:

$$\mathbf{P}_{o\_\mathrm{III}} = \begin{bmatrix} a & 1 \\ -bc & a-b-c \end{bmatrix},\ d_{o\_\mathrm{III}} = (a-b)(a-c)\,.$$

Отсюда следует, что объект будет восприниматься как ненаблюдаемый при совпадении нуля с любым из полюсов.

В каноническом наблюдаемом базисе матрица наблюдаемости равна матрице управляемости объекта в каноническом управляемом базисе,

$$\mathbf{P}_{o\_\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -b-c \end{bmatrix},\ d_{o\_\mathrm{IV}} = -1,$$

следовательно, объект всегда будет восприниматься как полностью наблюдаемый.

Матрица управляемости объекта в этом базисе соответственно будет:

$$\mathbf{P}_{c\_\mathrm{IV}} = \begin{bmatrix} a & -bc \\ 1 & a-b-c \end{bmatrix},\ d_{c\_\mathrm{IV}} = (a-b)(a-c)\ .$$

Отсюда следует, что объект будет восприниматься как неуправляемый при совпадении нуля с любым из полюсов.

На этом простом примере видно, что говорить о количественных мерах управляемости и наблюдаемости объекта не имеет смысла. Допустимо рассматривать количественные меры управляемости и/или наблюдаемости соответствующих пар матриц.

Матрица вырожденности $\mathbf{P}_{oc}$ и её определитель для данного объекта в любом базисе одни и те же:

$$\mathbf{P}_{oc} = \begin{bmatrix} 1 & a-b-c \\ a-b-c & c(b+c-a)-ab+b^2 \end{bmatrix},\ d_{oc} = (a-b)(a-c)\ .$$

Приближение нуля к любому из полюсов устремляет определитель матрицы вырожденности к нулю, при этом ослабляется связь между пространствами входа и выхода. При нулевом значении определителя матрицы вырожденности объект вырождается, теряет полноту. Некоторые подпространства перестают участвовать в передаче входного сигнала. В передаточной функции это соответствует уменьшению степени её знаменателя.

Заметим, что объекты управления, не имеющие нулей, не могут быть вырожденными. Действительно, матрица полноты объекта, не имеющего нулей, имеет треугольный вид, побочная диагональ которой заполнена коэффициентом передачи k объекта, а над побочной диагональю стоят нули, определитель такой матрицы равен $\pm k^n$.

3. Влияние нулей объекта на свойства регулятора. Исходя из выражения (6), связывающего пространства входов и выходов объекта, можно предположить, что синтез регулятора, алгоритм которого вычисляет управление, обеспечивающее надлежащее изменение выходного сигнала, связан с обращением матрицы полноты $\mathbf{P}_{oc}$.

Исследуем эту проблему на примере того же простейшего объекта с передаточной функцией (7). Выполним синтез регулятора состояния:

$$u = -\mathbf{Kx} \tag{13}$$

для различных базисов пространства состояний объекта в предположении, что измеряется только выходная величина объекта.

В первом базисе, соответствующем структурной схеме на рисунке 1, элементы матрицы **K** равны

$$
\begin{aligned}
k_{1\_\mathrm{I}} &= \frac{\gamma_1\gamma_2 + c(\gamma_1+\gamma_2) + c^2}{a-c}, \\
k_{2\_\mathrm{I}} &= \frac{\gamma_1\gamma_2 + a(\gamma_1+\gamma_2) + ac + ab - bc}{c-a},
\end{aligned}
\qquad (14)
$$

где γ_1, γ_2 — желаемые собственные числа замкнутой системы.

Согласно рисунку 1 в данном базисе измеряется только координата x_1, поэтому для реализации модального регулятора необходимо применить наблюдатель пониженной размерности [21]. В результате выполнения процедуры синтеза наблюдателя пониженной размерности преобразуем закон управления (13) к виду

$$
\begin{cases}
\dot{w} = \left(a_o + b_o n_{2\_\mathrm{I}}\right) w + \left(b_o n_{1\_\mathrm{I}} + 1\right) y, \\
u = n_{2\_\mathrm{I}} w + n_{1\_\mathrm{I}} y,
\end{cases}
$$

где $n_{1\_\mathrm{I}} = \dfrac{a_o + b}{a-b} k_{2\_\mathrm{I}} - k_{1\_\mathrm{I}}$, $n_{2\_\mathrm{I}} = -\dfrac{(a_o+b)(a_o+c)}{a-b} k_{2\_\mathrm{I}}$.

Из полученных выражений следует, что параметры n_{1_I}, n_{2_I} регулятора обратно пропорциональны определителю матрицы полноты $\mathbf{P}_{oc}$. В случае близости матрицы к вырождению возникают проблемы, аналогичные решению линейной алгебраической задачи при плохой обусловленности матрицы этой задачи [22].

Проверим, можно ли избежать этой проблемы при изменении базиса пространства состояний объекта.

Для базиса, соответствующего структурной схеме на рисунке 2, коэффициенты матрицы обратных связей модального управления, вычисленные стандартным методом, имеют вид

$$
k_{1\_\mathrm{II}} = -(\gamma_1+\gamma_2) - b - c, \quad k_{2\_\mathrm{II}} = \gamma_1\gamma_2 + b(\gamma_1+\gamma_2) + b^2.
$$

Поскольку выходной сигнал y не совпадает ни с одной переменной состояния в данном базисе, то для реализации закона модального управления необходимо строить наблюдатель полной размерности. Выполнив стандартную процедуру синтеза наблюдателя полной размерности, получим алгоритм регулятора в виде:

$$\begin{cases}\dot{\bar{\mathbf{x}}} = \left(\mathbf{A}_{\text{II}} - \mathbf{B}_{\text{II}}\mathbf{K}_{\text{II}} - \mathbf{R}\mathbf{C}_{\text{II}}\right)\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{R}y, \\ u = -\mathbf{K}_{\text{II}}\bar{\mathbf{x}},\end{cases}$$

где элементы матрицы **R** равны:

$$r_{1\_\text{I}} = \frac{c\left(\delta_1+\delta_2\right)+c^2+\delta_1\delta_2}{a-b},\ r_{2\_\text{II}} = \frac{ab+ac-bc+a\left(\delta_1+\delta_2\right)+\delta_1\delta_2}{\left(a-c\right)\left(b-a\right)},$$

а δ_1, δ_2 — желаемые собственные числа матрицы состояния наблюдателя. Здесь также один из коэффициентов регулятора обратно пропорционален определителю матрицы вырожденности.

Для канонического управляемого базиса элементы матрицы обратных связей модального регулятора не зависят от нуля a и равны

$$k_{1\_\text{III}} = -bc+\gamma_1\gamma_2,\ k_{2\_\text{III}} = -\left(b+c+\gamma_1+\gamma_2\right).$$

В каноническом управляемом базисе, как и во втором базисе, выходной сигнал y не совпадает ни с одной переменной состояния, поэтому для реализации регулятора состояния необходимо строить наблюдатель полной размерности. Элементы матрицы входа наблюдателя по ошибке оценивания имеют вид:

$$r_{1\_\text{III}} = \frac{ab+ac-bc+a\left(\delta_1+\delta_2\right)+\delta_1\delta_2}{\left(a-c\right)\left(b-a\right)},$$

$$r_{2\_\text{III}} = \frac{b^2\left(a-c\right)+c^2\left(a-b\right)+abc+\left(ab+ac-bc\right)\left(\delta_1+\delta_2\right)+a\delta_1\delta_2}{\left(a-c\right)\left(a-b\right)}.$$

И в этом базисе коэффициенты регулятора обратно пропорциональны определителю матрицы вырожденности объекта.

Для канонического наблюдаемого базиса элементы матрицы обратных связей модального регулятора определяются из соотношений:

$$k_{1\_\text{IV}} = \frac{\gamma_1\gamma_2-bc+a\left(b+c+\gamma_1+\gamma_2\right)}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)},$$

$$k_{2\_\text{IV}} = \frac{bc^2+b^2c+\left(ac+bc+ac\right)\left(\gamma_1+\gamma_2\right)+a\left(\gamma_1\gamma_2+b^2+c^2-bc\right)}{\left(a-b\right)\left(c-a\right)}.$$

В данном базисе измеряется только одна переменная состояния x_2, поэтому для реализации модального регулятора необходимо синтезировать наблюдатель пониженной размерности. В результате выполнения процедуры синтеза наблюдателя пониженной размерности, найдём значения параметров наблюдателя:

$$n_{1\_\mathrm{IV}} = a_o k_{2\_\mathrm{IV}} - k_{1\_\mathrm{IV}}, \; n_{2\_\mathrm{IV}} = (a_o + b)(a_o + c) k_{1\_\mathrm{IV}}.$$

Здесь коэффициенты регулятора также обратно пропорциональны определителю матрицы вырожденности объекта.

Обратимся теперь к объекту с упругими связями. Типичная передаточная функция двух массового объекта управления с парой комплексно сопряжённых нулей $-\alpha_1 \pm j\omega_1$, парой комплексно сопряжённых полюсов $-\alpha_2 \pm j\omega_2$ и одним вещественным полюсом —b имеет вид [1–3, 5]:

$$W(s) = \frac{s^2 + 2\alpha_1 s + m_1^2}{(s+b)\left(s^2 + 2\alpha_2 s + m_2^2\right)}, \; m_1^2 = \alpha_1^2 + \omega_1^2, \; m_2^2 = \alpha_2^2 + \omega_2^2.$$

Матрицы модели состояния объекта, соответствующие этой передаточной функции, равны:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -m_2^2 & -2\alpha_2 & 1 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \; \mathbf{C} = \begin{bmatrix} m_1^2 - m_2^2 & 2\alpha_1 - 2\alpha_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица управляемости объекта:

$$\mathbf{P}_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\alpha_2 - b \\ 1 & -b & b^2 \end{bmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен минус единице и не зависит от нулей объекта, следовательно, в этом базисе объект всегда будет представляться полностью управляемым.

Матрица наблюдаемости объекта излишне громоздка, поэтому не будем её приводить. Определитель этой матрицы равен

$$d_o = \left(b^2 - 2\alpha_1 b + m_1^2\right)\left(4(\alpha_1 - \alpha_2)\left(\alpha_1 m_2^2 - \alpha_2 m_1^2\right) + \left(m_1^2 - m_2^2\right)^2\right). \qquad (15)$$

Матрица вырожденности объекта также излишне громоздка, отметим только, что определитель произведения матриц равен произведению определителей перемножаемых матриц, поэтому определитель матрицы вырожденности упругого объекта с точностью до знака совпадает с (15).

При равенстве комплексных нулей и комплексных полюсов определитель равен нулю. В случае вещественного полюса b объект может потерять свойство полноты при условии:

$$b = -\alpha_1 \pm \sqrt{\alpha_1^2 - m_1^2} \Rightarrow b = -\alpha_1 \pm j\omega_1 ,$$

т.е. когда комплексно сопряжённые нули неограниченно приближаются к вещественному полюсу b.

Элементы матрицы обратных связей в законе управления (13) не зависят от нулей упругого объекта. Это ожидаемый результат вследствие постоянного значения определителя матрицы управляемости. В данном базисе выходной сигнал y не совпадает ни с одной переменной состояния, поэтому для реализации закона модального управления необходимо строить наблюдатель полной размерности. Рассчитанные параметры наблюдателя излишне громоздки, поэтому не будем их приводить. Отметим только, что знаменатели этих коэффициентов совпадают с определителем (15) матрицы вырожденности.

Из рассмотренных примеров следует, что при стремлении объекта к вырождению, в частности, в случае приближения нулей объекта к полюсам, требуются всё большие по модулю коэффициенты регулятора, обеспечивающего выполнение требований к качеству проектируемой системы.

4. Редуцирование модели объекта с нулями. Наличие расположенных близко друг от друга нулей и полюсов объекта приводят к появлению больших коэффициентов регулятора. Дело осложняется тем, что параметры каждого конкретного объекта отличаются от номинальных, а системы с большими коэффициентами регулятора, как правило, обладают повышенной чувствительностью к изменению параметров объекта. Задача синтеза регулятора становится плохо обусловленной. Задачи, близкие к вырождению, относят к некорректным. Решение некорректных задач предусматривает их регуляризацию. Проблеме регуляризации процедуры синтеза пока что не уделяется должного внимания. Наиболее распространённым является метод редуцирования модели объекта [12, 14, 16, 17, 23–25].

Простейшим способом редуцирования является сокращение близких нуля и полюса модели и синтез регулятора для модели меньшей размерности. Однако в действительности ноль и полюс точно совпадают друг с другом в редких случаях. Использование регулятора, синтезированного для модели меньшей размерности, приводит к появлению полюсов, отличных от заданных.

Исследуем эту проблему для простого объекта с передаточной функцией (7). Используем канонический наблюдаемый базис. Пусть полюс b и ноль a расположены близко друг к другу, такие ноль и полюс часто называют диполем [11]. Опустим этот диполь, тогда редуцированный объект вместо (7) будет иметь передаточную функцию:

$$W_{r1}(s)=\frac{1}{(s+c)}.$$

Для этого объекта используем регулятор состояния:

$$u=-k_{r1}y, \tag{16}$$

где $-c-k_{r1}=\gamma_{r1}\Rightarrow k_{r1}=-c-\gamma_{r1}$.

В действительности матрица состояния замкнутой системы при несовпадении значений нуля и полюса будет:

$$\mathbf{F}_{r1}=\begin{bmatrix}0 & -bc-k_{r1}a\\ 1 & -b-c-k_{r1}\end{bmatrix}.$$

Воспользовавшись выражением для коэффициента обратной связи, преобразуем матрицу состояния к виду:

$$\mathbf{F}_{r1}=\begin{bmatrix}0 & -bc+ac+a\gamma_{r1}\\ 1 & \gamma_{r1}-b\end{bmatrix}.$$

Собственные числа этой матрицы равны:

$$s_{1,2}=0.5\left(-b+\gamma_{r1}\pm\sqrt{b^2+2\gamma_{r1}(2a-b)+\gamma_{r1}^2+4c(a-b)}\right).$$

В случае равенства нулю размера диполя, $a=b$, одно собственное число $s_1=-b$, а другое собственное число $s_2=\gamma_{r1}$, что соответствует собственным числам с учётом редуцирования объекта.

В случае не равенства нулю размера диполя появляются ошибки собственных значений матрицы состояния замкнутой системы:

$$\Delta s_1 = 0.5\left(b+\gamma_{r1}-\sqrt{b^2+2\gamma_{r1}\left(2a-b\right)+\gamma_{r1}^2+4c\left(a-b\right)}\right),$$

$$\Delta s_2 = 0.5\left(-b-\gamma_{r1}+\sqrt{b^2+2\gamma_{r1}\left(2a-b\right)+\gamma_{r1}^2+4c\left(a-b\right)}\right).$$

Введём обозначение $\rho_1 = a-b \Rightarrow b = a-\rho_1$.

С учётом введённых обозначений приращения корней характеристического полинома преобразуются к виду:

$$\Delta s_1 = 0.5\left(a-\rho_1+\gamma_{r1}-\sqrt{\left(a-\rho_1\right)^2+2\gamma_{r1}\left(a+\rho_1\right)+\gamma_{r1}^2+4c\rho_1}\right),$$

$$\Delta s_2 = 0.5\left(-a+\rho_1-\gamma_{r1}+\sqrt{\left(a-\rho_1\right)^2+2\gamma_{r1}\left(a+\rho_1\right)+\gamma_{r1}^2+4c\rho_1}\right).$$

Разложим полученные выражения в ряд Тейлора в окрестности $\rho_1 = 0$:

$$\Delta s_1 = -\frac{c+\gamma_{r1}}{a+\gamma_{r1}}\rho_1+\ldots,$$

$$\Delta s_2 = \frac{c+\gamma_{r1}}{a+\gamma_{r1}}\rho_1-\ldots.$$

Из этих выражений следует оценка сверху допустимого значения размера диполя при сокращении нуля и полюса:

$$\rho_1 < \frac{a+\gamma_{r1}}{c+\gamma_{r1}}\Delta s. \qquad (17)$$

Приведенный пример носит иллюстративный характер. Проблема регуляризации процедуры синтеза регуляторов для объектов с нулями требует тщательного исследования.

5. Заключение. Наличие нулей конечномерных моделей объектов с упругими связями приводит к появлению трудностей при проектировании регуляторов для таких объектов. Попытка обойти эти трудности, опираясь на количественные меры управляемости и наблюдаемости объекта, не приводят к успеху. Свойства управляемости и наблюдаемости не являются инвариантами объекта и по этой причине не могут определять трудности проектирования регуляторов. Инвариантом объекта является свойство полноты объекта. Трудности проектирования регуляторов возникают в том случае, когда объект близок к вырождению, к потере свойства полноты. Возникает ситуация, аналогичная решению плохо обусловленной линейной алгебраической задачи. По аналогии с решением этой задачи можно говорить о регуляризации процедуры синтеза регуляторов для плохо обусловленных объектов. Одним из таких методов регуляризации является редуцирование модели объекта, но далеко не единственным.

Разработка методов регуляризации процедуры синтеза регуляторов для объектов с нулями является в высокой степени актуальной задачей.

Литература

1. *Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г.* Автоматизированный электропривод с упругими связями // СПб.: Энергоатомиздат. 1992. 288 с.
2. *Тютиков В.В., Тарарыкин С.В.* Робастное модальное управление технологическими объектами // Иваново: ГОУВПО «Ивановский электротехнический университет им. В.И. Ленина». 2006. 256 с.
3. *Путов В.В., Шулудько В.Н.* Адаптивные и модальные системы управления нелинейными упругими механическими объектами // СПб.: Издательство СПбГЭТУ «ЛЭТИ». 2007. 244 с.
4. *Балковой А.П., Цаценкин В.К.* Прецизионный электропривод с вентильными двигателями // М.: Издательский дом МЭИ. 2010. 328 с.
5. *Абдуллин А.А., Дроздов В.Н.* Управление объектами с упругими связями // Вестник СПГУТД. Серия 1. Естественные и технические науки. 2012. № 2. С. 36–39.
6. *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Труды I Конгресса ИФАК. М. 1961. Т.2. С. 521–547.
7. *Ушаков А.В., Оморов Р.О.* Оценка потенциальной параметрической чувствительности желаемой динамической модели в задаче модального управления // Изв. вузов. Электромеханика. 1982. № 7. С. 800–805.
8. *Ушаков А.В., Оморов Р.О.* Оценка параметрической чувствительности линейных объектов управления по степени управляемости и наблюдаемости // Изв. вузов. Электромеханика. 1984. № 8. С. 53–58.
9. *Малышенко А.М.* Определение индексов каузальности управляемых динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1990. № 1. С. 32–36.
10. *Кириллов О.Е., Лисиенко В.Г.* Количественный анализ управляемости и его применение к приближённой декомпозиции линейных динамических систем. // Автоматика и телемеханика. № 1. 1997. С. 47–56.
11. *Гайдук А.Р.* Синтез систем управления при слабо обусловленной полноте объектов // Автоматика и телемеханика. 1997. №9. С. 133–144.
12. *Балонин Н.А.* Новый курс теории управления движением // СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та. 2000. 160 с.
13. *Анисимов А.А.* Разработка методов структурно-параметрического синтеза, оптимизации и настройки систем автоматического управления технологическими объектами // Автореферат диссертации на соискание учёной степени д.т.н. Иваново: ГОУВПО «Ивановский электротехнический университет им. В.И. Ленина». 2013. 34 с.

14. *Жаров М.М., Русаков С.Г.* Алгоритмы редукции моделей, сохраняющие структурную разреженность в задачах схемотехнического анализа // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. М.: ИППМ РАН. 2014. Часть I. С. 111–116.
15. *Воронин А.В.* Квалиметрия достижимости и возмущаемости линейных динамических систем // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323. № 5. С. 74–78.
16. *Пеллер В.В.* Операторы Ганкеля и их приложения // М.: НИЦ РХД. 2005. 1028 с.
17. *Glover K.* All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their Lμ-error Bounds // International Journal of Control. 1984. vol. 39. no. 6. pp. 1145–1193.
18. *Мироновский Л.А.* Ганкелев оператор и ганкелевы функции линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1992. № 9. С. 73–86.
19. *Балонин Н.А., Мироновский Л.А.* Спектральные характеристики линейных систем на ограниченном интервале времени // Автоматика и телемеханика. 2002. №6. С. 3–22.
20. *Уонэм М.* Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход // М.: Наука, 1980. 376 с.
21. *Кузовков Н.Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства // М.: Машиностроение. 1976. 184 с.
22. *Севастьянов Л.А., Ловецкий К.П., Ланеев Е.Б.* Регулярные методы и алгоритмы расчета обратных задач в моделях оптических структур // М.: РУДН. 2008. 135 с.
23. *Суздаль В.С., Епифанов Ю.М.* Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией // ВЕЖПТ. 2011. Т. 2. № 3 (50). С. 31–34.
24. *Бойченко В.А. и др.* Некоторые методы синтеза регуляторов пониженного порядка и заданной структуры // Управление большими системами: сборник трудов. 2007. № 19. С. 23–126.
25. *Safonov M.G. Chiang R.Y.* A Schur Method for Balanced Model Reduction // IEEE Transactions on Automatic Control. 1989. vol. 34. no. 7. pp. 729–733.

References

1. Borcov Ju.A., Sokolovskij G.G. *Avtomatizirovannyj jelektroprivod s uprugimi svjazjami* [Automated electric drive with elastic coupling]. SPb.: Energoatomizdat. 1992. 288 p. (In Russ.).
2. Tjutikov V.V., Tararykin S.V. *Robastnoe modal'noe upravlenie tehnologicheskimi obe"ktami* [Robust modal control of technological objects]. Ivanovo: ISPU Publ. 2006. 256 p. (In Russ.).
3. Putov V.V., Shulud'ko V.N. *Adaptivnye i modal'nye sistemy upravlenija nelinejnymi uprugimi mehanicheskimi ob"ektami* [Adaptive and modal control systems of nonlinear elastic mechanical objects]. SPb.: SPb ETU "LETI" Publ. 2007. 244 p. (In Russ.).
4. Balkovoj A.P., Cacenkin V.K. *Precizionnyj jelektroprivod s ventil'nymi dvigateljami* [Precision electric drive with brushless motor]. M.: MPEI Publ. 2010. 328 p. (In Russ.).
5. Abdullin A.A., Drozdov V.N. [Control systems for objects with elastic coupling]. *Vestnik SPGUTD. Serija 1. Estestvennye i tehnicheskie nauki – Vestnik of St. Petersburg State University of Technology and Design. Series. 1. Natural and engineering sciences.* 2012. vol. 2. pp. 36–39. (In Russ.).
6. Kalman R. [On the general theory of control systems]. *Trudy I Kongressa IFAK* [International Federation of Automatic Control Congress: Collected papers]. Moskow. 1961. vol. 2. pp. 521–547. (In Russ.).

7. Ushakov A.V., Omorov R.O. [Evaluation of potential parametric sensitivity of desired dynamic model for the problem of modal control]. *Izv. vuzov. Elektromehanika – Proceedings of the higher educational institutions: Electromechanics*. 1982. vol. 7. pp. 800–805. (in Russ.).
8. Ushakov A.V., Omorov R.O. [Parametric sensitivity evaluation of linear objects on the degree of controllability and observability]. *Izv. vuzov. Elektromehanika – Proceedings of the higher educational institutions: Electromechanics*. 1984. vol. 8. pp. 53–58. (in Russ.).
9. Malyshenko A.M. [Determining causality index of controlled dynamic systems]. *Izv. AN SSSR. Tehnicheskaja kibernetika – USSR Academy of Science. Technical cybernetics*. 1990. no. 1. pp. 32–36. (in Russ.).
10. Kirillov O.E., Lisienko V.G. [Quantitative analysis of controllability and its application to approximate decomposition of linear dynamic systems]. *Avtomatika i telemehanika – Automatics and telemechanics*. 1997. no. 1. pp. 47–56. (In Russ.).
11. Gajduk A. R. [Synthesis of control systems at ill-conditioned completeness of objects]. *Avtomatika i telemehanika – Automatics and telemechanics*. 1997. vol. 9. pp. 133–144. (In Russ.).
12. Balonin N.A. *Novyj kurs teorii upravlenija dvizheniem* [New course on the theory of motion control]. SPb.: Izd-vo S.-Peterb. un-ta. 2000. 160 p. (In Russ.).
13. Anisimov A.A. *Razrabotka metodov strukturno-parametricheskogo sinteza, optimizacii i nastrojki sistem avtomaticheskogo upravlenija tehnologicheskimi ob"ektami: avtoreferat dissertacii na soiskanie uchjonoj stepeni d.t.n.* [Development of methods of structural and parametric synthesis, optimization and tuning of automatic control systems of technological objects: abstract of the thesis for the degree of Dr.Sci.]. Ivanovo: ISPU Publ. 2013. 34 p. (In Russ.).
14. Zharov M.M., Rusakov S.G. [Model reduction algorithms which retain structural sparseness in the circuit analysis problems]. *Problemy razrabotki perspektivnyh mikro- i nanojelektronnyh sistem. Sbornik trudov* [Problems of development of advanced micro- and nanoelectronic systems. Collected papers]. Moskow: IPPM RAS Publ. 2014. vol. 1. pp. 111–116.
15. Voronin A.V. [Qualimetry of accessibility and disturbance of linear dynamic systems]. *Izvestija Tomskogo politehnicheskogo universiteta – Proceedings of the Tomsk Polytechnic University*. 2013. vol. 323. no. 5. pp. 74–78. (In Russ.).
16. Peller V.V. *Operatory Gankelja i ih prilozhenija* [Hankel operators and their applications]. M.: NIC RHD. 2005. 1028 p. (In Russ.).
17. Glover K. All Optimal Hankel Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and Their Lμ-error Bounds. *International Journal of Control.* 1984. vol. 39. no. 6. pp. 1145–1193.
18. Mironovskij L.A. [Hankel operator and Hankel functions of linear systems]. *Avtomatika i telemehanika – Automatics and telemechanics*. 1992. no. 9. pp. 73–86. (In Russ.).
19. Balonin N.A., Mironovskij L.A. [Spectral characteristics of linear systems in a limited time interval]. *Avtomatika i telemehanika – Automatics and telemechanics*. 2002. vol. 6. pp. 3–22. (In Russ.).
20. Uonjem M. *Linejnye mnogomernye sistemy upravlenija: Geometricheskij podhod* [Linear multi-dimensional control systems: Geometric approach]. M.: Nauka. 1980. 376 p. (In Russ.).
21. Kuzovkov N.T., *Modal'noe upravlenie i nabljudajushhie ustrojstva* [Modal control and observers]. M.: Mashinostroenie. 1976. 184 p. (In Russ.).
22. Sevast'janov L.A., Loveckij K.P., Laneev E.B. *Reguljarnye metody i algoritmy rascheta obratnyh zadach v modeljah opticheskih struktur* [Regular methods and

algorithms for the calculation of inverse problems in the models of optical structures]. M.: PFUR Publ. 2008. 135 p.
23. Suzdal' V.S., Epifanov Ju.M. [Model reduction at synthesis of controllers for crystallization control]. *Vostochno-Evropejskij zhurnal peredovyh tehnologij – East European Journal of advanced technologies.* 2011. vol. 2. no. 3 (50). pp. 31–34. (In Russ.).
24. Bojchenko V.A., et al. [Some methods of synthesis of reduced order controllers with defined structure]. *Upravlenie bol'shimi sistemami: Sbornik trudov IPU RAN – Large-scale Systems Control: Proceedings of the Institute of Control Science of Russian Academy of Science.* 2007. vol. 19. pp. 23–126. (In Russ.).
25. Safonov M.G. Chiang R.Y. A Schur Method for Balanced Model Reduction. *IEEE Transactions on Automatic Contro*l. 1989. vol. 34. no. 7. pp. 729–733.

Дроздов Валентин Нилович — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (ИТМО). Область научных интересов: цифровое управление техническими системами, влияние нулей на регулятор, управление промышленным электроприводом. Число научных публикаций — 199. drozdovuprint@rambler.ru; Кронверкский проспект, 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: 8(921)653-55-84.

Drozdov Valentin Nilovich — Ph.D., Dr. Sci., professor, professor of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: discrete control systems of technical objects, controllability and observability problems. The number of publications — 199. drozdovuprint@rambler.ru; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: 8(921)653-55-84.

Абдуллин Артур Александрович — к-т техн. наук, ассистент кафедры электротехники и прецизионных электромеханических систем, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики» (ИТМО). Область научных интересов: системы управления объектами с упругими связями, структурная и параметрическая идентификация. Число научных публикаций — 12. artur.abdullin@gmail.com; Кронверкский проспект, 49, Санкт-Петербург, 197101; р.т.: +79062763010.

Abdullin Artur Aleksandrovich — Ph.D., assistant of electrical engineering and precision electromechanical systems department, ITMO University (Saint Petersburg National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics). Research interests: control systems of technical objects with elastic coupling, structural and parametric identification. The number of publications — 12. artur.abdullin@gmail.com; 49, Kronverksky Pr., St. Petersburg, 197101, Russia; office phone: +79062763010.

РЕФЕРАТ

Абдуллин А.А., Дроздов В.Н. **Проблемы управления объектами с нулями передаточной функции.**

В статье рассматриваются проблемы проектирования систем управления объектами с упругими связями обусловленные наличием нулей конечномерных моделей таких объектов.

Показывается, что наличие нулей влияет на такие важные характеристики системы, как матрицы управляемости и наблюдаемости. На простом примере проиллюстрирована зависимость свойств матриц наблюдаемости и управляемости от выбора базиса в пространстве состояний анализируемого объекта. По этой причине допустимо рассматривать количественные меры управляемости и/или наблюдаемости лишь соответствующих пар матриц.

Предлагается рассматривать произведение матриц наблюдаемости и управляемости в качестве инвариантного свойства объекта, не зависящего от выбора базиса в пространстве состояний. Произведение матриц наблюдаемости и управляемости называется матрицей полноты объекта или матрицей вырожденности. Приближение определителя матрицы вырожденности к нулю говорит об ослаблении связи между пространствами входа и выхода.

Анализ влияния нулей объекта на структуру и параметры регулятора показал, что синтез регулятора, алгоритм которого вычисляет управление, обеспечивающее надлежащее изменение выходного сигнала, связан с обращением матрицы вырожденности. На простейшем примере показано, что при стремлении объекта к вырождению, в частности, в случае приближения нулей объекта к полюсам, требуются всё большие по модулю коэффициенты регулятора. При этом изменение базиса пространства состояний объекта не позволяет избежать этой проблемы.

Увеличение коэффициентов регулятора приводит к тому, что задача синтеза регулятора становится плохо обусловленной. Задачи, близкие к вырождению, относят к некорректным. Решение некорректных задач предусматривает их регуляризацию. Наиболее распространённым является метод редуцирования модели объекта. Простейшим способом редуцирования является сокращение близких нуля и полюса модели и синтез регулятора для модели меньшей размерности. Такой подход проиллюстрирован в статье на примере простого объекта второго порядка. Приведены выражения, показывающие, каким образом размер диполя влияет на ошибки собственных значений матрицы замкнутой системы при использовании редуцированной модели. Задаваясь значениями допустимых смещений полюсов, можно оценивать размер диполя, который может быть сокращён в процессе редуцирования модели.

SUMMURY

Abdullin A.A., Drozdov V.N. **Control Problems of Objects with Zeros of the Transfer Function.**

The article deals with the control system design process difficulties related to the presence of zeros in finite-dimensional models of the objects with elastic coupling.

It is shown that presence of zeros affects the controllability and observability matrices. Simple example illustrated that the controllability and observability matrices are dependent of the choice of basis in state-space of the analyzed object. Thus, it is acceptable to consider quantitative measures of controllability and observability only for specific pairs of matrices.

It is proposed to consider the multiplication of the controllability and observability matrices as a property of the object that is invariant to the choice of basis. The multiplication of the controllability and observability matrices is called completeness matrix or singularity matrix. Approaching zero determinant of the singularity matrix means the attenuation of the link between the input and output spaces.

The analysis of the impact of zeros on structure and parameters of the controller showed that its synthesis is associated with the inverse of the singularity matrix. A simple example showed that approaching the singularity, particularly in case of the proximity of zeros and poles, leads to the increase of the controller's coefficients. Changing the basis of the state space of the object is not the solution to this problem.

Due to the increase of the controller's coefficients, the problem of the synthesis becomes ill-conditioned. Problems close to singularity are referred to ill-posed problems. The solution of the ill-posed problems implies regularization. The most common method is the reduction of the object model. The simplest way assumes the reduction of closely spaced zero and pole of the model and synthesis of control system for the model of lower dimension. This approach is illustrated in the article for the simple object of the second order. Expressions, which show how the size of the dipole affects the eigenvalues errors of the closed loop state matrix due to the use of the reduced model, are given in the article. Assuming the value of the allowable displacement of the poles, it is possible to estimate the size of the dipole, which may be reduced in the process of reducing the model.