

С.В. МИКОНИ
**СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДОВ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ
ОПТИМИЗАЦИИ НА КОНЕЧНОМ МНОЖЕСТВЕ
АЛЬТЕРНАТИВ**

Микони С.В. Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив.

Аннотация. Трактовка функций, применяемых различными методами оптимизации, ожидаемой полезностью, естественной для принятия решений, позволила выделить две группы методов – критериального и функционального выбора. Первые устанавливают предпочтения на значениях критериев, а вторые – на значениях функций, отражающих предпочтения на шкалах признаков. Роль видовых отличий отведена шкалам, в которых измеряются признаки. Такая трактовка функций, не зависящая от способа их создания, позволила рассматривать методы многокритериальной оптимизации и многомерной полезности с единых позиций. К группе методов функционального выбора отнесен и метод анализа иерархий, использующий функции приоритетов, вычисляемые на основе матриц парных сравнений. Полученная система методов позволяет сопоставлять их по качеству и оценивать эффективность решения конкретных задач.

Ключевые слова: оптимизация, классификация, целевой критерий, ограничительный критерий, критерий превосходства, критерий соответствия, целевое значение признака, нормирующая функция, функция отклонения от цели, функция полезности.

Mikoni S.V. System Analysis of Multi-criteria Optimization Methods on a Finite Set of Alternatives.

Abstract. The functions used by different optimization methods are interpreted with expected utility viewpoint. It makes possible to distinguish two groups of methods - criterion and functional choice ones. The first group of methods sets preferences on the values of the criteria, and the second - on the values of the functions presenting the preferences of decision maker on the scales of attributes. Such an interpretation of functions that does not depend on how they are created, allowed considering methods of multi-criteria optimization and multi-dimensional utility from unified positions. The analytic hierarchy process uses the priority function calculated based on the matrix of pairwise comparisons. So, it is related to the group of methods of functional choice too. The resulting system allows one to compare their methods for quality and evaluate the effectiveness of tasks solving.

Keywords: optimization; classification; target criterion; constraint criterion; the criterion of predominance; the criterion of correspondence; a normalizing function; the function of the deviation from the target; the utility function.

1. Введение. Трудно представить, чтобы методы, имеющие единое назначение, не имели сходства. А именно сходство лежит в основе любой систематизации. Между тем, до сих пор различные направления теории принятия решений развивались изолированно, а их приверженцы претендовали на всеобщность своих подходов [1-3]. Это, тем более, неприемлемо для науки, в которой теоретически лучшие по всем критериям объекты называются идеальными, а теоретически худшие по всем критериям – антиидеальными [4]. Очевидно, что и те и другие

могут рассматриваться только как возможные исключения. Подобно этим объектам каждый известный метод также не может претендовать на идеальность.

Проблему соотношения моделей по качеству решает квалиметрия – наука о качестве моделей [5]. Отправным пунктом для оценивания качества модели является модель задачи, объединяющая модель-прототип и модель метода. Качество модели-прототипа оценивается степенью ее соответствия особенностям решаемой задачи [6]. Отражаемые моделью свойства образуют группу критериев «Адекватность», количественно характеризующую степень соответствия модели решаемой задаче.

Другую группу образуют критерии, отражающие эффективность метода. Она выражается через соотношение производительности и потребляемых ресурсов. Теоретически производительность оценивается вычислительной сложностью метода, а практически – временем его реализации. Машинные ресурсы оцениваются объемом потребляемой памяти компьютера, а человеческие ресурсы – объемом предпочтений ЛПР и экспертов.

Качество получаемого результата оценивается его достоверностью (точностью, доверительной вероятностью, коэффициентом уверенности и пр.).

Перечисленные критерии качества позволяют находить наиболее эффективные области применения каждого метода. Условием решения этой проблемы является сопоставимость методов. Она устанавливается через сходство и различие методов, определяемое с применением системного анализа соответствующей области знания. Установлению сходства препятствует различие в терминах, применяемых в разных группах методов. Так, например, в теории полезности не употребляется термин «критерий» по той причине, что функция полезности, создаваемая на основе предпочтений экспертов, не отвечает аксиомам критерия превосходства.

Объединение методов теории принятия решений в единую систему и является целью данной работы. В ней мы ограничимся рассмотрением методов многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив.

2. Формальная модель критерия. Критерий является ключевым понятием при выявлении сходства и различия методов многокритериальной оптимизации. Поэтому залогом успешной систематизации этих методов является формализация понятия «критерий». Она была предложена в [7]. Обоснуем эту модель.

Нахождение лучшего объекта – это только словесно сформулированная цель задачи оптимизации. Само понятие «цель» неоднозначно. Оно имеет различный смысл: от цели-намерения (*purpose*) до цели-задания или плана (*target*). При формулировании понятия «критерий» будем исходить именно от конкретной цели-плана (*target*).

Одним из значений греческого слова *κριτηριου* (*kriterion*) является «мерило». В этом смысле критерий можно рассматривать как *цель, измеряемую в некоторой шкале*.

Математически *шкала* описывается как кортеж $\langle X, Y, f \rangle$ определяющий знаковую систему Y и отображение f , ставящее в соответствие объектам из некоторого множества X тот или иной элемент знаковой системы Y : $f: X \rightarrow Y$. Назовем $y \in Y$ *делением* шкалы. Оно является значением функции $y=f(x)$, $x \in X$. Шкалы принято классифицировать по типам измеряемых данных, которые определяют допустимые для данной шкалы математические преобразования, а также типы отношений, отображаемых соответствующей шкалой. Для получения линейного порядка на множестве объектов деления шкалы (знаки) тоже должны быть упорядочены, так как предпочтения на множестве объектов определяются на основе предпочтений на делениях шкалы.

Отношение предпочтения требует установления порядка на множестве Y_j . Если Y_j – множество чисел, то они упорядочиваются по величине. После установления порядка численная шкала j -го признака p_j , $j = \overline{1, n}$, может быть представлена диапазоном чисел $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, где $y_{j,\min}$ – нижняя граница, а $y_{j,\max}$ – верхняя граница шкалы, т.е.

$$y_{j,\min} = \inf_{x \in X} f_j(x) \text{ и } y_{j,\max} = \sup_{x \in X} f_j(x).$$

В задаче однокритериальной оптимизации цель-план выбирается на границах $y_{j,\min}$ и $y_{j,\max}$ шкалы j -го признака, либо минимальной, либо максимальной, что выражается соответственно оценочными (целевыми) функциями $f_j(x) \rightarrow \min$ и $f_j(x) \rightarrow \max$. Решение такой задачи находится на соответствующей границе шкалы.

В отличие от классической задачи оптимизации задача многокритериального выбора, как правило, не ограничивается поиском лучшего объекта. При нахождении рейтинга объектов каждый из них подлежит оцениванию относительно целевого значения шкалы. Поскольку оно доступно только лучшему объекту, остальные объекты должны оцениваться *близостью* к цели, что требует определения меры достижения цели. Для них граница шкалы является *идеальной* (недостижимой) целью.

Многокритериальный выбор основывается на нахождении компромисса между противоречивыми требованиями. Например, покупа-

телю квартиры хотелось бы иметь большую площадь. Но при ограниченных средствах он вынужден минимизировать цену квартиры и стоимость ее содержания. При этих условиях из списка квартир будет выбрана квартира не с самой большой площадью.

Можно пойти и другим путем. Пусть площадь предлагаемых для продажи квартир ограничивается интервалом [50, 200] квадратных метров. Из расчета минимально необходимой площади и ограничений в финансах покупатель может задаться интервальным требованием [60, 70] к площади квартиры. Такая цель косвенно учитывает финансовые ресурсы ЛПР. Назовем ее *реальной* (достижимой для ЛПР) целью.

Согласно примеру с площадью квартиры реальной цели $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$ соответствует не граничное, а промежуточное значение шкалы признака. Поскольку *целевая функция* устремляет решение к границе своей области определения, она непригодна для отражения стремления к реальной цели. Модель оценивания близости объектов к реальной цели c_j требует использования ее в качестве базы сравнения. В качестве такой модели будем использовать двухместный предикат бесконечнозначной логики:

$$Pr_{\geq}(f_j(x), c_j). \quad (1)$$

Первым аргументом предиката является значение $y_j = f_j(x)$, которое характеризует объект x по j -му свойству (признаку), а вторым аргументом – измеряемое в той же шкале целевое значение c_j этого признака. Предикат воспринимает первый аргумент как *оцениваемое* свойство объекта, а второй аргумент – как *базу сравнения*.

В отличие от предиката двоичной логики со значениями «Истина» (1) и «Ложь» (0) предикат бесконечнозначной логики позволяет количественно оценить меру достижения цели в долях единицы или в процентах, например, для объекта x цель по признаку p_j выполнена на 80%: $Pr_{\geq}(f_j(x), c_j) = 0,8$. Значение признака, не достигшее целевого значения, может рассматриваться как *частичное достижение* цели.

Совпадение целевого значения c_j в зависимости от вида предпочтения с одной из границ шкалы $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$ рассматривается как важный частный случай. Так, например, максимизации j -го признака соответствует предикат $Pr_{>}(f_j(x), y_{j,\min})$, в котором $c_j = y_{j,\min}$. В оптимизационных задачах этому случаю соответствует целевая функция $f_j(x) \rightarrow \max$ (Предикат, отражающий целевую функцию, логично назвать *целевым* критерием.).

Реальная цель по j -му признаку задается внутри шкалы $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$: $y_{j,\min} < c_j < y_{j,\max}$. Ограничение «снизу» представляется предикатом

$\geq(f_j(x), c_j)$, а «сверху» – предикатом $\leq(f_j(x), c_j)$. Этими предикатами так же, как и *целевым* критерием, задается направленность предпочтения, что дает формальное основание критерию этого типа называть *ограничительными* (В классических задачах оптимизации они именуется *ограничениями*). Содержательно ограничения играют роль критериев в задаче формирования области допустимых альтернатив, которая относится к задачам выбора. Отношение превосходства объекта x_i над объектом x_k по j -му признаку описывается предикатом *превосходства* $\succ(f_j(x_i), f_j(x_k))$ с $f_j(x_k)$ в роли базы сравнения. При количественных оценках j -го признака оно выражается *ограничительными* критериями «снизу» или «не менее» (\geq) и «сверху» или «не более» (\leq).

Точечный и интервальный ограничительные критерии представляются предикатами *соответствия*: $Pr_{=} (f_j(x), c_j)$ и $Pr_{\parallel} (f_j(x), c_{j,n}, c_{j,v})$. Интервальное задание цели можно рассматривать как *класс* ее допустимых значений. В том случае, когда на шкале признака задается $m > 1$ целей, решается задача *классификации*. Из множества H классов выбирается класс $h_k \in H$, которому объект x_i принадлежит в наибольшей степени. Степень принадлежности k -му классу на шкале j -го признака представляется функцией $\lambda_{j,k}(x) \leq 1$.

Поскольку критерий представляет собой составное понятие, включающее *признак*, *цель* и *отношение* между ними, отдельному рассмотрению может

подвергаться любое из составляющих понятий. Например, при определении шкалы измерения отдельно можно рассматривать признак. Часто в качестве критерия используется только имя оцениваемого признака (свойства) альтернативы, подразумевая, что цель и направленность предпочтения известны по умолчанию.

Учитывая тот факт, что в задачах выбора критерий отражает *отношение предпочтения*, он удовлетворяет двум аксиомам сопоставления объектов:

1. $(A \succ B) \Leftrightarrow f(A) > f(B) \vee (B \succ A) \Leftrightarrow f(B) > f(A) \vee (A \equiv B) \Leftrightarrow f(A) = f(B)$.
2. $f(A) \succ f(B) \wedge f(B) \succ f(C) \Rightarrow f(A) \succ f(C)$.

Первая аксиома утверждает, что, либо одна альтернатива *предпочтительнее* другой, либо они *равноценны*, и эти отношения могут быть определены по характеризующему их свойству f .

Вторая аксиома устанавливает транзитивность отношений предпочтения, в том числе относительно свойства f .

Для критерия превосходства должно выполняться условие монотонного роста (убывания) предпочтительности объекта при увели-

чении значений j -го показателя y_j при фиксированных значениях остальных $n-1$ показателей, $k \neq j$.

Помимо количественной трактовки понятие «мерило» допускает и *логическую* трактовку. Она является более примитивной, поскольку сводит количественную оценку объекта x к анализу присутствия у него (или отсутствия) некоторого свойства f_j , что соответствует проверке истинности предиката $\text{Pr } f(f_j(x), c_j) = \text{true} (\text{false})$ – «истина» («ложь»). Естественно, что в этом случае оптимизационная задача преобразуется в задачу исчисления высказываний и логического вывода. На применении этого аппарата основан *логический* поиск решения, реализуемый экспертными системами различного назначения.

Таким образом, в расширенной трактовке критерий рассматривается как средство не только количественного, но и логического *сопоставления* объектов. Это позволяет выражать его через *измеренную* модель цели, а в задачах принятия решений – интерпретировать *решающим правилом*.

Строго говоря, критерий и правило – это не одно и то же. Подобно тому, как функция может вычисляться с применением *различных* алгоритмов, оценивание объекта по критерию может осуществляться *различными* способами. В этом смысле правило трактуется как *алгоритм оценивания* альтернативы.

Предложенная в работе [7] модель критерия является универсальной и может применяться к любой задаче оптимизации.

3. Связь с методами оптимизации. В рамках предложенной модели критерия представляет интерес сопоставить методы многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив с общей задачей оптимизации.

Под *оптимизацией* понимается нахождение наилучшего объекта в n -мерном пространстве переменных. Задача оптимизации в n -мерном пространстве переменных формулируется следующим образом [8].

Требуется найти вектор $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_j^*, \dots, x_n^*)^T$, доставляющий минимум (максимум) функции $y = f(\mathbf{x})$ с заданной точностью ε , используя численный метод решения. Здесь $\mathbf{x} \in R^n$.

Как правило, область допустимых значений D задается. Тогда задача формализуется *целевой функцией* в области *допустимых значений* D :

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x} \in D}, \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \max_{\mathbf{x} \in D} \quad (2)$$

Область допустимых значений D определяется системой линейных или нелинейных ограничений, накладываемых на компоненты вектора \mathbf{x} :

$$D = \{ \mathbf{x} \mid q_j(x) \leq \overline{q_j}, j = \overline{1, n} \} \quad (3)$$

В реальных задачах *ограничения* на область возможных значений переменных модели отсутствуют чрезвычайно редко, потому что, как правило, переменные бывают связаны с некоторым ограниченным ресурсом. Но все-таки с задачами без ограничений сталкиваются. Это бывает в условиях «неограниченных» ресурсов или при наличии условий, не накладывающих ограничений на переменные задачи. В таком случае имеет место *безусловная* задача, т.е. задача без ограничений:

$$f(\mathbf{x}) \rightarrow \min_{\mathbf{x}}, \quad f(\mathbf{x}) \rightarrow \max_{\mathbf{x}} \quad (4)$$

Отсутствие *количественных* ограничений на используемые ресурсы не означает отсутствие *качественных* ограничений на вид целевой функции и типы переменных.

Функция может быть *линейной* и *нелинейной*. Нелинейная функция может быть *монотонной* и *немонотонной*. Немонотонная функция может быть *выпуклой* (унимодальной) и *невыпуклой*.

К переменным могут предъявляться требования дискретности или непрерывности, не отрицательной величины и т.п.

Для каждого класса задач существуют различные методы поиска решения. Большинство применяемых на практике методов решения задач оптимизации являются *итеративными*.

В основу этих методов положен механизм порождения последовательности точек $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots$ по правилам, которые определены в соответствии с выбранным методом решения и обладают следующими свойствами:

- $\mathbf{x}^* = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}^k$
- $f(\mathbf{x}^{k+1}) < f(\mathbf{x}^k), k=0, 1, 2, \dots$

Общее правило построения последовательности $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \dots$ численными методами безусловной оптимизации записывается в виде:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha_k \cdot \mathbf{p}^k, \quad k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

Такие методы, как это принято говорить, используют *алгоритмы спуска*. Здесь \mathbf{x}^0 – *начальная точка поиска*, \mathbf{p}^k – *принятое направление*.

ние перехода из точки \mathbf{x}^k в точку \mathbf{x}^{k+1} , которое называется направлением спуска, α_k – числовой множитель, определяющий величину шага.

Если целевая функция задачи оптимизации отвечает модели целевого критерия, реализующего идеальную цель, то переменные целевой функции не отвечают требованиям критерия. Действительно, изначально у них отсутствуют частные цели. Однако в процессе реализации алгоритма поиска выбранной на некотором шаге итерации переменной задается направление и величина шага. Это назначение, задаваемое алгоритмом поиска, можно трактовать как частную цель оптимизации. Таким образом, поиск экстремума функции n переменных можно рассматривать как многокритериальную задачу с внутренними локальными целями в отличие от задач многокритериального выбора, в которых локальные цели задаются изначально и извне – лицом, принимающим решение (ЛПР).

Что касается задачи поиска экстремума функции n переменных в области допустимых значений D , то эти ограничения, как частные цели, задаются в задачах математического программирования не отдельным переменным, а всей их совокупности. Количество ограничений такого вида определяется разновидностью имеющихся ресурсов.

4. Методы оптимизации и классификации. В настоящее время в теории принятия решений сформировались следующие группы методов многокритериального выбора на конечном множестве альтернатив:

- 1) методы доминантного анализа (Dominance analysis),
- 2) методы многокритериальной оптимизации с ограничениями (Multiobjective optimization with constraints),
- 3) методы многокритериальной оптимизации с взвешенными отклонениями от цели (Multiobjective optimization by weighted deviations),
- 4) методы вычисления приоритетов на основе парных сравнений (Pairwise prioritization),
- 5) методы многоатрибутной оптимизации по полезности (Utility-based multiattribute optimization),
- 6) методы многокритериальной классификации (Multicriteria classification).

Системообразующим признаком, объединяющим методы оптимизации и классификации в единую систему, является применяемый вид предпочтения. Видовыми отличиями этого признака являются отношения превосходства (\geq , \leq) и соответствия классам ($=$, $[]$). Методы оптимизации реализуют отношение превосходства на множестве

векторных оценок объектов, а методы классификации реализуют отношение *соответствия* классам.

Целью методов оптимизации является нахождение наилучшей альтернативы и упорядочение относительно нее остальных альтернатив. Целью методов классификации является нахождение *класса*, в наибольшей степени соответствующего предъявляемой альтернативе. Различаемые по качеству классы включают нефиксированное множество альтернатив. Таким образом, индивидуальное упорядочение объектов заменяется определением степени их принадлежности упорядоченным классам.

В реальных задачах выбора имеет место смешанное применение этих отношений. В задачах оптимизации оно влечет получение нестрогого порядка объектов, а в задачах классификации – индивидуальное упорядочение объектов относительно степени принадлежности упорядоченным по качеству классам [9]. Поэтому в общем случае отношения превосходства и соответствия объединяются в отношении нестрогого предпочтения: $R_{\geq} = R_{>} \cup R_{=}$.

5. Методы многокритериальной оптимизации. Как следует из предыдущего раздела, системообразующим признаком методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив является *отношение превосходства*. Измерение предпочтения превосходства требует применения как минимум качественной шкалы. Это объясняется тем, что в словесных значениях этой шкалы заложен очевидный смысл превосходства. Качественная шкала необходима и достаточна для *логического анализа* предпочтений, который заключается в определении истинности двоичного предиката $>(f_j(x_i), f_j(x_k))$ на шкале j -го признака. Если он ложен, то k -й объект предпочтительнее или равнозначен i -му объекту по j -му свойству. Логический анализ положен в основу метода вербального анализа решений (ВАР), предложенного О.И. Ларичевым. При подходе ВАР на первое место ставится точность *содержательного* описания проблемы, а не точность количественного измерения параметров [4].

Модель предпочтений, создаваемая для реализации методов критериального выбора, включает следующие уровни [10]:

- I. Отношение предпочтения на значениях каждого критерия.
- II. Отношение предпочтения на множестве критериев.
- III. Отношение предпочтения на множестве значений всех критериев.

Первый уровень модели достаточен для реализации отношения Парето-доминирования. Однако отношение Парето-доминирования позволяет установить линейный порядок только в вырожденном слу-

чае использования одного критерия. Для получения линейного порядка при использовании нескольких критериев требуется реализовать второй и третий уровень модели. Увеличение числа критериев влечет нелинейный рост объема экспертных предпочтений, требуемых для выполнения многокритериальной оптимизации. Таким образом, оборотной стороной применения простого математического аппарата в методах критериального выбора является быстрое увеличение объема экспертных предпочтений с ростом числа критериев.

Уменьшение объема экспертных предпочтений осуществляется путем преобразования векторных оценок объектов в скалярные (числовые) оценки. Эту роль выполняют обобщающие (синтезирующие) функции. Для вычисления значений обобщающей функции ее аргументы должны измеряться в одной шкале. Но признаки, характеризующие объект, как правило, измеряются в разных шкалах с разными единицами измерения (физическими, денежными и пр.). Поэтому их значения необходимо привести к общей шкале. Общая для всех признаков шкала должна удовлетворять двум требованиям:

- 1) измеряться в относительных единицах;
- 2) иметь фиксированные границы шкалы.

Относительные единицы измерения и фиксированные границы шкалы позволяют выполнять над аргументами обобщающей функции любые арифметические операции. Областью определения функции j -го признака является интервальная или балльная шкала, характеризуемая границами $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$, $j = \overline{1, n}$, а область значений функции измеряется в шкале $[0, 1]$, отвечающей указанным требованиям.

Скаляризация векторных оценок исключает необходимость в реализации третьего уровня модели многокритериального выбора, но требует выбора типа *обобщающей функции* и *функций*, отображающих значение каждого признака в шкалу $[0, 1]$. Эти функции не могут воспроизвести предпочтения между значениями всех критериев, формируемые экспертом. Мера несоответствия между ними и является платой за автоматизацию ручного труда. Но ручной труд практически невозможен при решении задач со многими значениями критериев в условиях дефицита экспертов и времени на создание модели.

Многокритериальное оценивание объектов не по значениям критериев, а по поставленным им в соответствие функциям знаменует переход от методов критериального выбора к методам функционального выбора. Системообразующим признаком, объединяющим эти группы методов, является *шкала*, применяемая для реализации предпочтений ЛПР. Она принимается за основание деления с видовыми отличиями *качественной* и *абсолютной* шкалы. Первому видовому

отлично соответствуют методы *критериального* выбора, а второму – методы *функционального* выбора.

6. Методы критериального выбора. К типичным представителям этих методов относятся упорядочение объектов на основе отношения Парето-доминирования, лексиминная и лексикографическая оптимизация, вербальный анализ решений (ВАР).

Перечисленные методы критериального выбора делятся на две группы по отношению к важности критериев: *не учитывающие* и *учитывающие* важность критериев. К представителям первой группы относятся отношение Парето-доминирования и лексиминная оптимизация. К представителям второй группы относятся лексикографическая оптимизация и методы вербального анализа решений.

Как было отмечено ранее, отношение Парето-доминирования использует только первый уровень предпочтений ЛПР. Отсутствие предпочтений второго уровня предполагает независимость критериев по важности. Этому же условию отвечает лексиминная оптимизация [11]. Однако в ней отношении Парето-доминирования предшествует переупорядочивание компонент в векторных оценках объектов в направлении *убывания их качества*. Это влечет игнорирование индивидуальности критериев. Таким образом, признаком, обобщающим эти методы, является *безразличие к важности* критериев, а видовыми отличиями методов являются соответственно *исходные* и *упорядоченные по качеству* векторные оценки объектов.

В отличие от двух рассмотренных методов лексикографическая оптимизация использует дополнительно второй уровень предпочтений ЛПР, а именно, *различную важность* критериев. Методы ВАР, основанные на создании единой шкалы изменения качества (ЕШИК), используют все три уровня предпочтений ЛПР. Признаком, обобщающим эти методы, является *детальность предпочтений*, а видовыми отличиями методов являются соответственно предпочтения на *множестве критериев* и на *множестве значений всех критериев*. Графически классификация основных методов критериального выбора (МКВ) изображена на рис. 1.

7. Методы функционального выбора. Методы этой группы объединяет *оценивание объектов по значениям функций*, поставленных в соответствие шкалам признаков. Функцию, отображающую шкалу признака в единую шкалу, назначает эксперт, руководствуясь соображениями ценности или полезности делений исходной шкалы. Вид функции зависит от ее *назначения и способа создания*.

По способу создания функции делятся на: функции, *вычисляемые* на основе заданных предпочтений, и функции, *формируемые* по

предпочтениям эксперта. На рис. 2 представлена классификация функций, вычисляемых на основе предпочтений ЛПП.



Рис.1. Классификация методов критериального выбора



Рис.2. Классификация функций, вычисляемых на основе предпочтений ЛПП

Простейшим примером вычисляемой функции является нормирующая функция целевого критерия, преобразующая предпочтение $P_{>}(y_{j,\max}, y_{j,\min})$ в линейную функцию $\delta_{\max}(y_j)$:

$$\delta_{\max}(y_j) = \frac{y_j - y_{j,\min}}{y_{j,\max} - y_{j,\min}}. \quad (6)$$

Несмотря на линейную зависимость значений функции $\delta_{\max}(y_j)$ от значений y_j j -го критерия на них оказывают влияние и границы шкалы $[y_{j,\min}, y_{j,\max}]$. Поскольку границы шкалы каждого признака назначаются экспертом, обобщенные оценки объектов зависят от соотношения шкал. А это означает, что выбор наилучшего объекта на основании этих оценок уже не является чисто критериальным.

Функция, которую ставят в соответствие ограничительному критерию, отражающему реальную цель ЛПР, имеет более сложную природу. Создание функции достижения реальной цели на основе критериев *превосходства* требует выполнения двух предпочтений на трех точках шкалы, которую целевое значение c_j делит на 2 участка. Третьим предпочтением может считаться назначение величины полезности $0 < u(c_j) < 1$ при достижении цели, если по умолчанию не принимается значение $u(c_j) = 0,5$. Три варианта нормализации отношения превосходства $y_j \geq c_j$ с учетом возможного ущерба (отрицательной полезности) приведены на рис. 3.

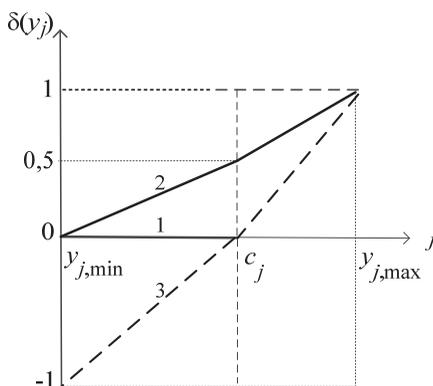


Рис. 3. Варианты нормализации критерия $y_j \geq c_j$ на биполярной оси полезности

Каждый из вариантов представляет собой кусочно-линейную монотонно возрастающую функцию. На основе критериев соответствия строятся немонотонные кусочно-линейные функции.

Функция отклонения от цели измеряется в полярной непрерывной шкале $[-1, +1]$. Если штрафам ставится в соответствие положительный участок шкалы $[0, +1]$, то поощрениям – отрицательный участок $[-1, 0]$. Графики функций в зоне превышения цели на рис. 4 выделены пунктирными линиями.

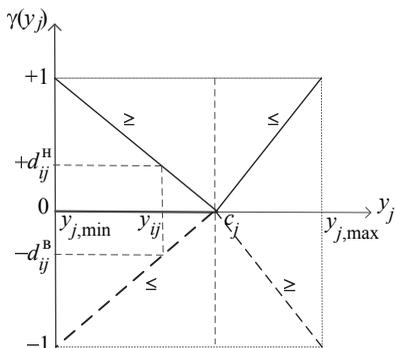


Рис. 4. Шкала отклонений от цели для ограничений «снизу» и «сверху»

Функция приоритетов вычисляется на основе матрицы парных сравнений с учетом или без учета «сил сущностей» [12].

Формулы вычисления функции полезности признака на основе функций принадлежности упорядоченным по качеству классам были предложены в работе [9].

Создание функции полезности, характеризующей склонность ЛПР к риску на основе участия в лотереях, было рассмотрено в работе [13]. Авторами работы предложена формула вычисления полезности отказа от участия в лотерее при известной полезности и вероятности удачного и неудачного исхода лотереи.

Классификация функций, формируемых непосредственно на основе предпочтений ЛПР, приведена на рис. 5.

Эксперт может формировать функцию, как в целом, так и по точкам шкалы. Если эксперт может указать меру склонности / несклонности к риску на различных отрезках шкалы, он может воспользоваться типовыми функциями полезности [14]. В тех случаях, когда имеются опытные или теоретические закономерности, которые можно трактовать с позиции полезности, они принимаются за функции полезности.

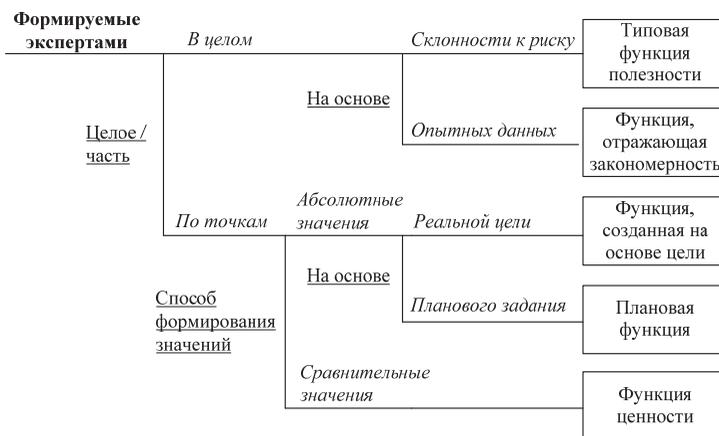


Рис. 5. Классификация функций, формируемых на основе предпочтений ЛПР

Метод создания функции на основе сравнения ценности делений шкалы предложили Кини Р.Л., Райфа Х. в работе [15]. Метод создания функции полезности на основе принципа частичного достижения реальной цели был предложен в работе [16]. Его модификацией можно считать метод создания плановой функции [17], особенность которого состоит в измерении функции в процентной шкале [0%, 200%]. Плановому значению показателя ставится в соответствие сто-процентное значение функции.

Теория многомерной полезности (Multiattribute utility theory) отличается от многокритериальной оптимизации непосредственным выражением предпочтений ЛПР через функцию ожидаемой полезности. Однако, как было показано ранее, скаляризация векторных оценок объектов требует преобразования критериев в функции. Несмотря на малую информативность по числу отражаемых ею предпочтений, нормирующая функция критерия может трактоваться как функция полезности. Это же касается и других функций, создаваемых другими способами [18]. Таким образом, функции, трактуемые в терминах полезности, позволяют объединить различные методы многомерной оптимизации в единую систему.

8. Заключение. Методы, применяемые в теории принятия решений, решают задачи оптимизации и классификации. Установление связей между ними требует нахождения системообразующих признаков, реализующих принцип сходства, и видовых отличий, реализующих принцип различия. За базовые системообразующие признаки были при-

няты критерий и функция. Формальная модель критерия объединила шкалу признака, его целевое значение и меру достижимости цели.

Модель критерия применима как к методам оптимизации, так и классификации. Первые используют критерии превосходства, а вторые – критерии соответствия.

Трактовка функций, применяемых в различных методах оптимизации ожидаемой полезностью, естественной для принятия решений, позволила выделить две группы методов – критериального и функционального выбора. Первые устанавливают предпочтения на значениях критериев, а вторые – на значениях функций, отражающих предпочтения на шкалах признаков. Роль видовых отличий отведена шкалам, в которых измеряются признаки. Такая трактовка функций, не зависящая от способа их создания, позволила рассматривать методы многокритериальной оптимизации и многомерной полезности с единых позиций.

Трактовка целевыми функциями обобщающих функций в задачах многомерной оптимизации по полезности и функций многих переменных в задаче поиска экстремума позволила установить связь между соответствующими методами. Здесь роль видовых отличий играют локальные цели. В задаче оптимизации они задаются переменным в процессе поиска экстремума целевой функции, а в задачах многокритериального выбора локальные цели задаются *изначально* и *извне* – лицом, принимающим решение (ЛПР).

Установление связей между различными методами оптимизации и классификации, применяемых в теории принятия решений, дает возможность рассматривать их в рамках единой системы. А это, в свою очередь, позволяет находить этим методам области эффективного применения, решая задачи квалиметрии моделей.

Литература

1. *Koksalan, M., Sagala, P.N.S.* Interactive Approaches for Discrete Alternative Multiple Criteria Decision Making with Monotone Utility Functions // *Management Science*. 1995. vol.41 (7). pp. 67-85.
2. *Bordley R., LiCalzi M.* Decision analysis using targets instead of utility functions // *Decisions in Economics and Finance*. Springer-Verlag 2000. pp. 53-74.
3. *Saaty T. L.* Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors – The Analytic Hierarchy/Network Process // *RACSAM (Review of the Royal Spanish Academy of Sciences, Series A, Mathematics)* 2008. vol.102 (2). pp. 251–318.
4. *Ларичев О.И.* Вербальный анализ решений // М.: Наука. 2006. 181 с.
5. *Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Концептуальные основы оценивания и анализа качества моделей и полимодальных комплексов // *Известия РАН. Теория и системы управления*. 2004. №6. С. 5-16.

6. Микони С.В., Соколов Б.В., Юсупов Р.М. Применение алгебраического подхода в квалиметрии моделей и полимодельных комплексов // Имитационное моделирование. Теория и практика (ИММОД-2013). Сб. докладов VI научно-практической конференции. Казань: Фэн. 2013. Том 1. С. 68-79.
7. Микони С.В. Многокритериальный выбор на конечном множестве альтернатив. Учебное пособие // СПб.: Лань, 2009. 272 с.
8. Лемешко Б.Ю. Методы оптимизации. Конспект лекций // Новосибирск: НГТУ, 2009. 126 с.
9. Гарина М.И., Микони С.В. Условие одинакового упорядочения объектов по функциям полезности и принадлежности // Труды Конгресса IS&IT'11. М.: Физматлит. 2011. Том 1. С.33-37.
10. Микони С.В. Методология выбора на основе увеличения объема предпочтений // Труды Конгресса IS-IT'14. М.: Физматлит. 2014. Том 1, С.161-168.
11. Поиновский В.В. Введение в теорию важности критериев в многокритериальных задачах принятия решений // М.: Физматлит. 2007. 105 с.
12. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора // М.: Наука. 1974. 256 с.
13. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение // М.: Наука, 1970. 645 с.
14. Микони С.В. Типовые функции полезности в многопризнаковом оценивании альтернатив // Сборник научных трудов международной научной конференции ISDMCI'2013. Херсон: ХНТУ. 2013. С. 366-371.
15. Кини Р.Л., Райфа Х. Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения // М.: Радио и связь. 1981. 559 с.
16. Бураков Д.П., Микони С.В. Функции частичного достижения цели // Труды Конгресса IS&IT'13. М.: Физматлит. 2013. Том 1. С. 30-38.
17. Микони С.В., Тихомиров В.О., Тришанков В.В., Сорокина М.И. Определение рейтинга подразделений железной дороги по итогам выполнения планов // Региональная информатика-2004. Труды X-й СПб. конференции. СПб.: СПОИСУ. 2006. С. 266-273.
18. Микони С.В. Оценивание альтернатив по полезности как завершающий этап их многокритериальной оптимизации // Труды СПИИРАН, 2013, выпуск 31, С. 6–19.

References

1. Koksalan, M., Sagala, P.N.S. Interactive Approaches for Discrete Alternative Multiple Criteria Decision Making with Monotone Utility Functions. *Management Science*. 1995. vol.41 (7). pp. 67-85.
2. Bordley R., LiCalzi M. Decision analysis using targets instead of utility functions. *Decisions in Economics and Finance*. Springer-Verlag. 2000. pp. 53-74.
3. Saaty T. L. Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors. *The Analytic Hierarchy/Network Process*. RACSAM – Review of the Royal Spanish Academy of Sciences, Series A, Mathematics. 2008. vol.102 (2). pp. 251-318.
4. Larichev O.I. *Verbal'nyj analiz reshenij*. [Verbal Decision Analysis] M: Nauka. 2006. 181 p. (In Russ.).
5. Sokolov B.V., Jusupov R.M. [Conceptual framework for assessment and analysis of the quality of models and multimodal systems] *Izvestija RAN. Teorija i sistemy upravlenija - Proceedings of RAN. Theory and control systems*, 2004, no.6, pp. 5-16. (In Russ.).
6. Mikoni S.V., Sokolov B.V., Yusupov R.M. [Application of the algebraic approach in models of quality control and multiple-complexes] *Sbornik dokladov VI nauchno-prakticheskoi konferencii – Imitacionnoe modelirovanie. Teorija i praktika*. Kazań: «Fjen», 2013, Tom 1, pp. 68-79. (In Russ.).

7. Mikoni S.V. *Mnogokriterial'nyj vybor na konechnom mnozhestve al'ternativ. Uchebnoe posobie*. [Multi-criteria selection on a finite set of alternatives] SPb. Lan', 2009. 272 p. (In Russ.).
8. Lemesenko B.Ju. *Metody optimizacii. Konspekt lekcij*. [Optimization techniques. lectures] Novosibirsk: NGTU, 2009. 126 p. (In Russ.).
9. Garina M.I., Mikoni S.V. [Conditions for the same ordering of objects by utility functions and membership functions] *Trudy Kongressa IS&IT'11* [Proceedings of the IS&IT'11 conference]. M: Fizmatlit. 2011. Tom 1, pp. 33-37. (In Russ.).
10. Mikoni S.V. [Methodology for selection on the basis of increasing the volume of Preferences] – *Trudy Kongressa IS-IT'14, Divnomorskoe*, 2-9.09.2014. M: Fizmatlit. 2014, Issue 1, pp. 161-168. (In Russ.).
11. Podinovskij V.V. *Vvedenie v teoriju vazhnosti kriteriev v mnogokriterial'nyh zadachah prinjatija reshenij*. [Introduction to the importance of criteria in multicriteria decision problems]. M. Fizmatlit, 2007. 105 p. (In Russ.).
12. Mirkin B.G. *Problema gruppovogo vybora*. [The problem of group selection] M. Nauka. 1974. 324 p. (In Russ.).
13. Von Neumann J., Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press. 1947. 645 p.
14. Mikoni S.V. [Typical useful functions for evaluating alternatives] *Sbornik nauchnyh trudov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii ISDMCI'2013* [Proceedings of the international conference ISDMCI'2013], Herson: HNTU. 2013. pp. 366-371. (In Russ.).
15. Keeney, R.L., Raiffa H. *Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs*. New York: Wiley. 1976. 559 p.
16. Burakov D.P., Mikoni S.V. [Functions of partial achievement target] *Trudy Kongressa IS&IT'13* [Proceedings of the IS&IT'13 conference] M: Fizmatlit. 2013. Issue 1. pp. 30-38. (In Russ.).
17. Mikoni S.V., Tihomirov V.O., Trishankov V.V., Sorokina M.I. [Ranking the divisions of the railway on the results of the implementation of plans] *Trudy X SPb. konferencii – Regional'naja informatika-2004*. [Proceedings of the conference “Region informatics” 2004]. SPb. SPOISU. 2006. pp. 266-273. (In Russ.).
18. Mikoni S.V. [Evaluation of alternatives for utility as the final stage of multi-criteria optimization]. *Trudy SPIIRAN - SPIIRAS Proceedings*. 2013. vol. 31. pp. 6–19. (In Russ.).

Микони Станислав Витальевич — д-р техн. наук, профессор, профессор кафедры «Математика и моделирование» Петербургского государственного университета путей сообщения, ведущий научный сотрудник Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации Российской академии наук (СПИИРАН). Область научных интересов: системный анализ, принятие решений, интеллектуальные технологии. Число научных публикаций — 254. svmikoni@gmail.com, www.mcd-svir.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; p.t. +7(812)328-0103.

Mikoni Stanislav Vitalyevitch — Ph.D., Dr. Sci., professor, Professor of Mathematics and Modeling Department of St. Petersburg State Transport University, leading researcher of SPIIRAS. Research interests: system analyses, decision making, intellect technologies. The number of publications — 254. svmikoni@gmail.com, www.mcd-svir.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-0103.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 13-01-00912).

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grant 13-01-00912).

РЕФЕРАТ

Микони С.В. Системный анализ методов многокритериальной оптимизации на конечном множестве альтернатив.

Систематизация математических моделей и методов актуальна для практики, поскольку позволяет найти наиболее эффективную область применения каждой модели и связанного с ней метода. Это в полной мере касается методов, разработанных в рамках теории принятия решений.

Основной задачей принятия решения является выбор наилучшей альтернативы в пространстве характеризующих ее признаков или оценивание ее качества. Очевидно, что методы решения этой задачи должны иметь общую основу. Установление связей между ними требует нахождения системообразующих признаков, реализующих принцип сходства, и видовых отличий, реализующих принцип различия. За базовые системообразующие признаки были приняты *критерий* и *функция*. Формальная модель критерия объединила шкалу признака, его целевое значение и меру достижимости цели.

Трактовка функций, применяемых различными методами оптимизации, ожидаемой полезностью, естественной для принятия решений, позволила выделить две группы методов – критериального и функционального выбора. Первые устанавливают предпочтения на значениях критериев, а вторые – на значениях функций, отражающих предпочтения на шкалах признаков. Роль видовых отличий отведена шкалам, в которых измеряются признаки. Такая трактовка функций, не зависящая от способа их создания, позволила рассматривать методы многокритериальной оптимизации и многомерной полезности с единых позиций. К группе методов функционального выбора отнесен и метод анализа иерархий, использующий функции приоритетов, вычисляемые на основе матриц парных сравнений.

Трактовка целевыми функциями обобщающих функций в задачах многомерной оптимизации по полезности и функций многих переменных в задаче поиска экстремума позволила установить связь между соответствующими методами. Здесь роль видовых отличий играют локальные цели. В задаче оптимизации они задаются переменным в процессе поиска экстремума целевой функции, а в задачах многокритериального выбора локальные цели задаются *изначально* и *извне* – лицом, принимающим решение (ЛПР).

Установление связи между различными модификациями методов теории принятия решений потребовало привлечения частных системообразующих признаков. Полученная система методов теории принятия решений позволяет сопоставлять их по качеству и оценивать эффективность решения конкретных задач.

SUMMARY

Mikoni S.V. System Analysis of Multi-criteria Optimization Methods on a Finite Set of Alternatives.

Mathematical methods systematization is useful for practice, as it allows one to find the most effective area of application of each method. This fully applies to the methods developed in the decision theory.

The main objective of the decision is to choose the best alternative in the attributes space or evaluation of its quality. Obviously, methods for solving this problem are to have a common basis. Establishing of relation between them requires finding common properties, implementing the principle of similarities and specific properties, implementing the principle of distinction. A criterion and a function were taken as basic common properties of multi-criteria optimization methods. Formal model criterion combined attribute scale, target value of attribute and measure of deviation from the target.

The functions used by different optimization methods are interpreted with expected utility viewpoint. It makes it possible to distinguish two groups of methods - criterion and functional choice ones. The first group of methods sets preferences on the values of the criteria, and the second - on the values of the functions presenting the preferences of decision maker on the scales of attributes. Such an interpretation of functions that does not depend on how they are created, allowed considering methods of multi-criteria optimization and multi-dimensional utility from unified positions. The analytic hierarchy process uses the priority function calculated based on the matrix of pairwise comparisons. So, it is related to the group of methods of functional choice too. The resulting system allows one to compare their methods for quality and evaluate the effectiveness of tasks solving.

Interpretation by objective functions of aggregate objective functions in problems of multi-dimensional utility optimization and functions of several variables in the problem of finding its extreme allowed establishing a relation between the methods. Here the local targets play the role of specific properties. In an optimization problem, they are set to variables in the process of finding the extreme of the objective function, and in problems of multicriteria choice local targets are set initially and outside – by the decision maker (DM).

The resulting system of optimization methods allows one to compare methods for quality and evaluate its effectiveness for tasks solving.