УДК 681.142

В. П. Бубнов, А. В. Тырва, А. С. Еремин

КОМПЛЕКС МОДЕЛЕЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ ОБСЛУЖИВАНИЯ С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ ФАЗОВОГО ТИПА

Бубнов В. П., Тырва А. В., Еремин А. С. **Комплекс моделей нестационарных систем обслуживания с распределениями фазового типа.**

Аннотация. Представлен комплекс нового класса моделей нестационарных систем обслуживания с источником конечного числа заявок. В отличие от традиционных моделей теории массового обслуживания они позволяют моделировать процессы обслуживания на заданном (директивном) временном интервале при общих предположениях о законах распределения временных интервалов между поступлениями и обслуживаниями заявок. Определены принципы построения этих моделей, их графическая интерпретация, расчет вероятностно-временных характеристик, выведены системы дифференциальных уравнений Чепмена — Колмогорова.

Ключевые слова: нестационарная система обслуживания, распределения фазового типа, вероятности состояний.

Bubnov V.P., Tyrva A.V, Eremin A.S. **A Set of Non-stationary Queuing System Models with Phase-Type Distributions.**

Abstract. A complex of new models of non-stationary queuing systems with finite source is presented. In contrast to traditional models of queuing theory the proposed models allow to describe the processes of customers servicing in the specified time interval under general assumptions on the time distribution between customer arrival and service. The article presents the principles of such models development, their graphical interpretation and formulae for computation of probabilistic and time characteristics as well as Chapman—Kolmogorov differential equations systems.

Keywords: non-stationary queuing system, phase-type distribution, states probability.

1. Введение. Большинство авторов [1–4] используют модели теории массового обслуживания (ТМО) в предположении, что существует стационарный режим вероятности состояний системы массового обслуживания (СМО) не являются функциями времени. В этом случае коэффициент загрузки СМО не превышает единицы [5]. Однако наибольший практический и теоретический интерес представляют нестационарные модели ТМО, учитывающие поведение аппаратно-программных комплексов в контуре управления технологическими процессами и объектами, функционирующими в условиях перегрузок на заданном (директивном) временном интервале. К данным комплексам можно отнести средства наземного автоматизированного комплекса управления подвижными объектами [6]. Под моделью нестационарной системы обслуживания (НСО) понимается модель системы обслуживания с переменными во времени вероятностями состояний, каждое из которых определяет вероятность числа находящихся в НСО заявок и числа получивших обслуживание заявок. Число заявок, поступающих на обслуживание в рассматриваемых моделях, конечно.

2. Базовая модель. Подход построения моделей НСО продемонстрируем на примере достаточно простой модели. Пусть на вход одноканальной системы обслуживания последовательно поступает N заявок на обслуживание. Распределения длительности интервалов между моментами поступления и обслуживания заявок описываются экспоненциальными законами с интенсивностями, зависящими от номера заявки $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ и $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N\}$ соответственно. Такая система представляется цепью Маркова с дискретным множеством состояний и непрерывным временем [7]. Состояние системы в каждый момент времени характеризуется парой (i, j), где i — число поступивших, но еще не обслуженных заявок ($i = \overline{0, N}$), а j — число уже обслуженных заявок ($j = \overline{0, N-i}$). Переход из состояния (i, j) в состояние $(i+1, j)$ означает, что в систему поступила $(i+j+1)$-я заявка. Переход из состояния (i, j) в состояние $(i-1, j+1)$ означает, что была обслужена $(j+1)$-я заявка. Общее число состояний N_c вычисляется по формуле: $N_c = (N+1)(N+2)/2$. Система из N_c линейных однородных дифференциальных уравнений Чепмена — Колмогорова с постоянными коэффициентами имеет вид [8]:

$$\frac{dP_{i,j}(t)}{dt} = H(i)\big(P_{i-1,j}(t)\lambda_{i+j} - P_{i,j}(t)\mu_{j+1}\big) + H(j)P_{i+1,j-1}(t)\mu_j - \\ - H(N-i-j)P_{i,j}(t)\lambda_{i+j+1}\,, \qquad (1)$$

где $H(k)$ — функция Хевисайда, равная 0 при $k \le 0$ и 1 при $k > 0$; $P_{i,j}(t)$ — вероятность нахождения в НСО i заявок при j обслуженных в момент времени t.

В качестве начальных условий выбирают обычно нахождение в состоянии $(0,0)$, то есть $P_{i,j}(0) = 1 - H(i+j)$. Для каждого момента времени t должно соблюдаться условие нормировки вида $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i} P_{i,j}(t) = 1$. Вероятность нахождения в НСО ровно i заявок в каждый момент времени $P_i(t) = \sum_{j=0}^{N-i} P_{i,j}\ (t)$. Значение вероятности обслуживания ровно j заявок $P_j(t) = \sum_{i=0}^{N-j} P_{i,j}\ (t)$, а значение вероятности обслуживания не менее q заявок может быть определено из выражения $P_q(t) = \sum_{j=q}^{N} P_j(t)$.

Число состояний НСО конечно. Есть начальное состояние, и есть конечное (поглощающее) состояние. Все состояния невозвратные. Процесс однородный, не эргодический, для него не существует стационарного режима. Для любой НСО невозможны переходы:

– из состояния (i, j) в состояние $(i-k, j)$, $k = \overline{1, N}$;

– из состояния (i, j) в состояние $(i, j-k)$, $k = \overline{1, N}$;

– из состояния (i, j) в состояние (k, j), если $k > i + 1$;

– из состояния (i, j) в состояние (i, k), если $k > j + 1$.

Введена система обозначения моделей НСО $G_k(i)/G_k(j)/N$, дополняющую систему обозначений Кендалла, где G определяет вероятностный закон распределения временных интервалов между поступлениями или обслуживаниями заявок. В статье рассматриваются законы: M — экспоненциальный, E — Эрланга, H — гиперэкспоненциальный, C — Кокса, причём k — число этапов в рассматриваемых распределениях E, H и C. Обозначения (i) и (j) указывают на то, что интенсивности поступления и обслуживания зависят от номера заявки. Общее число заявок в источнике — N.

3. Аппроксимация распределениями фазового типа. Для учета произвольного закона распределения временных интервалов в моделях НСО проведено обобщение метода аппроксимации произвольной плотности распределения вероятностей плотностью вида:

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{k} \Theta_i \mu_i e^{-\mu_i t} , \qquad (2)$$

где $f(t)$ — произвольная плотность распределения вероятностей; Θ_i, μ_i, k — параметры аппроксимирующего распределения.

Известно, что плотности многих распределений, за исключением некоторых (в частности, логарифмического нормального распределения), при определенных, обычно выполняемых условиях однозначно определяются своими начальными моментами. Потребовав равенства первых N начальных моментов плотности $f(t)$ и аппроксимирующей плотности, получим систему нелинейных алгебраических уравнений для определения неизвестных Θ_i и μ_i:

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\Theta_i}{{\mu_i}^j} = \frac{\nu_j}{j!} , \; j = \overline{0, N},$$

где ν_j — j-й начальный момент аппроксимируемой плотности распределения $f(t)$.

Если Θ_i — положительные числа, удовлетворяющие условиям $0 \le \Theta_i \le 1$, $\sum_{i=1}^{k} \Theta_i = 1$, то правая часть (2) представляет собой плотность гиперэкспоненциального распределения, коэффициент вариации которого $\eta > 1$. В частном случае, когда μ_i равны между собой, а $\Theta_i = \frac{1}{k}$, получается экспоненциальное распределение с $\eta = 1$.

Если $\Theta_i = \prod_{l=1}^{k} \frac{\mu_l}{\mu_l - \mu_i}$; $l, i = \overline{1, k}$; $i \ne l$; $\mu_i \ne \mu_l$, то правая часть (2) соответствует неоднородному эрланговскому распределению порядка k. Коэффициент вариации такого распределения $\frac{1}{\sqrt{k}} < \eta < 1$. В этом случае Θ_i могут принимать отрицательное значение, однако условие $\sum_{i=1}^{k} \Theta_i = 1$ должно сохраняться.

Положив $\Theta_i = \sum_{l=1}^{k} a_1 a_2 \dots a_{l-1} b_l \prod_{n=1}^{l} \frac{\mu_n}{\mu_n - \mu_i}$; $n \neq i$; $\mu_n \neq \mu_i$; $a_i + b_i = 1$; $i \neq l$, получим плотность распределения Кокса. Коэффициент вариации такого распределения $\eta > \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Кокс показал [9], что параметры аппроксимирующего распределения могут быть комплексными, тогда чисто формально, можно исследовать процесс как марковский и составить уравнения Чепмена — Колмогорова обычным путем. В этом случае, несмотря на то, что значения вероятности, связанные с фиктивными фазами, могут быть комплексными, все же вероятности, связанные с реальными состояниями исследуемой системы, будут вещественными. Использование комплексно-сопряженных параметров позволяет аппроксимировать выше перечисленными распределениями произвольные плотности с коэффициентами вариации, находящимися в диапазоне $0 < \eta < \infty$.

В комплексе моделей НСО реализованы следующие: $M(i)/H_2(j)/N$, $H_2(i)/M(j)/N$, $M(i)/E_2(j)/N$, $E_2(i)/E_2(j)/N$, $C_2(i)/C_2(j)/N$. Наибольшей общностью обладает модель с двухэтапным коксовским поступлением и двухэтапным коксовским обслуживаем заявок $C_2(i)/C_2(j)/N$ [10]. В случае использования одного из аппроксимирующих распределений (E, H, C) для описания вероятностей состояний модели НСО вводится еще один параметр — номер этапа аппроксимирующего распределения. При аналогичной аппроксимации законов распределения временных интервалов как между поступлением, так и между обслуживанием заявок потребуется уже четыре переменных: число заявок в системе, число обслуженных заявок, номер этапа аппроксимирующего распределения временных интервалов между поступлениями заявок и номер этапа аппроксимирующего распределения временных интервалов обслуживания. Это приводит к значительному расширению числа состояний моделей НСО и, как следствие, к увеличению числа дифференциальных уравнений Чепмена — Колмогорова. Порядок разработки таких моделей продемонстрируем на примере модели с двухэтапным коксовским поступлением и двухэтапным коксовским обслуживаем заявок $C_2(i)/C_2(j)/N$. Граф переходов и состояний для такой НСО представлен на рисунке 1.

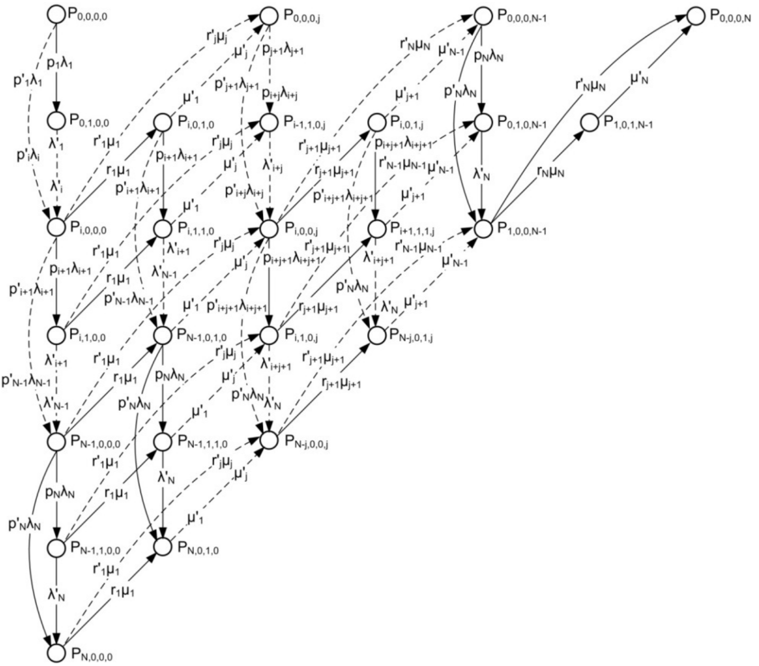

Рис. 1. Граф переходов и состояний $C_2(i)/C_2(j)/N$

Состояние (i,k,l,j) модели НСО $C_2(i)/C_2(j)/N$ в каждый момент времени характеризуется количеством поступивших (еще не обслуженных) заявок i $(i=\overline{0,N})$, обслуженных заявок j $(j=\overline{0,N-i})$, этапом k $(k=\overline{0,H(N-i-j)})$ и l $(l=\overline{0,H(i)})$ распределения Кокса длины интервалов времени между моментами поступления и обслуживания заявок. Поведение такой системы описывается однородной системой дифференциальных уравнений Чепмена — Колмогорова с постоянными коэффициентами:

$$\begin{gathered}\frac{dP_{i,k,l,j}(t)}{dt}=-H(1-k)H(N-i-j)P_{i,k,l,j}(t)\lambda_{i+j+1}-\\ -H(k)P_{i,k,l,j}(t)\lambda'_{i+j+1}+H(k)P_{i,0,l,j}(t)p_{i+j+1}\lambda_{i+j+1}+\\ +H(1-k)H(i)\big(P_{i,1,l,j}(t)\lambda'_{i+j}+P_{i-1,0,l,j}(t)\big(1-p_{i+j}\big)\lambda_{i+j}\big)-\\ -H(i)H(1-l)P_{i,k,l,j}(t)\mu_{j+1}-H(l)P_{i,k,l,j}(t)\mu'_{j+1}+\\ +H(1-l)H(j)\big(P_{i+1,k,1,j-1}(t)\mu'_j+P_{i+1,k,0,j-1}(t)\big(1-r_j\big)\mu_j\big)+\\ +H(l)P_{i,k,0,j}(t)r_{j+1}\mu_{j+1},\end{gathered}$$

где λ_i, λ'_i, p_i, p'_i — параметры распределения Кокса временного интервала между поступлением $i-1$ и i заявок; μ_j, μ'_j, r_j, r'_j — параметры распределения Кокса временного интервала обслуживания -й заявки.

Для каждого момента времени t должно соблюдаться условие нормировки вида $\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N-i}\sum_{k=0}^{H(N-i-j)}\sum_{l=0}^{H(i)}P_{i,k,l,j}(t)=1$.

Задав начальные условия к системе в виде:

$$P_{i,k,l,j}(0)=\begin{cases}0, \text{если } i+j+k+l\neq 0,\\ 1, \text{если } i+j+k+l=0,\end{cases}$$

можно найти численное решение соответствующей задачи Коши для произвольного значения времени t.

4. Результаты численного моделирования. На рисунке 2 представлены графики функций распределения времени обслуживания $FN(t)$ для различных значений коэффициента вариации временных интервалов поступления заявок *invar* и обслуживания заявок *outvar*.

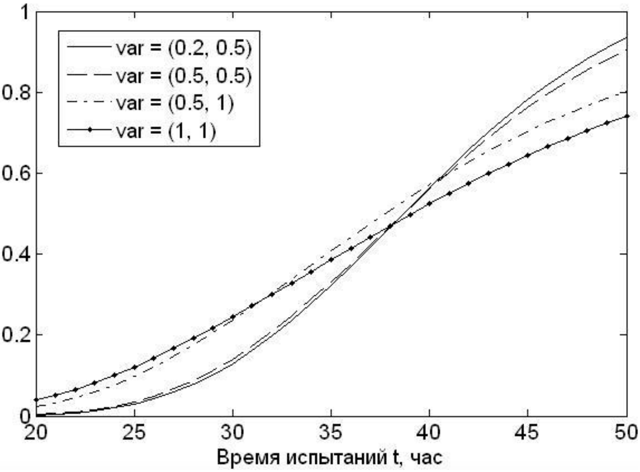

Рис. 2. Функции распределения вероятностей времени обслуживания всех заявок

В таблице 1 приведены рассчитанные значения времени испытаний, которое требуется для обслуживания всех заявок с вероятностью 0.95.

Таблица 1. Время, требуемое для обслуживания всех заявок

outvar / *invar*	*0.2*	*0.5*	*1.0*
0.2	50	51	64
0.5	51	53	67
1.0	56	59	73

Описанные модели НСО $G(i)/G(j)/N$ являются наиболее общими, так как не ограничены конкретным видом распределения временных интервалов между поступлением и обслуживанием заявок.

5. Программная реализация моделей и оценка их достоверности. Авторы выполнили программную реализацию комплекса моделей нестационарных систем обслуживания [11]. В комплексе программ реализованы следующие модели НСО: $M(i)/M(j)/N$, $H_2(i)/M(j)/N$, $M(i)/E_2(j)/N$, $E_2(i)/E_2(j)/N$, $C_2(i)/C_2(j)/N$. Для всех моделей реализованы расчеты вероятностно-временных показателей обслуживания заявок, представленных во втором разделе настоящей статьи. Программы содержат следующие основные функции:

– ErlangApproximation, CoxApproximation, H2Approximation — функции расчета параметров аппроксимации двухэтапным распределением Эрланга (неоднородным), Кокса, гиперэкспоненциальным распределением соответственно. Параметры: первые два (три) начальных момента исходного распределения.

– StateQuantity — функция расчета числа состояний модели. Параметр: общее число заявок.

– PIndex — функция расчета порядкового номера (индекса) состояния модели. Параметры: вектор, описывающий состояние системы (число поступивших, но необслуженных заявок, число обслуженных заявок, фаза поступления и обслуживания заявок).

– PIndex2ij — функция выполняет обратное преобразование. Параметр: индекс состояния.

– DeSMO — функция составления системы дифференциальных уравнений. Параметры: векторы интенсивностей поступления и обслуживания заявок, матрица состояний (содержит индексы состояний, для которых производится расчет, это необходимо для моделирования различных стратегий испытаний), время моделирования, вектор вероятностей состояний системы в текущий момент времени.

– SummP — функция расчета вероятностных характеристик процесса обслуживания (функции распределения времени обслуживания заданного числа заявок, вероятности поступления и обслуживания заданного числа заявок, среднее число поступивших и обслуженных заявок). Параметры: вектор вероятностей пребывания в различных состояниях системы в различные моменты времени моделирования.

– CalculateStates — функция решения системы дифференциальных уравнений (вызов функций ode45 и DeSMO) и расчета показателей обслуживания (вызов функции SummP).

– PFaultLess — функция расчета вероятности свободного состояния в течение заданного времени после проведения испытаний.

Параметры: вектор вероятностей пребывания в различных состояниях системы в моменты времени моделирования, время функционирования, интенсивности поступления заявок.

– Main — основная функция, готовит исходные данные, обращается к функции CalculateStates для решения системы дифференциальных уравнений и представляет результаты (графики, выходной файл).

Для решения системы дифференциальных уравнений использована стандартная функция ode45 для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием формул Рунге — Кутты 4-го и 5-го порядков. Для обоснования достоверности расчетов выполнена проверка полученных результатов с использованием различных разработанных моделей НСО. Схема выполнения взаимной проверки результатов моделирования иллюстрируется на рисунке 3.

Рис. 3. Схема взаимной проверки результатов моделирования

Реализованные модели показаны по степени общности от базовой экспоненциальной (крайний левый столбец) до наиболее общей с использованием двухэтапного распределения Кокса (крайний правый столбец). Модели, расположенные на схеме правее, являются более общими и используются для проверки результатов частных моделей, расположенных, соответственно, левее. Взаимная проверка моделей НСО показала совпадение полученных результатов.

6. Заключение. Представленный комплекс моделей НСО и их программная реализация могут быть использованы для расчета характеристик надежности и пропускной способности аппаратно-программных комплексов, функционирующих в условиях изменяющейся рабочей нагрузки на заданном (директивном) временном интервале.

Литература

1. *Клейнрок Л.* Теория массового обслуживания // М. 1979. 432 с.
2. *Хомоненко А. Д.* Численные методы анализа систем и сетей массового обслуживания // Л. 1991. 196 с.

3. *Osogami T., Raymond R.* Analysis of transient queues with semidefinite optimization // Queueing Systems. 2013. vol. 73. pp. 195–234.
4. *Wolff R.W., Yao Y.-C.* Little's law when the average waiting time is infinite // Queueing Systems. 2014. vol. 76. pp. 267–281.
5. *Башарин Г. П., Бочаров П. П., Коган Я. А.* Анализ очередей в вычислительных сетях: Теория и методы расчета // М. 1989. 336 с.
6. *Калинин В. Н., Соколов Б. В.* Многомодельное описание процессов управления космическими средствами // Теория и системы управления. 1995. № 1. С. 149–156.
7. *Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения // М. 1991. 384 с.
8. *Бубнов В. П., Сафонов В. И., Смагин В. А.* О загрузке вычислительной системы с изменяющейся интенсивностью поступления заданий // Автоматика и вычислительная техника. 1987. №6. С. 19–22.
9. *Cox. D.R.* A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes // Proc. Cambr. Phil. Soc. 1955. vol. 51. no 2. pp. 313–319.
10. *Bubnov V.P., Khomonenko A.D., Tyrva A.V.* Software Reliability Model with Coxian Distribution of Length of Intervals Between Errors Detection and Fixing Moments // Proceedings of 35th Annual IEEE Computer Software and Applications Conference (COMPSAC 2011). 2011. pp. 310–314.
11. *Тырва А. В., Хомоненко А. Д., Бубнов В. П.* Комплекс программ расчета надежности и планирования испытаний программных средств // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ № 2010615617. Москва. 2010.

References

1. Kleinrock L. *Teorija massovogo obsluzhivanija* [Queueing Systems]. M. 1979. 432 p. (In Russ.)
2. Khomonenko A.D. *Chislennye metody analiza sistem i setej massovogo obsluzhivanija* [Numerical methods of queuing systems and networks analysis]. L. 1991. 196 p. (In Russ.).
3. Osogami T., Raymond R. Analysis of transient queues with semidefinite optimization. Queueing Systems. 2013. vol. 73. pp. 195–234.
4. Wolff R.W., Yao Y.-C. Little's law when the average waiting time is infinite. Queueing Systems. 2014. vol. 76. pp. 267–281.
5. Basharin G.P., Bocharov P.P., Kogan Ya.A. *Analiz ocheredei v vychislitel'nykh setyakh: Teoriya i metody rascheta* [Analysis of queues in computer networks: Theory and computational methods]. M. 1989. 336 p. (In Russ.)
6. Kalinin V.N., Sokolov B.V. [A many-model approach to description of space means control processes]. *Teorija i sistemy upravlenija – Theory and control system*. 1995. vol 1. pp. 149–156. (In Russ.)
7. Wentzel E.S., Ovcharov L.A. *Teorija sluchajnyh processov i ee inzhenernye prilozhenija* [Theory of random processes and its engineering applications]. M. 1991. 384 p. (In Russ.)
8. Bubnov V.P., Safonov V.I., Smagin V.A. [The load of a computational system with varying customer arrival rate]. *Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika – Automation and Computer Engineering*. 1987. vol 6. pp. 19–22. (In Russ.).
9. Cox. D.R. A use of complex probabilities in the theory of stochastic processes. Proc. Cambr. Phil. Soc. 1955. vol. 51. no. 2. pp. 313–319.
10. Bubnov V.P., Khomonenko A.D., Tyrva A.V. Software Reliability Model with Coxian Distribution of Length of Intervals Between Errors Detection and Fixing Moments. Proceedings of 35th Annual IEEE Computer Software and Applications Conference (COMPSAC 2011). 2011. pp. 310–314.
11. Tyrva A.V., Khomonenko A.D., Bubnov V.P. [The program complex for software reliability computation and tests planning]. Russian Federal Service for Intellectual Property (Rospatent). Certificate of the state registration of a computer program № 2010615617. M. 2010. (In Russ.).

Бубнов Владимир Петрович — д-р техн. наук, профессор, кафедра информационных и вычислительных систем факультета автоматизации и интеллектуальных технологий Петербургского государственного университета путей сообщения императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: вероятностные модели аппаратно-программных комплексов, марковские процессы, дифференциальные уравнения. Число научных публикаций — 150. bubnov1950@yandex.ru, http://www.pgups.ru; Московский пр., д. 9, г. Санкт-Петербург, 190031, РФ; р.т. +79052807904, факс +7(812)457-8606.

Bubnov Vladimir Petrovish — Ph.D., Dr. Sci., professor, Informatics and computer systems department of Petersburg state transport university. Research interests: probabilistic models of hardware and software complexes, Markovian processes, differential equations. The number of publications — 150. bubnov1950@yandex.ru, http://www.pgups.ru; Moskovsky pr., 9, Saint-Petersburg, 190031, Russian Federation; office phone +79052807904, fax +7(812)457-8606.

Тырва Алексей Владимирович — к-т техн. наук, доцент, кафедра информационных и вычислительных систем факультета автоматизации и интеллектуальных технологий Петербургского государственного университета путей сообщения императора Александра I (ПГУПС). Область научных интересов: математическое моделирование, разработка программного обеспечения. Число научных публикаций — 10. altyr@mail.ru, http://www.pgups.ru; Московский пр., д. 9 , г. Санкт-Петербург, 190031, РФ; р.т. +7(812)457-8606, факс +7(812)457-8606.

Tyrva Alexey Vladimirovich — Ph.D., associate professor, Informatics and computer systems department of Petersburg state transport university. Research interests: software reliability modeling, probabilistic models. The number of publications — 10. altyr@mail.ru, http://www.pgups.ru; Moskovsky pr., 9, Saint-Petersburg, 190031, Russian Federation; office phone +7(812)457-8606, fax +7(812)457-8606.

Еремин Алексей Сергеевич — к-т техн. наук, доцент, кафедра информационных систем факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: численные методы решения дифференциальных уравнений, уравнения с запаздывающих аргументом, вероятностные модели. Число научных публикаций — 13. ereminh@gmail.com, http://www.spbu.ru; Университетский пр. 35, Петергоф, г. Санкт-Петербург, 198504, РФ; р.т. +7(812)428-7159, факс +7(812)428-7159.

Eremin Alexey Sergeevich — Ph.D., associate professor, Department of Information systems of the Faculty of Applied Mathematics and Control Processes of the Saint-Petersburg State University. Scientific interests: numerical solution of differential equations, delay differential equations, probabilistic models. The number of publications — 13. ereminh@gmail.com, http://www.spbu.ru; Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint-Petersburg, 198504, Russian Federation; office phone +7(812)428-7159, fax +7(812)428-7159.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержки фундаментальных научных исследований ОНИТ РАН: Проект № 2.11: «Комплексное моделирование, многокритериальное оценивание и анализ рисков при выработке управленческих решений в катастрофоустойчивой информационной системе».

Acknowledgements. This research is financially supported by fundamental scientific research support of Nano- and Information technologies department of Russian Academy of Sciences: Project №2.11 «Complex modeling, multi-criterion estimation and risk analysis during control decisions in catastrophe proof information systems».

РЕФЕРАТ

Бубнов В. П., Тырва А. В., Еремин А. С. **Комплекс моделей нестационарных систем обслуживания с распределениями фазового типа.**

Представлен комплекс нового класса моделей нестационарных систем обслуживания (НСО) с источником конечного числа заявок. В отличие от традиционных моделей теории массового обслуживания, они позволяют моделировать процессы обслуживания на заданном (директивном) временном интервале при общих предположениях о законах распределения временных интервалов между поступлениями и обслуживаниями заявок.

Для учета произвольного закона распределения вероятностей временных интервалов в моделях НСО проведено обобщение метода аппроксимации произвольной плотности распределения вероятностей плотностью вида: $f(t) \approx \sum_{i=1}^{k} \Theta_i \mu_i e^{-\mu_i t}$, где $f(t)$ — произвольная плотность распределения вероятностей; Θ_i, μ_i, k — параметры аппроксимирующего распределения.

Для аппроксимации используются распределения фазового типа 2-го порядка (гиперэкспоненциальное — H_2, Эрланга — E_2, Кокса — C_2). В разработанном комплексе программ реализованы следующие модели НСО: $M(i)/M(j)/N$, $H_2(i)/M(j)/N$, $M(i)/E_2(j)/N$, $E_2(i)/E_2(j)/N$, $C_2(i)/C_2(j)/N$. Определены принципы построения этих моделей, их графическая интерпретация, расчет вероятностно-временных характеристик, выведены системы дифференциальных уравнений Чепмена — Колмогорова.

Для решения системы дифференциальных уравнений использована стандартная функция ode45 для численного интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием формул Рунге — Кутты 4-го и 5-го порядков. Для обоснования достоверности расчетов выполнена проверка полученных результатов с использованием различных разработанных моделей НСО.

SUMMARY

Bubnov V.P., Tyrva A.V, Eremin A.S. **A Set of Non-stationary Queuing System Models with Phase-Type Distributions.**

A complex of new models of non-stationary queuing systems (NSQS) with finite source is presented. In contrast to traditional models of queuing theory the proposed models allow to describe the processes of customers servicing in the specified time interval under general assumptions on the time distribution between customer arrival and service.

In order to approximate general distribution laws for time intervals in NSQS models the way to approximate the probability density with the expression $f(t) \approx \sum_{i=1}^{k} \Theta_i \mu_i e^{-\mu_i t}$ is generalized. Θ_i, μ_i, k are the approximating distribution parameters.

Phase type distributions of order 2 are used (namely Hyperexponential H_2, Erlang E_2, and Cox C_2). The developed software provides the following models: $M(i)/M(j)/N$, $H_2(i)/M(j)/N$, $M(i)/E_2(j)/N$, $E_2(i)/E_2(j)/N$, $C_2(i)/C_2(j)/N$. The principles of their construction, their graphical interpretation, calculation of the probability-time characteristics are given. The system of Chapman—Kolmogorov equations is derived.

The ordinary differential equations system is solved with MatLab standard ode45 procedure, which uses embedded Runge—Kutta pair of orders 4 and 5. The results are verified by comparing the results obtained with different NSQS models.