**УДК** 519.722, 536.758

А.Л. Фрадков, Д.С. Шалымов

# ЗАКОНЫ ЭВОЛЮЦИИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ, ПОДЧИНЯЮЩИХСЯ ПРИНЦИПУ МАКСИМУМА ЭНТРОПИИ

*Фрадков А.Л., Шалымов Д.С.* **Законы эволюции нестационарных процессов, подчиняющихся принципу максимума энтропии.**

**Аннотация.** В статье предложен новый способ обоснования принципа максимального производства энтропии. На основе экстремального принципа скоростного градиента рассматривается динамика системы при условии, что система подчиняется принципу максимума информационной энтропии. Получена система уравнений, описывающих динамику функции распределения и ее выход на стационарное состояние, совпадающее с распределением Гиббса. Доказана асимптотическая сходимость и единственность предельного распределения. В качестве ограничений рассмотрены закон сохранения масс и закон сохранения энергии.

**Ключевые слова:** максимизация энтропии, принцип максимального производства энтропии, скоростной градиент, распределение Гиббса.

*Fradkov A.L., Shalymov D.S.* **Evolution laws for non-stationary processes that follow the MaxEnt principle.**

**Abstract.** In this paper a new justification of maximum entropy production principle (MEPP) is proposed. The dynamics of systems with continuous distribution of parameters are reviewed on the basis of the extreme principle of the speed gradient and on the condition that the system follows the principle of maximum entropy. A set of equations is derived to describe the dynamics of the probability distribution function (pdf). It is shown that for pdfs with compact carrier the limit pdf is unique and can be obtained from Jaynes's MaxEnt principle. The asymptotic convergence is proved. The constraints imposed are the mass conservation law and the energy conservation law.

**Keywords:** MaxEnt, MEPP, speed gradient principle, Gibbs distribution.

**1. Введение.** Вопросы эволюции в природе и обществе порождают множество различных дискуссий, в центре которых оказывается понятие энтропии, составляющее основу современной статистической физики и термодинамики.

Для описания эволюции нестационарных процессов, подчиняющихся принципу максимума энтропии, нередко используют принцип максимума производства энтропии (MEPP - Maximum Entropy Production Principle) [1], который состоит в том, что неравновесная система в "естественных" условиях развивается так, чтобы максимизировать свою скорость производства энтропии при заданных внешних ограничениях. Под "естественными" условиями будем понимать отсутствие целенаправленного внешнего воздействия.

Таким образом, если принцип максимума энтропии говорит о том, что система стремится к состоянию, соответствующему максимальному значению энтропии, то принцип MEPP говорит о том, что делает это система с максимально возможной скоростью. Эти принципы позволяют в ряде случаев при изучении эволюции систем получить недостающую информацию и определить выбор режима развития.

В статистической физике при изучении сложных неравновесных систем MEPP используется для нахождения распределений микроскопических характеристик, которые рассматриваются как случайные величины. Что касается термодинамики, то применительно к неравновесным процессам в изолированной системе второе начало термодинамики утверждает о невозможности уменьшения энтропии. Если использовать статистическую интерпретацию, следующую из работ Больцмана и Гиббса, принцип максимума производства энтропии может рассматриваться как естественное обобщение формулировки Клаузиуса-Больцмана-Гиббса второго начала [2,3].

Для обоснования MEPP в настоящее время широко используется подход на основе информационной энтропии, предложенный Э.Т. Джейнсом (1957) [3-6]. Этот подход является простым и удобным способом построения статистической термодинамики (классической и квантовой), который лишен некоторых сложностей, таких как, например, эргодическая гипотеза [3-7]. Существенным достоинством формализма Джейнса является возможность его обобщения при изучении неравновесных систем. В литературе имеются различные направления этого его использования, включающие описания релаксационных процессов (связанных с термодинамикой необратимых процессов, формулами Грина-Кубо и т.п.) [3,6,8,9] и неравновесных фазовых переходов [10].

Принцип максимума производства энтропии находит широкое применение в различных исследованиях сложных систем физической, химической и биологической природы [1]. Однако вопрос вывода этого принципа, который определяет динамику нестационарных (переходных) режимов, говорит, как и по какой траектории стремится состояние системы к состоянию с максимальной энтропией, остается актуальным до сих пор.

Метод наиболее вероятного пути эволюции для описания неравновесных стационарных систем предложили А. Филюков и В. Карпов (в 1967-1968 гг.) [11]. Предложенный и развитый ими аппарат во многом перекликается с появившимся гораздо позже подходом Девара (2003) [12,13], в котором представлен вывод принципа максимума производства энтропии с помощью формализма Джейнса. Девар исследует неравновесную стационарную открытую систему (объемом $V$ и с границей $\Omega$) и использует понятие "микроскопический путь" - изменение микросостояния со временем.

Однако, согласно критическим замечаниям в [1], проблема связи максимума информационной энтропии траекторий и принципа максимума производства энтропии, а, соответственно, и определения эволюции энтропии системы, осталась открытой.

Известно, что методы оптимального управления, такие как динамическое программирование Беллмана, принцип максимума Понтрягина и др., могут быть эффективно использованы для построения моделей динамики механических [14], термодинамических [15] и других сложных систем. Так, например, согласно работам Г. Розенброка [16,17], на основе принципов оптимального управления может быть получен вывод основных уравнений квантовой механики, поскольку уравнение Шредингера оказывается непосредственным следствием принципа оптимальности Гамильтона-Якоби-Беллмана.

В контексте принципа МЕРР использование методов оптимального управления также кажется перспективным. Уравнения динамики физических систем могут быть построены на основе экстремальных принципов в случае, когда удается ввести понятие цели как достижение экстремума целевого функционала. В качестве такой цели можем рассмотреть максимизацию энтропии системы и использовать принцип скоростного градиента (СГ) [18-22], предназначенный для решения задач управления непрерывными по времени системами, в которых задана вышеупомянутая цель.

При таком использовании СГ-принцип может дать обоснование принципу МЕРР, определив уравнения динамики системы, обеспечивающие максимальный прирост энтропии. Например, известен факт, что принцип скоростного градиента согласуется с одним из принципов биологии, по которому организмы и популяции развиваются так, чтобы обеспечить максимальный прирост своей биомассы [23].

В работах [18, 24] экстремальный принцип скоростного градиента уже был успешно применен для построения уравнений статистической динамики конечных систем частиц, подчиняющихся принципу максимума энтропии. В [21] проведена экспериментальная проверка применимости принципа скоростного градиента на примере системы частиц, моделируемой методом молекулярной динамики на основе уравнений классической механики. Однако вопрос о распространении полученных результатов на системы с непрерывными распределениями состояний остается открытым.

Основным результатом настоящей работы является распространение результатов [18,21] на системы с непрерывным распределением множества значений параметров. Из принципа скоростного градиента выводятся уравнения динамики переходных режимов систем, подчиняющихся в установившемся режиме принципу максимума энтропии.

В следующем разделе приводится формулировка принципа скоростного градиента. В разделе 3 вводится формализм Джейнса. Иллюстрирующий пример динамической системы с непрерывным распределением параметров, подчиняющейся принципу максимума энтропии, приведен в разделе 4. Рассмотрены случаи с одним и двумя ограничениями. Делается вывод уравнений переходного режима и анализ их свойств. Доказывается асимптотическая устойчивость. В разделе 5 представлен краткий обзор случаев использования принципа MEPP.

**2. Принцип скоростного градиента.** Рассмотрим класс открытых физических систем, модели динамики которых, описываются системами дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u, t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{C}^n$ - вектор состояния системы, $u$ - вектор входных (свободных) переменных, $t \geq 0$.

Задача моделирования (построения модели) системы может быть поставлена как нахождение закона изменения (эволюции) *u(t)*, удовлетворяющего некоторому критерию естественности ее поведения и придающего создаваемой модели свойства, наблюдаемые у реальной физической системы.

Построение такого критерия на основе экстремальных и вариационных принципов обычно предполагает задание некоторого интегрального функционала (например, функционал действия в принципе наименьшего действия [25], характеризующего поведение системы.

Минимизация функционала определяет реально возможные траектории системы $\{x(t), u(t)\}$ как точки в соответствующем функциональном пространстве. Для явного определения закона динамики системы используется развитый аппарат вариационного исчисления.

Кроме интегральных, были предложены и дифференциальные (локальные по времени) принципы, такие, как принцип наименьшего принуждения Гаусса, принцип минимальной диссипации энергии и др. Как отмечал М. Планк [26], локальные принципы имеют некоторое преимущество перед интегральными, поскольку они не ставят в зависимость текущее состояние и движение системы от ее позднейших состояний и движений. Следуя [19,24], сформулируем еще один локальный вариационный принцип, основанный на методе скоростного градиента, предложенном ранее для синтеза законов нелинейного и адаптивного управления.

*Принцип скоростного градиента: среди всех возможных движений в системе реализуются лишь те, для которых входные переменные изменяются пропорционально скоростному градиенту от некоторого "целевого" функционала* $Q_t$.

Если на движение системы наложены связи, то направление движения есть проекция вектора скоростного градиента на множество допустимых (совместимых со связями) направлений.

Принцип скоростного градиента (СГ-принцип) предлагает исследователю на выбор два типа моделей динамики систем:

1. Модели, следующие из алгоритмов скоростного градиента в дифференциальной форме:

$$\dot{u} = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}_t. \tag{2}$$

2. Модели, следующие из алгоритмов скоростного градиента в конечной форме:

$$u = -\Gamma \nabla_u \dot{Q}_t. \tag{3}$$

Здесь $\dot{Q}_t$ - скорость изменения целевого функционала вдоль траектории системы (1).

Опишем схему применения СГ-принципа в простейшем (но и важнейшем) случае, когда класс моделей динамики (1) задан соотношением:

$$\dot{x} = u. \tag{4}$$

Соотношение (4) означает всего лишь, что мы ищем закон изменения скоростей переменных состояния системы. В соответствии с СГ-принципом прежде всего нужно ввести целевой функционал (функцию) $Q(x)$. Выбор $Q(x)$ должен быть основан на физике реальной системы и отражать наличие в ней тенденции к уменьшению текущего значения $Q(x(t))$. После этого закон динамики может быть выписан в виде (2) или (3).

При этом задание закона динамики в виде (1) порождает дифференциальные уравнения движения второго порядка, которые инвариантны относительно замены времени *t* на -*t*, т. е. соответствуют обратимым процессам. Напротив, выбор конечной формы (2) соответствует, как правило, необратимым процессам.

СГ-принцип применим и к построению моделей динамики распределенных систем, описываемых в бесконечномерных пространствах состояний. В частности, $x$ может быть вектором гильбертова пространства X, а *f(x,u,t)* - нелинейным оператором, определенным на плотном множестве $D_F \subset$ X, (при этом решения уравнения (1) понимаются как обобщенные решения).

Подчеркнем, что принцип скоростного градиента порождает уравнения для переходных (нестационарных) режимов функционирования систем, т.е. дает ответ на вопрос: *как* система будет эволюционировать? Этим он отличается от принципов максимума энтропии, максимума Фишеровской информации и др., характеризующих установившиеся процессы и дающих ответ на вопросы: *куда?* и *как далеко?* СГ-принцип можно использовать для анализа устойчивости и скорости затухания переходных процессов, оценки максимального отклонения от предельных режимов и т.д.

**3. Принцип максимума энтропии по Джейнсу.** Подход, предложенный Джейнсом [3-6], стал основой построения фундамента статистической физики на основе информационной энтропии. Изложим основные его идеи.

Пусть *p(x)* - функция распределения многомерной случайной величины *x*. Эта функция неизвестна и требуется ее определить на основе имеющейся информации о данной системе. Допустим, что мы располагаем информацией о некоторых средних значениях $\overline{H}_m$:

$$\overline{H}_m = \int H_m(x)p(x)dx, \text{ m = 1,...,M.} \quad (5)$$

Также для функции плотности распределения верно:

$$\int p(x)dx = 1. \quad (6)$$

Условий (5) и (6) в общем случае может не хватить для нахождения *p(x)*. В этом случае, согласно Джейнсу, наиболее объективный способ определить функцию распределения с помощью максимизации информационной энтропии $S_I$:

$$S_I = -\int p(x)log(p(x))dx.$$

Поиск максимума $S_I$ с использованием дополнительных условий (5) и (6) выполняется при помощи множителей Лагранжа $\lambda_m$ и приводит к следующим результатам:

$$p(x) = \frac{1}{Z}exp(\sum_{m=1}^{M}\lambda_m H_m), \quad (7)$$

$$Z = \int exp(-\sum_{m=1}^{M}\lambda_m H_m)dx, \quad (8)$$

где параметры $\lambda_m$ могут быть определены из условий (5).

Полученные формулы позволяют находить функции распределения для микроканонического, канонического и других ансамблей, используя в качестве (5) условия, характеризующие каждый из перечисленных равновесных ансамблей (см., например [4,7]).

Также показывается, что в равновесном случае при соответствующем выборе случайных величин $x$ максимум информационной энтропии совпадает с энтропией Гиббса и может быть отождествлен с термодинамической энтропией.

Джейнс показал глубокую связь и преемственность своего подхода как к классическим работам Бернулли, Лапласа по теории вероятности и статистике, так и к трудам по физике и теории информации (в особенности Дж. Гиббса и К. Шеннона) [6].

Хотя изначально теория информации создавалась с помощью некоторых понятий статистической физики, в настоящее время, следуя Джейнсу, можно принять информационный подход за основу при построении статистической физики. При этом формализм статистической механики, согласно [1], оказывается некой последовательностью действий, следуя которой, мы имеем возможность получить наилучшую, объективную оценку при наличии существенной ограниченности наших знаний о микромире (это статистическая методика предупреждения возможных ошибок).

**4. Максимизация энтропии методом скоростного градиента.** Принцип скоростного градиента определяет закон, по которому будет эволюционировать система. Получаемые уравнения для переходных (нестационарных) состояний характеризуют динамику функционирования системы.

В соответствии со вторым законом термодинамики и принципом максимума энтропии Гиббса-Джейнса [4,5] энтропия любой физической системы стремится возрастать до тех пор, пока она не достигнет своего максимального значения при ограничениях, накладываемых другими физическими законами.

Это утверждение определяет асимптотическое поведение системы при $t \to \infty$, однако ничего не говорит о том, как происходит движение к асимптотике. Для ответа на этот вопрос используем принцип скоростного градиента.

*4.1. Система с непрерывным распределением состояний.* Рассмотрим систему с непрерывным распределением множества возможных состояний. Распределение вероятности по состояниям характеризуется непрерывной везде, за исключением множества меры ноль, неотрицательной функцией плотности вероятности *p(t,r)*, удовлетворяющей условию:

$$\int_\Omega p(t,r)dr = 1, \qquad (9)$$

где $\Omega$ - компакт.

Состояние системы эволюционирует во времени. Нас интересует поведение системы как в установившемся, так и в переходном режиме. Установившееся состояние определяется из принципа максимума энтропии: если ничего более о системе неизвестно, ее предельное поведение будет максимизировать ее меру неопределенности (энтропию).

В качестве меры неопределенности выберем дифференциальную энтропию. Для рассматриваемой системы она определяется как:

$$\mathrm{S} = -\int_{\Omega} \mathrm{p(t,r)log(p(t,r)dr}. \tag{10}$$

Закон динамики системы будем искать в виде:

$$\dot{x} = \mathrm{u(t,r), x = p(t,r)}. \tag{11}$$

Необходимо определить функцию *u(t,r)*.

В соответствии с СГ-принципом требуется вычислить скорость изменения энтропии (10) в силу системы (11), затем вычислить градиент этой скорости по отношению к функции $u$ и, наконец, определить действительные управления пропорционально проекции градиента на поверхность ограничений (9). Вычисление $\dot{S}$ дает:

$$\dot{S} = -\int_{\Omega}(\mathrm{ulog(p)} + \mathrm{u}\frac{p}{p})dr = -\int_{\Omega}\mathrm{ulog(p)}\,dr - \int_{\Omega}\mathrm{u}\,dr.$$

Из (9) следует, что:

$$\int_{\Omega} u(\mathrm{t,r})\mathrm{dr} = 0. \tag{12}$$

Откуда $\dot{S} = -\int_{\Omega}\mathrm{ulog(p)}\,dr$. Градиент $\dot{S}$ по $u$ есть $\nabla_u \dot{S} = -\nabla_u\langle\mathrm{log(p), u}\rangle$. Согласно скалярному произведению получается $\nabla_u \dot{S} = -\mathrm{log(p)}$.

СГ-закон движения принимает вид $\mathrm{u} = -\Gamma\mathrm{log(p(t,r))} + \lambda$, где Γ можно взять скаляром, а множитель Лагранжа $\lambda$ выбирается из условия удовлетворения ограничению (12).

$$\int_{\Omega}(-\Gamma\mathrm{log(p(t,r))} + \lambda)\,dr = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{\int_{\Omega}\mathrm{log(p(t,r))\,dr}}{mes(\Omega)}, \tag{13}$$

где $mes(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d\Omega$.

Окончательно уравнение динамики системы имеет вид:

$$\dot{p} = -\Gamma \log(\mathrm{p(t,r)}) + \frac{\Gamma \int_\Omega \log(\mathrm{p(t,r)})\mathrm{dr}}{mes(\Omega)} = -\Gamma\left(\log(\mathrm{p(t,r)}) - \frac{\int_\Omega \log(\mathrm{p(t,r)})\mathrm{dr}}{mes(\Omega)}\right) \quad (14)$$

Физический смысл закона (14) состоит в движении в направлении максимальной скорости производства (скорости роста) энтропии, что соответствует принципу MEPP.

*Устойчивость равновесия.* Далее исследуем устойчивость равновесия полученного уравнения (14). Для этого рассмотрим функцию Ляпунова:

$$\mathrm{V(p)} = S_{max} - \mathrm{S(p)} \geq 0. \quad (15)$$

Вычислим производную функции (15):

$$\dot{V}(p) = -\dot{S}(p) = \int_\Omega \mathrm{u}\log(\mathrm{p})\mathrm{dr}. \quad (16)$$

Подставляя выражение для *u* из (14) в (16), получаем

$$\dot{V}(p) = \int_\Omega -\Gamma\left(log^2 p(t,r) - \frac{\int_\Omega \log(\mathrm{p(t,r)})\mathrm{dr}}{mes(\Omega)}\log(\mathrm{p(t,r)})\right) dr.$$

После преобразований получаем, что:

$$\dot{V}(p) = -\frac{\Gamma}{mes(\Omega)}\left(\int_\Omega mes(\Omega) log^2(\mathrm{p(t,r)})\mathrm{dr} - \left(\int_\Omega \log(\mathrm{p(t,r)})\mathrm{dr}\right)^2 dr\right).$$

Применим неравенство Коши-Буняковского вида:

$$\left|\int_\Omega \mathrm{f(x)g(x)dx}\right|^2 \leq \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_\Omega |g(x)|^2 dx\right), \quad (17)$$

для функций *f=log(p)* и *g=1*.

Учитывая неотрицательность скаляра Г, получаем, что $\dot{V}(p) \leq 0$. Обозначим множество функций, на которых $\dot{V}(p)$ принимает нулевые значения, как $\mathrm{D} = \{\mathrm{p(r,t)}: \dot{V}(p) = 0\}$. Известно, что равенство в неравенстве Коши-Буняковского достигается при $\mathrm{f(x)} = \alpha\,\mathrm{g(x)}$, то есть при кратности. В нашем случае $\dot{V}(p) = 0$, когда $\log(\mathrm{p(t,r)}) = \alpha$, что возможно только при *p(t,r) = const*. Используя ограничение (9) получаем, что $const = mes^{-1}(\Omega)$ и что множество *D* состоит из единственного решения $D = p^*$.

*Асимптотическая сходимость.* Покажем асимптотическую сходимость решений к $p^*$. Для простоты записи введем обозначения *v(t)=V (p(t))*. Покажем, что $\dot{v}(t) \to 0$. Для этого используем лемму Барбалата.

*Лемма Барбалата.* Если дифференцируемая функция f(t) имеет конечный предел при $t \to \infty$ и ее производная $\dot{f}(t)$ равномерно непрерывна, то $\dot{f}(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Возьмем в качестве *f(t)* функцию *v(t)*. В силу того, что функция $v(t) \geq 0$ и $\dot{v} \leq 0$, функция *v(t)* имеет конечный предел при $t \to \infty$.

Покажем, при каких условиях ограничена функция $|\ddot{v}(t)|$. Из этого следует, что $\dot{v}$ равномерно непрерывна:

$$\ddot{v} = -\frac{2\Gamma}{\mathrm{mes}(\Omega)}\left(mes(\Omega) - 2\int_\Omega log^2 pdr\right)\int_\Omega log(p)\frac{\dot{p}}{p}dr = \frac{2\Gamma^2}{mes(\Omega)}\Big(mes(\Omega) - 2\int_\Omega log^2 pdr\Big)\left(\int_\Omega \frac{log^2 p}{p}dr - \int_\Omega \frac{log(p)}{p}dr\frac{\int_\Omega log(p)dr}{mes(\Omega)}\right)$$

Функция $\int_\Omega log^2 pdr < \infty$ в случае, когда:

$$mes(\{\mathrm{r}\colon \mathrm{p(r)} = 0 \cup \mathrm{p(r)} = \infty\}) = 0. \tag{18}$$

Аналогичный вывод можно сделать также для функции $\ddot{v}(t)$. Таким образом, функция $\dot{v}$ равномерно непрерывна, если выполнено условие (18). Тогда, согласно лемме Барбалата, $\dot{v}(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Пусть $f_t = log\big(p(t)\big)$. Тогда, учитывая что $\int_\Omega f^2 dr = \|f\|^2$, выражение для $\dot{v}$ можно переписать как:

$$\dot{v} = -\frac{\Gamma}{mes(\Omega)}(mes(\Omega)\|f_t\|^2 - (1, f_t)^2) = -\Gamma\|f_t\|^2\left(1 - \frac{(1,f_t)^2}{mes(\Omega)\|f_t\|^2}\right) = -\Gamma\|f_t\|^2\big(1 - \cos^2\big(\alpha(t)\big)\big), \tag{19}$$

где $\alpha(t) = \cos(\langle 1, f_t\rangle)$.

Если $\|f_t\|^2 \to 0$, то $\int_\Omega log^2 p_t dr \to 0$. Это означает, что $mes_t\{r\colon p_t(r) \neq 1\} \to 0$. А это равносильно $\int_\Omega p_t dr \to mes(\Omega)$. При этом, согласно ограничению на плотность распределения, для $\forall t$ верно $\int_\Omega p_t dr = 1$. Таким образом, если только $mes(\Omega) \neq 1$, утверждение $\|f_t\|^2 \to 0$ неверно. Случай $mes(\Omega) = 1$ будем считать вырожденным.

На основе (19) получаем, что $\alpha(t) \to 0$. А значит $\widehat{f_t} \to \hat{1}$, где $\widehat{f_t}$ и $\hat{1}$ - нормированные величины для $f_t$ и *1* соответственно. Отсюда следует, что $p_t$ стремится к стационарному распределению, которое, как было выяснено ранее, единственное. Таким образом, $p_t \to p^*$.

*4.2. Ограничение на общую энергию системы.* Аналогично рассматриваются задачи с несколькими ограничениями. Ограничение (9) можно интерпретировать как закон сохранения массы системы на пространстве Ω. Рассмотрим систему, в которой помимо этого ограничения вводится также закон сохранения энергии. Будем рассматривать консервативный случай, когда энергия не зависит от времени. Тогда новое ограничение можно описать как:

$$\int_{\Omega} \mathrm{p(t,r)h(r)dr} = \mathrm{E}, \tag{20}$$

где *E* - общая энергия системы, а *h(r)* есть плотность энергии.

Рассмотрим систему:

$$\dot{p} = u. \tag{21}$$

Задача заключается в том, чтобы найти оператор *u* такой, что в любой момент времени *t* выполняются оба ограничения и верно целевое условие $S\big(p(t,r)\big)_{t\to\infty} \to S_{max}$.

Для решения этой задачи воспользуемся методом скоростного градиента. В качестве целевой функции возьмем:

$$Q(p) = S_{max} - S + \acute{\lambda}_1\Big(\int_{\Omega} \mathrm{p(t,r)h(r)dr} - \mathrm{E}\Big) + \acute{\lambda}_2\Big(\int_{\Omega} \mathrm{p(t,r)dr} - 1\Big),$$

где *S* - дифференциальная энтропия, $\acute{\lambda}_1$ и $\acute{\lambda}_2$ - множители Лагранжа.

Согласно принципу скоростного градиента оператор *u* необходимо брать в виде $\mathrm{u} = -\Gamma\nabla_u \dot{Q}(p,u,t)$. Для этого вычислим производную целевой функции по времени:

$$\dot{Q} = \int_{\Omega} u(t,r) log\, p(t,r) dr \; + \; \acute{\lambda}_1 \int_{\Omega} u(t,r)h(r)dr + \big(\acute{\lambda}_2 + 1\big) \int_{\Omega} u(t,r)dr.$$

Взяв градиент по *u*, получим:

$$\nabla_u \dot{Q} = log\, p(t,r) + \acute{\lambda}_1 h(r) + \big(\acute{\lambda}_2 + 1\big).$$

Итак:

$$u = -\Gamma log\, p(t,r) + \lambda_1 h(r) + \lambda_2, \tag{22}$$

где $\lambda_1 = -\Gamma\acute{\lambda}_1$, $\lambda_{12} = -\Gamma\big(\acute{\lambda}_2 + 1\big)$.

Теперь из условий ограничений найдем множители Лагранжа $\lambda_1$ и $\lambda_2$. Для упрощения записи опустим аргументы у функций. Так, например, вместо *log p(t,r)* будем использовать запись *log p*.

Из условия (12) следует:

$$-\Gamma \int_{\Omega} log\, pdr + \lambda_1 \int_{\Omega} h(r)dr + \lambda_2 mes(\Omega) = 0. \qquad (23)$$

Из условия (20), равносильного выражению $\int_{\Omega} uh\, dr$, следует:

$$-\Gamma \int_{\Omega} log\,(p)hdr + \lambda_1 \int_{\Omega} h^2(r)dr + \lambda_2 \int_{\Omega} hdr = 0. \qquad (24)$$

Решая систему уравнений (23), (24) получаем:

$$\lambda_1 = \Gamma \frac{mes(\Omega) \int_{\Omega} log(p)hdr - \int_{\Omega} log(p)dr \int_{\Omega} hdr}{mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr - \left(\int_{\Omega} hdr\right)^2}, \qquad (25)$$

$$\lambda_2 = \Gamma \frac{\int_{\Omega} log(p)dr \int_{\Omega} h^2 dr - \int_{\Omega} log(p)hdr \int_{\Omega} hdr}{mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr - \left(\int_{\Omega} hdr\right)^2}, \qquad (26)$$

Уравнения (25) и (26) определены, когда знаменатель в обоих дробях не обращается в ноль. Если в неравенстве Коши-Буняковского (17) принять в качестве *f=h*, а *g=1*, то будет верно неравенство:

$$\left|\int_{\Omega} hdr\right|^2 \leq mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr, \qquad (27)$$

которое становится равенством в случае, когда *h=const*. То есть, когда все уровни энергии совпадают. Такой случай будем считать вырожденным и здесь рассматривать не будем. Таким образом, выражение:

$$\left|\int_{\Omega} hdr\right|^2 \neq mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr, \qquad (28)$$

в нашем случае верно всегда.

Подставляя выражение (22) в уравнение (21), с учетом (25) и (26) получаем уравнение динамики системы в следующем виде:

$$\dot{p}(t,r) = -\Gamma log\, p(t,r) + \Gamma \frac{mes(\Omega) \int_{\Omega} log(p)hdr - \int_{\Omega} log(p)dr \int_{\Omega} hdr}{mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr - \left(\int_{\Omega} hdr\right)^2} h(r) + \Gamma \frac{\int_{\Omega} log(p)dr \int_{\Omega} h^2 dr - \int_{\Omega} log(p)hdr \int_{\Omega} hdr}{mes(\Omega) \int_{\Omega} h^2 dr - \left(\int_{\Omega} hdr\right)^2} \qquad (29)$$

Общая форма закона эволюции (29) может быть представлена в сокращенном виде:

$$\dot{p} = \Gamma\Psi log\, p,$$

где $\Psi$ - линейный интегральный оператор, который не зависит от $p$,

$$\Psi = -I + \frac{(1,\cdot)}{mes(\Omega)} + \frac{\tilde{h}(\tilde{h},\cdot)}{\|h\|^2 - \frac{1}{mes(\Omega)}(1,h)^2},$$

где $I$ - тождественный оператор, $\tilde{h} = h - \frac{1}{mes(\Omega)}\int_\Omega hdr$.

**5. Использование принципа максимального производства энтропии.** Принцип максимального производства энтропии (MEPP) подтверждается при исследовании различных систем физического, химического и биологического происхождения, как при микроскопическом, так и при макроскопическом масштабе наблюдения.

Принцип находит применение в задачах гидродинамической/морфологической неустойчивости, в выборе направления химической реакции, в биологической эволюции и т.п. В случае слабо неравновесных систем принцип имеет достаточно надежный теоретический фундамент.

В 1975 г. Г. Палтридж [27,28] применил MEPP в климатических моделях и связал стремление к состоянию с максимумом энтропии с наличием флуктуаций в системе.

В [29] предложен переход от динамического описания сплошной среды к статистическому, при этом возникающую турбулентную структуру рассматривают как состояние с максимальной энтропией. В этой связи получающуюся структуру можно условно назвать равновесной. Данный подход достаточно близок к идеям Джейнса, на что указывают и сами его авторы. Изучение турбулентных течений крайне важно, особенно для физики атмосферы и океана.

Используя MEPP в [30] П. Зупановичем выведен закон Кирхгофа для электрической цепи. В ряде работ [12,31] обращается внимание на тесную связь MEPP с такими часто встречающимися проявлениями неравновесного развития системы, как самоорганизованная критичность, дендритный/фрактальный рост, сигмовидные кинетические кривые роста, а также с законами релаксации.

Особенно перспективным является использование MEPP в биологии (в теории эволюции, экологии и т.д.) и астрофизике (вопросы возникновения вселенной, эволюции галактик и т.п.) [9].

А. Клейдон (2004) [32] применил МЕРР для исследования роли биоты в обмене углекислого газа и распределении энергии у земной поверхности. Согласно Клейдону, биота добавляет степени свободы для рассматриваемых процессов и благодаря этому можно ожидать эволюцию системы к состоянию с максимальным производством энтропии.

Использование МЕРР для описания эволюции звездных систем представлено в работах П. Чаваниса [33,34]. Более подробный обзор применения МЕРР в различных областях науки можно найти в [1].

**6. Заключение.** Принцип максимума производства энтропии МЕРР находит многочисленные подтверждения в физике, химии, биологии, астрофизике, климатологии и др. Чаще всего в данном принципе используется информационная энтропия Шеннона. Вопрос обоснования принципа долгое время оставался открытым. Такое обоснование может быть представлено с точки зрения теории управления.

Если в качестве целевой функции выступает информационная энтропия системы, то экстремальный принцип скоростного градиента дополняет принцип максимума энтропии Гиббса-Джейнса и позволяет установить направление эволюции системы при приближении к состоянию максимальной энтропии. Это направление соответствует максимальной скорости производства (скорости роста) энтропии, что согласуется с принципом МЕРР. Другими словами, если классические результаты позволяют ответить на вопрос "Куда идет система?", то СГ-принцип отвечает на вопросы "Как она движется и как она достигает установившегося состояния?", позволяя определить траекторию эволюции системы.

Полученные на основе СГ-принципа уравнения позволяют прогнозировать динамику неравновесных систем с непрерывным распределением параметров. Такие уравнения могут оказаться полезными при изучении как эволюции, так и релаксации неравновесных систем макроскопического и микроскопического мира.

**Литература**

1. *Martyushev L., Seleznev V.* Maximum entropy production principle in physics, chemistry and biology // Phys. Reports. 2006. vol. 426(1). pp. 1-45.
2. *Циглер Г.* Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды // М.: Мир. 1966. 134 с.
3. *Jaynes E.T.* The minimum entropy production principle // Ann. Rev. Phys. Chem. 1980.vol. 31. pp. 579-601.
4. *Jaynes E.T.* Information theory and statistical mechanics // Phys. Rev. 1957. vol. 106. pp. 620-630.
5. *Jaynes E.T.* Information theory and statistical mechanics.2 // Phys. Rev. 1957. vol. 108. pp. 171-190.
6. *Jaynes E.T.* The Maximum Entropy Formalism // MIT: Cambridge. 1979.
7. *Зубарев Д.Н.* Статистическая механика неравновесных процессов // М.: Физматлит, 2002. 432 с.

8. *Dougherty J.P.* Foundations of Non-Equilibrium Statistical Mechanics // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1994. vol. 346. 259p.
9. *Grandy W.T.* Principle of maximum entropy and irreversible processes // Phys. Report. 1980. vol. 62(3). 175p.
10. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация: Макроскопический подход к сложным системам // М.: Мир. 1991. 346 с.
11. *Филюков А.А.* Свойство совместимости стационарных систем // ИФЖ. 1968. Т. 14. № 5. С. 814-819.
12. *Dewar R.* Information theory explanation of the fluctuation theorem, maximum entropy production and self-organized criticality in non-equilibrium stationary states // J. Phys. A: Math. Gen, 2003. vol. 36. pp. 631-641.
13. *Dewar R.* Maximum entropy production and the fluctuation theorem // J. Phys. A: Math. Gen. 2005. vol. 38. pp. 371-381.
14. *Беллман Р., Дейфус С.* Прикладные методы динамического программирования // М.: Физматлит. 1965. 460 с.
15. *Миронова В.А., Амелькин С.А., Цилин А.М.* Математические методы термодинамики при конечном времени // М.: Химия. 2000. 384 с.
16. *Rosenbrock H.H.* A stochastic variational principle for quantum mechanics // Phys. Lett. A. 1986. vol. 110. pp. 343-346.
17. *Rosenbrock H.H.* Doing quantum mechanics with control theory // IEEE Trans. Aut.Contr. 2000. vol. AC-45. no. 1. pp. 73-77.
18. *Fradkov A.L.* Speed-gradient entropy principle for nonstationary processes // Entropy. 2008. vol. 10(4). pp. 757-764.
19. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах // М.: Наука. 1990. 296 с.
20. *Фрадков А.Л.* О применении кибернетических методов в физике // УФН. 2005. vol. 175(2). С. 113-138.
21. *Фрадков А.Л., Кривцов А.М.* Принцип скоростного градиента в описании динамики систем, подчиняющихся принципу максимума энтропии // В кн.: Нелинейные проблемы теории колебаний и теории управления. Вибрационная механика. СПб.: Наука, 2009.
22. *Фрадков А.Л.* Схема скоростного градиента и ее применения в задачах адаптивного управления // Автоматика и телемеханика. 1979. vol. 9. С. 90-101.
23. *Свирежев М., Логофет Д.О.* Устойчивость биологических сообществ // М.: Наука. 1978. 352 с.
24. *Fradkov A. L.* Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control // Berlin: Springer-Verlag. 2007.
25. *Ланцош К.* Вариационные принципы механики // М.: Физматлит. 1965.
26. *Планк М.* Принцип наименьшего действия. Единство физической картины мира // М.: Наука, 1966.
27. *Paltridge G.W.* Global dynamics and climate - a system of minimum entropy exchange // Quart.J.R.Met.Soc. 1975. vol. 101. pp. 475-484.
28. *Paltridge G.W.* A physical basis for a maximum of thermodynamics dissipation of the climate system // Quart.J.R.Met.Soc. 2001. vol. 127. pp. 305-313.
29. *Robert R., Sommeria J.* Relaxation towards a statistical equilibrium state in 2-dimensional perfect fluid-dynamics // Phys. Rev. Lett. 1992. vol. 69(19). pp. 2776-2779.
30. *Zupanovic P., Juretic D., Botric S.* Kirchhoff's loop law and the maximum entropy production principle // Phys. Rev. E. 2004. vol. 70. pp. 56-108.
31. *Kaufman J.H., Melroy O.R., Dimino G.M.* Information-theoretic study of pattern-formation - fate of entropy production of random fractals // Phys. Rev. A. 1989. vol. 39(3). pp. 1420-1428.
32. *Kleidon A.* Beyond Gaia: Thermodynamics of life and earth system functioning // Climatic Change. 2004. vol. 66. pp. 271-319.
33. *Chavanis P.H., Sommeria J., Robert R.* Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems // Astrophys. J. 1996. vol. 471. pp. 385-399.

34. *Chavanis P.H.* Systematic drift experienced by a point vortex in two-dimensional turbulence // Phys. Rev. E. 1998. vol. 58(2). pp. R1199-R1202.

## References

1. Martyushev L., Seleznev V. Maximum entropy production principle in physics, chemistry and biology. Phys. Reports. 2006. vol. 426(1). pp. 1-45.
2. Cigler G. *Jekstremal'nye principy termodinamiki neobratimyh pro-cessov i mehanika sploshnoj sredy* [Extreme principles of irreversible thermodynamics and continuum mechanics]. M.: Mir. 1966. 134 p. (In Russ.).
3. Jaynes E.T. The minimum entropy production principle. Ann. Rev. Phys. Chem. 1980.vol. 31. pp. 579-601.
4. Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics. Phys. Rev. 1957. vol. 106. pp. 620-630.
5. Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics.2. Phys. Rev. 1957. vol. 108. pp. 171-190.
6. Jaynes E.T. The Maximum Entropy Formalism. MIT: Cambridge. 1979.
7. Zubarev D.N. *Statisticheskaja mehanika neravnovesnyh processov* [Statistical mechanics of nonequilibrium processes]. M.: Fizmatlit. 2002. 432 p. (In Russ.).
8. Dougherty J.P. Foundations of Non-Equilibrium Statistical Mechanics. Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1994. vol. 346. 259p.
9. Grandy W.T. Principle of maximum entropy and irreversible processes. Phys. Report. 1980. vol. 62(3). 175p.
10. Haken G. *Informacija i samoorganizacija: Makroskopicheskij podhod k slozhnym sistemam* [Information and self-organization: a macroscopic approach to complex systems]. M.: Mir. 1991. 346 p. (In Russ.).
11. Filjukov A.A. [Compatibility property of stationary systems]. *Inzhenerno-fizicheskij zhurnal – Journal of Engineering Physics*. 1968. vol. 14. no. 5. pp. 814-819. (In Russ.).
12. Dewar R. Information theory explanation of the fluctuation theorem, maximum entropy production and self-organized criticality in non-equilibrium stationary states. J. Phys. A: Math. Gen, 2003. vol. 36. pp. 631-641.
13. Dewar R. Maximum entropy production and the fluctuation theorem. J. Phys. A: Math. Gen. 2005. vol. 38. pp. 371-381.
14. Bellman R., Dejfus C. *Prikladnye metody dinamicheskogo programmi-rovanija* [Applied methods of dynamic programming]. M.: Fizmatlit. 1965. 460 p. (In Russ.).
15. Mironova V.A., Amel'kin S.A., Cilin A.M. *Matematicheskie metody termodinamiki pri konechnom vremeni* [Mathematical methods in finite time thermodynamics]. M.: Himija. 2000. 384 p. (In Russ.).
16. Rosenbrock H.H. A stochastic variational principle for quantum mechanics. Phys. Lett. A. 1986. vol. 110. pp. 343-346.
17. Rosenbrock H.H. Doing quantum mechanics with control theory. IEEE Trans. Aut.Contr. 2000. vol. AC-45. no. 1. pp. 73-77.
18. Fradkov A.L. Speed-gradient entropy principle for nonstationary processes. Entropy. 2008. vol. 10(4). pp. 757-764.
19. Fradkov A.L. *Adaptivnoe upravlenie v slozhnyh sistemah* [Adaptive management in complex systems]. M.: Nauka. 1990. 296 p. (In Russ.).
20. Fradkov A.L. [Application of cybernetic methods in physics]. *Uspehi fizicheskih nauk – Physics-Uspekhi*. 2005. vol. 175(2). pp. 113-138. (In Russ.).
21. Fradkov A.L., Krivcov A.M. [Speed-gradient principle to describe the dynamics of systems subject to the principle of maximum entropy]. *Nelinejnye problemy teorii kolebanij i teorii upravlenija. Vibracionnaja mehanika – Nonlinear problems of oscillation theory and control theory. vibrational mechanics*. SPb.: Nauka, 2009. (In Russ.).
22. Fradkov A.L. [Speed-gradient scheme and its application in adaptive control]. *Avtomatika i telemehanika – Automation and Remote Control*. 1979. vol. 9. pp. 90-101. (In Russ.).

23. Svirezhev M., Logofet D.O. *Ustojchivost' biologicheskih soobshhestv* [Stability of biological communities]. M.: Nauka. 1978. 352 p. (In Russ.).
24. Fradkov A. L. Cybernetical physics: from control of chaos to quantum control. Berlin: Springer-Verlag. 2007.
25. Lancosh K. *Variacionnye principy mehaniki* [Variational principles of mechanics]. M.: Fizmatlit. 1965. (In Russ.).
26. Plank M. *Princip naimen'shego dejstvija. Edinstvo fizicheskoj kartiny mira* [Principle of least action. Unity of the physical picture of the world]. M.: Nauka, 1966. (In Russ.).
27. Paltridge G.W. Global dynamics and climate - a system of minimum entropy exchange. Quart.J.R.Met.Soc. 1975. vol. 101. pp. 475-484.
28. Paltridge G.W. A physical basis for a maximum of thermodynamics dissipation of the climate system. Quart.J.R.Met.Soc. 2001. vol. 127. pp. 305-313.
29. Robert R., Sommeria J. Relaxation towards a statistical equilibrium state in 2-dimensional perfect fluid-dynamics. Phys. Rev. Lett. 1992. vol. 69(19). pp. 2776-2779.
30. Zupanovic P., Juretic D., Botric S. Kirchhoff's loop law and the maximum entropy production principle. Phys. Rev. E. 2004. vol. 70. pp. 56-108.
31. Kaufman J.H., Melroy O.R., Dimino G.M. Information-theoretic study of pattern-formation - fate of entropy production of random fractals. Phys. Rev. A. 1989. vol. 39(3). pp. 1420-1428.
32. Kleidon A. Beyond Gaia: Thermodynamics of life and earth system functioning. Climatic Change. 2004. vol. 66. pp. 271-319.
33. Chavanis P.H., Sommeria J., Robert R. Statistical mechanics of two-dimensional vortices and collisionless stellar systems. Astrophys. J. 1996. vol. 471. pp. 385-399.
34. Chavanis P.H. Systematic drift experienced by a point vortex in two-dimensional turbulence. Phys. Rev. E. 1998. vol. 58(2). pp. R1199-R1202.

**Фрадков Александр Львович** — д-р техн. наук, профессор, возглавляет лабораторию управления сложными системами Института проблем машиноведения РАН. Является профессором кафедры теоретической кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета (по совместительству). Область научных интересов: нелинейное и адаптивное управление в физико-технических системах, управление колебательными и хаотическими системами, математическое моделирование с приложениями к механическим системам, кибернетическая физика (область на стыке физики и теории управления). Число научных публикаций — 400. fradkov@mail.ru, http://www.math.spbu.ru/user/fradkov; ИПМаш РАН; Васильевский остров, Большой проспект, 61, Санкт Петербург, Россия, 199178; Тел.: +7-812-3214778, Факс: +7-812-3214771

**Fradkov Alexander Lvovich** — Ph.D., Dr. Sci., professor, head of Laboratory Control of Complex Systems, IPME RAS, professor, Theoretical Cybernetics Department, Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbSU. Research interests: nonlinear and adaptive control, control of oscillatory and chaotic systems and computer-aided control systems design with applications to mechanical systems. The number of publications — 400. fradkov@mail.ru, http://www.math.spbu.ru/user/fradkov; IPME RAS, V.O., Bolshoj pr., 61, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7-812-3214778, fax +7-812-3214771.

**Шалымов Дмитрий Сергеевич** — к-т физ.-мат. наук, стажер-исследователь, кафедра теоретической кибернетики математико-механического факультета Санкт-Петербургского государственного университета. Область научных интересов: кластерный анализ данных, оптимизация, рандомизированные алгоритмы, энтропия, распознавание образов. Число научных публикаций — 25. shalydim@mail.ru, СПбГУ; Университетский пр. 28, Санкт Петербург, Россия, 198504; Тел. : +7-812-4284210, Факс : +7-812-4286944

**Shalymov Dmitry Sergeevich** — Ph. D., trainee researcher, Theoretical Cybernetics Department, Faculty of Mathematics and Mechanics, SPbSU. Research interests: clustering, optimization, randomized algorithms, entropy, pattern recognition. The number of publications — 25. shalydim@mail.ru, Universitetsky prospekt, 28, Peterhof, St. Petersburg, 198504, Russia; office phone: +7-812-4284210, fax: +7-812-4286944.

# РЕФЕРАТ

*Фрадков А.Л., Шалымов Д.С.* **Законы эволюции нестационарных процессов, подчиняющихся принципу максимума энтропии.**

Понятие информационной энтропии часто оказывается в центре различных дискуссий как в области статистической физики, так и в термодинамике. С помощью энтропии строятся экстремальные принципы, определяющие поведение систем и процессов. В данной работе предложен новый экстремальный принцип для построения моделей динамики нестационарных процессов, подчиняющихся принципу максимума энтропии и принципу максимального производства энтропии. Предложенный подход основан на методе скоростного градиента, используемом в теории управления,

Принцип максимума энтропии, предложенный Джейнсом в 1957 году заключается в том, что система в “естественных” условиях стремится к состоянию, соответствующему максимальному значению энтропии при выполнении ограничений, наложенных другими физическими законами. Под “естественными” условиями понимается отсутствие целенаправленного внешнего воздействия. Принцип максимального производства энтропии заключается в стремлении к состоянию с максимальной энтропией с наибольшей возможной скоростью. В ряде случаев эти принципы позволяют при изучении эволюции систем получить недостающую информацию и определить выбор направления дальнейшего развития. Они находят многочисленные применения в физике, химии, астрономии, климатологии и других областях.

В статье представлено краткое описание принципа скоростного градиента, а также принципа максимума энтропии Джейнса.

Основным результатом статьи является уравнение динамики функции плотности распределения для ограничений в виде закона сохранения массы и закона сохранения энергии в следующей общей форме:

$$\dot{p}(t,r) = -\Gamma(I - \Psi)\log p(t,r),$$

где $I$ - тождественный оператор, $\Psi$ - линейный интегральный оператор, не зависящий от $p$, и $\Gamma > 0$ - константа.

С использованием энтропии в качестве функционала Ляпунова для распределения, заданного на компактном множестве доказано, что предельное распределение единственно и совпадает с распределением, определяемым из формализма Джейнса. Это можно интерпретировать как обоснование принципа максимального производства энтропии, поскольку метод скоростного градиента определяет движение к предельному значению целевого функционала (в данном случае энтропии) с максимальной скоростью. Полученные результаты позволяют прогнозировать динамику нестационарных систем и определить траекторию их эволюции.

## SUMMARY

*Fradkov A.L., Shalymov D.S.* **Evolution laws for non-stationary processes that follow the MaxEnt principle.**

The notion of information entropy often becomes the center of discussions both in statistical physics and in thermodynamics.

In this paper a new approach to derive dynamics of non-stationary processes that follow the maximum entropy principle (MaxEnt) and maximum entropy production principle (MEPP) is proposed. The proposed approach is based on the Speed-Gradient (SG) principle originated in control theory.

The MaxEnt principle proposed by Jaynes in 1957 says that a system tends to its state of maximum entropy and the MEPP says that the system tends to it at the highest possible rate. In some cases of system evolution analysis, these principles allow one to obtain missing information required in order to determine the direction of further evolution. The MEPP is widely used in different studies of complex systems of physical, chemical or biological origin.

In the paper the SG principle and Jaynes' formalism are briefly described. It is known that methods of the optimal control can be effectively used to develop models of mechanical, thermodynamic and other complex systems.

A set of equations describing the dynamics of pdf under mass conservation and energy conservation constraints is derived in the following form:

$$\dot{p}(t,r) = -\Gamma(I - \Psi)\log p(t,r),$$

where $I$ is identity operator, $\Psi$ is a linear integral operator that is invariant for $p$ and $\Gamma > 0$ is a constant gain.

Based on speed-gradient (SG) method the asymptotic convergence of probability density function (pdf) with compact carrier is examined. It is shown that the limit pdf is unique and can be obtained from MaxEnt principle. These results can be interpreted as a new justification of MEPP as the SG principle defines a movement to the extreme value of a goal function (entropy) with a maximum rate. By means of this approach the distribution corresponding to the maximum value of entropy can be found.