

Д.В. БОРДЮГОВ, Е.С. БРИСКИН, Н.Г. ШАРОНОВ, С.О. БЕЗУСОВ
**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗА ДВУМЯ БПЛА
ПРИ НАЛИЧИИ СВЯЗЕЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ
АРГУМЕНТОМ**

Бордюгов Д.В., Брискин Е.С., Шаронов Н.Г., Безусов С.О. Моделирование перемещения груза двумя БПЛА при наличии связей с отклоняющимся аргументом.

Аннотация. Рассматривается задача транспортировки груза, подвешенного на двух беспилотных летательных аппаратах (БПЛА) с помощью гибких связей – тросов. Актуальность исследования обусловлена широким применением групп летательных аппаратов для выполнения транспортных операций в труднодоступных районах или при ликвидации чрезвычайных ситуаций, когда требуется перемещение объектов значительной массы или размеров. Движение БПЛА не является строго синхронным. Это приводит к изменению геометрической конфигурации системы «БПЛА – тросы – груз» и перераспределению нагрузок. Цель работы заключается в разработке математической модели динамики движения груза, перевозимого двумя беспилотными летательными аппаратами, перемещающимися по одинаковой траектории, при условии запаздывания одного из аппаратов относительно другого на заданном промежутке времени, и определении сил реакции связей в тросах при различных режимах движения рассматриваемой механической системы. Для описания динамики движения используются дифференциальные уравнения с учетом связей с отклоняющимся аргументом. Такой подход позволяет учитывать влияние движения «запаздывающего» БПЛА на перемещение транспортируемого объекта. Проведен кинематический анализ системы, получены геометрические соотношения, определяющие положение и траекторию переносимого груза. На основе модели динамики движения груза получены зависимости реакций связей от времени движения рассматриваемой механической системы. Проведено имитационное моделирование движения переносимого груза при различных законах движения беспилотных летательных аппаратов, показывающее влияние запаздывания одного из БПЛА на распределение нагрузок между тросами и характер движения груза. Полученные зависимости могут быть использованы при разработке систем управления групповыми транспортными комплексами для обеспечения их устойчивого движения и повышения надежности перевозки различных объектов.

Ключевые слова: беспилотные летательные аппараты, перевозка грузов, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, связи с запаздывающим аргументом.

1. Введение. Беспилотные летательные аппараты (БПЛА) заняли одно из ключевых мест среди современных робототехнических систем благодаря высокой мобильности, автономности и способности функционировать в экстремальных условиях. Они имеют широкий спектр применения, охватывающий мониторинг окружающей среды, картографирование, инспекцию различных сооружений, поисково-спасательные операции, экологический контроль и другие задачи [1, 2]. Особенно активно развивается направление, связанное с применением группы БПЛА, что позволяет решать сложные задачи за счёт использования нескольких летательных аппаратов.

Перспективным направлением использования группы БПЛА являются задачи транспортировки грузов в труднодоступные районы, обеспечения логистики в условиях чрезвычайных ситуаций, выполнения строительных и монтажных работ, а также обслуживания объектов инфраструктуры. В таких случаях к системе управления летательными аппаратами предъявляются дополнительные требования [3, 4]. В [5] представлена методология совместного управления несколькими квадрокоптерами, транспортирующими грузы на тросах, с акцентом на планирование их движения с учетом препятствий и нелинейное модельное прогнозирующее управление. Еще одним немаловажным требованием является использование навигационных средств, позволяющих принимать решения об управлении полетом и выполнении целевых задач [6, 7].

Применение нескольких беспилотных летательных аппаратов позволяет перемещать грузы значительной массы и габаритов, которые не способен поднять одиночный летательный аппарат, а также повышает устойчивость их движения при перевозке полезной нагрузки. На практике коллективная транспортировка грузов чаще всего реализуется с использованием гибких связей – тросов, на которых транспортируемый объект подвешивается к БПЛА. В настоящее время разработано значительное количество методов управления группами БПЛА и системами коллективной транспортировки [8 – 10]. Основное внимание уделяется построению нелинейных моделей динамики системы «БПЛА – груз» и разработке методов управления, обеспечивающих устойчивость движения. В этих работах исследуются особенности движения грузов на гибких связях, влияние колебаний переносимого объекта на динамику движения носителей (БПЛА), а также методы формирования траекторий, позволяющие выполнять маневры без потери устойчивости [11, 12]. Предложены методы согласования движения БПЛА, основанные на использовании обратной связи по состоянию системы, планировании траекторий и учёте динамических ограничений гибких связей. Рассматриваются также задачи подавления колебаний подвешенного груза и обеспечения точности позиционирования при совместном перемещении [13, 14].

Отдельное направление составляют работы, посвящённые влиянию задержек во взаимодействии между аппаратами и ограничений каналов связи на устойчивость группового управления. Показано, что наличие задержек может приводить к ухудшению качества координации, возникновению колебаний и снижению устойчивости системы. В связи с этим разрабатываются методы распределённого управления и анализа устойчивости мультиагентных систем

с запаздыванием, позволяющие обеспечить надёжное функционирование группы БпЛА в реальных условиях [15 – 17].

Большинство существующих моделей основывается на предположении синхронного движения аппаратов. Положение каждого носителя рассматривается как функция от текущего момента времени, а динамика движения груза определяется мгновенными значениями координат и скоростей БпЛА. В реальных условиях движение летательных аппаратов редко является полностью согласованным. Различия в алгоритмах управления, внешних возмущениях и особенностях выполнения маневров могут привести к временной рассогласованности траекторий. В таком случае взаимное положение аппаратов и груза определяется не только текущими координатами, но и их значениями в предшествующие моменты времени. Особенно заметным этот эффект становится при движении по криволинейным траекториям, ускорениях и изменении высоты полёта. Даже небольшое отставание одного аппарата относительно другого может существенно изменить геометрию подвесной системы и привести к перераспределению нагрузок между тросами. Силы реакции в тросах становятся функциями, учитывающими отклоняющийся аргумент [18, 19]. Теоретические основы анализа дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом изложены в [20]. Также группа последовательно идущих БпЛА должна двигаться по одной траектории с определенным отставанием друг от друга. Такой вид перемещения группы летательных аппаратов можно сравнить с движением группы мобильных роботов в строю типа «конвой» [21]. В этом случае перемещение группы БпЛА может быть организовано за счёт управления ведущим аппаратом – лидером, тогда как остальные будут воспроизводить его траекторию с заданным временным запаздыванием. Реализация такого режима движения требует оснащения группы летательных аппаратов информационно-измерительной и программно-аналитической системами, включающими датчики, алгоритмы обработки информации и т.д., обеспечивающие точное следование ведомых аппаратов за лидером и соблюдение заданного им законом движения.

Проблемы управления объектами с запаздыванием также подробно изучаются в теории автоматического управления. Запаздывания могут возникать вследствие инерционности процессов, конечного быстродействия исполнительных механизмов, вычислительных задержек и других факторов [22]. Их наличие

способно изменить динамические характеристики системы и влиять на устойчивость движения.

Применение теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом к задачам механики и управления позволяет учитывать влияние предшествующих состояний системы на её текущее движение. В условиях транспортировки грузов группой БПЛА использование дифференциальных уравнений, учитывающих связи с отклоняющимся аргументом, позволит формализовать влияние запаздывающего движения одного из аппаратов на поведение груза на внешнем подвесе и величину сил реакции в тросах.

2. Постановка задачи. Рассматривается задача определения сил реакции в тросах при транспортировке груза двумя беспилотными летательными аппаратами, движущимися по одинаковой траектории, при условии, что движение одного из них происходит с временным запаздыванием относительно другого. Механическая система состоит из двух БПЛА, тросов и груза и движется в вертикальной плоскости. Первый летательный аппарат перемещается по заданному закону движения, а второй – воспроизводит его траекторию с временным запаздыванием. Для описания динамики системы используется принцип Даламбера. Закон движения запаздывающего БПЛА учитывает отклоняющийся аргумент.

Математическая модель динамики движения груза, перевозимого двумя БПЛА, учитывает наличие связей с отклоняющимся аргументом и обеспечивает определение сил реакции в тросах при прямолинейном и криволинейном движении летательных аппаратов.

При построении математической модели приняты следующие допущения: движение системы рассматривается в вертикальной плоскости; боковые смещения БПЛА и груза отсутствуют; тросы считаются нерастяжимыми и невесомыми; аэродинамическое сопротивление груза не учитывается; законы движения летательных аппаратов считаются заданными.

3. Кинематический анализ системы. Движение двух БПЛА, на которых гибкой связью (тросами) закреплен транспортируемый объект (груз), рассматривается как движение механической системы «БПЛА – тросы – груз», состоящей из трех материальных точек.

Задаются законы движения двух беспилотных летательных аппаратов:

1. закон движения 1-го БПЛА:
$$\begin{cases} x_1 = x_1(t), \\ z_1 = z_1(t); \end{cases}$$

$$2. \text{ закон движения 2-го БПЛА : } \begin{cases} x_2(t, \tau) = x_1(t - \tau), \\ z_2(t, \tau) = z_1(t - \tau); \end{cases}$$

где x_n, z_n – координаты, t – текущий момент времени; τ – аргумент, учитывающий запаздывание второго летательного аппарата относительно первого.

Первый и второй БПЛА обозначены буквами A и B соответственно, перевозимый груз – буквой C (Рис. 1). Транспортируемый объект закреплен на аппаратах тросами 1, 2 длинами l_1, l_2 . Положение груза с координатами x_c, z_c определяется через дополнительно введенные углы α, β, γ и длины тросов геометрическими соотношениями. Считается, что тросы нерастяжимы.

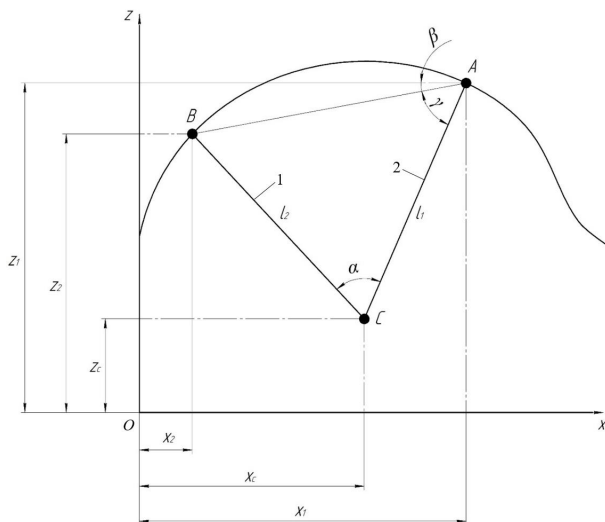


Рис. 1. Геометрическая схема системы «БПЛА – тросы – груз»

Закон движения груза C определяется из геометрических соотношений:

$$AB(t, \tau) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}; \quad (1)$$

$$\alpha(t, \tau) = \arccos\left(-\frac{AB^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}\right); \quad (2)$$

$$\beta(t, \tau) = \arctg \frac{z_1 - z_2}{x_1 - x_2}; \quad (3)$$

$$\gamma(t, \tau) = \arccos\left(-\frac{l_2^2 - AB^2 - l_1^2}{2l_1 AB}\right). \quad (4)$$

С учетом уравнений (1-4) закон движения груза, точки С:

$$\begin{cases} x_c(t, \tau) = x_1 - l_1 \cos(\beta + \gamma), \\ z_c(t, \tau) = z_1 - l_1 \sin(\beta + \gamma). \end{cases} \quad (5)$$

4. Динамический анализ системы. Рассматривается динамика движения груза как материальной точки в вертикальной плоскости, переносимого посредством тросов двумя беспилотными летательными аппаратами с заданными законами движения. В силу предполагаемой малой скорости движения силы аэродинамического сопротивления, действующие на груз, не учитываются. Расчетная схема представлена на рисунке 2.

Задача плоского движения системы «БПЛА – тросы – груз» является первым этапом исследования, позволяющим получить аналитические зависимости для координат груза и реакций в тросах при наличии отклоняющегося аргумента.

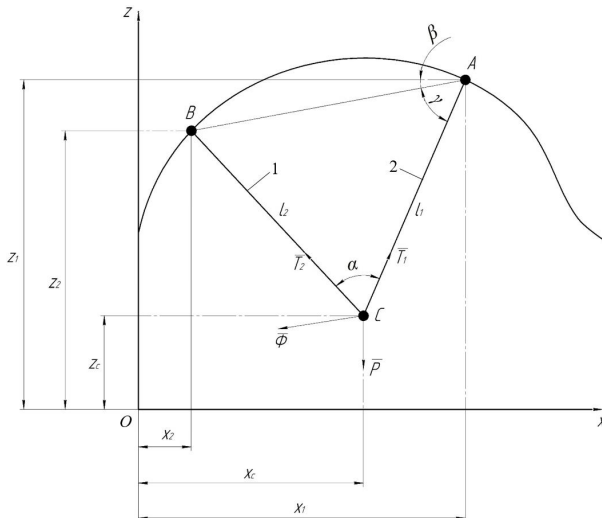


Рис. 2. Расчетная схема механической системы:
 P – вес переносимого груза; T_1, T_2 – реакции связей, направленные вдоль тросов 1, 2; Φ – сила инерции

На основе принципа Даламбера, уравнения движения переносимого груза, точки С, можно представить в виде:

$$\begin{cases} T_1 \cdot \cos(\beta + \gamma) + T_2 \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma) - \Phi_x = 0, \\ T_1 \cdot \sin(\beta + \gamma) + T_2 \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) - mg - \Phi_z = 0; \end{cases} \quad (6)$$

где $\Phi_x = m \frac{d^2}{dt^2} x_c$, $\Phi_z = m \frac{d^2}{dt^2} z_c$, – проекции силы инерции на оси x , z ; m – масса переносимого груза, T_1 , T_2 – действующие на груз реакции тросов.

Учитывая, что тросы принимаются нерастяжимыми, в уравнениях (2-5) принимается $l_1 = \text{const}$, $l_2 = \text{const}$. Из (6) определяются реакции в тросах как функции времени движения t аргумента запаздывания τ :

$$\begin{aligned} T_1(t, \tau) &= - \frac{(m \cdot \Phi_z + gm) \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma) - m \cdot \Phi_x \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma) \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin(\beta + \gamma) \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma)}, \\ T_2(t, \tau) &= \frac{(m \cdot \Phi_z + gm) \cdot \cos(\beta + \gamma) - m \cdot \Phi_x \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\cos(\beta + \gamma) \cdot \sin(\alpha + \beta + \gamma) - \sin(\beta + \gamma) \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma)}. \end{aligned} \quad (7)$$

Определение нагрузок T_1 , T_2 из (7) позволяет подобрать требуемую тягу БПЛА, обеспечивающую заданные режимы движения груза (5).

5. Имитационное моделирование. Проведено исследование модельной задачи движения груза, закрепленного на двух беспилотных летательных аппаратах с помощью гибкой связи, как механической системы с параметрами $m = 6$ кг, $l_1 = 0,5$ м, $l_2 = 0,4$ м, $\tau = 3$ с и заданной скоростью $v = 0,2$ м/с движения БПЛА.

Так как связи содержат отклоняющийся аргумент, метод определения траектории движения второго летательного аппарата основан на разложении в ряд Тейлора по степеням τ [19]. В общем виде траектория движения второго БПЛА:

$$\begin{cases} x_2(t, \tau) = x_1 - \dot{x}_1 \cdot \tau + \frac{1}{2!} \ddot{x}_1 \cdot \tau^2 - \frac{1}{3!} \dddot{x}_1 \cdot \tau^3 + \frac{1}{4!} \ddddot{x}_1 \cdot \tau^4 + \dots \\ z_2(t, \tau) = z_1 - \dot{z}_1 \cdot \tau + \frac{1}{2!} \ddot{z}_1 \cdot \tau^2 - \frac{1}{3!} \dddot{z}_1 \cdot \tau^3 + \frac{1}{4!} \ddddot{z}_1 \cdot \tau^4 + \dots \end{cases} \quad (8)$$

Рассмотрены три варианта движения двух летательных аппаратов:

1. При движении БПЛА по горизонтальной прямой, законы движения первого $x_1(t)$; $z_1(t)$ и второго $x_2(t, \tau)$; $z_2(t, \tau)$ летательных аппаратов имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = v \cdot t, \\ z_1(t) = 2; \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} x_2(t, \tau) = v \cdot t - v \cdot \tau, \\ z_2(t, \tau) = 2. \end{cases}$$

2. В случае подъема-опускания БПЛА по криволинейной траектории их законы движения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = v \cdot t, \\ z_1(t) = \sin(v \cdot t) + 2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t, \tau) = v \cdot t - v \cdot \tau, \\ z_2(t, \tau) = \sin(vt) + \frac{\tau^2 v^2 \sin(vt)}{2} \left(\frac{\tau^2 v^2}{12} - 1 \right) \\ \quad + \tau v \cos(vt) \left(\frac{\tau^2 v^2}{6} - 1 \right). \end{cases} \quad (10)$$

3. При спуске БПЛА по криволинейной траектории их законы движения имеют вид:

$$\begin{cases} x_1(t) = v \cdot t, \\ z_1(t) = 20 - v \cdot t^{\frac{1}{2}}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t, \tau) = v \cdot t - v \cdot \tau, \\ z_2(t, \tau) = \tau v \left(\frac{5 \cdot \tau^3}{128 t^{\frac{7}{2}}} + \frac{\tau^2}{16 t^{\frac{5}{2}}} + \frac{\tau}{8 t^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2 t^{\frac{1}{2}}} \right) - v t^{\frac{1}{2}} + 20. \end{cases} \quad (11)$$

Во всех случаях время движения принимается $t = 12$ с, отклоняющимся аргументом τ учитывается запаздывание второго БПЛА от первого.

При заданных параметрах механической системы и законах движения БПЛА (9-11) получены траектории перемещения переносимого груза (Рис. 3(а)-5(а)) и зависимости сил реакции в тросах от времени (Рис. 3(б)-5(б)).

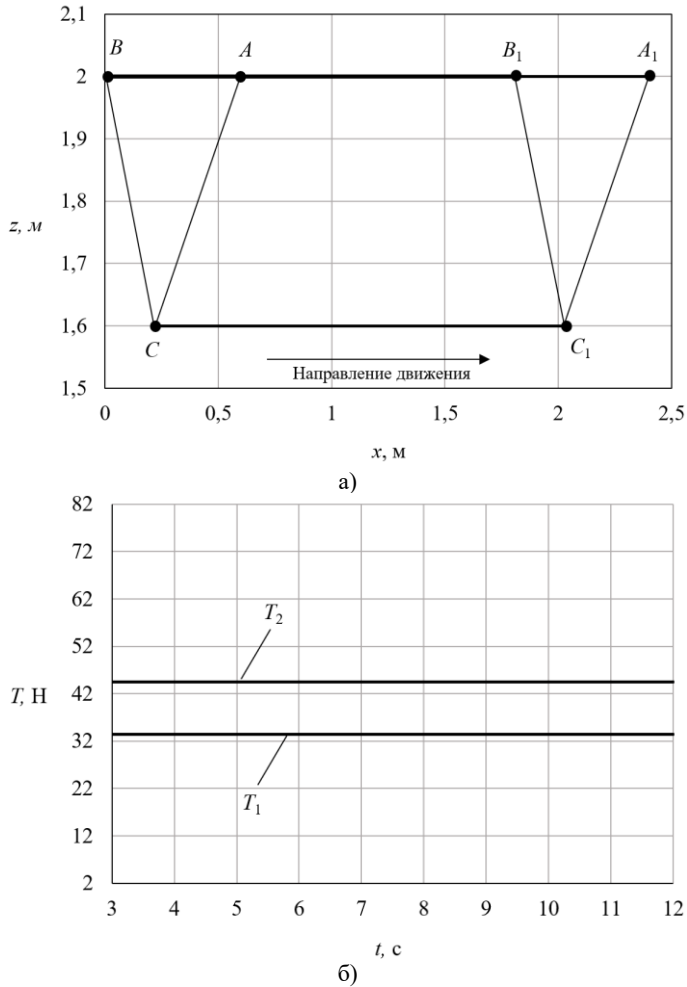
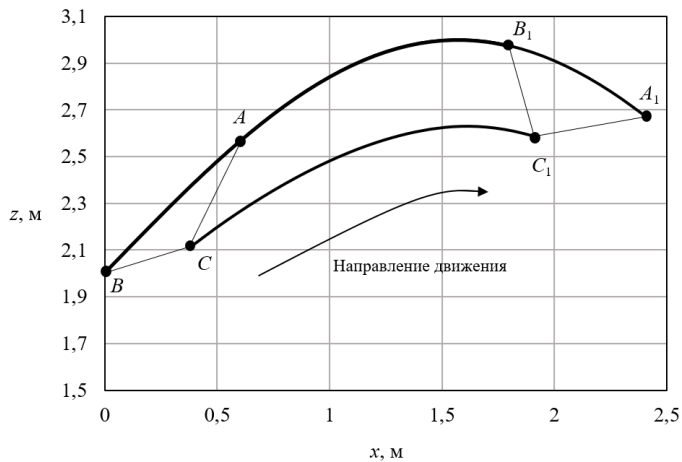
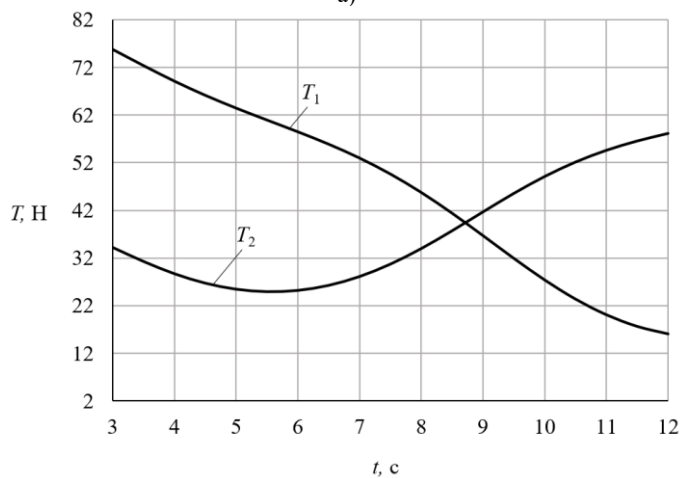


Рис. 3. Движение БПЛА по прямой:

- а) траектория движения переносимого груза, где: точки A, B, C – начальные положения БПЛА и груза; A_1, B_1, C_1 – конечные положения;
- б) зависимости сил реакции в тросах T_1, T_2 от времени движения t



а)



б)

Рис. 4. Подъем-опускание БПЛА по криволинейной траектории:
 а) траектория движения переносимого груза; б) зависимости сил реакции
 в тросах T_1 , T_2 от времени движения t

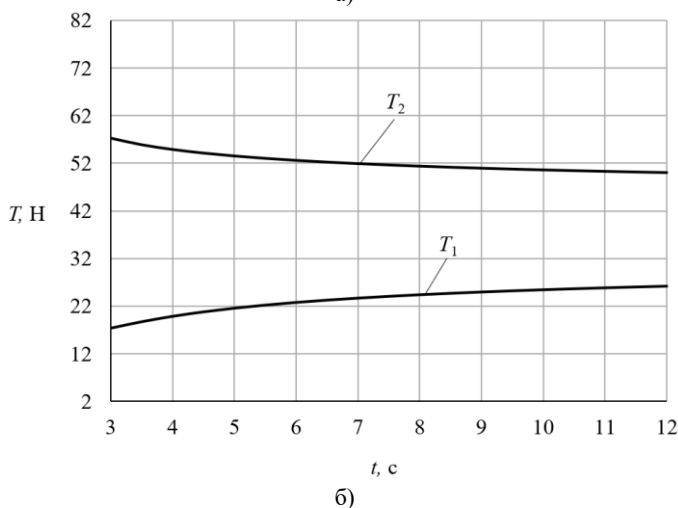
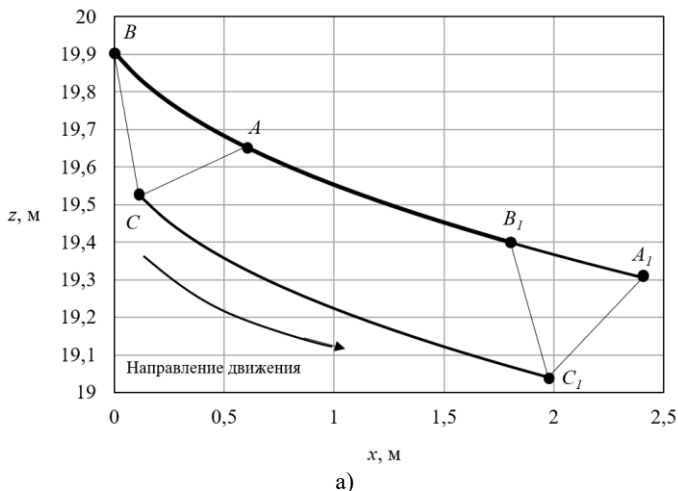


Рис. 5. Спуск БпЛА по криволинейной траектории:
 а) траектория движения переносимого груза; б) зависимости сил реакции
 в тросах T_1 , T_2 от времени движения t

Представленные зависимости (Рис. 3(б)-5(б)) демонстрируют, что при прямолинейном движении изменение реакций в тросах носит равномерный характер. При криволинейном движении возникают более выраженные различия между нагрузками, воспринимаемыми тросами T_1 и T_2 , что связано с изменением геометрической конфигурации

системы (изменением взаимного положения БпЛА) и влиянием запаздывания второго беспилотного аппарата.

На рисунках 6-9 представлены зависимости, демонстрирующие отличия в значениях z_2 , z_c , T_1 , T_2 при разложении в ряд Тейлора по степеням τ : τ^1 , τ^2 , τ^3 , τ^4 . Описание траектории перемещения второго БпЛА уравнениями (9-11) вдоль оси z осуществлялось до члена порядка τ^4 . Это обусловлено достаточной точностью, соответствующей условиям рассматриваемой задачи. Например, при сравнении положения второго беспилотного аппарата по координате z_2 , с учетом закона движения (10), в случае разложения в ряд до члена порядка τ^1 и до τ^2 , максимальная погрешность по координате составляет 10%; в случае разложения до τ^2 и τ^3 – 3%; до τ^3 и τ^4 – 0,3% (Рис. 6(а)). При сравнении сил реакции в тросах с учетом закона движения (11) максимальная погрешность в усилиях составляет 11% в первом и 4% во втором тросах при разложении в ряд до члена порядка τ^1 и до τ^2 ; 5% и 2% при разложении в ряд до члена порядка τ^2 и до τ^3 ; 3% и 1% – до члена порядка τ^3 и до τ^4 (Рис. 9(а,б)). Полученные результаты подтверждают, что при решении конкретных задач достаточно разложения в ряд до члена порядка τ^4 , однако влияние на это скорости движения БпЛА подлежит дальнейшим исследованиям.

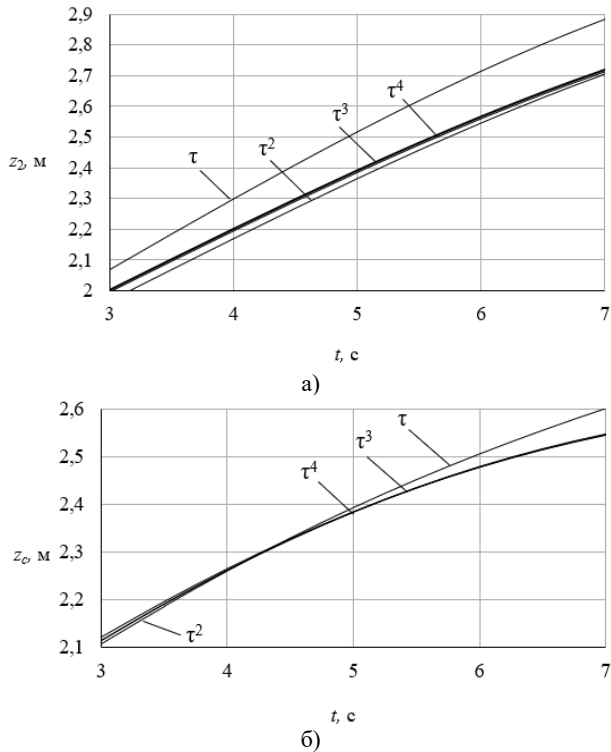


Рис. 6. Зависимости изменения: а) z_2 ; б) z_c – от времени движения t при подъеме-опускании двух БПЛА по криволинейной траектории с учетом разложения в ряд Тейлора до члена порядка $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4$

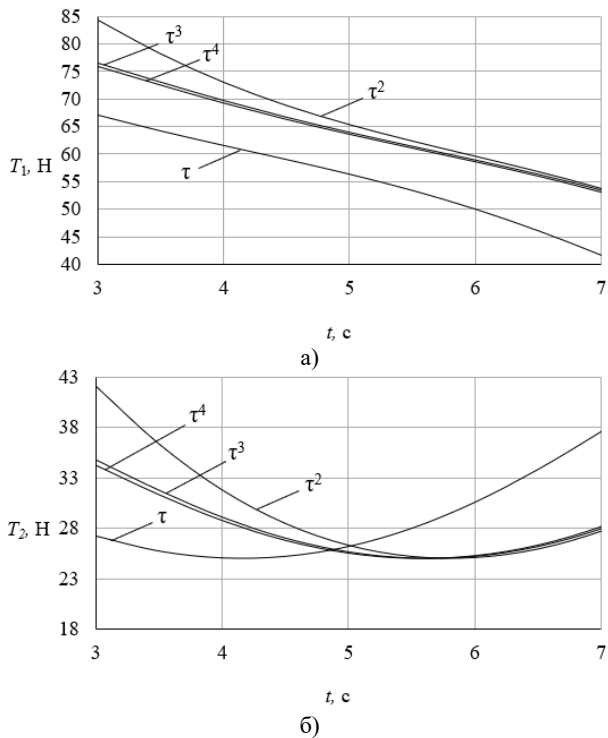


Рис. 7. Зависимости изменения: а) T_1 ; б) T_2 – от времени движения t при подъеме-опускании двух БпЛА по криволинейной траектории с учетом разложения в ряд Тейлора до члена порядка τ , τ^2 , τ^3 , τ^4

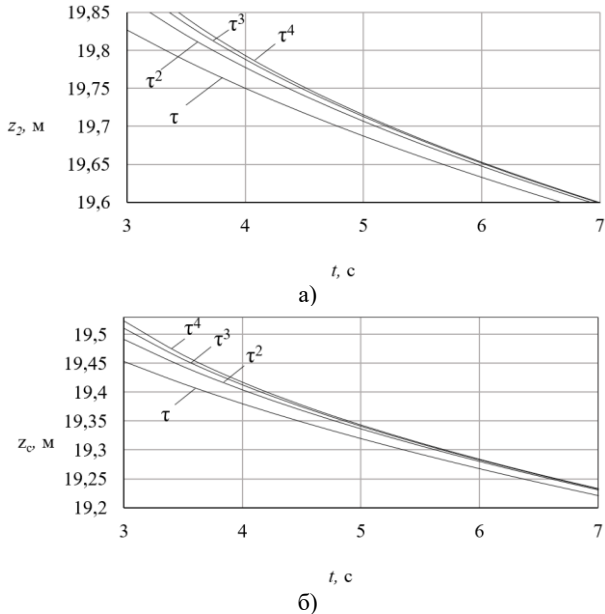


Рис. 8. Зависимости изменения: а) z_2 ; б) z_c – от времени движения t при спуске двух БПЛА по криволинейной траектории с учетом разложения в ряд Тейлора до члена порядка $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4$

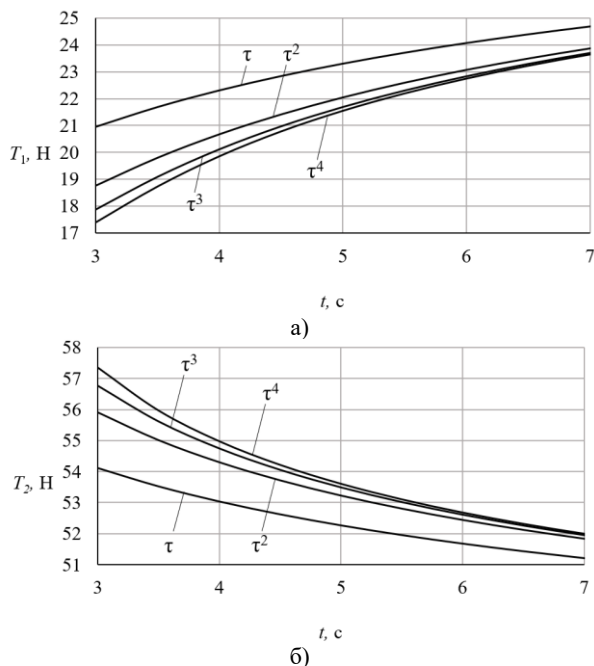


Рис. 9. Зависимости изменения: а) T_1 ; б) T_2 – от времени движения t при спуске двух БПЛА по криволинейной траектории с учетом разложения в ряд Тейлора до члена порядка $\tau, \tau^2, \tau^3, \tau^4$

Сравнение результатов при различных порядках разложения по t показывает, что учет членов до τ^4 обеспечивает достаточную точность для рассматриваемых режимов движения механической системы. При переходе от τ^3 к τ^4 изменение координат и реакций в тросах становится незначительным.

6. Заключение. Рассмотрена задача транспортировки груза двумя беспилотными летательными аппаратами с помощью гибких связей – тросов. Учитывается запаздывание в движении одного из БПЛА относительно другого. Исследованы кинематические и силовые характеристики системы при заданных законах движения БПЛА. Предполагается, что движение летательных аппаратов обеспечивается системой автоматического управления, а возникающие отклонения от программной траектории малы. В отличие от известных моделей транспортировки грузов несколькими БПЛА, в данной работе учитывается временное запаздывание движения одного из летательных

аппаратов относительно другого, что позволяет определить влияние нарушения синхронности движения на траекторию перемещения переносимого ими груза и распределение нагрузок между тросами.

Разработана математическая модель движения механической системы «БпЛА – тросы – груз», основанная на дифференциальных уравнениях с учетом связей с отклоняющимся аргументом. Такой подход позволяет учитывать влияние движения «запаздывающего» БпЛА на перемещение транспортируемого объекта, а также определить распределение нагрузок между тросами. Выполнен кинематический анализ рассматриваемой механической системы, получены геометрические зависимости, определяющие закон движения груза, на основе модели динамики движения которого определены силы реакции в тросах. Полученные зависимости позволяют исследовать распределение нагрузок в механической системе при различных законах движения группы БпЛА.

Проведено имитационное моделирование при запаздывании одного из БпЛА, показано перераспределение нагрузок между тросами и влияние на характер движения груза.

Представлены зависимости, демонстрирующие отличия в значениях вертикальной координаты второго БпЛА, вертикальной координаты груза и сил реакции в тросах при разложении в ряд Тейлора до членов порядка τ , τ^2 , τ^3 , τ^4 , исходя из которых описание траектории перемещения второго БпЛА вдоль вертикальной оси осуществлялось до члена порядка τ^4 . Это обусловлено достаточной точностью, соответствующей условиям рассматриваемой задачи.

Учёт запаздывающего движения одного из БпЛА относительно другого является необходимым для адекватного описания динамики движения при совместной транспортировке грузов беспилотными летательными аппаратами. Полученные зависимости могут быть использованы при разработке систем управления групповыми транспортными комплексами для обеспечения устойчивого движения системы и повышения надежности перевозки различных объектов.

Рассмотрен частный случай движения механической системы при фиксированном значении параметра запаздывания τ . Анализ влияния изменения величины запаздывания на распределение нагрузок между тросами и динамику движения системы «БпЛА – тросы – груз», а также задача устойчивости движения системы «БпЛА – груз» при наличии запаздывания одного из летательных аппаратов являются предметом дальнейших исследований.

Литература

1. Дудакова Д.С., Анохин В.М., Дудаков М.О., Ронжин А.Л. О теоретических основах аэролимнологии: изучение пресных водоемов и прибрежных территорий с применением воздушных робототехнических средств // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. №6. С. 1359–1393. DOI: 10.15622/ia.21.6.10.
2. Ронжин А.Л., Халилов Э.Н., Лазукин А.А., Савельев А.И., Ма З., Ван М. Моделирование способов управления динамикой цианобактериального цветения с применением воздушных и надводных робототехнических средств // Труды Кольского научного центра РАН. Серия: Технические науки. 2023. Т. 14. №7. С. 86–91.
3. Мунасыпов Р.А., Муслимов Т.З. Групповое управление беспилотными летательными аппаратами на основе метода пространства относительных состояний // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. №2. С. 120–125.
4. Кабанов С.А., Митин Ф.В. Оптимальное управление движением группы беспилотных автомобилей // Мехатроника, автоматизация, управление. 2025. Т. 26. №3. С. 147–154. DOI: 10.17587/mau.26.147-154.
5. Tasooji T.K., Khodadadi S., Liu G., Wang R. Cooperative Control of Multi-Quadrotors for Transporting Cable-Suspended Payloads: Obstacle-Aware Planning and Event-Based Nonlinear Model Predictive Control // arXiv preprint arXiv:2503.19135v1. 2025.
6. Кулешов С.В., Кваснов А.В., Зайцева А.А., Ронжин А.Л. Комплексный подход к визуальной навигации по естественным ориентирам для БПЛА, работающих в условиях недоступности ГНСС // Известия ЮФУ. Технические науки. 2025. №2(244). С. 269–278.
7. Савельев А.И., Лебедева В.В., Лебедев И.В., Камынин К.В., Кузнецов Л.Д., Ронжин А.Л. Управление группой БПЛА при обработке кризисных полетных ситуаций в решении транспортных задач // Известия ЮФУ. Технические науки. 2022. №1(225). С. 110–120.
8. Филимонов А.Б., Филимонов Н.Б., Нгуен Т.К., Фам К.Ф. Планирование маршрутов полета БПЛА в задачах группового патрулирования протяженных территорий // Мехатроника, автоматизация, управление. 2023. Т. 24. №7. С. 274–277.
9. Шашкина К.М., Девитт Д.В. Система группового управления БПЛА для решения задачи построения и удержания формаций в полете // Modern Science. 2021. №6-2. С. 402–406.
10. Lee T. Geometric control of multiple quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body // Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2014. pp. 6155–6160.
11. Cheng Z., Yang J., Sun J., Zhao L. Trajectory Planning of Unmanned Aerial Vehicles in Complex Environments Based on Intelligent Algorithm // Drones. 2025. vol. 9. no. 7. 468 p.
12. Cardona G.A., Tellez-Gastro D., Mojica-Nava E. Cooperative Transportation of a Cable-Suspended Load by Multiple Quadrotors // IFAC-PapersOnLine. 2019. vol. 52. no. 20. pp. 145–150. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.149.
13. Wu C., Guo Z., Zhang J., Mao K., Luo D. Cooperative Path Planning for Multiple UAVs Based on APF B-RRT* Algorithm // Drones. 2025. vol. 9. no. 3. 177 p.
14. Liu H., Xie G., Wang L. Consensus Of Multi-Agent Systems With Time-Varying Delay // Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC). 2010. pp. 3078–3083.
15. Zhang Y., Zhong Q., Wei L. Stability of networked control systems with communication constraints // Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference. 2008. pp. 335–339.
16. Ajwad S.A. Distributed control of multi-agent systems under communication constraints: application to robotics. Poitiers: Universite de Poitiers, 2020. pp. 1–126.

17. Смирная Л.Д., Брискин Е.С. Групповое движение роботов при учете влияния связей с отклоняющимся аргументом // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2022. №4(263). С. 53–57. DOI: 10.35211/1990-5297-2022-4-263-53-57.
18. Безусов С.О., Брискин Е.С. Об учете влияния связей с отклоняющимся аргументом на плоское движение сочлененных роботов // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2023. №4(275). С. 12–17. DOI: 10.35211/1990-5297-2023-4-275-12-17.
19. Безусов С.О., Брискин Е.С. Управление плоским движением сочлененных роботов при учете связей с отклоняющимся аргументом // XVI Всероссийская мультиконференция по проблемам управления (МКПУ-2023). 2023. С. 40–43.
20. Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
21. Зенкевич С.Л., Хуа Ч., Цзяньвень Х. Экспериментальное исследование движения группы мобильных роботов в строю типа "конвой" // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. №5. С. 331–335.
22. Ведяков А.А., Пыркин А.А., Бобцов А.А. Адаптивные системы стабилизации и слежения для объектов управления с запаздыванием. Учебное пособие // СПб: Университет ИТМО. 2016. 129 с.

Бордюгов Денис Владимирович — канд. техн. наук, преподаватель, кафедра «динамика и прочность машин» факультета автоматизированных систем, транспорта и вооружений, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (ВолГТУ). Область научных интересов: теоретическая механика, методы математического моделирования, оценивания и управления механическими системами, механика машин и роботов. Число научных публикаций — 46. denklopuk@gmail.com; проспект имени В. И. Ленина, 28, 400005, Волгоград, Россия; р.т.: +7(844)224-8113.

Брискин Евгений Самуилович — д-р физ.-мат. наук, профессор, кафедра «динамика и прочность машин» факультета автоматизированных систем, транспорта и вооружений, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (ВолГТУ). Область научных интересов: теоретическая механика, методы математического моделирования, оценивания и управления механическими и биомеханическими системами, механика машин и роботов. Число научных публикаций — 588. dpm@vstu.ru; проспект имени В. И. Ленина, 28, 400005, Волгоград, Россия; р.т.: +7(844)224-8113.

Шаронов Николай Геннадьевич — канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедры, кафедра «динамика и прочность машин» факультета автоматизированных систем, транспорта и вооружений, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (ВолГТУ). Область научных интересов: механика машин и роботов, оптимальное управление многоприводными системами. Число научных публикаций — 336. dpm@vstu.ru; проспект имени В. И. Ленина, 28, 400005, Волгоград, Россия; р.т.: +7(844)224-8113.

Безусов Сергей Олегович — младший научный сотрудник, кафедра «динамика и прочность машин» факультета автоматизированных систем, транспорта и вооружений, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Волгоградский государственный технический университет» (ВолГТУ). Область научных интересов: робототехника. Число научных публикаций — 10.

dpm@vstu.ru; проспект имени В. И. Ленина, 28, 400005, Волгоград, Россия;
р.т.: +7(844)224-8113.

Поддержка исследований. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и Администрации Волгоградской области № 25-29-20213, <https://rscf.ru/project/25-29-20213>.

D. BORDYUGOV, E. BRISKIN, N. SHARONOV, S. BEZUSOV
**MODELING OF CARGO TRANSPORTATION BY TWO UAVS IN
THE PRESENCE OF LINKS WITH A DEVIATING ARGUMENT**

Bordyugov D., Briskin E., Sharonov N., Bezusov S. Modeling of Cargo Transportation by Two UAVs in the Presence of Links with a Deviating Argument.

Abstract. The paper considers the problem of transporting a payload suspended from two unmanned aerial vehicles (UAVs) using flexible connections in the form of cables. The relevance of the study is due to the widespread use of groups of aerial vehicles for transport operations in hard-to-reach areas or during emergency response situations, when it is necessary to move objects of considerable mass or size. The motion of the UAVs is not strictly synchronized, which leads to changes in the geometric configuration of the “UAV–cables–payload” system and redistribution of loads. The purpose of this work is to develop a mathematical model of the payload motion dynamics for a payload transported by two unmanned aerial vehicles moving along the same trajectory, under the condition that one UAV lags behind the other by a specified time interval, and to determine the cable reaction forces under various operating modes of the considered mechanical system. To describe the motion dynamics, differential equations with deviating argument are used. This approach makes it possible to take into account the influence of the “lagging” UAV motion on the movement of the transported object. A kinematic analysis of the system was carried out, and geometric relationships determining the position and trajectory of the transported payload were obtained. Based on the dynamic model of payload motion, time-dependent relationships for the cable reaction forces of the considered mechanical system were derived. Simulation modeling of the transported payload motion was carried out for various motion laws of the unmanned aerial vehicles, demonstrating the influence of the lag of one UAV on the load distribution between the cables and on the nature of the payload motion. The obtained relationships can be used in the development of control systems for group transport complexes in order to ensure stable motion and improve the reliability of transporting various objects.

Keywords: unmanned aerial vehicles, payload transportation, differential equations with a deviating argument, connections with a deviating argument.

References

1. Dudakova D.S., Anokhin V.M., Dudakov M.O., Ronzhin A.L. [On Theoretical Foundations of Aerolimnology: Study of Fresh Water Bodies and Coastal Territories Using Air Robot Equipment]. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and Automation*. 2022. vol. 21. no. 6. pp. 1359–1393. DOI: 10.15622/ia.21.6.10. (In Russ.).
2. Ronzhin A.L., Khalilov E.N., Lazukin A.A., Savelev A.I., Ma Z., Wang M. [Modeling of control methods for cyanobacterial bloom dynamics using aerial and surface robotic systems]. *Trudy Kolskogo nauchnogo tsentra RAN. Seriya: Tekhnicheskie nauki – Proceedings of the Kola Scientific Center of the RAS. Series: Technical Sciences*. 2023. vol. 14. no. 7. pp. 86–91. (In Russ.).
3. Munasyrov R.A., Muslimov T.Z. [UAVs Group Control Based on the Relative State Space Method]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie – Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2018. vol. 19. no. 2. pp. 120–125. (In Russ.).
4. Kabanov S.A., Mitin F.V. [Optimal Control of the Movement of a Group of Unmanned Vehicles]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie – Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie*. 2025. vol. 26. no. 3. pp. 147–154. DOI: 10.17587/mau.26.147-154. (In Russ.).

5. Tasooji T.K., Khodadadi S., Liu G., Wang R. Cooperative Control of Multi-Quadrotors for Transporting Cable-Suspended Payloads: Obstacle-Aware Planning and Event-Based Nonlinear Model Predictive Control. arXiv preprint arXiv:2503.19135v1. 2025.
6. Kuleshov S.V., Kvasnov A.V., Zaitseva A.A., Ronzhin A.L. [An integrated approach to visual navigation by natural landmarks for UAVs operating in GNSS-denied environments]. *Izvestiia IuFU. Tekhnicheskie nauki – Proceedings of Southern Federal University. Technical Sciences.* 2025. no. 2(244). pp. 269–278. (In Russ.).
7. Savelev A.I., Lebedeva V.V., Lebedev I.V., Kamylin K.V., Kuznetsov L.D., Ronzhin A.L. [Control of a group of UAVs in crisis flight situations in solving transport problems]. *Izvestiia IuFU. Tekhnicheskie nauki – Proceedings of Southern Federal University. Technical Sciences.* 2022. no. 1(225). pp. 110–120. (In Russ.).
8. Filimonov A.B., Filimonov N.B., Nguyen T.K., Pham Q.P. [Planning of UAV Flight Routes in the Problems of Group Patrolling of the Extended Territories]. *Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie – Mekhatronika, Avtomatizatsiya, Upravlenie.* 2023. vol. 24. no. 7. pp. 274–277. (In Russ.).
9. Shashkina K.M., Devitt D.V. [UAV group control system for solving the problem of formation building and holding in flight]. *Sovremennaya nauka – Modern Science.* 2021. no. 6-2. pp. 402–406. (In Russ.).
10. Lee T. Geometric control of multiple quadrotor UAVs transporting a cable-suspended rigid body. *Proceedings of the 53rd IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* 2014. pp. 6155–6160.
11. Cheng Z., Yang J., Sun J., Zhao L. Trajectory Planning of Unmanned Aerial Vehicles in Complex Environments Based on Intelligent Algorithm. *Drones.* 2025. vol. 9. no. 7. 468 p.
12. Cardona G.A., Tellez-Gastro D., Mojica-Nava E. Cooperative Transportation of a Cable-Suspended Load by Multiple Quadrotors. *IFAC-PapersOnLine.* 2019. vol. 52. no. 20. pp. 145–150. DOI: 10.1016/j.ifacol.2019.12.149.
13. Wu C., Guo Z., Zhang J., Mao K., Luo D. Cooperative Path Planning for Multiple UAVs Based on APF B-RRT* Algorithm. *Drones.* 2025. vol. 9. no. 3. 177 p.
14. Liu H., Xie G., Wang L. Consensus Of Multi-Agent Systems With Time-Varying Delay. *Proceedings of the 49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC).* 2010. pp. 3078–3083.
15. Zhang Y., Zhong Q., Wei L. Stability of networked control systems with communication constraints. *Proceedings of the Chinese Control and Decision Conference.* 2008. pp. 335–339.
16. Ajwad S.A. Distributed control of multi-agent systems under communication constraints: application to robotics. *Poitiers: Universite de Poitiers,* 2020. pp. 1–126.
17. Smirnaya L.D., Briskin E.S. [Group motion of robots taking into account the influence of connections with deviating argument]. *Izvestiia Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Proceedings of Volgograd State Technical University.* 2022. no. 4(263). pp. 53–57. DOI: 10.35211/1990-5297-2022-4-263-53-57. (In Russ.).
18. Bezusov S.O., Briskin E.S. [On taking into account the influence of connections with deviating argument on the planar motion of articulated robots]. *Izvestiia Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Proceedings of Volgograd State Technical University.* 2023. no. 4(275). pp. 12–17. DOI: 10.35211/1990-5297-2023-4-275-12-17. (In Russ.).
19. Bezusov S.O., Briskin E.S. [Control of Plane Movement of Joined Robots with Consideration of Relations with a Declining Argument]. *XVI Vserossiiskaia mul'tikonferentsiia po problemam upravleniia (MKPU-2023) – XVI All-Russian Multiconference on Management Issues (MKPU-2023).* 2023. pp. 40–43. (In Russ.).

20. Elsgolts L.E., Norkin S.B. Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravnenii s otkloniaushchimsia argumentom [Introduction to the theory of differential equations with deviating argument]. Moscow: Nauka Publ., 1971. 296 p. (In Russ.).
21. Zenkevich S.L., Hua Ch., Jianwen H. [Experimental Study of Motion of the Mobile Robots Moving in the Convoy Type Formation]. Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie – Mekhatronika, Avtomatizatsiia, Upravlenie. 2018. vol. 19. no. 5. pp. 331–335. (In Russ.).
22. Vedyakov A.A., Pyrkin A.A., Bobtsov A.A. Adaptivnye sistemy stabilizatsii i slezheniia dlia ob"ektov upravleniia s zapazdyvaniem. Uchebnoe posobie [Adaptive stabilization and tracking systems for control plants with delay. Textbook]. SPb.: ITMO University Publ., 2016. 129 p. (In Russ.).

Bordyugov Denis — Ph.D., Teacher, Department of Dynamics and Strength of Machines, Faculty of Automated Systems, Transport and Armaments, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Volgograd State Technical University" (VolgSTU). Research interests: theoretical mechanics, methods of mathematical modeling, estimation, and control of mechanical systems, mechanics of machines and robots. The number of publications — 46. denklopuk@gmail.com; 28, Lenin Ave., 400005, Volgograd, Russia; office phone: +7(844)224-8113.

Briskin Evgeniy — Ph.D., Dr. Sci., Professor, Department of Dynamics and Strength of Machines, Faculty of Automated Systems, Transport and Armaments, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Volgograd State Technical University" (VolgSTU). Research interests: theoretical mechanics, methods of mathematical modeling, evaluation and control of mechanical and biomechanical systems, mechanics of machines and robots. The number of publications — 588. dpm@vstu.ru; 28, Lenin Ave., 400005, Volgograd, Russia; office phone: +7(844)224-8113.

Sharonov Nikolay — Ph.D., Associate professor, Head of the Department, Department of Dynamics and Strength of Machines, Faculty of Automated Systems, Transport and Armaments, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Volgograd State Technical University" (VolgSTU). Research interests: mechanics of machines and robots, optimal control of multi-drive systems. The number of publications — 336. dpm@vstu.ru; 28, Lenin Ave., 400005, Volgograd, Russia; office phone: +7(844)224-8113.

Bezusov Sergei — Junior research assistant, Department of Dynamics and Strength of Machines, Faculty of Automated Systems, Transport and Armaments, Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Volgograd State Technical University" (VolgSTU). Research interests: robotics. The number of publications — 10. dpm@vstu.ru; 28, Lenin Ave., 400005, Volgograd, Russia; office phone: +7(844)224-8113.

Acknowledgements. The research was carried out with the financial support of a grant from the Russian Science Foundation and the Administration of the Volgograd Region No. 25-29-20213, <https://rscf.ru/project/25-29-20213>.