

Н.А. КУЗНЕЦОВ, К.В. СЕМЕНИХИН

**МЕТОД НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НЕИЗВЕСТНОЙ
ИНТЕНСИВНОСТИ ШУМА В НАБЛЮДЕНИЯХ**

Кузнецов Н.А., Семенихин К.В. Метод нелинейной фильтрации при неизвестной интенсивности шума в наблюдениях.

Аннотация. В работе изложен метод обратной статистической линеаризации – метод нелинейной фильтрации для оценивания состояний линейно-гауссовых дифференциальных систем с неизвестной интенсивностью шума в наблюдениях. Предложенный метод основан на нелинейном преобразовании разностной ошибки с сохранением коэффициента передачи, используемого в фильтре Калмана-Бьюси. В результате нелинейный фильтр описывается системой дифференциальных уравнений того же порядка, что и вектор состояния без использования уравнений на ковариационную матрицу ошибки. Уравнения нелинейного фильтра найдены в аналитическом виде для модели одномерного движения, в которой только на старшую производную действует возмущение в виде белого шума, а наблюдению доступно лишь положение с белошумной аддитивной помехой неизвестной интенсивности. Проведен анализ соответствующей разностной схемы нелинейной фильтрации: обоснована несмещенност оценок и получено уравнение на ковариационную матрицу ее ошибок в стационарном режиме. Теоретические результаты подтверждены численным экспериментом, в котором сравнивалась точность оценок оптимального и нелинейного фильтров.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, неизвестная интенсивность шума, линейная стохастическая дифференциальная система, фильтр Калмана-Бьюси.

1. Введение. Методы нелинейной фильтрации востребованы в современных исследованиях, нацеленных на решение разнообразных задач оценивания параметров и процессов частично наблюдаемых стохастических систем: оптимальная фильтрация в скрытой марковской модели при наличии шума, зависящего от оцениваемого состояния [1]; расширение метода нормальной аппроксимации на неявные стохастические дифференциальные системы [2]; адаптация калмановской фильтрации для идентификации отказов на основе метода наименьших модулей [3]; разработка устойчивых алгоритмов расширенной калмановской фильтрации без использования производных [4]; модификация расширенного фильтра Калмана для обработки навигационных наблюдений [5]; развитие метода информационных множеств для гарантированного оценивания фазовых координат многошаговых систем [6]; обоснование робастности нелинейных методов фильтрации с привлечением вероятностных и информационных метрик [7]; методика сравнительного анализа алгоритмов нелинейной фильтрации [8].

За последние два десятилетия наметился тренд на разработку методов обработки измерительной информации в сетевых или распределенных системах, в которых объект представляет собой группу взаимодействующих агентов, а датчики образуют сеть с определенным протоколом обмена информации [9–12]. Практическая реализация таких алгоритмов наталкивается на теоретически обоснованный барьер скорости передачи информации между различными узлами распределенной измерительной системы [13], что приводит к необходимости разработки алгоритмов оценивания и фильтрации с учетом ограниченности или случайности коммуникационного взаимодействия [14–16].

Последнее делает актуальным задачу разработки упрощенных алгоритмов фильтрации, рассчитанных на передачу ограниченного объема информации за один такт обработки. Для многомерных моделей серьезной вычислительной проблемой является численное обновление ковариационной матрицы ошибки оценивания в рекуррентных алгоритмах фильтрации. Эта проблема еще более усугубляется в ситуации, когда у шумов в наблюдениях неизвестна ковариационная матрица (в случае дискретного времени) или интенсивность (в случае непрерывного времени).

Для учета неточности задания характеристик случайных шумов используют *робастный подход*, в русле которого лежат методы минимаксной фильтрации: они ориентированные на применение оптимального линейного фильтра при наихудшем выборе неопределенной интенсивности шума [17, 18], его ковариационной матрицы [19, 20] или распределения внутри вероятностного множества неопределенности [21, 22].

При использовании *адаптивного подхода* синтезируется совместная схема фильтрации ненаблюдаемого состояния стохастической системы и оценивания ее неизвестных параметров: в [23] применены градиентный метод и приближенный метод Ньютона для адаптивной подстройки матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения; в [24, 25] реализованы схемы фильтра частиц с включением байесовских оценок неизвестных дисперсий (или ковариационных матриц) на основе априорных моделей обратного гамма-распределения (или обратного распределения Уишарта); в [26] использован ЕМ-алгоритм для синтеза адаптивного фильтра Калмана в линейно-гауссовской системе с неизвестными ковариациями шумов; в [27] разработана методика адаптивной сигма-точечной фильтрации для отслеживания навигационных параметров GPS-сигналов по измерениям с неизвестной интенсивностью шума.

Тем не менее, указанные два подхода (робастный и адаптивный) обладают своими недостатками. С одной стороны, робастные методы оценивания зачастую порождают достаточно консервативные решения. С другой стороны, адаптивные методы в случае многопараметрической неопределенности приводят к сложным и подчас неустойчивым численным схемам. Для изучаемой в настоящей статье задачи фильтрации состояния линейно-гауссовской дифференциальной системы с неизвестной интенсивностью шума в наблюдениях можно предложить альтернативный подход. Он основан на нелинейном преобразовании разностной ошибки с сохранением коэффициента передачи, используемого в фильтре Калмана-Бьюси. Тем самым оптимальный линейный фильтр с неопределенными коэффициентами заменяется нелинейным фильтром с теми же мгновенными моментными характеристиками без использования дополнительной схемы оценивания неизвестной интенсивности. Поэтому этот метод можно назвать *методом обратной статистической линеаризации*.

Его идея была впервые предложена более 50 лет тому назад [28] и развита нашим коллегой Ф.Н. Григорьевым в его кандидатской диссертации [29]. Более того, данный метод нелинейной фильтрации был использован для построения оценок параметров движения крупнотоннажных транспортных судов и разработки информационной системы предупреждения их столкновений в условиях, когда величины измерительных ошибок неизвестны [30]. Соответствующие алгоритмы были внедрены в автоматизированную систему управления судовождением на морском флоте (Государственная премия СССР в области науки и техники за 1985 год). К сожалению, в научной литературе данный метод нелинейной стохастической фильтрации до сих пор не получил должного отражения. Поэтому целью настоящей статьи является его аккуратное изложение и анализ свойств соответствующих оценок.

Статья имеет следующую структуру. В разделе 2 приведены описание рассматриваемого класса систем и постановка задачи. В разделе 3 предъявлено аналитическое решение для модели частного вида, а также приведены соображения, позволяющие распространить данный метод на более общий случай. Раздел 4 содержит синтез разностной схемы реализации искомого нелинейного фильтра, обоснование несмещенностии оценок и вывод рекуррентного уравнения для ковариационной матрицы ошибки. В разделе 5 представлены результаты численного эксперимента для сравнения точности оценок построенного нелинейного фильтра с эталонным качеством оценивания

оптимального фильтра при разном уровне помех. Раздел 6 представляет собой заключение статьи с кратким описанием полученных результатов.

2. Постановка задачи. Предположим, что состояние объекта $X(t) \in \mathbb{R}^m$ и вектор наблюдений $Y(t) \in \mathbb{R}^n$ описываются линейной стохастической дифференциальной системой

$$\dot{X} = AX + u(t) + Bv(t), \quad \dot{Y} = CX + \sqrt{\Sigma}\varepsilon(t), \quad (1)$$

с заданными постоянными матрицами $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$, входом $u(t) = U(t, \{Y(s): s < t\})$, определяемым известным законом управления $U(\cdot)$, и неизвестной матрицей интенсивности $\Sigma \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($\mathbb{R}_+^{n \times n}$ обозначает конус неотрицательно определенных матриц размера $n \times n$), где $v(t) \in \mathbb{R}^q$, $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^n$ – независимые стандартные гауссовские белые шумы.

Допустим, что матрица интенсивности шума в наблюдениях положительно определена: $\Sigma \succ O$, пара (A, C) удовлетворяет условию наблюдаемости

$$\ker \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \dots \\ CA^{m-1} \end{bmatrix} = \{0\}, \quad (2)$$

а пара (A, B) – условию управляемости

$$\text{im} \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{m-1}B \end{bmatrix} = \mathbb{R}^m, \quad (3)$$

(\ker и im обозначают ядро и образ соответствующего линейного преобразования).

При этих условиях определен стационарный фильтр Калмана-Бьюси [31], т.е. оценка $\hat{X}(t) = \mathbb{M}\{X(t) | Y(s): s < t\}$ описывается линейным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} + u(t) + K[\dot{Y} - C\hat{X}], \quad (4)$$

с постоянным коэффициентом усиления

$$K = QC^T \Sigma^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad (5)$$

и постоянной ковариационной матрицей ошибки фильтрации

$$Q = \text{cov}\{\hat{X}(t) - X(t)\} \in \mathbb{R}_+^{m \times m}, \quad (6)$$

удовлетворяющей алгебраическому уравнению Риккати

$$AQ + QA^T + BB^T - QC^T \Sigma^{-1} CQ = O, \quad (7)$$

решение которого в классе положительно определенных матриц существует и единственno [32].

Кроме того, разностная ошибка $\delta(t) = \dot{Y}(t) - C\hat{X}(t)$ представляет собой гауссовский белый шум с матрицей интенсивности Σ . Тогда преобразованная разностная ошибка $K\delta(t)$ тоже будет гауссовским белым шумом с матрицей интенсивности

$$S = K\Sigma K^T = QC^T \Sigma^{-1} CQ. \quad (8)$$

Ясно, что каждая из трех матриц (5), (6) и (8) является функцией неизвестной матрицы Σ , поэтому далее (если это потребуется) будем использовать запись: $K = K(\Sigma)$, $Q = Q(\Sigma)$, $S = S(\Sigma)$ и т.д.

Предлагается заменить линейный фильтр (4), содержащий неопределенный коэффициент K , нелинейным фильтром

$$\dot{\check{X}} = A\check{X} + u(t) + \varphi(\dot{Y} - C\check{X}), \quad (9)$$

в котором нелинейное преобразование $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ выбирается из условия соответствия моментных характеристик преобразованной разностной ошибки в фильтре Калмана-Бьюси. Последнее означает, что при любом выборе матрицы $\Sigma \succ O$ будет верно

$$\mathbb{M}\{\varphi(\xi)\} = 0, \quad \text{cov}\{\varphi(\xi)\} = \text{cov}\{K\xi\}, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma), \quad (10)$$

где $K = K(\Sigma)$ определяется из (5), (6). Тем самым искомое нелинейное преобразование $\varphi(\xi)$ центрированного гауссовского вектора ξ с положительно определенной ковариационной матрицей Σ должно иметь те же математическое ожидание и ковариацию, что и линейное преобразование $K(\Sigma)\xi$ с коэффициентом из стационарного фильтра Калмана-Бьюси.

Если совпадение ковариационных матриц в (10) является невозможным, то будем накладывать менее строгое ограничение – совпадение дисперсий для каждой компоненты $\varphi_i(\xi)$ искомого преобразования

$$\mathbb{D}\{\varphi_i(\xi)\} = (K\Sigma K^T)_{i,i} \quad \text{при } i = 1, \dots, m, \quad \xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma). \quad (11)$$

Требуется: предъявить класс систем вида (1), для которых можно реализовать предложенный метод обратной статистической линеаризации, дать корректное определение нелинейной стохастической системе (9) и изучить качество соответствующих оценок $\hat{X}(t)$ в сравнении с тем, что дает оптимальный фильтр $\hat{X}(t)$, рассчитанный при истинной матрице интенсивности шума Σ .

3. Описание метода фильтрации. Начнем с важного частного случая, в котором искомый нелинейный фильтр допускает аналитическое описание [28, 29].

Рассмотрим модель, в которой вектор состояния $X(t) \in \mathbb{R}^m$ составлен из значений скалярного процесса $\varkappa(t)$ и его производных $\varkappa^{(i)}(t)$, $i = 1, \dots, m - 1$, т.е.

$$X = \text{col}[X_1, \dots, X_m] = \text{col}[\varkappa, \dot{\varkappa}, \ddot{\varkappa}, \dots, \varkappa^{(m-1)}], \quad (12)$$

($\text{col}[\dots]$ обозначает столбец), возмущение присутствует явно только в уравнении старшей производной $\varkappa^{(m-1)}(t)$, а измерению доступен процесс $\varkappa(t)$ с аддитивной помехой:

$$\dot{X}_1 = X_2, \dots, \dot{X}_{m-1} = X_m, \dot{X}_m = \beta v(t), \quad \dot{Y} = X_1 + \sigma \varepsilon(t), \quad (13)$$

где β, σ – положительные коэффициенты, из которых β задано, а интенсивность шума σ неизвестна. Возмущение $v(t)$ и помеха $\varepsilon(t)$ предполагаются независимыми стандартными гауссовскими белыми шумами.

Ясно, что (13) – частный случай модели (1) с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \beta E, \quad E = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \sigma^2. \quad (15)$$

В этом случае известно [33], что уравнение относительно ковариационной матрицы ошибки стационарного фильтра Калмана (7) имеет аналитическое решение:

$$Q = \{Q_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,m}: \quad Q_{i,j} = G_{i,j} \sigma^2 (\beta/\sigma)^{(i+j-1)/m}, \quad (16)$$

где коэффициенты $\{G_{i,j}\}$ не зависят от параметров системы (13) и образуют симметричную матрицу $G \in \mathbb{R}^{m \times m}$, которая представляет собой единственное положительно определенное решение уравнения Риккати

$$AG + GA^T + EE^T - GC^T CG = O. \quad (17)$$

Данное уравнение полностью аналогично (7) применительно к системе (13) с параметрами $\beta = \sigma = 1$. Существование и единственность решения $G \succ O$ вытекает из условий наблюдаемости и управляемости, выполненных для пар (A, C) и (A, E) соответственно.

Таким образом, коэффициент усиления (5) принимает вид

$$K = QC^T(\sigma^2)^{-1} = \text{col}[K_1, \dots, K_m], \quad K_i = G_{i,1}(\beta/\sigma)^{i/m}. \quad (18)$$

Тогда соответствующий оптимальный фильтр (4) допускает запись

$$\dot{\hat{X}}_i = \hat{X}_{i+1} + G_{i,1}(\beta/\sigma)^{i/m} \delta(t), \quad i = 1, \dots, m-1, \quad (19)$$

$$\dot{\hat{X}}_m = G_{m,1}(\beta/\sigma) \delta(t), \quad (20)$$

где $\delta(t) = \dot{Y}(t) - \hat{X}_1(t)$ – разностная ошибка, образующая гауссовский белый шум интенсивности σ^2 , а коэффициент усиления при нем является (с точностью до множителя) степенной функцией

$$k(\sigma) = \sigma^{-\alpha}, \quad \text{где} \quad 0 < \alpha \leq 1. \quad (21)$$

Тогда согласно методу обратной статистической линеаризации необходимо заменить линейное преобразование $\eta = k(\sigma)\xi$ гауссовской случайной величины $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ с неизвестной дисперсией σ^2 ее нелинейным преобразованием $\phi(x)$ с сохранением первых двух моментов, т.е.:

$$M_\sigma \phi(\xi) = 0, \quad D_\sigma \phi(\xi) = (k(\sigma)\sigma)^2 \quad \forall \sigma > 0. \quad (22)$$

Для устойчивости замкнутой системы и сохранения симметрии искомую функцию $\phi(x)$ следует выбрать монотонной, нечетной и не более чем линейного роста. Если взять степенную функцию, то в случае (21) получаем

$$\phi(x) = \gamma_p^{-1/2} \text{sign}(x) |x|^{1-\alpha}, \quad (23)$$

где γ_p обозначает абсолютный момент порядка $p = 2(1 - \alpha)$ стандартной нормальной величины $\nu \sim \mathcal{N}(0, 1)$, т.е.:

$$\gamma_p = \mathsf{M}|\nu|^p = \frac{2^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right).$$

Действительно, первое из условий (22) имеет место в силу нечетности функции $\phi(x)$, а второе следует из цепочки равенств

$$\mathsf{M}_\sigma(\phi(\xi))^2 = \gamma_p^{-1} \mathsf{M}_\sigma |\xi|^p = \gamma_p^{-1} \mathsf{M}(\sigma |\nu|)^p = \sigma^p = (k(\sigma)\sigma)^2. \quad (24)$$

Теперь в соответствии с (9) получаем уравнения нелинейного фильтра

$$\dot{\check{X}}_i = \check{X}_{i+1} + G_{i,1} \gamma_{2(1-i/m)}^{-1/2} \beta^{i/m} \text{sign}(\delta(t)) |\delta(t)|^{1-i/m} \quad (25)$$

при $i = 1, \dots, m - 1$.

$$\dot{\bar{X}}_m = G_{m,1} \beta \operatorname{sign}(\delta(t)), \quad (26)$$

с учетом разностной ошибки $\delta(t) = \dot{Y}(t) - \ddot{X}_1(t)$.

Структурная схема построенного нелинейного фильтра приведена на рисунке 1.

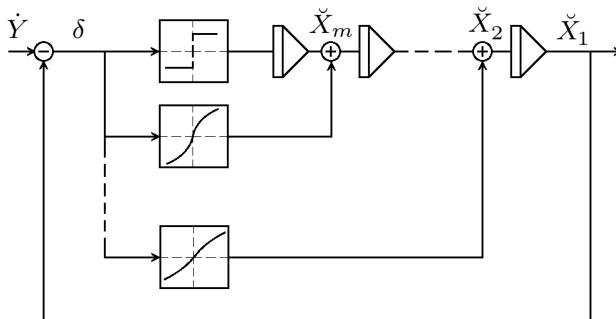


Рис. 1. Структурная схема нелинейного фильтра (25), (26)

Отметим, что построенное нелинейное преобразование $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ подчиняется более слабому требованию (11). Нетрудно проверить, что отличие между двумя ковариационными матрицами в исходном условии (10) определяется коэффициентами

$$\frac{\gamma_{(p_i+p_j)/2}}{\sqrt{\gamma_{p_i} \gamma_{p_j}}} \quad \text{для} \quad i, j = 1, \dots, m \quad \text{и} \quad p_i = 2(1 - i/m). \quad (27)$$

Теперь рассмотрим более общую ситуацию, в которой по-прежнему наблюдения скалярны (т.е. $n = 1$) и имеют неизвестную интенсивность шума σ^2 , но матрицы A, B, C теперь будут произвольными – лишь бы были выполнены условия наблюдаемости (2) и управляемости (3).

Коэффициент усиления (5) представляет собой вектор-столбец с компонентами $K_i(\sigma^2)$, $i = 1, \dots, m$, зависящими от неизвестной интенсивности σ^2 . Предположим, что эта зависимость определена численно или аналитически. Тогда для назначения функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, соответствующей условию (11), предположим, что ее компоненты $\varphi_i(x)$ выбраны нечетными функциями, такими что

$$D_\sigma \varphi_i(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_i^2(x) e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = \sigma^2 K_i^2(\sigma^2). \quad (28)$$

После замены переменной $y = x^2/2$ и $\theta = 1/\sigma^2$ получаем, что искомая функция определяется в результате обратного преобразования Лапласа

$$\int_0^{\infty} \psi_i(y) e^{-\theta y} dy = \frac{K_i^2(1/\theta)}{\theta^{3/2}} \sqrt{\pi/2}, \quad \varphi_i(x) = \sqrt{x} \psi_i(x^2/2), \quad x \geq 0. \quad (29)$$

В случае векторных наблюдений предлагается привести их к одному масштабу, воспользоваться оценкой сверху на неизвестную матрицу интенсивности шума в виде $\Sigma \preceq \sigma^2 I$, задать нелинейное преобразование $\varphi(x)$ через функции одной переменной $\varphi_i(x_i)$ и искать последние из того же условия (28), но с тем уточнением, что K_i^2 обозначает сумму квадратов i -й строки матричного коэффициента усиления (5), в котором надо положить $\Sigma = \sigma^2 I$.

Таким образом, описан общий метод построения нелинейного преобразования $\varphi(\cdot)$ в искомом фильтре (9). Однако остается вопрос численной реализации соответствующего фильтра вместе с проблемой

применимости нелинейного звена к случайному процессу типа белого шума.

Синтез соответствующей численной схемы и обоснование ее устойчивости проведены в следующем разделе.

4. Численная схема. Рассмотрим численную реализацию методов фильтрации на основе метода Эйлера [34]. Для линейного фильтра (4) соответствующая численная схема имеет вид

$$\begin{aligned}\hat{X}(t_{k+1}) = & \hat{X}(t_k) + h(A\hat{X}(t_k) + u(t_k)) + \\ & + K[Y(t_{k+1}) - Y(t_k) - hC\hat{X}(t_k)],\end{aligned}\quad (30)$$

где $\{t_{k+1} = t_k + h, k = 0, 1, 2, \dots\}$ – временная сетка с достаточно малым шагом $h > 0$.

Важно отметить, что выражение в квадратных скобках представляет собой аппроксимацию интеграла

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \delta(t) dt = Y(t_{k+1}) - Y(t_k) - C \int_{t_k}^{t_{k+1}} \hat{X}(t) dt \quad (31)$$

от разностной ошибки $\delta(t) = \dot{Y}(t) - C\hat{X}(t)$, которая образует гауссовский белый шум интенсивности Σ . Тогда по свойству стохастического интеграла вектор (31) является гауссовским, имеет нулевое математическое ожидание, а его ковариационная матрица равна $h\Sigma$. После умножения (31) на коэффициент $1/\sqrt{h}$ получаем случайный вектор $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, к которому можно применить нелинейное преобразование, сохраняющее математическое ожидание и ковариационную матрицу (10).

Поэтому искомая численная схема реализации нелинейного фильтра (9) принимает вид

$$\begin{aligned}\check{X}(t_{k+1}) = & \check{X}(t_k) + h(A\check{X}(t_k) + u(t_k)) + \\ & + \sqrt{h} \varphi \left(\frac{Y(t_{k+1}) - Y(t_k)}{\sqrt{h}} - \sqrt{h} C\check{X}(t_k) \right).\end{aligned}\quad (32)$$

Если для состояния и наблюдаемого процесса воспользоваться аппроксимацией, основанной на методе Эйлера

$$X(t_{k+1}) = X(t_k) + h(AX(t_k) + u(t_k)) + B \int_{t_k}^{t_{k+1}} v(t) dt, \quad (33)$$

$$Y(t_{k+1}) = Y(t_k) + h CX(t_k) + \sqrt{\Sigma} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \varepsilon(t) dt, \quad (34)$$

то для ошибки оценки нелинейного фильтра $e(t_k) = \check{X}(t_k) - X(t_k)$ получается следующее рекуррентное уравнение:

$$e(t_{k+1}) = [I + hA]e(t_k) + \sqrt{h} \left\{ -Bv_{k+1} + \varphi \left(-\sqrt{h} Ce(t_k) + \sqrt{\Sigma} \varepsilon_{k+1} \right) \right\}, \quad (35)$$

где случайные векторы $v_1, v_2, \dots \in \mathbb{R}^q$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \in \mathbb{R}^n$, взаимно независимы и подчиняются стандартному нормальному распределению $\mathcal{N}(0, I)$.

Если функция $\varphi(x)$ является нечетной, т.е.

$$\varphi(-x) = -\varphi(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (36)$$

и начальная ошибка фильтрации $e(t_0)$ имеет симметричное относительно нуля распределение, то тем же свойством будет обладать и распределение ошибки фильтрации $e(t_k)$ на всех последующих шагах. Поэтому оценка определяемая рекуррентными уравнениями (32) в дискретизованной модели (33), (34) является несмешенной:

$$\mathbf{M}\{\check{X}(t_k) - X(t_k)\} = 0. \quad (37)$$

Для анализа точности нелинейного фильтра рассмотрим ковариационную матрицу ошибки оценивания $\Delta(t_k) = \text{cov}\{e(t_k)\}$, которая в силу (37) может быть определена как $\Delta(t_k) = \mathbf{M}\{e(t_k)e^T(t_k)\}$, а также условную матрицу вторых моментов ошибки $\Delta(t_k|x) = \mathbf{M}\{e(t_k)e^T(t_k) \mid e(t_{k-1}) = x\}$. Указанные матрицы связаны равенством

$$\Delta(t_k) = M\{\Delta(t_k|e(t_{k-1}))\}. \quad (38)$$

Тогда из (35) следует

$$\Delta(t_{k+1}|x) = hBB^T + M\{([I + hA]x + \sqrt{h}\varphi(-\sqrt{h}Cx + \xi))(\star)^T\}, \quad (39)$$

где $\xi \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, а символ \star означает дублирование выражения, стоящего слева в круглых скобках.

Дальнейшие вычисления проведем в предположении $h \downarrow 0$.

Заметим, что при $y \rightarrow 0$

$$M\varphi(y + \xi) = L\Sigma^{-1}y + o(y), \quad L = L(\Sigma) = M\{\varphi(\xi)\xi^T\} \in \mathbb{R}^{m \times n}. \quad (40)$$

Это следует из равенства $M\varphi(\xi) = 0$, представления

$$M\varphi(y + \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(z)g(z - y)dz, \quad g(v) = \frac{\exp\{-v^T\Sigma^{-1}v/2\}}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det\Sigma}}$$

и вида градиента $\nabla g(v) = -g(v)\Sigma^{-1}v$. Тем самым (40) влечет

$$\sqrt{h}M\{\varphi(-\sqrt{h}Cx + \xi)\} = -hL\Sigma^{-1}Cx + o(h). \quad (41)$$

Аналогично получаем:

$$hM\{\varphi(-\sqrt{h}Cx + \xi)\varphi^T(-\sqrt{h}Cx + \xi)\} = h\Phi + o(h), \quad (42)$$

где ковариационная матрица

$$\Phi = \Phi(\Sigma) = M\{\varphi(\xi)\varphi^T(\xi)\} \quad (43)$$

совпадает с матрицей $K\Sigma K^T$ в случае (10) или имеет с последней одинаковые диагональные элементы в случае (11).

Теперь из (39) и полученных соотношений следует

$$\begin{aligned}\Delta(t_{k+1}|x) = & hBB^T + xx^T + h\{Axx^T + x(Ax)^T\} - \\ & - h\{L\Sigma^{-1}Cxx^T + x(L\Sigma^{-1}Cx)^T\} + h\Phi + o(h).\end{aligned}\quad (44)$$

Применяя (38) и исключая бесконечно малые порядка $o(h)$, получаем приближенную рекуррентную схему для определения ковариационной матрицы ошибки нелинейного фильтра:

$$\begin{aligned}\Delta(t_{k+1}) = \Delta(t_k) + h & \{(A - L\Sigma^{-1}C)\Delta(t_k) + \Delta(t_k)(A - L\Sigma^{-1}C)^T + \\ & + BB^T + \Phi\}.\end{aligned}\quad (45)$$

Данная схема будет устойчивой, если все собственные значения λ_i матрицы

$$\Lambda = \Lambda(\Sigma) = A - L\Sigma^{-1}C \quad (46)$$

имеют отрицательные вещественные части $\operatorname{Re} \lambda_i$, а шаг дискретизации h настолько мал, что числа $1 + h \operatorname{Re}[\lambda_i + \lambda_j]$ при любых $i, j = 1, \dots, m$ лежат внутри единичного интервала $(-1, 1)$ (лемма И.1 из [32]). Последнее имеет место при

$$h < -1 / \operatorname{Re} \lambda_i \quad \forall \lambda_i \in \sigma[\Lambda]. \quad (47)$$

Если это выполнено, то при любом начальном условии решение уравнения (45), которое представляет собой рекуррентный вариант уравнения Ляпунова, сходится при $k \rightarrow \infty$ к решению алгебраического уравнения Ляпунова

$$\Lambda\Delta + \Delta\Lambda^T + BB^T + \Phi = O, \quad (48)$$

причем его решение Δ существует и единственno в классе $\mathbb{R}_+^{m \times m}$ (а также будет положительно определенной матрицей, если $BB^T + \Phi \succ O$).

В ситуации неизвестной матрицы интенсивности шума Σ уравнение (48) дает лишь качественную оценку точности нелинейного фильтра. Однако условие (47) вводит количественные ограничения на параметры модели и численной схемы, т.е. на интенсивность шума и размер шага, при которых разработанный алгоритм нелинейной фильтрации является работоспособным.

Приведем пример, в котором можно дать явные оценки качества предложенной нелинейной схемы фильтрации.

Пример 1. Рассмотрим одномерный вариант модели (13), т.е. случай $m = 1$. Тогда для скалярного состояния $X(t)$ имеем

$$\dot{X}(t) = \beta v(t), \quad \dot{Y}(t) = X(t) + \sigma \varepsilon(t). \quad (49)$$

Согласно (16) дисперсия стационарного фильтра Калмана-Бьюси равна $Q = \sigma^2(\beta/\sigma) = \beta\sigma$, так как $G_{1,1} = 1$.

В силу (26) нелинейный фильтр определяется уравнениями

$$\dot{\check{X}}(t) = \varphi(\dot{Y}(t) - \check{X}(t)), \quad \varphi(x) = \beta \operatorname{sign} x. \quad (50)$$

С учетом $\xi \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ коэффициент (40) принимает вид

$$L = M\{\varphi(\xi)\xi\} = \beta M|\xi| = \beta\sigma\gamma_1, \quad \text{где} \quad \gamma_1 = \sqrt{2/\pi}. \quad (51)$$

Тогда $\Lambda = -L(\sigma^2)^{-1} = -\gamma_1\beta/\sigma$ в силу (46).

Теперь условие (47) означает, что размер шага h надо выбирать так чтобы $h < \gamma_1^{-1}\sigma/\beta$ (иначе говоря h должен быть, как максимум, того же порядка что интенсивность помех).

Если учесть (8), то $K^2\sigma^2 = Q^2(\sigma^2)^{-1} = \beta^2$, откуда в силу (48) получаем

$$\Delta = \frac{\beta^2 + K^2\sigma^2}{-2\Lambda} = \gamma_1^{-1}\beta\sigma = \gamma_1^{-1}Q, \quad (52)$$

где $\gamma_1^{-1} = \sqrt{\pi/2} \approx 1,25$. Тем самым дисперсия ошибки нелинейного фильтра Δ лишь на четверть больше дисперсии ошибки оптимального фильтра Q , что в исходной шкале составляет около 11%.

Таким образом, синтезирована разностная схема, реализующая искомый нелинейный фильтр; доказана несмещенность его оценок; выведено рекуррентное уравнение для ковариационной матрицы ошибки оценивания и получено условие устойчивости численной реализации нелинейного фильтра.

5. Численный пример. Для иллюстрации предложенного подхода рассмотрим одномерную модель движения маневрирующей цели, положение которой описывается процессом $\varkappa(t)$, а ускорение $\ddot{\varkappa}(t)$ представляет собой процесс броуновского движения, т.е. третья производная $\ddot{\varkappa}(t)$ образует гауссовский белый шум с известной интенсивностью β^2 . Допустим, что наблюдаемый процесс $Y(t)$ представляет собой результат измерения положения $\varkappa(t)$ с гауссовской белошумной помехой неизвестной интенсивности σ^2 . Указанные предположения записываются аналогично (13) при $m = 3$:

$$\dot{X}_1 = X_2, \quad \dot{X}_2 = X_3, \quad \dot{X}_3 = \beta v(t), \quad \dot{Y} = X_1 + \sigma \varepsilon(t),$$

где $X_1(t) = \varkappa(t)$, $X_2(t) = \dot{\varkappa}(t)$, $X_3(t) = \ddot{\varkappa}(t)$, а $v(t)$ и $\varepsilon(t)$ – независимые стандартные гауссовские белые шумы.

Тогда уравнения оптимального фильтра (19), (20) принимают вид

$$\begin{cases} \dot{\hat{X}}_1 = \hat{X}_2 + 2(\beta/\sigma)^{1/3} [\dot{Y}(t) - \hat{X}_1], \\ \dot{\hat{X}}_2 = \hat{X}_3 + 2(\beta/\sigma)^{2/3} [\dot{Y}(t) - \hat{X}_1], \\ \dot{\hat{X}}_3 = (\beta/\sigma) [\dot{Y}(t) - \hat{X}_1], \end{cases} \quad (53)$$

с учетом того, что уравнение Риккати (17) имеет следующее решение:

$$G = \begin{bmatrix} 2 & \star & \star \\ 2 & 3 & \star \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

(здесь и далее символ \star используется для дублирования элементов симметричной матрицы).

Отсюда ковариационная матрица ошибки оптимальной оценки равна

$$Q = \sigma^2 \begin{bmatrix} 2\rho^{1/3} & * & * \\ 2\rho^{2/3} & 3\rho & * \\ \rho & 2\rho^{4/3} & 2\rho^{5/3} \end{bmatrix}, \quad \rho = \beta/\sigma.$$

В силу (25), (26) получаем уравнения нелинейного фильтра, которые не зависят от неизвестной интенсивности σ^2 :

$$\begin{cases} \dot{\check{X}}_1 = \check{X}_2 + \varphi_1(\delta(t)), & \varphi_1(x) = 2\beta^{1/3}\gamma_{4/3}^{-1/2}\text{sign}(x)|x|^{2/3}, \\ \dot{\check{X}}_2 = \check{X}_3 + \varphi_2(\delta(t)), & \varphi_2(x) = 2\beta^{2/3}\gamma_{2/3}^{-1/2}\text{sign}(x)|x|^{1/3}, \\ \dot{\check{X}}_3 = \varphi_3(\delta(t)), & \varphi_3(x) = \beta\text{sign}(x), \end{cases} \quad (54)$$

где $\delta(t) = \dot{Y}(t) - \dot{\check{X}}_1(t)$, причем $\gamma_{4/3} \approx 0,831$ и $\gamma_{2/3} \approx 0,802$.

Чтобы убедиться, что расхождение между ковариационной матрицей используемого нелинейного преобразования и требуемой ковариацией в (10) незначительно, приведем значения коэффициентов (27):

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ \gamma_1(\gamma_{2/3}\gamma_{4/3})^{-1/2} & 1 & * \\ \gamma_{2/3}(\gamma_{4/3})^{-1/2} & \gamma_{1/3}(\gamma_{2/3})^{-1/2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0,977\dots & 1 & * \\ 0,880\dots & 0,957\dots & 1 \end{bmatrix}.$$

На рисунке 2 приведены траектории исходного сигнала и его оценок, полученных с помощью уравнений оптимального (53) и нелинейного (54) фильтров. При этом нижний график в сравнении с верхним описывает ситуацию, когда σ^2 , т.е. интенсивность шума в наблюдениях, увеличена в 100 раз, а именно, σ было взято равным 5 и 50, соответственно. Параметр β , определяющий интенсивность возмущений β^2 , был равен 3.

На рисунке приведены также границы, построенные по правилу трех «сигм» на основе среднеквадратичной (с.к.) ошибки оптимальной фильтрации (здесь одна «сигма» равна $\sqrt{Q_{1,1}} = \sigma\sqrt{2\rho^{1/3}} = \sqrt{2}\beta^{1/6}\sigma^{5/6}$). При вариации параметра σ в 10 раз соответствующая с.к. ошибка $\sqrt{Q_{1,1}}$ меняется примерно в 7 раз: от 6,5 до 44,2 (ср. ширину коридора на верхнем и нижнем графиках).

Таким образом, нелинейный фильтр, не использующий информацию об интенсивности помех, демонстрирует поведение, почти идентичное оптимальному фильтру, который основан на точном знании характеристик измерительных ошибок.

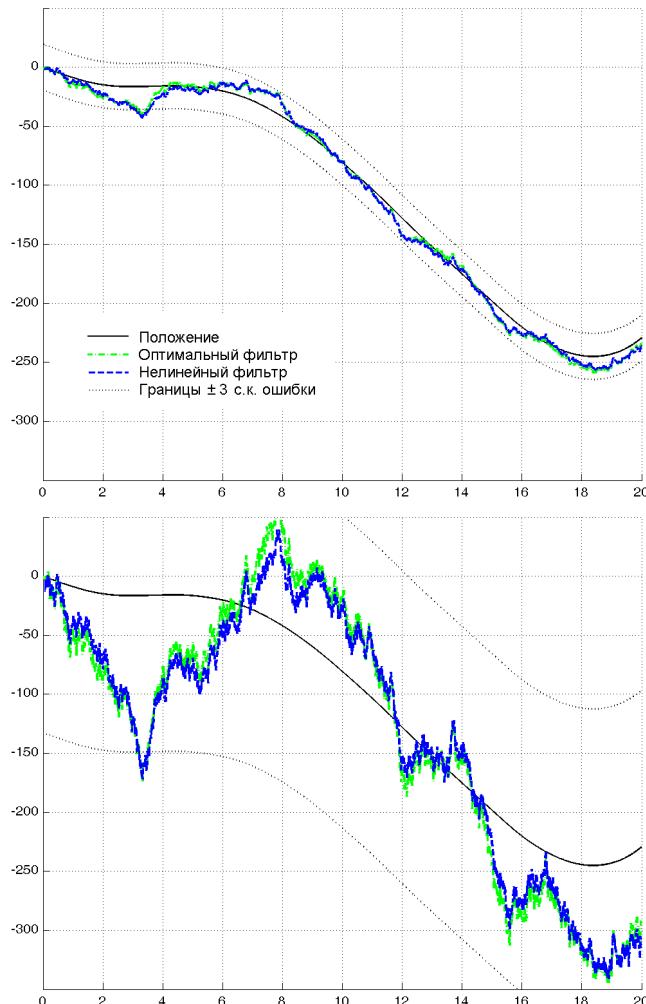


Рис. 2. Траектория положения цели $X_1(t)$, оптимальная оценка $\hat{X}_1(t)$, нелинейная оценка $\hat{X}_1(t)$ и границы радиуса три с.к. ошибки оптимального фильтра (в двух экспериментах: на нижнем графике интенсивность шума σ^2 в 100 раз больше, чем на верхнем)

6. Заключение. В работе описан метод нелинейной фильтрации (названный методом обратной статистической линеаризации), предназначенный для оценивания состояния линейной стохастической дифференциальной системы при наличии неизвестной интенсивности гауссовых белошумных помех. Предложенный метод представляет собой альтернативу двум подходам – робастному и адаптивному, традиционно используемым в задачах управления и наблюдения применительно к стохастическим системам с неопределенными параметрами.

В статье описана многомерная система со скалярными возмущениями и шумами, в которой предложенный метод приводит к явному описанию нелинейного фильтра системой дифференциальных уравнений (того же порядка, что и размерность вектора состояния). Представлено обоснование разработанного метода нелинейной фильтрации на основе асимптотического анализа соответствующей разностной схемы для ковариационной матрицы ошибки. Результаты численного эксперимента показывают, что погрешность оценивания нелинейного фильтра остается на том же уровне, что и для оптимального фильтра при вариации интенсивности помех на два порядка.

Идея изложенного выше метода фильтрации возникла у одного из авторов в те годы, когда ему посчастливилось сотрудничать с Юсуповым Рафаэлем Мидхатовичем в области разработки алгоритмов автоматического управления для технических систем общего и специального назначения. Памяти этого выдающегося ученого и неординарного человека посвящается данная статья.

Литература

1. Borisov A., Sokolov I. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes // Mathematics. 2020. vol. 8. no. 4.
2. Синицын И.Н. Методы нормальной субоптимальной фильтрации в наблюдаемых неявных гауссовых стохастических системах // Системы и средства информатики. 2025. Т. 35. № 1. С. 41–58.
3. Миллер Б.М., Колосов К.С. Робастное оценивание на основе метода наименьших модулей и фильтра Калмана // Автоматика и телемеханика. 2020. № 11. С. 72–92.
4. Kulikova M.V., Kulikov G.Y. On derivative-free extended Kalman filtering and its Matlaboriented square-root implementations for state estimation in continuous-discrete nonlinear stochastic systems // European J. Control. 2023. vol. 73.
5. Босов А.В., Урюпин И.В. Модифицированный вариант расширенного фильтра Калмана по методу линейных псевдонааблюдений // Информ. и ее примен. 2025. Т. 19. № 2. С. 17–26.
6. Ананьев Б.И. Об оценивании динамических систем при неточных ограничениях на помехи // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2025. Т. 31. № 2. С. 15–29.

7. Wang S. Distributionally robust state estimation for nonlinear systems // IEEE Trans. Signal Process. 2022. vol. 70. pp. 4408–4423.
8. Степанов О.А., Исаев А.М. Методика сравнительного анализа рекуррентных алгоритмов нелинейной фильтрации в задачах обработки навигационной информации на основе предсказательного моделирования // Гироскопия и навигация. 2023. Т. 31. № 3(122). С. 48–65.
9. Olfati-Saber R. Kalman-consensus filter: Optimality, stability, and performance // Proc. 48th IEEE Conf. Decision and Control (CDC 2009) held jointly with 28th Chinese Control Conf. 2009. pp. 7036–7042. DOI: 10.1109/CDC.2009.5399678.
10. Sharma R., Beard R.W., Taylor C.N., Quebe S. Graph-based observability analysis of bearing-only cooperative localization // IEEE Trans. Robotics. 2011. vol. 28. no. 2. pp. 522–529.
11. Wang L., Liu J., Morse A.S. A distributed observer for a continuous-time linear system with time-varying network // arXiv:2003.02134. 2020.
12. Talebi P.S., Mandic D. On the dynamics of multi agent nonlinear filtering and learning // arXiv:2309.03557v2. 2023.
13. Андреевский Б.Р., Матвеев А.С., Фрадков А.Л. Управление и оценивание при информационных ограничениях: к единой теории управления, вычислений и связи // Автоматика и телемеханика. 2010. № 4. С. 34–99.
14. Song W., Wang Z., Li Z., Wang J., Han Q.-L. Nonlinear filtering with sample-based approximation under constrained communication: Progress, insights and trends // IEEE/CAA J. Autom. Sinica. 2024. vol. 11. no. 7. pp. 1539–1556.
15. Voortman Q., Efimov D., Pogromsky A., Richard J.-P., Nijmeijer H. Remote state estimation of steered systems with limited communications: An event-triggered approach // IEEE Trans. Automat. Control. 2024. vol. 69. no. 7. pp. 4199–4214.
16. Tanwani A. Suboptimal filtering over sensor networks with random communication // IEEE Trans. Automat. Control. 2022. vol. 67. no. 10. pp. 5456–5463.
17. Ананьев Б.И. Минимаксные среднеквадратические оценки в статистически неопределенных системах // Дифференц. уравнения. 1984. Т. 20. № 8. С. 1291–1297.
18. Лебедев М.В., Семенихин К.В. Минимаксная фильтрация в стохастической дифференциальной системе с нестационарными возмущениями неизвестной интенсивности // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 2. С. 45–56.
19. Панков А.Р., Платонов Е.Н., Семенихин К.В. Робастная фильтрация процесса в стационарной разностной стохастической системе // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 167–182.
20. Коган М.М. Робастное оценивание и фильтрация в неопределенных линейных системах при неизвестных ковариациях // Автоматика и телемеханика. 2015. № 10. С. 50–66.
21. Shafieezadeh Abadeh S., Nguyen V.A., Kuhn D., Mohajerin Esfahani P.M. Wasserstein distributionally robust Kalman filtering // Advances in Neural Information Processing Systems. 2018. vol. 31.
22. Kargin T., Hajar J., Malik V., Hassibi B. Distributionally robust Kalman filtering over finite and infinite horizon // arXiv:2407.18837v1. 2024.
23. Барабанов А.Е. Линейная фильтрация с адаптивной подстройкой матриц ковариаций возмущений в объекте и шумов измерения // Автоматика и телемеханика. 2016. № 1. С. 30–49.
24. Li K., Zhao S., Liu F. Joint state estimation for nonlinear state-space model with unknown time-variant noise statistics // Internat. J. Adaptive Control and Signal Processing. 2021. vol. 35. no. 4. pp. 498–512.

25. Huang Y., Zhang Y., Wu Z., Li N., Chambers J. A novel adaptive Kalman filter with inaccurate process and measurement noise covariance matrices // IEEE Trans. Automat. Control. 2018. vol. 63. no. 2. pp. 594–601.
26. Chen Y., Li W., Wang Y. Online adaptive Kalman filter for target tracking with unknown noise statistics // IEEE Sensors Letters. 2021. vol. 5. no. 3. pp. 1–4.
27. Кануж М.М., Клоков А.В. Адаптивный ансентный фильтр Калмана для слежения за GPS-сигналами при неизвестной и изменяющейся во времени ковариации шума // Гирроскопия и навигация. 2021. Т. 29. № 3(114). С. 34–51.
28. Григорьев Ф.Н., Кузнецов Н.А. Квазиоптимальная фильтрация при неизвестной интенсивности шума в наблюдениях // Доклады II-го Всесоюзного совещания по статистическим методам теории управления. М: Наука, 1970. С. 112–118.
29. Григорьев Ф.Н. Методы управления процессом наблюдения в непрерывных системах: Дис. канд. техн. наук: 05.13.02 / Моск. физ.-техн. ин-т. Москва, 1975. 104 с.
30. Трапезников В.А. Теоретические вопросы построения АСУ крупнотоннажными транспортными судами: Сб. статей. М.: Наука, 1978. 211 с.
31. Liptser R.S., Shirayev A.N. Statistics of random processes. 3rd edition. New York: Springer, 2005.
32. Поляк Б.Т., Хлебников М.В., Рапопорт Л.Б. Математическая теория автоматического управления. М.: ЛЕНАНД, 2019. 500 с.
33. Калачев М.Г. Один метод многократного дифференцирования сигнала в системах автоматического регулирования // Автоматика и телемеханика. 1970. № 6. С. 29–36.
34. Миллер Б.М., Панков А.Р. Теория случайных процессов в примерах и задачах. М.: Физматлит, 2002. 317 с.

Кузнецов Николай Александрович — д-р техн. наук, профессор, академик РАН, советник РАН, заведующий лабораторией, лаборатория № 351, Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова Российской академии наук (ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН); заведующий кафедрой, кафедра «инфокоммуникационные системы и сети», Московский физико-технический институт. Область научных интересов: управление инфокоммуникационными системами и сетями, теория рассинхронизированных систем, методы управления наблюдениями в стохастических системах, разработка алгоритмов идентификации для систем управления движущимися объектами, оптимизация транспортных потоков, обработка биомедицинской информации. Число научных публикаций — 310. kuznetsov@cpilre.ru; улица Моховая, 11-7, 125009, Москва, Россия; р.т.: +7(495)629-3005; факс: +7(495)629-3005.

Семенихин Константин Владимирович — д-р физ.-мат. наук, доцент, профессор, образовательный центр института № 8 «компьютерные науки и прикладная математика», Национальный исследовательский университет «Московский авиационный институт» (МАИ). Область научных интересов: -методы робастной стохастической оптимизации, управление и оценивание в стохастических системах, оптимизация сетей массового обслуживания. Число научных публикаций — 125. siemenky@mail.ru; Волоколамское шоссе, 4, 125993, Москва, Россия; р.т.: +7(499)158-4560; факс: +7(499)158-4560.

Поддержка исследований. Работа выполнена по государственному заданию: ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН (FFWZ-2025-0015).

N. KUZNETSOV, K. SEMENIKHIN

**NONLINEAR FILTERING METHOD IN THE PRESENCE
OF UNKNOWN NOISE INTENSITY**

Kuznetsov N., Semenikhin K. Nonlinear Filtering Method in the Presence of Unknown Noise Intensity.

Abstract. The paper describes the method of inverse statistical linearization – the method of nonlinear filtering for state estimation in linear Gaussian differential systems with observation noise of unknown intensity. The proposed technique is based on finding a nonlinear perturbation of the innovation process while keeping the gain coefficient in the Kalman-Bucy filter. As a result, the nonlinear filter is defined by a system of differential equations of the same order as the state vector without using any additional equations for the error covariance matrix. The nonlinear filter is found in an analytical form for a one-dimensional motion model in which only the highest order derivative is affected by a white-noise stochastic disturbance, and only one output is available for observing the position with additive noise of unknown intensity. The recurrent nonlinear filtering scheme is examined to establish the unbiasedness of the estimates and to obtain the steady-state equation for their error variances and covariances. The theoretical results are confirmed on the basis of computer simulations carried out to compare the estimation accuracy of the optimal filter and the proposed nonlinear filtering scheme.

Keywords: nonlinear filtering, unknown noise intensity, linear stochastic differential system, Kalman-Bucy filter.

References

1. Borisov A., Sokolov I. Optimal filtering of Markov jump processes given observations with state-dependent noises: Exact solution and stable numerical schemes. Mathematics. 2020. vol. 8. no. 4.
2. Sinitsyn I.N. Normal suboptimal filtering methods in implicit observable Gaussian stochastic systems. Sistemy i sredstva informatiki – Systems and Means of Informatics. 2025. vol. 35. no. 1. pp. 41–58. (In Russ.).
3. Miller B., Kolosov K. [Robust estimation based on the least absolute deviations method and the Kalman filter]. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 11. pp. 1994–2010.
4. Kulikova M.V., Kulikov G.Y. On derivative-free extended Kalman filtering and its Matlab-oriented square-root implementations for state estimation in continuous-discrete nonlinear stochastic systems. European J. Control. 2023. vol. 73.
5. Bosov A.V., Uryupin I.V. [A modified extended Kalman filter by the linear pseudomeasurement method]. Inform. i ee primenenie – Informatics and Applications. 2025. vol. 19. no. 2. pp. 17–26. (In Russ.).
6. Ananyev B.I. [On estimation of dynamical systems under inexact constraints on parameters]. Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN – Tr. In-ta matematiki i mehaniki UrO RAN. 2025. vol. 31. no. 2. pp. 15–29. (In Russ.).
7. Wang S. Distributionally robust state estimation for nonlinear systems. IEEE Trans. Signal Process. 2022. vol. 70. pp. 4408–4423.
8. Stepanov O.A., Isaev A.M. [A procedure of comparative analysis of recursive nonlinear filtering algorithms in navigation data processing based on predictive modeling]. Gyroscopy Navig. 2023. vol. 14. pp. 213–224.

9. Olfati-Saber R. Kalman-consensus filter: Optimality, stability, and performance. Proc. 48th IEEE Conf. Decision and Control (CDC'2009) held jointly with 28th Chinese Control Conf. 2009. pp. 7036–7042. DOI: 10.1109/CDC.2009.5399678.
10. Sharma R., Beard R.W., Taylor C.N., Quebe S. Graph-based observability analysis of bearing-only cooperative localization. *IEEE Trans. Robotics*. 2011. vol. 28. no. 2. pp. 522–529.
11. Wang L., Liu J., Morse A.S. A distributed observer for a continuous-time linear system with time-varying network. *arXiv:2003.02134*. 2020.
12. Talebi P.S., Mandic D. On the dynamics of multi agent nonlinear filtering and learning. *arXiv:2309.03557v2*. 2023.
13. Andrievsky B.R., Matveev A.S. Fradkov A.L. [Control and estimation under information constraints: Toward a unified theory of control, computation and communications]. *Automation and Remote Control*. 2010. vol. 71. no. 4. pp. 572–633.
14. Song W., Wang Z., Li Z., Wang J., Han Q.-L. Nonlinear filtering with sample-based approximation under constrained communication: Progress, insights and trends. *IEEE/CAA J. Autom. Sinica*. 2024. vol. 11. no. 7. pp. 1539–1556.
15. Voortman Q., Efimov D., Pogromsky A., Richard J.-P., Nijmeijer H. Remote state estimation of steered systems with limited communications: An event-triggered approach. *IEEE Trans. Automat. Control*. 2024. vol. 69. no. 7. pp. 4199–4214.
16. Tanwani A. Suboptimal filtering over sensor networks with random communication. *IEEE Trans. Automat. Control*. 2022. vol. 67. no. 10. pp. 5456–5463.
17. Anan'ev B.I. [Minimax mean-square estimates in statistically indeterminate systems]. *Differenc. uravnenija – Differential equations*. 1984. vol. 20. no. 8. pp. 1291–1297. (In Russ.).
18. Lebedev M.V., Semenikhin K.V. [Minimax filtering in a stochastic differential system with non-stationary perturbations of unknown intensity]. *Journal of Computer and System Sciences International*. 2007. vol. 46. no. 2. pp. 206–217.
19. Pankov A.R., Platonov E.N., Semenikhin K.V. Robust filtering of a process in the stationary difference stochastic system. *Automation and Remote Control*. 2011. vol. 72. no. 2. pp. 377–392.
20. Kogan M.M. [Robust estimation and filtering in uncertain linear systems under unknown covariations]. *Automation and Remote Control*. 2015. vol. 76. no. 10. pp. 1751–1764.
21. Shafeezadeh Abadeh S., Nguyen V.A., Kuhn D., Mohajerin Esfahani P.M. Wasserstein distributionally robust Kalman filtering. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018. vol. 31.
22. Kargin T., Hajar J., Malik V., Hassibi B. Distributionally robust Kalman filtering over finite and infinite horizon. *arXiv:2407.18837v1*. 2024.
23. Barabanov A.E. [Linear filtering with adaptive adjustment of the disturbance covariation matrices in the plant and measurement noise]. *Automation and Remote Control*. 2016. vol. 77. no. 1. pp. 21–36.
24. Li K., Zhao S., Liu F. Joint state estimation for nonlinear state-space model with unknown time-variant noise statistics. *Internat. J. Adaptive Control and Signal Processing*. 2021. vol. 35. no. 4. pp. 498–512.
25. Huang Y., Zhang Y., Wu Z., Li N., Chambers J. A novel adaptive Kalman filter with inaccurate process and measurement noise covariance matrices. *IEEE Trans. Automat. Control*. 2018. vol. 63. no. 2. pp. 594–601.
26. Chen Y., Li W., Wang Y. Online adaptive Kalman filter for target tracking with unknown noise statistics. *IEEE Sensors Letters*. 2021. vol. 5. no. 3. pp. 1–4.

- 27. Kanouj M.M., Klokov A.V. [Adaptive unscented Kalman filter for tracking GPS signals in the case of an unknown and time-varying noise covariance]. *Gyroscopy Navig.* 2021. vol. 12. pp. 224–235.
- 28. Grigor'ev F.N., Kuznetsov N.A. [Quasi-optimal filtering in the presence of unknown noise intensity]. Conference Proceedings: *Doklady II-go Vsesoyuznogo soveschaniya po statisticheskim metodam teorii upravleniya* [Reports of the II All-Union Meeting on Statistical Methods of Management Theory]. Moscow: Nauka, 1970. pp. 112–118. (In Russ.).
- 29. Grigor'ev F.N. *Metody upravleniya protsessom nablyudeniya v nepreryvnykh sistemakh* [Methods for control of observation processes in continuous-time systems]: Ph.D. Diss. kand. tekhn. nauk: 05.13.02. Moscow: Moscow Institute of Physics and Technology, 1975. 104 p. (In Russ.).
- 30. *Teoreticheskiye voprosy postroyeniya ASU krupnotonnazhnymi transportnymi sudami: Sbornik statey* [Theoretical issues of constructing ACSs (Automated Control Systems) for large-capacity transport vessels: Collection of articles]. Moscow: Nauka, 1978. 211 p. (In Russ.).
- 31. Liptser R.S., Shirayev A.N. *Statistics of random processes*. 3rd edition. New York: Springer, 2005.
- 32. Polyak B.T., Khlebnikov M.V., Rapoport L.B. *Matematicheskaja teorija avtomaticheskogo upravlenija* [Mathematical theory of automatic control]. M.: LENAND, 2019. 500 p. (In Russ.).
- 33. Kalatchev M.G. [A method of multiple differentiation of signal in automatic control systems]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and telemechanics*. 1970. no. 6. pp. 29–36. (In Russ.).
- 34. Miller B.M., Pankov A.R. *Teoriya sluchaynykh protsessov v primerakh i zadachakh* [Theory of Random Processes: Examples and Problems]. Moscow: Fizmatlit, 2002. 317 p. (In Russ.).

Kuznetsov Nikolay — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Advisor to the Russian Academy of Sciences, Head of the laboratory, Laboratory no. 351, Kotelnikov Institute of Radioelectronics and Electronics of Russian Academy of Sciences (IRE RAS); Head of the department, Department «infocommunication systems and networks», Moscow Institute of Physics and Technology. Research interests: control of infocommunication systems and networks, theory of non-synchronous systems, methods of observation control in stochastic systems, development of identification algorithms for control systems of moving objects, optimization of traffic flows, biomedical data processing. The number of publications — 310. kuznetsov@eplire.ru; 11-7, Mokhovaya St., 125009, Moscow, Russia; office phone: +7(495)629-3005; fax: +7(495)629-3005.

Semenikhin Konstantin — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Professor, Educational center of department no. 8 «Computer Science and Applied Mathematics», Moscow Aviation Institute (National Research University) (MAI). Research interests: methods of distributionally robust optimization, control and estimation in stochastic systems, optimization of queuing networks. The number of publications — 125. siemenkv@mail.ru; 4, Volokolamskoye Hwy, 125993, Moscow, Russia; office phone: +7(499)158-4560; fax: +7(499)158-4560.

Acknowledgements. This research is supported by the State assignment: Kotelnikov Institute of Radioelectronics and Electronics, RAS (FFWZ-2025-0015).