

А.Д. МАМИНОВ  
**АВТОМАТИЗИРОВАННОЕ И ГАРАНТИРОВАННОЕ  
НАХОЖДЕНИЕ МНОЖЕСТВА РЕШЕНИЙ ДЛЯ ЗАДАЧ  
КИНЕМАТИКИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ РОБОТОВ С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ИНТЕРВАЛЬНЫХ МЕТОДОВ КРАВЧИКА  
И ХАНСЕНА-СЕНГУПТЫ**

---

*Маминов А.Д. Автоматизированное и гарантированное нахождение множества решений для задач кинематики параллельных роботов с использованием интервальных методов Кравчика и Хансена-Сенгупты.*

**Аннотация.** В статье рассматривается применение методов интервального анализа для гарантированного решения задач прямой и обратной кинематики параллельных роботов. Кинематические системы, описываемые нелинейными уравнениями, часто имеют несколько решений, а традиционные методы (аналитические, стохастические) не гарантируют нахождения всех решений или требуют значительных аналитических преобразований. В данной работе предлагается автоматизированный подход на основе интервальных методов Кравчика и Хансена-Сенгупты для локализации всех решений системы нелинейных уравнений. Ключевые преимущества подхода – гарантированность нахождения всех решений с заданной точностью и отсутствие необходимости в аналитических преобразованиях исходной системы. В экспериментальном тестировании на ряде планарных параллельных роботов (2-RPR, DexTar, PRRRP) было показано, что оба метода могут быть успешно применены для нахождения решений задач прямой и обратной кинематики. Метод Хансена-Сенгупты показывает лучший результат как по скорости сходимости (в среднем 16 итераций против 30 у метода Кравчика), так и по времени выполнения (в среднем 0.88 мс против 1.28 мс у метода Кравчика) для исследуемых роботов.

**Ключевые слова:** интервальный анализ, множество решений систем нелинейных уравнений, метод Кравчика, метод Хансена-Сенгупты, задачи кинематики в робототехнике, параллельные роботы.

---

**1. Введение.** Наибольшее развитие робототехника получила во второй половине XX века, что связано с развитием вычислительных систем и возможностью задавать последовательность команд, выполняемых роботами. В данном исследовании рассматривается класс параллельных роботов-манипуляторов [1].

Роботы-манипуляторы представляют собой сложные автоматизированные устройства, предназначенные для выполнения задач, связанных с перемещением, захватом, обработкой или сборкой объектов. Конструктивно они являются механическими системами, состоящими из нескольких звеньев, соединенных шарнирами, которые позволяют им двигаться в различных направлениях. Эти движения обеспечиваются приводами – электрическими, гидравлическими или пневматическими системами, которые преобразуют энергию в механическую работу.

Управление роботами-манипуляторами осуществляется с помощью специализированных контроллеров и программного обеспечения. Эти системы позволяют задавать точные координаты и траектории движения, а также контролировать скорость и силу воздействия на объекты. Для повышения точности и адаптивности роботы оснащаются сенсорами, такими как датчики положения, силы, температуры и даже системы машинного зрения. Эти датчики обеспечивают обратную связь, позволяя роботу корректировать свои действия в реальном времени.

На конце манипулятора устанавливаются эффекторы – специализированные инструменты, которые выполняют конкретные задачи. Это могут быть захваты для удержания объектов, сварочные горелки, шприцы для медицинских процедур или даже лазеры для резки материалов. В зависимости от задачи эффекторы могут быть легко заменены, что делает роботов-манипуляторов универсальными устройствами.

Роботы-манипуляторы нашли широкое применение в различных областях. В промышленности они используются для сборки, сварки, покраски и упаковки, значительно повышая производительность и снижая затраты. В медицине хирургические роботы, такие как Da Vinci [2], позволяют проводить сложные операции с минимальным вмешательством, что сокращает время восстановления пациентов. В космосе манипуляторы, такие как Canadarm [3], используются для обслуживания и ремонта космических станций и спутников.

Робототехнические системы определяются **системой кинематических уравнений** – недоопределённой системой нелинейных уравнений. Формально система кинематических уравнений выглядит следующим образом:

$$F(u, v) = 0, F = \begin{cases} f_1(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n), \\ f_2(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n), \\ \dots \\ f_n(u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n), \end{cases} \quad (1)$$

$F(u, v)$  – непрерывное отображение из  $\mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $u$  и  $v$  векторы в пространствах  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно. Такая система задаёт связь между вектором входных параметров  $v$  и вектором выходных параметров  $u$ . Очевидно, что такая система является недоопределённой (общее количество переменных больше количества уравнений), тем самым оставляя роботу определённую степень свободы. Под вектором входных

параметров ( $v$ ) понимаются управляющие параметры робота (например, длины штанг или угол поворота ротационного привода), а под выходными параметрами ( $u$ ) понимается положение рабочего инструмента робота в пространстве.

**Прямая задача кинематики** заключается в определении положения и ориентации конечного звена манипулятора (например, захвата или инструмента) на основе известных значений углов в шарнирах (или линейных перемещениях, если используются линейные приводы).

**Обратная задача кинематики** решает противоположную проблему: определить, какие углы в шарнирах (или линейных перемещениях) должны быть установлены, чтобы конечное звено манипулятора оказалось в заданном положении и ориентации.

**2. Обзор литературы.** Задачи прямой и обратной кинематики рассматриваются в литературе достаточно давно [4, 5].

Наиболее стандартный подход основан на аналитических преобразованиях Денавита–Хартенберга [6, 7]. Основная идея метода заключается в систематическом описании взаимного расположения звеньев робота с помощью четырёх параметров для построения матриц преобразования между системами координат соседних звеньев. Недостатками метода являются сложность аналитического вывода, а также ограниченная применимость к роботам параллельных структур.

В статье [8] рассматривается применение численных подходов на основе псевдообратной матрицы Якоби и метод FABRIK (Forward and Backward Reaching Inverse Kinematics). Отличительной чертой метода псевдообратной матрицы Якоби является его применение к избыточным манипуляторам (когда число степеней свободы больше чем размерность выходных параметров). Также заметим, что такой подход не подходит для нахождения всех решений задач кинематики.

Вышеупомянутый метод FABRIK, как и метод, предложенный в статье [9], основаны на геометрических преобразованиях исходного робота. Как и аналитические методы, такой подход не является унифицированным и требует значительных трудозатрат от исследователей.

Другой подход, получивший большую популярность в последнее время, основан на методах машинного обучения [11, 12]. Суть метода заключается в построении *black-box* отображения из множества входных (выходных) параметров в множество выходных (входных) параметров. Для построения такого отображения используются модели машинного обучения, которые обучаются на выборке известных решений. Такой подход работает достаточно быстро, но не всегда есть возможность

получить необходимую выборку для построения отображения. Также стоит отметить, что большинство современных алгоритмов основываются на стохастических градиентных оптимизационных методах, что не позволяет верифицировать полученные решения.

Также существует класс методов, основанный на сведении задачи поиска решения системы нелинейных уравнений к задаче оптимизации функционала, полученного из исходной системы уравнений (например, посредством минимизации функции невязки). В качестве оптимизационного алгоритма часто используются различные виды генетических алгоритмов [13]. Такие методы достаточно быстры с вычислительной точки зрения и могут находить всё множество решений, но не могут гарантировать точность решения, так как генетические алгоритмы рандомизированы.

В работе [14] предлагается гибридный алгоритм, основанный на применении машинного обучения, генетического алгоритма и уточнения решения с помощью численного метода Ньютона-Рафсона. Все же, задача поиска всего множества решений не ставится в данной работе, а разработанный подход сохраняет недостатки, связанные с его стохастической основой.

Идея использования методов интервального анализа для решения задач кинематики не нова. В работах [5, 15] исследовалось применение интервальных методов к различным задачам робототехники. Однако, предлагаемые подходы основаны на достаточно простом бисекционном методе, и на практике вычислительная сложность слишком велика. В работе [16] этот подход получил развитие в виде гибридного метода на основе численного алгоритма, основанного на методе Ньютона, и интервальной теоремы Канторовича для верификации найденных решений. Основной недостаток такого подхода заключается в высокой вычислительной сложности из-за множественного применения метода Ньютона для поиска подходящих начальных точек. В статье [17] рассматривалось применение оператора Хансена-Сенгупты для решения прямой задачи кинематики, однако подробного описания алгоритма и сравнения с методом Кравчика представлено не было.

Резюмируя анализ существующих работ, можно выделить несколько основных недостатков: рандомизированные алгоритмы не являются гарантированными и не всегда могут находить все решения для задач кинематики, хотя и могут решать поставленную задачу за достаточно короткое время. Подходы, основанные на интервальных методах, могут гарантированно находить все решения системы нелинейных уравнений, но исследования по применению интервальных

операторов для решения исходной системы проведены недостаточно углубленно, и большинство существующих подходов основано на вычислительно сложном бисекционном методе. Аналитические методы позволяют получать точные выражения для задач кинематики, но требуют значительных трудозатрат от исследователей.

Основным вкладом данного исследования является разработка метода для решения прямой и обратной задач кинематики, на основе интервальных методов Кравчика и Хансена-Сенгупты. Основные достоинства данного метода заключаются в следующем:

1. Локализация всех решений с заданной точностью.
2. Гарантированность результатов.
3. Высокое быстродействие.
4. Полная автоматизированность подхода.

Возможность нахождения всех решений с заданной точностью и гарантированность результатов достигается за счет применения интервального подхода. Хотя в предыдущих работах использовались схожие методы, операторы Кравчика и Хансена-Сенгупты ранее не применялись для решения задач кинематики. В данном исследовании эти методы являются основой подхода и позволяют находить решения за приемлемое время. Текущее быстродействие Python-реализации на уровне миллисекунд достаточно для задач планирования траектории в статической среде. Но для задач, требующих частого перепланирования из-за динамических изменений окружения или для прямого управления приводами в реальном времени, необходимо быстродействие на уровне микросекунд, достижимое при портировании на C++. При этом стоит отметить, что благодаря решению системы кинематических уравнений без дополнительных преобразований, достаточно лишь задать исходную систему нелинейных уравнений.

**3. Основные теоретические сведения и постановка задачи.** В данном исследовании используются методы, основанные на интервальном анализе.

Интервальный анализ (интервальная арифметика, интервальные вычисление) – это математическая дисциплина, предметом которой является решение задач с интервальными неопределённостями в данных, возникающими в постановке задачи, либо в процессе решения [18]. На основе такого математического аппарата, были разработаны численные методы, в которых для расчетов используются не обычные числа, а интервалы. Такие методы дают надежные результаты.

Следуя [19] будем обозначать интервалы полужирным шрифтом, левый (правый) конец интервала  $x$  будем обозначать через  $\underline{x}$  ( $\bar{x}$ ).

Следовательно  $x = \{x \in \mathbb{R} | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ . Множество всех вещественных интервалов обозначается как  $\mathbb{IR}$ . Интервальный вектор размерностью  $n$  определяется как прямое декартово произведение  $n$  интервалов, всё множество интервальных векторов размерности  $n$  обозначается как  $\mathbb{IR}^n$ . В данной работе полужирным шрифтом обозначаются любые интервальные величины и интервальные операции, чьими результатами будут интервальные величины. Используемые в данной работе сокращения и обозначения приведены в следующем списке:

- $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  – полужирным шрифтом обозначаются интервальные величины и интервальные расширения функций;
- $\mathbb{R}$  – множество вещественных чисел;
- $\mathbb{R}^n$  –  $n$ -мерное вещественное векторное пространство;
- $\mathbb{IR}$  – множество интервальных вещественных чисел;
- $\mathbb{IR}^n$  –  $n$ -мерное вещественное интервальное векторное пространство;
- $F(x)$ ,  $A$  – заглавными буквами обозначаются системы уравнений и матрицы;
- $A^{-1}$  – обратная матрица;
- $\underline{x}$  – нижнее подчеркивание обозначает левый конец интервала;
- $\bar{x}$  – верхнее подчеркивание обозначает правый конец интервала;
- $\cap$  – пересечение интервалов, в случае отсутствия пересечения возвращает  $\emptyset$ ;
- $\cup$  – объединение двух интервалов;
- $\max_{1 \leq i \leq n} \text{wid}(\mathbf{x}_i)$  – ширина интервального вектора,  $\text{wid}(\mathbf{x})$  – ширина интервала;
- $\text{mid}(\mathbf{x})$  – середина интервала;
- $\mathcal{K}$  – интервальный оператор Кравчика;
- $\mathcal{HS}$  – интервальный оператор Хансена-Сенгупты.

Вместе с появлением интервального анализа появилась первая вычислительная система, которая позволяла проводить операции над интервалами. В *классической* интервальной арифметики операции между интервалами  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}$  и  $\mathbf{y} \in \mathbb{IR}$  определяются по «представителям»:

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} = \{x * y | x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}, \quad (2)$$

для  $*$   $\in \{+, -, \cdot, /\}$ .

Подробную информацию про интервальную арифметику можно найти в [18, 20, 21].

Стоит обратить внимание, что в **классической** интервальной арифметики деление двух интервалов допустимо только в том случае, если делитель не содержит в себе 0. Однако, такой случай может возникнуть в процессе вычислений в рассматриваемых методах. Поэтому в данной работе применяется **расширенная интервальная арифметика Кахана** [22]. Основное отличие такой системы состоит в переопределении операции деления с возможностью делить на интервалы, содержащие 0. Более подробно про реализацию расширенной интервальной арифметики можно прочитать в [23].

Основная цель интервальной арифметики – получение верхней и нижней оценок диапазона значений функции для одной или нескольких переменных, куда в качестве аргументов подставляются интервальные величины.

*Интервальное расширение* функции  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  – это интервальная функция  $F : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  такая, что

- 1)  $F(x) = F(x)$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  из области определения  $f$ ,
- 2)  $F(x)$  является монотонной по включению, т. е. для любых  $x, y \in \mathbb{IR}^n$ ,  $x \subseteq y$  подразумевает  $F(x) \subseteq F(y)$ .

Легко показать, что если  $F(x)$  является интервальным расширением функции  $F(x)$ , то всегда  $\{F(x) \mid x \in \mathbf{x}\} \subseteq F(\mathbf{x})$ , то есть мы получаем внешнюю оценку диапазона  $F$  на интервальном векторе  $\mathbf{x} \in \mathbb{IR}^n$ .

Самый простой способ расчёта интервального расширения функции называется *естественным (натуральным) интервальным расширением*. В этом подходе все вхождения переменных в выражение для функции заменяются интервалами. Оценка диапазона значений интервальной функции вычисляется путем выполнения всех операций в соответствии с правилами интервальной арифметики. Естественное интервальное расширение функции обозначается " $f$ " как  $\mathbf{f}$ .

Постановка задачи выглядит следующим образом: пусть задана система нелинейных уравнений  $F(x) = 0$ ,  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  имеющая на интервальном векторе  $\mathbf{X} \in \mathbb{IR}^n$  конечное множество решений. Требуется найти множество всех таких интервальных векторов  $\mathbf{x}^* = \{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_k^*\} \in \mathbf{X}$ , что  $x_i^* \in \mathbf{x}_i^*$ ,  $i = 1, \dots, k$  и  $wid(\mathbf{x}_i^*) \leq \varepsilon$ , где  $F(\mathbf{x}_i^*) = 0$  и  $\varepsilon$  – заданная точность вычислений; либо убедиться, что решений нет (то есть  $\mathbf{x}^* = \emptyset$ ).

Как было написано выше, система кинематических уравнений недоопределена. Переход к определенной системе нелинейных уравнений осуществляется посредством параметризации системы (1).

Пусть задана некоторая система кинематических уравнений  $F(u, v) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  и задана некоторая точка  $v_0 \in \mathbb{R}^n$ . Параметризуя систему (1) точкой  $v_0$  получим определенную систему (в данном исследовании  $m = n$ ):

$$F(u, v_0) = 0, \quad (3)$$

где  $F$  – система из  $n$  нелинейных уравнений с  $m$  переменными. Решение системы (3) и будет являться решением прямой задачи кинематики.

Аналогичным образом выполняется параметризация системы (1) точкой  $u_0 \in \mathbb{R}^m$ :

$$F(u_0, v) = 0. \quad (4)$$

Система  $F(u_0, v)$  является определенной, а ее решение соответствует решению обратной задачи кинематики.

**4. Методы интервального анализа для решения систем нелинейных уравнений.** Интервальные методы строятся на основе интервальных операторов [24], которые основаны на отображение  $F(x)$  заданном на интервальном векторе  $X$  и их базовая суть заключается в сужение интервального вектора  $X$ , для локализации решений системы уравнений. На основе таких операторов обычно строятся итерационные схемы вида:

$$x^{k+1} = x^k \cap P(x^k, c), \text{ для } k = 0, \dots; x^0 = X, \quad (5)$$

где  $P$  обозначает интервальный оператор,  $k$  – номер итерации и  $c$  – некоторая точка из  $x^k$ . Исследуемые интервальные операторы обладают общими свойствами [21]:

1. Каждое решение системы  $F(x) = 0$  на интервальном векторе  $x^k$  лежит также в  $P(x^k, c)$ .

2. Если  $x^k \cap P(x^k, c) = \emptyset$ , то на исследуемом интервальном векторе  $x^k$  нет решений уравнения:  $x^* \notin x^k$ .

Обычно итерационная процедура заканчивается, когда ширина интервального вектора  $wid(x^k)$  будет меньше либо равна некоторой заданной точности  $\varepsilon$ , либо будет достигнуто предельное количество итераций.

В случае "стагнации" итерационного метода (когда  $\mathbf{x}^k = \mathbf{x}^{k+1}$ ) применяется бисекционное деление исходного интервального вектора  $\mathbf{x}^k$  на два равных интервальных вектора:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 \cup \mathbf{x}_2.$$

Чаще всего бисекция выполняется по компоненту интервального вектора с наибольшей шириной.

В данной работе исследуются два интервальных метода, основанных на операторах Кравчика [25] и Хансена-Сенгупты [26].

Пусть есть отображение  $F(x)$ , интервальное расширение матрицы Якоби  $F'(x)$ , интервальный вектор  $\mathbf{x}$  и вектор  $c \in \mathbf{x}$ . Тогда оператор Кравчика можно определить следующим образом:

$$\mathcal{K}(\mathbf{x}, c) = c - \Lambda \cdot F(c) + (I - \Lambda \cdot F'(\mathbf{x})) \cdot (\mathbf{x} - c), \quad (6)$$

Оператор Хансена-Сенгупты определяется так:

$$\mathcal{HS}(\mathbf{x}, c)_i = c_i - \frac{((\Lambda F(c))_i + \sum_{j=0}^i (\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ij} \cdot (\mathbf{x}_j^{k+1} - c_j))}{(\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ii}} + \frac{\sum_{j=i+1}^N (\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ij} \cdot (\mathbf{x}_j^k - c_j)}{(\Lambda F'(\mathbf{x}))_{ii}}. \quad (7)$$

$\Lambda = (\alpha I + F'(c))^{-1}$  – вещественная матрица предобуславливания. В случае если матрица  $F'(c)$  сингулярна, коэффициент  $\alpha = 1$  и  $\alpha = 0$ , если несингулярна. Как правило, в качестве  $c$  выбирается середина интервала  $c = mid(\mathbf{x})$ .

При подстановке операторов Кравчика (6) и Хансена-Сенгупты (7) в итерационную схему (5) получим *метод Кравчика* и *метод Хансена-Сенгупты* соответственно для поиска решений систем нелинейных уравнений.

В Алгоритме 1 представлен псевдокод функции нахождения всех решений системы нелинейных уравнений. Алгоритм начинается с помещения начального интервального вектора  $\mathbf{x}$  в очередь  $Q$  (строка 2). Необходимость в организации такой очереди возникает из-за возможного существования нескольких решений. Критерием остановки всего

алгоритма является опустошение очереди  $Q$ . Иными словами, пока не будут проверены все интервальные векторы, которые могут содержать решение системы, алгоритм будет выполнять их сужение.

В строке 4 берётся первый элемент из очереди  $Q$  и в случае, если ширина интервального вектора превышает значение точности  $\varepsilon$  (строка 6), применяется интервальный оператор  $P$  (строка 8). Для каждого интервального вектора  $x^k$  выполняется простейшая проверка на существование решения (строка 5). Если 0 находится в интервальной оценке  $F(x^k)$ , то решение может (но не обязано) существовать на интервале  $x^k$ . С помощью такой проверки можно заранее убрать из рассмотрения те интервальные векторы, в которых не может существовать решения.

При применении оператора Хансена-Сенгупты может возникнуть следующая ситуация: в интервальном векторе  $P$  содержится больше одного мультиинтервала. В работе [26] для уменьшения ветвлений предлагается использовать только одну из компонент мультиинтервального вектора<sup>1</sup>. В данной работе аналогичным образом ограничивается рост исследуемых интервальных векторов при пересечении интервального и мультиинтервального векторов (строка 8):

$$P \cap x^k = \begin{bmatrix} P_1 \\ [P_2^1 \cup P_2^2] \\ \dots \\ [P_n^1 \cup P_n^2] \end{bmatrix} \cap \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \cap x_1^k \\ [(P_i^1 \cap x_i^k) \cup (P_i^2 \cap x_i^k)] \\ \dots \\ x_n^k \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где  $i$ -тая компонента соответствует мультиинтервалу с максимальным "пробелом" между содержащимися интервалами  $i = \operatorname{argmax}(P_j^2 - \overline{P_j^1}), j = 1, \dots, n$ . Если компонентой является обычный интервал, то выполняется обычное пересечение интервалов.

Дальнейшие шаги алгоритма подразумевают работу с классическими интервальными векторами. Интервалы и мультиинтервалы представлены в программной реализации в виде классов, поэтому проверка на мультиинтервальность функцией `isMultiInterval` (строка 11) заключается в проверке каждой компоненты  $x^{k+1}$  на принадлежность к классу `MultiInterval`. Если  $x^{k+1}$  является мультиинтервальным вектором то необходимо преобразовать его в список обычных

<sup>1</sup>Под мультиинтервальным вектором будем понимать такой вектор, у которого хотя бы в одной позиции находится мультиинтервал

**Алгоритм 1** Нахождение решений системы нелинейных уравнений**Procedure** solve\_system( $F(x)$ ,  $x$ ,  $P$ ,  $\varepsilon$ ,  $flag_b$ ) $F(x)$  – система нелинейных уравнений,  $x$  – начальный интервальный вектор,  
 $P$  – интервальный оператор,  $\varepsilon$  – точность вычислений.

```

1: Инициализируем очередь  $Q = \{\}$ , список решений  $R = \{\}$ .
2:  $Q := Q \cup x$ 
3: while  $|Q| \neq 0$  do
4:    $x^k := Q.pop$ 
5:   if  $0 \in F(x^k)$  then
6:     if  $wid(x^k) \geq \varepsilon$  then
7:        $c := mid(x^k)$ 
8:        $x^{k+1} := P(x^k, c) \cap x^k$ 
9:        $M := \{\}$ 
10:       $flag_{bisecc} := True$ 
11:     if isMultiInterval( $x^{k+1}$ ) then
12:        $M := M \cup split(x^{k+1})$ 
13:     else
14:        $M := M \cup x^{k+1}$ 
15:     end if
16:     for  $x^m \in M$  do
17:       if  $x^m = x^k$  &  $flag_{bisecc} = True$  then
18:          $x_1^k \cup x_2^k := bisection(x^k)$ 
19:          $Q := Q \cup (x_1^k \cup x_2^k)$ 
20:          $flag_{bisecc} := False$ 
21:       else if  $x^m \neq \emptyset$  then
22:          $Q := Q \cup x^m$ 
23:       end if
24:     end for
25:   else
26:      $R := R \cup x^k$ 
27:   end if
28: end if
29: end while
30: return  $R$ 

```

интервальных векторов. Такое преобразование выполняется в строке 12 в функции `split`, путем разделения исходного мультиинтервального вектора на два интервальных вектора. Каждый из них содержит в себе либо левую часть исходного мультиинтервала, либо правую в компоненте соответствующей мультиинтервалу. Если мультиинтервалов нет в полученном векторе, то он просто помещается в список  $M$  в строке 14.

После этого шага имеется список  $M$  содержащий либо один интервальный вектор, либо два интервальных вектора, полученных из разделения мультиинтервального вектора. Если мультиинтервальное пересечение организовано другим образом, количество интервальных векторов в списке  $M$  может быть больше двух.

Необходимо проверить, произошло ли сужение интервального вектора для каждого элемента из списка  $M$  (строка 16). Возможна ситуация, когда интервальный вектор не сужается ни по одной из компонент (строка 17). В этом случае для предотвращения "заставания" алгоритма применяется бисекционное деление исходного интервала  $x^k$  на два равных интервальных вектора (строка 18), которые затем помещаются в очередь (строка 19). Бисекционное деление обычно выполняется по компоненте интервального вектора  $x^k$  с наибольшей шириной. Если исследуемый интервальный вектор сократился, то в очередь  $Q$  помещается результат пересечения  $x^m$  (строка 22).

При достижении необходимой точности, интервальный вектор помещается в список найденных решений (строка 26), который и возвращается в результате работы алгоритма (строка 30).

**5. Экспериментальные результаты.** Предложенные методы были апробированы на планарных параллельных роботах 2-RPR [27], DexTar (RRRRR) [28] и PRRRP [29]. В этой части описанные интервальные методы применяются для нахождения решений задач прямой и обратной кинематики. Полученные решения будут визуализированы.

Рассмотрим робот 2-RPR. Схематичное представление робота представлено на рисунке 1(а), а его рабочая область, найденная геометрическим способом, представлена на рисунке 1(б). Робот управляется двумя линейными приводами, способными изменять длины штанг  $v_1, v_2$ , тем самым управляя положением рабочего инструмента робота, закрепленного в точке  $P$ . Пусть  $d$  – расстояние между приводами, а точки  $A, B$  закреплены на одинаковом расстоянии ( $\frac{d}{2}$ ) от 0 по оси  $Ox$ .

Пусть нижняя  $l$  и верхняя  $L$  границы изменения длин одинаковы для обоих штанг:  $l \leq v_1 \leq L, l \leq v_2 \leq L$ . А положение рабочего инструмента  $P$  – точка  $u = (u_1, u_2)$ .

Кинематическая система робота 2-RPR задаётся следующей системой уравнений:

$$F_{2RPR}(u, v) = \begin{cases} v_1^2 - (u_1 + \frac{d}{2})^2 - u_2^2 = 0, \\ v_2^2 - (u_1 - \frac{d}{2})^2 - u_2^2 = 0. \end{cases} \quad (9)$$

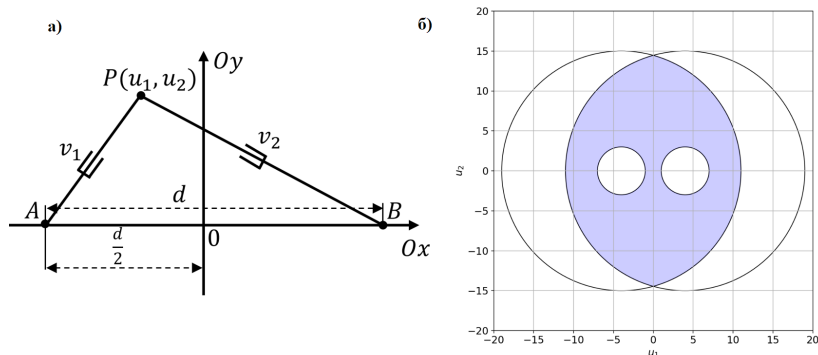


Рис. 1. а) схема робота 2-RPR; б) визуализация его рабочей области

В данном исследовании во всех экспериментах использовались следующие параметры для робота 2-RPR:  $d = 8$ ,  $l = 3$ ,  $L = 15$ .

Параллельный механизм PRRRP обычно состоит из двух частей, каждая из которых представляет собой цепь PRR соединения. Две штанги соединены в рабочем инструменте (точка  $P$ ) общим R-шарниром. Положение рабочего инструмента контролируется движением призматических соединений, расположенных в точках  $A$  и  $B$ . Движение может осуществляться в диапазоне  $v_1 = v_2 = [c, d]$ . Схема робота PRRRP показана на рисунке 2(а). Геометрически найденная рабочая область показана на рисунке 2(б).

$$F_{PRRRP}(u, v) = \begin{cases} (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - a)^2 - b^2 = 0, \\ (u_1 - v_2)^2 + (u_2 + a)^2 - b^2 = 0. \end{cases} \quad (10)$$

В данном исследовании используются следующие параметры:  $a = 2$ ,  $b = 4$ ,  $c = 0$ ,  $d = 4$ .

Рассмотрим робота DexTar. На рисунке 3(а) представлена схема робота. В состав робота входят 4 штанги постоянной длины, которые попарно равны:  $AB = DC = a$ ,  $CP = BP = b$ . Расстояние между точками крепления стержня равно  $d$ . Робот управляется двумя ротационными двигателями, закрепленными в точках  $A$  и  $D$ , которые находятся на равном расстоянии от начала координат. Поворот штанг  $AB$  и  $CD$  (углы  $v_1$  и  $v_2$ ) изменяет угол поворота штанг  $BP$  и  $CP$ , контролируя

тем самым положение рабочего инструмента, закрепленного в точке  $P$  с координатами  $(u_1, u_2)$ . Аналогично роботу 2-RPR рабочая область робота DexTag может быть найдена геометрически как пересечение колец, образованных окружностями в точках  $A$  и  $D$  с радиусам  $a + b$  и  $a - b$ , как представлено на рисунке 3(б), а его кинематическая система выглядит следующим образом:

$$F_{DEX}(u, v) = \begin{cases} (u_1 + \frac{d}{2} - a \cos(v_1))^2 + (u_2 - a \sin(v_1))^2 - b^2 = 0, \\ (u_1 - \frac{d}{2} - a \cos(v_2))^2 + (u_2 - a \sin(v_2))^2 - b^2 = 0. \end{cases} \quad (11)$$

В данном исследовании используются следующие параметры:  $v_1 = v_2 = [-\pi, \pi]$ ,  $a = 8$ ,  $b = 5$ ,  $d = 9$ .

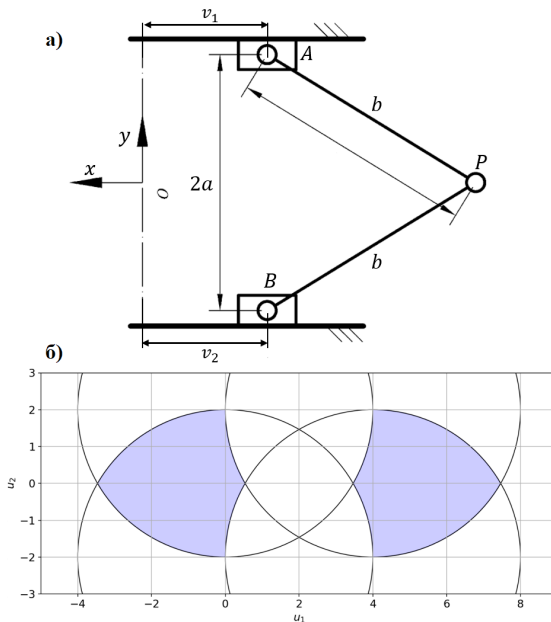


Рис. 2. а) схема робота PRRRP; б) визуализация его рабочей области

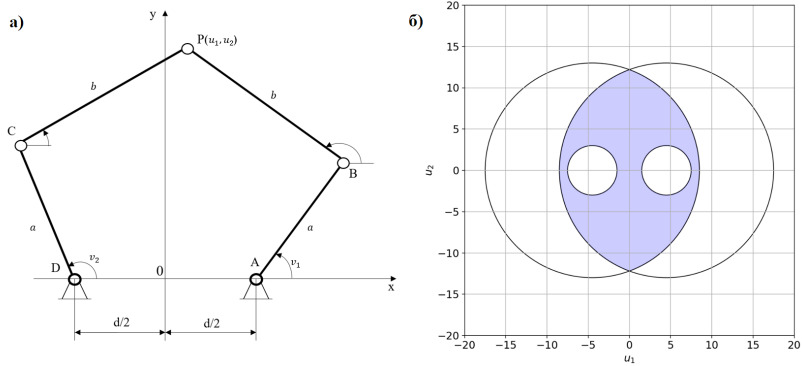


Рис. 3. а) схема робота DexTar; б) визуализация его рабочей области

Рассмотрим решение прямой и обратной задач кинематики для робота DexTar. Как было описано выше, решение задач кинематики фактически является решением нелинейной системы уравнений. Параметризуем систему кинематических уравнений для робота DexTar (11) относительно выходных параметров, аналогично системе (3), с вектором входных параметров, заданным вектором  $v^{ini} \in \mathbb{R}^2$ ,  $v^{ini} = [0.826, 0.029]$  получим:

$$F_{DEX}^d(u) = \begin{cases} (u_1 + \frac{d}{2} - a \cos(v_1^{ini}))^2 + (u_2 - a \sin(v_1^{ini}))^2 - b^2 = 0, \\ (u_1 - \frac{d}{2} - a \cos(v_2^{ini}))^2 + (u_2 - a \sin(v_2^{ini}))^2 - b^2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

То есть нужно найти все такие положения робота  $u$ , которые определяются вектором входных углов  $v$ . Система (12) представляет собой определенную систему нелинейных уравнений, чье решение и будет решением прямой задачи кинематики.

Применим Алгоритм 1 с начальным интервальным вектором  $x = [[-20, 20], [-20, 20]]$ , точностью вычисления  $\varepsilon = 10^{-6}$  и оператором Хансена-Сенгупты (7). В результате получим список решений  $R$ , который состоит из двух интервальных векторов (для упрощения концы интервалов округлены до 3 знака):

1.  $r_1 = [[8.418, 8.418], [1.114, 1.114]],$
2.  $r_2 = [[5.0, 5.0], [5.0, 5.0]].$

Напомним, что при использовании интервальных методов, результатом решения будет множество интервальных векторов, внутри которых содержатся решения заданной системы. Для перехода от интервальных оценок к точечным решениям можно взять середины этих интервальных векторов, получив таким образом два решения  $u^*$ .

Визуализация положений робота с заданным вектором входных параметров  $v^{ini}$  и найденными векторами выходных параметров  $u_i \in u^*, i = 1, 2$  показано на рисунке 4. Как можно увидеть на изображении, полученные положения составляют замкнутую кинематическую цепь и длины штанг, восстановленные по полученным решениям, соответствуют заданным, что свидетельствует о правильности решения поставленной задачи. Для второго решения дополнительно отображено увеличенное изображение в окрестностях для подтверждения того, что данная точка действительно принадлежит рабочей области робота.

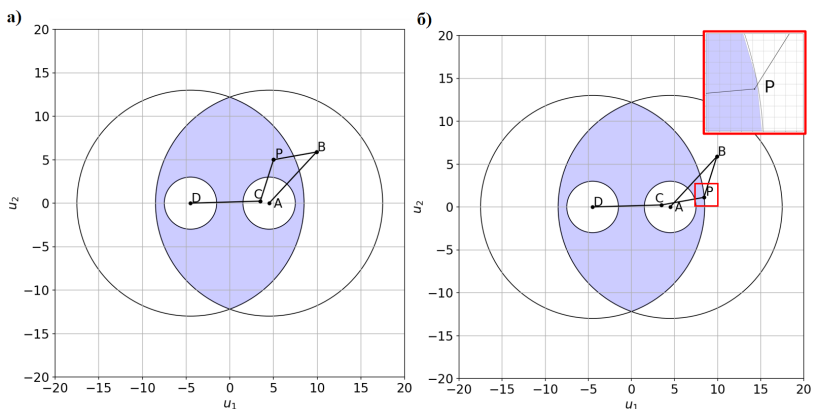


Рис. 4. Визуализация положений робота для решения прямой задачи кинематики для: а) первого решения  $u_1$ ; б) второго решения  $u_2$

Аналогичным образом решим обратную задачу кинематики для робота DexTar. Параметризуем систему кинематических уравнений для робота DexTar (11) относительно входных параметров, аналогично системе (4), с вектором выходных параметров, заданным вектором  $u^{ini} \in \mathbb{R}^2, u^{ini} = [5, 5]$ :

$$F_{DEX}^i(v) = \begin{cases} (u_1^{ini} + \frac{d}{2} - a \cos(v_1))^2 + (u_1^{yni} - a \sin(v_1))^2 - b^2 = 0, \\ (u_1^{ini} - \frac{d}{2} - a \cos(v_2))^2 + (u_2^{yni} - a \sin(v_2))^2 - b^2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

То есть нужно найти все такие начальные углы поворота штанг ( $v$ ) относительно оси  $OX$ , которые определяются положением инструмента робота  $u$ .

Для обратной задачи зададим начальный интервальный вектор  $\mathbf{x} = [[-\pi, \pi], [-\pi, \pi]]$ . В результате получим список корней  $R$ , который состоит из четырех интервальных векторов:

1.  $r_1 = [[0.826, 0.826], [0.029, 0.029]]$ ,
2.  $r_2 = [[2.116, 2.116], [0.029, 0.029]]$ ,
3.  $r_3 = [[0.826, 0.826], [0.94, 0.94]]$ ,
4.  $r_4 = [[2.116, 2.116], [0.94, 0.94]]$ .

Взяв центры этих интервальных векторов получим список решений обратной задачи кинематики  $v^*$  и визуализируем их (Рис. 5).

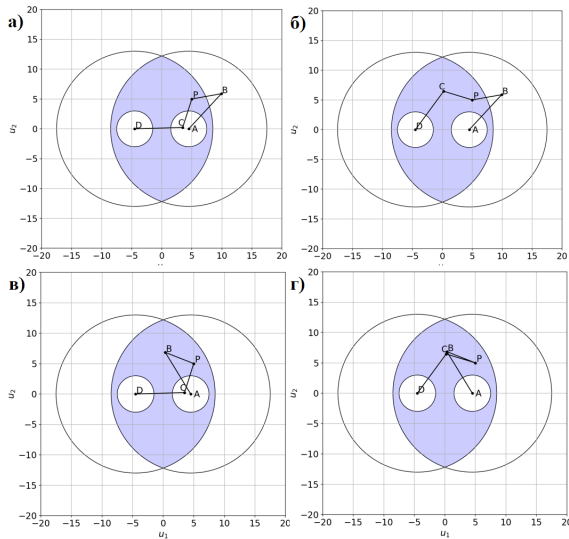


Рис. 5. Визуализация положений робота для решения обратной задачи кинематики для: а) первого решения  $v_1$ ; б) второго решения  $v_2$ ; в) третьего решения  $v_3$ ; г) четвертого решения  $v_4$

Можно заметить, что для нескольких решений получившаяся конструкция имеет пересечение звеньев между собой. Такое положение с точки зрения робототехники не является допустимым и с этим связана **задача нахождения самопересечения звеньев**, однако в данной работе она не рассматривается.

Рассмотрим результаты экспериментального исследования по сравнению методов Кравчика и Хансена-Сенгупты и метода грубого перебора из статьи [30]. Сравнение методов выполнялось по двум критериям: скорости сходимости по необходимому количеству итераций и по времени выполнения программ. Для каждого робота для каждой задачи кинематики был задан двумерный параллелепипед. В случае прямой задачи на выходные параметры накладывалось аналитическое ограничение исходя из структуры робота. Для обратной задачи использовались изначально заданные ограничения на входные параметры:

– 2-RPR.

Прямая задача:  $[-20, 20] \times [-20, 20]$ .

Обратная задача:  $[3, 15] \times [3, 15]$ .

– DexTar.

Прямая задача:  $[-20, 20] \times [-20, 20]$ .

Обратная задача:  $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ .

– PRRRP.

Прямая задача:  $[-5, 9] \times [-3, 3]$ .

Обратная задача:  $[0, 4] \times [0, 4]$ .

На заданные параллелепипеды накладывалась равномерная сетка размера  $N \times N$ , где  $N = 8$  и каждый узел сетки является точкой. Система кинематических уравнений параметризовывалась узлами сетки согласно системам (3) и (4) для прямой и обратной задач соответственно.

Для каждого узла сетки запускался Алгоритм 1 с оператором Кравчика или Хансена-Сенгупты. Точность  $\varepsilon$  для всех экспериментов равна  $10^{-6}$ . Эксперимент был проведен на персональном компьютере с процессором Intel i9-11900KF @ 3.50GHz. Методы реализованы на языке программирования Python.

В таблице 1 приведены усредненные результаты для каждого метода (метода Кравчика  $\mathcal{K}$  и метода Хансена-Сенгупты  $\mathcal{HS}$ ) по количеству итераций ( $K$ ) и по времени выполнения алгоритма ( $t$ ) для каждого робота. Для метода грубого перебора ( $BF$ ) приведено только среднее время. Усреднение выполнялось по всему набору тестовых точек. Так как на равномерных сетках присутствуют точки, для которых нет решения, то такие точки были убраны из рассмотрения.

Таблица 1. Результаты экспериментального исследования

Тестовый пример		2-RPR		DexTar		PRRRP	
		D	I	D	I	D	I
Количество решений		2	1	2	4	2	1
$t$ , мс	$\mathcal{K}$	1.13	0.43	1.11	3.4	0.87	0.49
	$\mathcal{HS}$	0.98	0.41	0.95	1.64	0.81	0.48
	$BF$	99767	8095	137195	346311	4332	1290
$K$	$\mathcal{K}$	46.98	5.72	30.04	75.56	25.09	5.48
	$\mathcal{HS}$	30.83	4.24	19.12	21.56	19.09	4.01

На рисунках 6 и 7 приведены гистограммы для тестовых точек. Оба метода нашли идентичные решения с точностью до 6 знака для всех задач. Количество найденных решений обоими методами также равно.

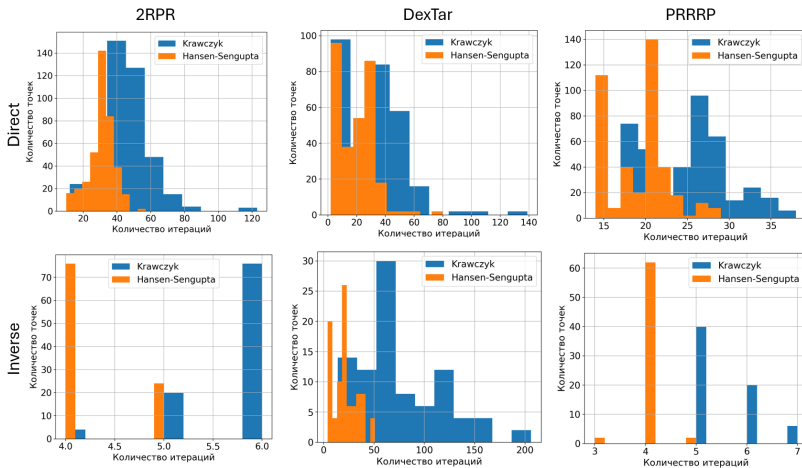


Рис. 6. Гистограммы распределений количества итераций для методов Кравчика и Хансена-Сенгупты для роботов 2-RPR, DexTar и PRRRP для прямой и обратной задач кинематики

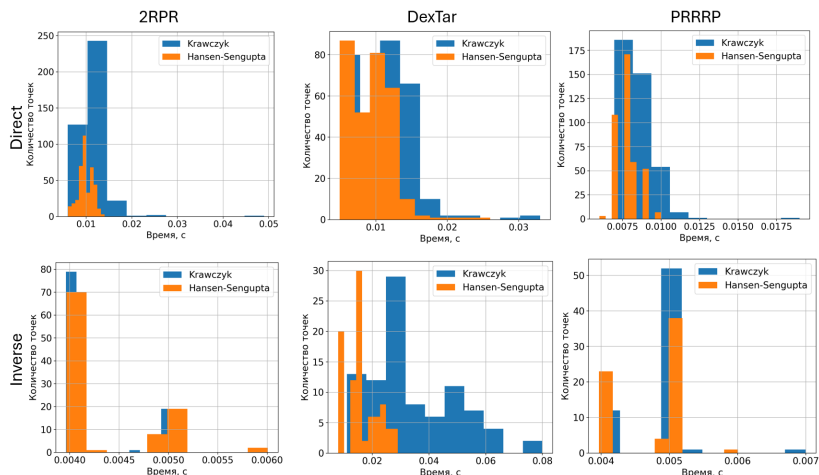


Рис. 7. Гистограммы распределений времени работы алгоритма для методов Кравчика и Хансена-Сенгупты для роботов 2-RPR, DexTar и PRRRP для прямой и обратной задач кинематики

По данным экспериментальным результатам можно сделать следующие выводы:

1. Метод полного перебора значительно уступает предложенным интервальным методам.

2. Оба метода успешно справляются с решением задач кинематики за достаточно малое время (около 1 мс).

3. На всех примерах методу Хансена-Сенгупты требуется меньшее количество итераций для сходимости до заданной точности, а время выполнения коррелирует с количеством итераций.

4. На некоторых примерах (обратная задача для роботов 2-RPR, обе кинематические задачи для робота PRRRP) методы показывают близкие результаты.

5. Небольшой "выигрыш" метода Хансена-Сенгупты можно увидеть для прямой задачи для роботов 2-RPR и DexTar.

6. Наибольшая разница заметная для обратной задачи для робота DexTar.

**6. Заключение.** В данном исследовании рассматривается подход по решению прямой и обратной задач кинематики. Подход основан на интервальном методе для решения систем нелинейных уравнений. Применение интервального анализа позволяет решить две основные проблемы для данной задачи: локализовать решения с заданной точность

и находить все решения системы. Была исследована применимость двух интервальных методов: метода Кравчика и метода Хансена-Сенгупты. Экспериментальное исследование по сравнению скорости сходимости и времени выполнения было проведено на 3 параллельных планарных роботах-манипуляторах: 2-RPR, DexTar и PRRRP.

Важно отметить, что информация о полном множестве решений задач кинематики является критически важной для обеспечения глобальной оптимальности при планировании траектории, поскольку позволяет системе выбирать не первое, а наиболее эффективное решение с точки зрения минимизации пути, энергии или избегания препятствий. Кроме того, только обладая полным спектром решений, система может осуществлять робастное перепланирование в реальном времени, мгновенно переключаясь между альтернативными кинематическими конфигурациями при возникновении непредвиденных событий. Не менее важна и гарантированная точность локализации решений, обеспечиваемая интервальными методами, которая фундаментальна для корректной работы роботов в доказательных и критически важных приложениях. Такая точность позволяет не только минимизировать накопление ошибки позиционирования, но и обеспечивает детерминированное, предсказуемое поведение системы вблизи сингулярностей, а также создает основу для полной автоматизации процессов, исключая необходимость постоянного контроля со стороны оператора. Стоит отметить, что в разработанном подходе, с учетом его интервальной основы, параметризация может выполняться не только точечными значениями, но и интервальными векторами (которые могут определять накопленную ошибку), ставя таким образом задачу локализации допустимого интервального множества решений.

В результате экспериментального исследования метод Хансена-Сенгупты показал лучшую скорость как по среднему количеству итераций (16), так и по времени выполнения (0.88 мс.). Однако можно заметить, что для нескольких тестовых примеров с небольшим количеством решений, метод Кравчика незначительно уступает методу Хансена-Сенгупты. Так или иначе, метод Хансена-Сенгупты демонстрирует наилучшую производительность и является предпочтительным выбором для решения задач кинематики в робототехнике.

В данной работе не рассматривалась задача самопересечения звеньев робота и возможным направлением исследования может быть разработка подхода, основанного на представлении геометрии звеньев в виде интервальных векторов в пространстве входных параметров. Проверка пересечения таких интервальных векторов и используя

бисекционное деление для уменьшения неопределенности, можно получить информацию о пересечении двух несмежных звеньев.

В дальнейшем планируется применить разработанный подход для роботов с более сложной кинематической структурой. Следует отметить, что метод, основанный на подходе "ветвей и отсечений" при увеличении размерности задачи может столкнуться со значительным ростом времени вычислений. Для программной реализации был выбран язык программирования Python, что упростило этап моделирования и прототипирования. Однако, для практического применения в системах реального времени разработанный алгоритм целесообразно портировать на более производительные языки, такие как C++. В будущем планируется сравнить разработанный подход с другими известными методами решения задач кинематики: генетическими алгоритмами, методами машинного обучения.

Еще одним направлением для улучшения производительности является модификация алгоритма с применением параллельных вычислений. Алгоритм может быть распараллелен как с использованием GPU, так и многоядерных CPU. Распространённый подход к параллелизации алгоритмов типа "ветвей и отсечений" заключается в параллельной обработке элементов очереди. В рамках данного алгоритма различные потоки (процессы, треды) могут независимо обрабатывать интервальные векторы из общей очереди, применяя к ним интервальный оператор. Основными проблемами при такой реализации становятся классические задачи балансировки нагрузки и эффективной синхронизации между процессами.

Альтернативный подход к параллелизации может быть направлен на ускорение вычислений внутри самих интервальных операторов. Поскольку вычисление оператора Хансена-Сенгупты включает несколько матрично-векторных операций, то для систем достаточно большой размерности их эффективная параллельная реализация на GPU может обеспечить существенное ускорение.

### Литература

1. Taghirad H.D. Parallel robots: mechanics and control. CRC press. 2025.
2. Celotto F., Ramacciotti N., Mangano A., Danieli G., et. al. Da Vinci single-port robotic system current application and future perspective in general surgery: a scoping review. *Surgical Endoscopy*. 2024. vol. 38. pp. 4814–4830. DOI: 10.1007/s00464-024-11126-w.
3. Won D., So B.-R., Kim H.-D., et al. A survey of space robotic manipulator. *Journal of Space Technology and Applications*. 2022. vol. 2. no. 4. pp. 257–267.
4. Angeles J. On the numerical solution of the inverse kinematic problem. *The International Journal of Robotics Research*, 1985. vol. 4. no. 2. pp. 21–37.
5. Merlet J.-P. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The International Journal of robotics research*. 2004. vol. 23. no. 3. pp.

- 221–235.
6. Баранов О.О., Ковальов М.П., Бреус А.О. FORWARD KINEMATICS MODELING OF A 5-DOF GANTRY ROBOT USING THE DENAVIT–HARTENBERG METHOD// Open Information and Computer Integrated Technologies. 2025. №104. С. 145–167.
  7. Xie S., Sun L., Chen G., Wang Z., Wang Z. A novel solution to the inverse kinematics problem of general 7r robots. IEEE Access. 2022. vol. 10. pp. 67451–67469. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3184451.
  8. Коровин О.С. ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КИНЕМАТИКИ ДЛЯ МАНИПУЛЯТОРА С ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ // Политехнический молодежный журнал МГТУ им. Н.Э. Баумана.2022. №12(77). DOI: 10.18698/2541-8009-2022-12-846
  9. Колтыгин Д. С., Седельников И. А. Метод и программа решения прямой и обратной задачи кинематики для управления роботом-манипулятором // Системы. Методы. Технологии. 2020. №4. С. 65–74. DOI: 10.18324/2077-5415-2020-4-65-74.
  10. Elias A.J., Wen J.T. IK-Geo: Unified robot inverse kinematics using subproblem Decomposition. Mechanism and Machine Theory. 2025. vol. 209. no. 3.
  11. Bensadoun R., Gur S., Blau N., Wolf L. Neural inverse kinematic. International Conference on Machine Learning. 2022. vol. 162. pp.1787–1797.
  12. Ames B., Morgan J., Konidaris G. Ikflow: Generating diverse inverse kinematics solutions. IEEE Robotics and Automation Letters. 2022. vol. 7. no. 3. pp. 7177–7184. DOI: 10.1109/LRA.2022.3181374.
  13. Wang Z., Jin Z. Motion Optimization of a Six-Degree-of-Freedom Robotic Arm Based on Denavit-Hartenberg Parameter Method and NSGA-II. IEEE 2nd International Conference on Electrical, Automation and Computer Engineering (ICEACE). 2024. DOI: 10.1109/ICEACE63551.2024.10898211.
  14. Zhu H., Xu W., Yu B., Ding F., Cheng L., Huang J. A novel hybrid algorithm for the forward kinematics problem of 6 dof based on neural networks. Sensors MDPI. 2022. vol. 22. no. 14.
  15. Berti A., Merlet J.-P., Carricato M. Solving the direct geometrico-static problem of underconstrained cable-driven parallel robots by interval analysis. The International Journal of Robotics Research. 2015. vol. 35. no. 6. pp. 723–739. DOI: 10.1177/0278364915595277.
  16. Baskar A., Plecnik M., Hauenstein J.D., Wanpler C.W. A numerical continuation approach using monodromy to solve the forward kinematics of cable-driven parallel robots with sagging cables. Mechanism and Machine Theory. 2024. vol. 195.
  17. Maminov A. Automated Multi-criteria Optimization of Parallel Robots. International Conference on Optimization and Applications. 2025. pp. 125–138. DOI: 10.1007/978-3-031-79119-2\_10.
  18. Баженов А.Н., Жилин С.И., Кумков С.И., Шарый С.П. Обработка и анализ интервальных данных // М.:, Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2024.
  19. Kearfott R.-B., Nakao T.-M., Neumaier A., Rump S.-M., Shary S.-P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. Computational Technologies, 2010. vol. 15. no. 1. pp. 7–13.
  20. Moore R., Kearfott B., Cloud M. Introduction to INTERVAL ANALYSIS. Prentice-Hall Englewood Cliffs. 2009.
  21. Neumaier A. Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press. 1990.

22. Shary S.-P. Non-traditional intervals and their use. Which ones really make sense?. Numerical Analysis and Applications. 2023. vol. 16. no. 2. pp. 179–191. DOI: 10.1134/S1995423923020088.
23. Kulisch U. Complete interval arithmetic and its implementation on the computer. Numerical Validation in Current Hardware Architectures: International Dagstuhl Seminar, Dagstuhl Castle, Germany, January. Revised Papers.2009. Revised Papers. 2009. pp. 7–26. DOI: 10.1007/978-3-642-01591-5\_2.
24. Krawczyk R. Properties of interval operators. Computing. 1986. vol. 37. pp. 227–245. DOI: 10.1007/BF02252514.
25. Melo I.-D., Mingoran J.-S. Interval current injection method for harmonic analysis in distribution systems: An approach using the Krawczyk operator. Electric Power Systems Research. 2022. vol. 208.
26. Ibragimov A., Kholmurodova Z., Mamurov T., Kuchkarova S., Raymova M. On the advantages of interval methods for solving nonlinear equations and their systems when teaching numerical methods. AIP Conference Proceedings. 2025. vol. 3268. DOI: 10.1063/5.0257113.
27. Maminov A., Posypkin M., Shary S. Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics. Procedia Computer Science. 2021. vol. 186. pp. 227–234.
28. Maminov A., Posypkin M. Bicentered interval Newton operator for robot's workspace Approximation. International Conference on Optimization and Applications. 2023. pp. 344–356. DOI: 10.1007/978-3-031-47859-8\_25.
29. Cinquemani S., Giberti H., Legnani G. Kinematic optimization of a 2DoF PRRRP Manipulator. Advances in Italian Mechanism Science: Proceedings of the First International Conference of IFToMM Italy. 2016. pp. 277–285. DOI: 10.1007/978-3-319-48375-7\_30.
30. Колтыгин Д. С., Седельников И. А., Петухов Н. В. Аналитический и численный методы решения обратной задачи кинематики для робота Delta // Информатика вычислительная техника и управление. 2017. Т. 21. №.5(124). С. 87–96.

**Маминов Артем Дмитриевич** – младший научный сотрудник, Федеральный исследовательский центр "Информатика и управление" Российской академии наук (ФИЦ ИУ РАН). Область научных интересов: интервальный анализ, методы оптимизации, методы решения систем нелинейных уравнений, прикладные задачи робототехники. Число научных публикаций — 10. amaminov@frcsc.ru; ул. Вавилова, 44, 119333, Москва, Россия; р.т.: +7(499)135-6260; факс: +7(495)930-4505.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке проекта № 075-15-2024-544 Министерства науки и высшего образования Российской Федерации.

A. MAMINOV

**AUTOMATED AND GUARANTEED FINDING OF SOLUTION SETS FOR PARALLEL ROBOT KINEMATICS PROBLEMS USING THE INTERVAL KRAWCZYK AND HANSEN-SENGUPTA METHODS**

*Maminov A. Automated and Guaranteed Finding of Solution Sets for Parallel Robot Kinematics Problems Using the Interval Krawczyk and Hansen-Sengupta Methods.*

**Abstract.** This article considers the application of interval analysis methods to the guaranteed solution of forward and inverse kinematics problems involving parallel robots. Kinematic systems described by nonlinear equations often have multiple solutions, and traditional methods (analytical and stochastic) do not guarantee finding all solutions or require significant analytical transformations. This paper proposes an automated approach based on the interval methods of Krawczyk and Hansen-Sengupta for localizing all solutions to a system of nonlinear equations. The key advantages of this approach are the guaranteed finding of all solutions with a given accuracy and the elimination of the need for analytical transformations of the original system. Experimental testing on a number of planar parallel robots (2-RPR, DexTar, PRRRP) demonstrated that both methods can be successfully applied to finding solutions to forward and inverse kinematics problems. The Hansen-Sengupta method shows the best results both in terms of convergence rate (on average 16 iterations versus 30 for the Krawczyk method) and execution time (approximately 0.88 ms on average versus 1.28 ms for the Krawczyk method) for the studied robots.

**Keywords:** interval analysis, solution set of systems of nonlinear equations, Krawczyk method, Hansen-Sengupta method, kinematics problems in robotics, parallel robots.

**References**

1. Taghirad H.D. Parallel robots: mechanics and control. CRC press. 2025.
2. Celotto F., Ramacciotti N., Mangano A., Danieli G., et. al. Da Vinci single-port robotic system current application and future perspective in general surgery: a scoping review. *Surgical Endoscopy*. 2024. vol. 38. pp. 4814–4830. DOI: 10.1007/s00464-024-11126-w.
3. Won D., So B.-R., Kim H.-D., et al. A survey of space robotic manipulator. *Journal of Space Technology and Applications*. 2022. vol. 2. no. 4. pp. 257–267.
4. Angeles J. On the numerical solution of the inverse kinematic problem. *The International Journal of Robotics Research*, 1985. vol. 4. no. 2. pp. 21–37.
5. Merlet J.-P. Solving the forward kinematics of a Gough-type parallel manipulator with interval analysis. *The International Journal of robotics research*. 2004. vol. 23. no. 3. pp. 221–235.
6. Baranov O., Kovalov M., Breus A. FORWARD KINEMATICS MODELING OF A 5-DOF GANTRY ROBOT USING THE DENAVIT–HARTENBERG METHOD. *Open Information and Computer Integrated Technologies*. 2025. no. 104. pp. 145–167. (In Russ.).
7. Xie S., Sun L., Chen G., Wang Z., Wang Z. A novel solution to the inverse kinematics problem of general 7r robots. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 67451–67469. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3184451.
8. Korovin O. [AN OVERVIEW OF METHODS FOR SOLVING THE INVERSE KINEMATICS PROBLEM FOR A REDUNDANT MANIPULATOR]. *Politekhnicheskii molodezhnyi zhurnal MGTU im. N. E. Baumana – Polytechnic Youth Magazine of*

- Bauman Moscow State Technical University. 2022. no. 12(77). DOI: 10.18698/2541-8009-2022-12-846. (In Russ.).
9. Kolygin D., Sedelnikov I. [A method and program for solving the direct and inverse kinematics problem for controlling a robotic arm]. *Sistemy. Metody. Tekhnologii. – The system. Methods. Technologies.* 2020. no. 4. pp. 65–74. DOI: 10.18324/2077-5415-2020-4-65-74. (In Russ.).
  10. Elias A.J., Wen J.T. IK-Geo: Unified robot inverse kinematics using subproblem Decomposition. *Mechanism and Machine Theory.* 2025. vol. 209. no. 3.
  11. Bensadoun R., Gur S., Blau N., Wolf L. Neural inverse kinematic. *International Conference on Machine Learning.* 2022. vol. 162. pp.1787–1797.
  12. Ames B., Morgan J., Konidaris G. Ikflow: Generating diverse inverse kinematics solutions. *EEE Robotics and Automation Letters.* 2022. vol. 7. no. 3. pp. 7177–7184. DOI: 10.1109/LRA.2022.3181374.
  13. Wang Z., Jin Z. Motion Optimization of a Six-Degree-of-Freedom Robotic Arm Based on Denavit-Hartenberg Parameter Method and NSGA-II. *IEEE 2nd International Conference on Electrical, Automation and Computer Engineering (ICEACE).* 2024. DOI: 10.1109/ICEACE63551.2024.10898211.
  14. Zhu H., Xu W., Yu B., Ding F., Cheng L., Huang J. A novel hybrid algorithm for the forward kinematics problem of 6 dof based on neural networks. *Sensors MDPI.* 2022. vol. 22. no. 14.
  15. Berti A., Merlet J.-P., Carricato M. Solving the direct geometrico-static problem of underconstrained cable-driven parallel robots by interval analysis. *The International Journal of Robotics Research.* 2015. vol. 35. no. 6. pp. 723–739. DOI: 10.1177/0278364915595277.
  16. Baskar A., Plecnik M., Hauenstein J.D., Wanpler C.W. A numerical continuation approach using monodromy to solve the forward kinematics of cable-driven parallel robots with sagging cables. *Mechanism and Machine Theory.* 2024. vol. 195.
  17. Maminov A. Automated Multi-criteria Optimization of Parallel Robots. *International Conference on Optimization and Applications.* 2025. pp. 125–138. DOI: 10.1007/978-3-031-79119-2\_10.
  18. Bazhenov A., Zhilin S., Kumkov S., Sharyi S. [Interval data processing and analysis]. Moscow: Izhevsk: Institut komputernykh issledovaniy. 2024. (In Russ.).
  19. Kearfott R.-B., Nakao T.-M., Neumaier A., Rump S.-M., Shary S.-P., Hentenryck P. Standardized notation in interval analysis. *Computational Technologies,* 2010. vol. 15. no. 1. pp. 7–13.
  20. Moore R., Kearfott B., Cloud M. *Introduction to INTERVAL ANALYSIS.* Prentice-Hall Englewood Cliffs. 2009.
  21. Neumaier A. *Interval methods for systems of equations.* Cambridge University Press. 1990.
  22. Shary S.-P. Non-traditional intervals and their use. Which ones really make sense?. *Numerical Analysis and Applications.* 2023. vol. 16. no. 2. pp. 179–191. DOI: 10.1134/S1995423923020088.
  23. Kulisch U. Complete interval arithmetic and its implementation on the computer. *Numerical Validation in Current Hardware Architectures: International Dagstuhl Seminar, Dagstuhl Castle, Germany, January. Revised Papers.* 2009. Revised Papers. 2009. pp. 7–26. DOI: 10.1007/978-3-642-01591-5\_2.
  24. Krawczyk R. Properties of interval operators. *Computing.* 1986. vol. 37. pp. 227–245. DOI: 10.1007/BF02252514.

25. Melo I.-D., Mingoran J.-S. Interval current injection method for harmonic analysis in distribution systems: An approach using the Krawczyk operator. *Electric Power Systems Research*. 2022. vol. 208.
26. Ibragimov A., Kholmurodova Z., Mamurov T., Kuchkarova S., Raymova M. On the advantages of interval methods for solving nonlinear equations and their systems when teaching numerical methods. *AIP Conference Proceedings*. 2025. vol. 3268. DOI: 10.1063/5.0257113.
27. Maminov A., Posypkin M., Shary S. Reliable bounding of the implicitly defined sets with applications to robotics. *Procedia Computer Science*. 2021. vol. 186. pp. 227–234.
28. Maminov A., Posypkin M. Bicentered interval Newton operator for robot's workspace Approximation. *International Conference on Optimization and Applications*. 2023. pp. 344–356. DOI: 10.1007/978-3-031-47859-8\_25.
29. Cinquemani S., Giberti H., Legnani G. Kinematic optimization of a 2DoF PRRRP Manipulator. *Advances in Italian Mechanism Science: Proceedings of the First International Conference of IFToMM Italy*. 2016. pp. 277–285. DOI: 10.1007/978-3-319-48375-7\_30.
30. Koltygin D., Sedelnikov I., Petukhov N. [Analytical and numerical methods for solving the inverse kinematics problem for the Delta robot]. *Informatika, vychislitel' naya tekhnika i upravlenie – Computer Science Computer engineering and management*. 2017. vol. 21. no. 5(124). pp. 87–96. (In Russ.).

**Maminov Artem** – Junior research assistant, Federal Research Center "Computer Science and Control" of the Russian Academy of Sciences (FRC CSC RAS). Research interests: interval analysis, optimization methods, methods for solving systems of nonlinear equations, applied problems of robotics. The number of publications — 10. amaminov@frcsc.ru; 44, Vavilova St., 119333, Moscow, Russia; office phone: +7(499)135-6260; fax: +7(495)930-4505.

**Acknowledgements.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, project no. 075-15-2024-544.