УДК 519.872 **DOI** 10.15622/ia.23.6.1

В.А. Гончаренко, А.Д. Хомоненко, Р. Абу Хасан

КОМПОЗИЦИОННЫЙ ПОДХОД К ИМИТАЦИОННОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Гончаренко В.А., Хомоненко А.Д., Абу Хасан Р. **Композиционный подход к имитационному моделированию систем массового обслуживания со случайными параметрами.**

Аннотация. Обоснован общий подход к моделированию случайных процессов обслуживания в условиях возмущений и неопределенности исходных данных. Предложен композиционный подход построения имитационных моделей массового обслуживания с параметрической неопределенностью на основе распределений фазового типа и фазовых функций. Проведены расчет и сравнение характеристик разработанных имитационных моделей с аналитическими решениями для подтверждения их эффективности и точности. Освещена проблематика неопределенности исходных данных и их влияние на моделирование систем обслуживания. Подчеркивается важность учета параметрической неопределенности в имитационных моделях для повышения их адекватности и применимости на практике. Проведенное исследование включает описание общего подхода к моделированию случайных процессов обслуживания с неопределенностью, а также методологические основы применения фазовых распределений и функций в композиционном моделировании. Рассмотрены четыре класса моделей обслуживания, отличающихся типом интегрального ядра и фазовой функции, что позволяет реализовать разнообразие случайных процессов обслуживания с учетом их особенностей и условий их возникновения. Проведен анализ модели с экспоненциальным интегральным ядром и различными видами фазовых функций, что демонстрирует гибкость и широкие возможности предложенного композиционного подхода к изучению и моделированию систем обслуживания. Представлены результаты имитационного моделирования, подтверждающие аналитические исследования и показывающие применимость и эффективность разработанного подхода при построении и анализе моделей систем обслуживания со случайными параметрами. Отмечается практическая значимость композиционного метода для проектирования и модернизации информационно-вычислительных систем на различных этапах их развития с учетом неопределенности исходных данных. Рассмотрены примеры расчета характеристик элементов архитектуры АСУ железнодорожного транспорта обработки информации в среде имитационного моделирования GPSS World для сетевого узла и сетевой модели массового обслуживания сегмента. Работа ориентирована на развитие методов имитационного моделирования систем массового обслуживания и открывает новые перспективы для их исследования и оптимизации в условиях неопределенности исходных параметров.

Ключевые слова: композиционный подход, интегральное ядро, имитационное моделирование, случайный параметр, параметрическая неопределенность, гипердельтное распределение вероятностей, обобщенная функция, распределение фазового типа, равномерно-экспоненциальное распределение, аппроксимация, фазовая функция, системы массового обслуживания.

1. Введение. Модели систем и сетей массового обслуживания являются важным инструментом для анализа и оптимизации процессов обслуживания в различных сферах, включая транспорт, телекоммуникации и другие сферы. Эти модели позволяют исследователям и инженерам прогнозировать поведение и характеристики системы, анализировать ее производительность и идентифицировать узкие места, предлагать меры для повышения эффективности работы системы в целом.

В числе актуальных современных направлений развития моделей и методов исследований систем и сетей массового обслуживания можно выделить следующие классы.

1. Модели систем массового обслуживания с управляемыми режимами, включая механизмы "разогрева" и "охлаждения", представляют собой развитие классических подходов к управлению очередями. Эти механизмы позволяют динамически адаптироваться к изменяющимся условиям потока заявок, оптимизируя ресурсы и улучшая качество обслуживания. Для систем облачных вычислений с Веб-интерфейсом в статье [1] предложены вероятностные модели многоканальных систем с «разогревом», «охлаждением» и аппроксимирующими распределениями фазового типа. Работа многих реальных систем, например, серверов дата-центров, сопровождается нагревом и охлаждением сервера. В статье [2] рассматривается задача оптимального выбора пороговых значений разогрева и охлаждения сервера в соответствии с выбранным экономическим критерием.

2. Во многих реальных системах очередей задачи или клиенты имеют разные уровни приоритета. Это требует разработки и анализа моделей систем массового обслуживания с приоритетами, чтобы эффективно управлять потоком клиентов в соответствии с их важностью. Расчет приоритетных режимов для многоканальных систем массового обслуживания относится к классу трудно решаемых задач. В частности, в работе [3] рассматриваются усложненные варианты систем массового обслуживания с динамическими приоритетами. В числе методов расчета вероятностно-временных характеристик многоканальных систем массового обслуживания (СМО) с приоритетами отметим предложенный в [4] и развиваемый в [5] подход к разрешению проблемы снижения размерности, основанный на использовании периода непрерывной занятости системы обслуживанием заявок высшего приоритета.

3. Модели систем массового обслуживания с повторными вызовами – это категория моделей, используемая для исследования систем, в которых заявки, не получившие обслуживание с первой попытки, возвращаются в систему для повторной попытки обслуживания. Они широко применяются для анализа разнообразных

систем и процессов, таких как телекоммуникационные сети, системы технической поддержки, колл-центры и многие другие. Их использование обеспечивает более реалистичное моделирование, в частности, систем с повторными вызовами и конфликтами заявок [6]. В работе [7] исследуется эффект эгоистичного обучения в системе очередей, где соревнуются за ресурсы, но раунды не являются полностью независимыми: число пакетов, которые нужно маршрутизировать в каждом раунде, зависит от успеха маршрутизаторов в предыдущих раундах. В работе [8] исследуется усложненный класс моделей систем с приоритетным обслуживанием и повторными заявками.

4. Модели и методы исследования систем массового облуживания с неопределенностью параметров относятся к сравнительно новому направлению. При моделировании процессов обслуживания в информационно-вычислительных системах (ИВС) обычно параметры модели задаются в виде констант на основе исходных данных, получаемых в результате наблюдений за реальной системой либо экспертного оценивания для проектируемой системы. Однако исходным данным для модели зачастую свойственна некоторая степень неопределенности, обусловленная различными причинами. Так, реальные системы обработки информации функционируют в условиях нестабильности основных параметров, воздействия различных возмущающих факторов, приводящих не просто к увеличению разброса случайных показателей качества, но и к их смещению [9]. Кроме того, неточность получаемых исходных данных о наблюдаемой системе влечет неточность задания параметров модели и результатов моделирования [10]. Для гипотетических объектов и процессов неопределенность исходных данных еще более существенна, так как сведения о моделируемой системе весьма ограничены и приблизительны.

В этом случае целесообразно описание такой неопределенности вводить в модель, как составной ее элемент [11, 12]. В работе [13] представлены исследования неопределенности входных данных при стохастическом моделировании, классификация основных направлений исследований и с акцентом на разработках в последние годы. Рассматриваются прикладные исследования, в которых анализируют представления неопределенности входных данных при моделировании реальных стохастических систем в различных отраслях. Отметим, что аналогичные задачи при стохастическом моделировании управления трафиком воздушным движением решаются в статье [14].

В статье [15], при условии отсутствия предварительной информации о входных моделях и средней поверхности отклика системы, предлагается байесовская непараметрическая структура для количественной оценки воздействия обоих источников неопределенности. Для моделирования смеси разнородных распределений используются непараметрические входные модели на основе процесса Дирихле (DPM), которые могут точно отражать важные характеристики реальных данных, такие как мультимодальность и асимметрия.

Существует ряд аналитических решений для систем массового обслуживания с неопределенностью или возмущениями исходных данных [16 – 20]. Однако задачи, возникающие при исследовании сложных систем в условиях неопределенности исходных данных трудно, а подчас и невозможно решить аналитическими методами, поэтому целесообразно прибегать к методам имитационного моделирования [11, 21].

В данной статье предложен композиционный подход к имитационному моделированию систем с неопределенностью, для которых аналитические решения не всегда возможны, а также сравнительный анализ результатов имитационного моделирования с известными аналитическими решениями.

Научная новизна предлагаемого исследования по сравнению с ранее опубликованными работами состоит в следующем:

1) впервые предложены более полные критерии классификации моделей обслуживания с композиционным представлением исходных распределений, предложенные в [13];

2) развит подход гиперпредставления распределений случайных величин, предложенный в [26], введено гиперравномерное распределение, полученное как композиция равномерного интегрального ядра и гипердельтной фазовой функции;

3) предложена идея имитационного моделирования систем с параметрической неопределенностью на основе композиционного подхода, предполагающего двухэтапную генерацию случайных интервалов времени между событиями (генерация случайных параметров – генерация случайных интервалов);

4) предложена композиционная конструкция операторов (блоков) языка GPSS Generate и Advance для генерации случайных чисел, распределенных по законам со случайными параметрами;

5) предложен ряд имитационных моделей, в том числе сетевых, экспериментально подтверждающих гипотезу о смещении средних времен пребывания в системе при рандомизации

параметров [14], что ведет к повышению требований к проектируемым системам обработки информации.

2. Общий подход к моделированию случайных процессов с неопределенностью параметров распределений. Неопределенность описания случайных процессов из-за недостоверности исходных данных и действия возмущающих факторов часто может быть сведена к параметрической неопределенности, которую необходимо в процессе накопления исходных данных либо устранить, либо описать более точно (в случае, если неоднозначность параметров присуща этим случайным процессам изначально). Процедура уменьшения или уточнения этой недостоверности будет зависеть от характера неопределенности, возможностей получения дополнительной информации и корректировки расчетов до принятия решений [12, 16]. Существует ряд методов анализа стохастических систем, в которых исходные данные изменяются случайным образом [22]. Одним из способов описания моделей с неопределенностью параметров является интервальный подход [24, 25], позволяющий описать размытость, нечеткость параметров с помощью задания диапазонов их возможных значений. В подобных случаях используют методы принятия решений в условиях неопределенности и адаптации [26].

Рассмотрим общий подход к моделированию случайных процессов в системах массового обслуживания (СМО) с неопределенностью исходных данных и внешними возмущающими воздействиями с помощью задания случайности параметров основных распределений вероятностей, описывающих СМО. Будем считать, что случайное изменение данных параметров может определяться как динамикой функционирования сложной системы, так и возникновением возмущающих воздействий, приводящих к отклонению параметров распределений от исходных невозмущенных значений [12]:

$$\hat{\lambda}_i(t) = \lambda_i(t) + \Delta\hat{\lambda}_i(t), \quad i = 1 \div m. \qquad (1)$$

Такая модель позволяет учесть, как недостоверность исходных параметров, так и их возмущение. Очевидно, что моменты изменения случайных параметров распределений времени между событиями определяются моментами наступления событий. Поскольку параметры распределений сами формально являются случайными, то функция распределения (ФР) времени между событиями представляется *элементарной случайной функцией* – $F(x,\hat{\lambda}) = \hat{y}(x)$. Полной характеристикой такой функции является *функционал распределения* $G(y(x)) = P\{\hat{y}(x) < y(x)\}$, а математическим ожиданием – функция распределения случайной величины (СВ) $\hat{x}$, усредненная по случайным параметрам $\hat{\lambda}_i$.

Если исходную случайную плотность распределения $f(t,\lambda)$ заменить усредненной плотностью распределения, это сведет описываемый случайный процесс к *процессу восстановления* [17]. Последний можно считать математическим ожиданием случайного процесса со случайно распределенными параметрами. При значительном увеличении дисперсии аппроксимируемого случайного процесса качество такой аппроксимации будет ухудшаться [21, 27].

Использование данного приема позволило исследовать ряд новых моделей теории очередей с неопределенностью параметров распределений [16]. В таких моделях вводится понятие *фазовой функции* (или *функции фазы*), как обобщение понятия набора фаз (последовательных, параллельных), используемого в методе фиктивных фаз Эрланга [16, 18].

Рассматриваемый композиционный подход состоит в представлении распределений вероятностей в виде двухуровневой композиции интегрального ядра и фазовой функции, являющейся обобщением понятия плотности распределения случайного параметра. Функцию плотности распределения (ПР) СВ t запишем в виде *композиции* интегрального ядра $f(t,\lambda)$ и фазовой функции $h(\lambda)$ [29]:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\lambda)h(\lambda)d\lambda . \tag{2}$$

Аналитические решения для таких СМО были найдены при простейших предположениях об исходных распределениях (экспоненциальные распределения времени между событиями и равномерные распределения случайных параметров) [12, 17, 18]. Однако теоретически интегральное ядро $f(t,\lambda)$ в формуле (2) можно задать произвольной функцией (степенной, тригонометрической, гиперболической, логарифмической, равномерной и др.). Фазовая же функция может быть задана даже *обобщенной* функцией типа дельта-функции Дирака или её производной [28, 29], при этом по физическому смыслу она может и не быть плотностью распределения случайного параметра. Наибольших результатов можно добиться, если выбрать в качестве интегрального ядра экспоненту. Если вместо фазовой функции использовать линейные комбинации или производные дельта-функций (в том числе так называемое гипердельтное представление), то можно получить семейство известных *распределений фазового типа* [30 –32]. При выборе же фазовых функций, представляющих плотности распределений непрерывных СВ в результате композиции могут быть получены новые смешанные распределения, которые являются усредненными по случайным непрерывным параметрам функциями [29]. Однако общее аналитическое решение уравнения (2) возможно только в частных случаях для $f(t,\lambda)$ и $h(\lambda)$.

3. Классы моделей обслуживания с параметрической неопределенностью. Распределения фазового типа нашли наибольшее применение в теории массового обслуживания и теории надежности ввиду простоты марковизации случайных процессов путем *свертки* или *вероятностной смеси* экспоненциальных распределений. В то же время экспоненциальное распределение можно считать частным случаем распределения фазового типа с одной фазой.

Однако существует и ряд моделей с распределениями нефазового типа – детерминированным, равномерным, нормальным, гамма-распределением, Парето, Вейбулла и др. К этому же классу можно отнести и так называемое гипердельтное распределение [30], образованное смесью дельта-функций Дирака. В имитационном моделировании также используют смеси и свертки дискретных и непрерывных распределений [18].

В результате исследований было выявлено, что ряд известных распределений является сверткой или смесью других известных более простых распределений [9, 12].

В [16] приведены четыре класса моделей СМО, построенных на основе композиционного представления вида (2).

1) с экспоненциальным интегральным ядром и дискретной фазовой функцией;

2) с экспоненциальным интегральным ядром и фазовой функцией, не являющейся ПР;

3) с ядром фазового типа и непрерывной фазовой функцией;

4) с ядром нефазового типа и произвольной фазовой функцией.

Модели *первого класса* являются наиболее простыми и позволяют получить стандартные фазовые распределения (типа гиперэкспоненциального, гипоэкспоненциального, Кокса и др.).

При экспоненциальном интегральном ядре $f(t,\lambda)$ и гипердельтной фазовой функции $h(\lambda)$

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i \delta(\lambda - \lambda_i) \tag{3}$$

из (2) получим *гиперэкспоненциальную плотность распределения*, часто используемую для аппроксимации реальных распределений случайных величин в теории очередей [34]:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \ . \tag{4}$$

Аналогично можно получить композиционное представление *гипоэкспоненциальной плотности распределения* с коэффициентом вариации меньше 1, если использовать так называемую *гиподельтную фазовую функцию h(λ):*

$$h(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^{i-1} C_i \delta(\lambda - \lambda_i), \tag{5}$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} \left(-1\right)^{i-1} C_i \lambda_i e^{-\lambda_i t} \ . \tag{6}$$

Модели *второго класса* также могут служить для построения фазовых распределений (в частности, последовательных фазовых распределений типа Эрланга). Например, при экспоненциальном интегральном ядре и фазовой функции, представленной частной производной δ-функции Дирака по переменной λ

$$h(\lambda) = \frac{\lambda_0{}^2 \cdot d\delta(\lambda - \lambda_0)}{\lambda d\lambda}, \tag{7}$$

получим простое распределение Эрланга 2-го порядка

$$f(t)=\lambda_0^2 t e^{-\lambda_0 t} \ . \tag{8}$$

Модели *третьего класса* в качестве ядра могут использовать фазовые распределения (экспоненциальное, гиперэкспоненциальное, гипоэкспоненциальное, Эрланга, Кокса и др.), а с помощью непрерывной фазовой функции создавать размытые по случайным (возмущенным) параметрам распределения. Например, при экспоненциальном интегральном ядре и непрерывном равномерном представлении фазовой функции

$$h(\lambda)=\frac{\mathbf{1}(\lambda-a)\cdot\mathbf{1}(b-\lambda)}{b-a}, \tag{9}$$

где $\mathbf{1}(x)$ – единичная импульсная функция, образуем *равномерно-экспоненциальное распределение*:

$$f(t)=\frac{(1+at)e^{-at}-(1+bt)e^{-bt}}{(b-a)t^2}. \tag{10}$$

Аналогично может быть получено *равномерно-гиперэкспоненциальное распределение* при гиперэкспоненциальном ядре и равномерных распределениях его параметров $\hat{\lambda}_i$. Гиперэкспоненциальное распределение обычно используется для моделирования времен обработки, которые имеют большую вариативность, чем стандартное экспоненциальное распределение. В случае введения равномерного распределения его параметров можно обеспечить еще большую гибкость и дополнительные возможности аппроксимации различных типов данных.

Следует отметить, что аналогичное распределение может быть получено и при экспоненциальном ядре и так называемом *гиперравномерном* представлении фазовой функции. Гиперравномерное распределение представляет собой смесь равномерных распределений случайного параметра. Полученная плотность распределения в соответствии с (2) представляет собой *гиперравномерно-экспоненциальное распределение*. Как показали проведенные исследования, несмотря на различные схемы образования этих распределений, итоговые формулы совпадают. Оба подхода в конечном счёте приводят к интегрированию экспоненциальной функции по случайному параметру $\hat{\lambda}$, распределённому равномерно на нескольких интервалах. В случае гиперравномерно-экспоненциального распределения это происходит через смесь равномерных распределений случайного параметра, а в случае равномерно-гиперэкспоненциального распределения – через прямое равномерное распределение этих параметров гиперэкспоненты.

При экспоненциальном ядре и экспоненциальной фазовой функции усредненное по случайному параметру распределение представляет собой смещенное распределение Парето 1-го порядка, у которого математическое ожидание бесконечно. Можно показать, что формирование распределений Парето высших порядков на основе композиционного подхода потребует использования новых операторов преобразования, например, таких, как степенные или логарифмические функции, или случайности высших степеней (например, случайность параметров распределения случайного параметра $\hat{\lambda}$).

Наиболее общие модели *четвертого класса* позволяют создавать сколь угодно сложные распределения. К простейшему распределению этого класса относится детерминированное (регулярное) распределение, у которого и интегральное ядро, и фазовая функция представлены дельта-функциями Дирака.

При детерминированном интегральном ядре, представленном дельта-функцией Дирака $\delta(t-T)$, и гипердельтном представлении фазовой функции

$$h(T)=\sum_{i=1}^{n} C_i \delta(\mathrm{T}-\mathrm{T}_i) \qquad (11)$$

имеем гипердельтную плотность распределения

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i \delta(t-T_i). \qquad (12)$$

При непрерывном равномерном представлении интегрального ядра плотность распределения имеет вид

$$f(t,T)=\frac{\mathbf{1}(t-u)\cdot\mathbf{1}(v-t)}{v-u}, \qquad (13)$$

где $T = (u + v) / 2, u = T - \sigma\sqrt{3}, u = T + \sigma\sqrt{3}$, и при гипердельтной фазовой функции получим *гиперравномерное представление* плотности распределения

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} C_i \frac{\mathbf{1}(t - u_i) \cdot \mathbf{1}(v_i - t)}{v_i - u_i}. \tag{14}$$

Выделим критерии классификации моделей обслуживания с композиционным представлением исходных распределений:

– *по типу интегрального ядра:*

1) с ядром фазового типа (включая экспоненциальное);

2) с ядром нефазового типа;

– *по физической интерпретации фазовой функции:*

1) с фазовой функцией, являющейся плотностью распределения параметра;

2) с фазовой функцией, не являющейся плотностью распределения параметра;

– *по типу фазовой функции:*

1) с фазовой функцией, являющейся непрерывным распределением;

2) с фазовой функцией, являющейся дискретным распределением;

3) с фазовой функцией, являющейся смешанным распределением.

Выделенные классы распределений удобно представить в виде таблицы 1.

Таблица 1. Классы распределений с композиционным представлением

Тип фазовой функции	Физическая интерпретация фазовой функции	Интегральное ядро	
		Ядро фазового типа	Ядро нефазового типа
Дискретная фазовая функция (discrete)	плотность распределения	1Dd	2Dd
	не является плотностью	1Dn	2Dn
Непрерывная фазовая функция (continuos)	плотность распределения	1Cd	2Cd
	не является плотностью	1Cn	2Cn
Смешанная фазовая функция (mixed)	плотность распределения	1Md	2Md
	не является плотностью	1Mn	2Mn

Однако для многих из этих моделей аналитические решения не всегда возможны, поэтому предложенный композиционный подход [29] можно применить при имитационном моделировании систем [21, 27, 35]. Предварительно для простых моделей необходимо провести сравнительный анализ полученных результатов имитационного моделирования с известными аналитическими решениями.

4. Построение имитационных моделей с параметрической неопределенностью на основе композиционного подхода. Сформулируем постановку задачи имитационного моделирования. Дана одноканальная система массового обслуживания, для которой заданы: функция распределения (ФР) интервалов времени между входными заявками *A(t),* ФР времени обслуживания заявок *B(x)* и функции распределения $h_1(\lambda_i)$, $h_2(\mu_i)$ случайных параметров $\hat{\lambda}_i$, $\hat{\mu}_i$ распределений *A(t)* и *B(x)*. Необходимо построить имитационную модель, позволяющую исследовать процессы обслуживания при различных коэффициентах вариации и степенях неопределенности параметров распределений.

В качестве интегральных ядер будем использовать различные распределения фазового типа. Простейшей моделью с возмущениями является система $\hat{M}/\hat{M}/1$ с экспоненциальными *A(t)* и *B(x)* при случайных параметрах $\hat{\lambda}$ и $\hat{\mu}$ соответственно.

Также для моделирования входящих потоков и потоков обслуживания с коэффициентами вариации $\upsilon>1$ используем гиперэкспоненциальные распределения с ФР вида:

$$A(t) = 1 - C_1 e^{-\lambda_1 t} - (1 - C_1) e^{-\lambda_2 t} \tag{15}$$

или обобщенные распределения Эрланга (при $\upsilon<1$) с ФР:

$$A(t) = 1 - \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right). \tag{16}$$

Выражения для *B(x)* имеют аналогичный вид.

Формирование интервалов между событиями исходных распределений в модели будем производить в два этапа: на первом формируются случайные значения параметров распределений, а на втором – непосредственно сам интервал в соответствии с выбранными значениями параметров. Это позволяет более адекватно воспроизводить исследуемые процессы, не усредняя их по случайным параметрам, поскольку в соответствии с [12] усредненные по параметру распределения являются математическими ожиданиями случайных функций.

Для генерации равномерных законов распределений случайных параметров $h_1(\lambda_i)$, $h_2(\mu_j)$, как и для экспоненциальных законов распределений *A(t)* и *B(x),* можно использовать метод обратной функции [21]. Например, для случайных параметров $\hat{\lambda}_i$, равномерно распределенных в диапазоне $[a_i, b_i]$, получим:

$$\hat{\lambda}_i = (b_i - a_i)\hat{\xi}_i + a_i, \tag{17}$$

где $\hat{\xi}_i$ – *i*-я случайная величина, распределенная по равномерному закону в диапазоне [0,1]. Аналогично формируются значения $\hat{\mu}_j$.

Генерация экспоненциально распределенной случайной величины $\hat{X}_k$ со случайным параметром $\hat{\lambda}_i$ осуществляется на основе формулы

$$\hat{X}_k = -(1/\hat{\lambda}_i)\ln(1-\hat{U}_k), \tag{18}$$

где $\hat{\lambda}_i$ берется из ранее полученных вычислений (17).

Специфика генераторов случайных чисел для имитационного моделирования фазовых распределений типа *гиперэкспоненциального распределения* и *распределения Эрланга* состоит в том, что они также выполняются из двух подэтапов.

Обобщенное распределение Эрланга r-го порядка со случайными параметрами предполагает последовательное прохождение *r* фаз и соответственно является распределением суммы *r* экспоненциально распределенных чисел, у каждого из которых свой параметр $\hat{\lambda}_i$, случайно выбираемый из соответствующего диапазона $[a_i, b_i]$. Следовательно, из (18) имеем

$$\hat{X} = \sum_{i=1}^{r}\left(-\frac{1}{\hat{\lambda}_i}\ln(1-\hat{U}_i)\right). \tag{19}$$

Формируемый случайный поток можно интерпретировать двумя способами:

1) как возмущенный вариант исходного обобщенного потока Эрланга с неслучайными параметрами $\overline{\lambda}_i$, где $\hat{\lambda}_i = \overline{\lambda}_i + \hat{\eta}_i$, $\hat{\eta}_i \in \left[-(b_i - a_i)/2; (b_i - a_i)/2\right]$.

2) как рандомизированный обобщенный поток Эрланга, имеющий более широкий диапазон изменения коэффициента вариации, чем у исходного распределения. Например, начальные моменты такого распределения 2-го порядка могут быть получены интегрированием условных начальных моментов по всем возможным значениям $\hat{\lambda}_i$:

$$\begin{gathered}\overline{\nu}_1 = \frac{\ln(b_1/a_1)}{b_1 - a_1} + \frac{\ln(b_2/a_2)}{b_2 - a_2};\\ \overline{\nu}_2 = \frac{2}{a_1 b_1} + 2\frac{\ln(b_1/a_1)}{b_1 - a_1}\cdot\frac{\ln(b_2/a_2)}{b_2 - a_2} + \frac{2}{a_2 b_2}.\end{gathered} \tag{20}$$

Гиперэкспоненциальное распределение r-го порядка предполагает параллельное прохождение фаз, но также требует двух обращений. При первом обращении выбирается номер фазы $1 < i < r$, а при втором обращении генерируется показательное распределение с выбранным параметром $\hat{\lambda}_i$ из i-й фазы.

Разработанная программа имитационного моделирования, написанная на языке *Python*, позволяет моделировать системы массового обслуживания как со случайными, так и неслучайными параметрами распределений, а также использовать различные типы распределений времени между заявками и времени обслуживания в узле: экспоненциальное, гиперэкспоненциальное и обобщенное эрланговское. Исходными данными для моделирования являются:

– тип аппроксимации исходных распределений (по коэффициенту вариации для входного потока заявок υ_1 и распределения времени обслуживания υ_2);

– границы параметров $[a, b]$ и $[c, d]$ соответствующих распределений;

– предел моделирования в виде числа обслуженных заявок или времени моделирования.

В результате моделирования определяются следующие характеристики:

– начальные моменты распределений времени между заявками и времени обслуживания α_j и β_j;

– коэффициент загрузки системы ρ;

– начальные моменты распределения времени ответа системы γ_j.

Результаты имитационного моделирования СМО типа $\hat{M}/\hat{M}/1$ со случайными параметрами, распределенными по равномерным законам, представлены в таблице 2. При этом проводилась обработка 10000 заявок в каждом случае при холостом прогоне 500 заявок для вхождения системы в установившийся режим работы. В основном, результаты имитации подтверждают результаты аналитических исследований, проведенных в [16, 17], и известные оценки систем массового обслуживания.

Таблица 2. Результаты имитационного моделирования СМО типа $\hat{M}/\hat{M}/1$

a, 1/с	b, 1/с	c, 1/с	d, 1/с	Нач. моменты γ_j	Аналит. результат	Имитац. результат	Погрешность, %
1,0	1,0	2,0	2,0	γ_1, с γ_2, с^2 γ_3, с^3	1,0 2,0 6,0	0,989 1,922 5,690	1,11 4,12 5,45
1,0	2,0	3,0	4,0	γ_1, с γ_2, с^2 γ_3, с^3	0,501 0,506 0,768	0,497 0,489 0,686	0,81 3,48 11,95
1,0	5,0	3,0	8,0	γ_1, с γ_2, с^2 γ_3, с^3	0,441 0,412 0,589	0,482 0,453 0,651	-8,5 -9,05 -9,52
1,0	8,0	2,0	10,0	γ_1, с γ_2, с^2 γ_3, с^3	0,901 1,784 5,291	0,852 1,627 4,61	5,63 7,78 13,03

Также оказалось, что время ответа в СМО типа $M/M/1$ больше, чем в системах $E_n/M/1$ и $M/E_n/1$ и меньше, чем в системах $H_n/M/1$ и $M/H_n/1$ как при фиксированных, так и при случайных параметрах (при одинаковой степени неопределенности последних в различных системах). Для систем одного типа случайность параметров увеличивает среднее время ответа и тем больше, чем шире диапазон их изменения, а, следовательно, дисперсия и коэффициент вариации.

Относительно точности имитационного моделирования в сравнении с аналитическими расчетами нужно отметить, что она во многом зависит от исходных данных и от применяемой процедуры генерации псевдослучайных чисел. В основном, для первого момента времени пребывания относительная погрешность не превышает 5-7%, для высших моментов она увеличивается. Кроме того, погрешность моделирования уменьшается при увеличении коэффициента загрузки, однако, при стремлении коэффициента загрузки к 1 погрешность снова растет, что обусловлено погрешностью имитационного моделирования высоконагруженных систем.

Для общности представления в таблице 3 приведено качественное сравнение преимуществ и недостатков композиционного подхода с численными и аналитическими методами моделирования СМО при неопределенностях.

Таблица 3. Сравнение подходов к моделированию СМО

Критерий / Подход	Композиционный подход	Численные методы	Аналитический расчет
Преимущества	Гибкость при моделировании неопределенности. Модульность и адаптация к изменениям	Подходит для нелинейных систем и оптимизации. Гибкость в моделировании неопределенностей	Высокая точность для простых систем. Не требует вычислительных ресурсов
Недостатки	Зависимость от вычислительных ресурсов. Сложность точной калибровки	Требует значительных вычислительных мощностей. Сложность интерпретации результатов	Ограниченная применимость при неопределенностях. Упрощение реальности и ограничения в моделях
Управление неопределен-ностями	Возможность легкой интеграции различных сценариев	Может аппроксимировать поведение систем с неопределенными параметрами	Проблематично при сильных неопределенностях параметров
Зависимость от ресурсов	Высокая (особенно для сложных моделей)	Высокая (для вычислительно сложных задач)	Низкая (возможность аналитических расчетов вручную)
Применимость моделей	Любая степень сложности и неопределенности	Лучше подходит для сложных систем и оптимизационных задач	Преимущественно для простых и хорошо изученных систем
Интерпретация результатов	Может быть сложной из-за объема и сложности данных	Сложна без специальных знаний	Обычно прямолинейна для изученных моделей

5. Пример реализации композиционного подхода. Рассмотрим пример реализации расчета характеристик элементов архитектуры автоматизированной системы управления железнодорожного транспорта (АСУ ЖТ) обработки информации в среде имитационного моделирования GPSS World (свободно распространяемая система, предназначена для имитационного моделирования сложных систем с дискретными и непрерывными процессами, обладает гибкими возможностями настройки и визуализации моделей, имеет средства для моделирования систем и сетей массового обслуживания). Сначала рассмотрим отдельный сетевой узел и способы реализации его имитационной модели (рисунок 1).

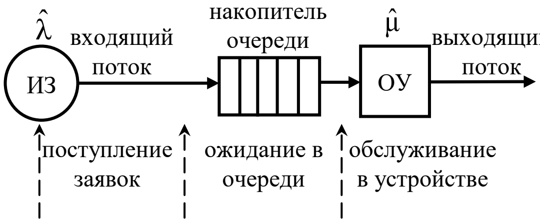

Рис. 1. Модель СМО со случайными параметрами

Для имитации случайности параметров распределений времени между входящими заявками и времени обслуживания была реализована конструкция блоков GPSS с двойной генерацией случайной величины. Например, блок GPSS

```
Generate (Exponential (1, 0, (1/Uniform (2, a, b))))
```

позволяет сначала сгенерировать по равномерному закону (Uniform) случайный параметр $\hat{\lambda}$, изменяющийся в диапазоне [a, b], затем найти обратную ему величину случайного математического ожидания времени между входящими заявками, выступающую в качестве параметра в блоке Generate, и потом использовать ее для генерации собственно случайного времени между входящими заявками. При вызове Exponential, Uniform и других функций распределения первыми параметрами являются номера генераторов псевдослучайных чисел от 1 до 999, которые рекомендуется в одной программе для различных случайных величин делать разными, чтобы обеспечить независимость имитируемых величин.

Аналогичный прием используется в блоке Advance для генерации времени обслуживания со случайным параметром $\hat{\mu}$:

```
Advance (Exponential(3,0,(1/Uniform(4, c, d)))).
```

Блоки Generate и Advance по формату вызова отличий не имеют, различие в названии блоков обусловлено разными моделируемыми с их помощью случайными величинами – интервалов между смежными заявками и длительностей обслуживания, соответственно.

При моделировании для удобства учета степени неопределенности случайных параметров распределений можно использовать так называемые коэффициенты неопределенности

$$\Delta_\alpha = (b-a)/(b+a)\,,\ \Delta_\beta = (d-c)/(d+c)\,,$$

принимающие значения от 0 до 1. Отсутствию неопределенности соответствуют нулевые значения коэффициентов, при увеличении степени неопределенности параметров коэффициенты стремятся к 1.

Из таблицы 4 видно, что при расширении границ изменения интенсивности обслуживания увеличивается среднее время обслуживания, и как следствие, растет коэффициент загрузки и среднее время ожидания. При увеличении же диапазона изменения интенсивности входящего потока загрузка и время ожидания падают. При одновременном увеличении неопределенности обоих параметров загрузка остается примерно одинаковой, но время ожидания растет.

Таблица 4. Имитационное моделирование систем с неопределенностью

Модель	Границы [a,b], Δ_α	Границы [c,d], Δ_β	Среднее время обслуживания	Загрузка	Среднее время ожидания	Средняя длина очереди
*M/M/*1	8, 0	10	0,100	0,799	0,307	2,447
$M/\hat{M}/1$	8, 0	[9,11], 0,1	0,101	0.802	0,313	2,495
	8, 0	[8,12], 0,2	0,102	0,810	0,333	2,655
	8, 0	[5,15], 0,5	0,110	0,878	0,614	4,894
	8, 0	[4,16], 0,6	0,116	0,923	1,122	8,946
	8, 0	[2,18], 0,8	0,138	1,00	584,201	4658,51
	8, 0	[1,19], 0,9	0,164	1,00	1907.79	15206.72
$\hat{M}/M/1$	[7,9], 0,125	10, 0	0,100	0,795	0,303	2,407
	[6,10], 0,25	10, 0	0,100	0,782	0,291	2,271
	[4,12], 0,5	10, 0	0,100	0,728	0,246	1,786
	[3,13], 0,625	10, 0	0,100	0,682	0,219	1,491
	[2,14], 0,75	10, 0	0,100	0,617	0,191	1,178
	[1,15], 0,875	10, 0	0,100	0,517	0,164	0,845
$\hat{M}/\hat{M}/1$	[7,9], 0,125	[9,11], 0,1	0,101	0,798	0,309	2,454
	[6,10], 0,25	[8,12], 0,2	0,102	0,793	0,314	2,453
	[4,12], 0,5	[5,15], 0,5	0,110	0,8	0,416	3,020
	[3,13], 0,625	[4,16], 0,6	0,116	0,788	0,467	3,177
	[2,14], 0,75	[2,18], 0,8	0,138	0,848	1,119	6,889
	[1,15], 0,875	[1,19], 0,9	0,164	0,849	2,088	10,779

В таблице 5 приведены результаты оценивания доверительных интервалов $\Delta\gamma_1^{имит}$ среднего времени пребывания в системе $\gamma_1^{имит}$ при имитационном моделировании в зависимости от числа испытаний при различных видах неопределенности (параметров входного потока и обслуживания). Рассмотрены 4 случая, когда случайные интенсивности входящего потока $\hat{\lambda}$ и потока обслуживания $\hat{\mu}$ либо усредняются (0.05 и 0.1), либо рассматриваются равномерно распределенными в заданных диапазонах (0.02-0.08 и 0.04-0.16 соответственно). Приведены также данные аналитического расчета $\gamma_1^{аналит}$.

Таблица 5. Оценка доверительных интервалов среднего времени пребывания в системе по результатам имитационного моделирования при $p_{дов}$= 0,95

	$\hat{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\gamma_1^{аналит}$	N испыт	$\gamma_1^{имит}$	$\Delta\gamma_1^{имит}$	$\gamma_1 - \Delta\gamma_1$	$\gamma_1 + \Delta\gamma$
$M/M/1$	0,05	0,1	20	500	20,240	1,782	18,458	22,022
				1000	21,816	1,407	20,409	23,223
				10000	19.726	0,369	19,357	20,095
$M/\hat{M}/1$	0,05	0,04-0,16	30,049	500	31,845	2,891	28,894	34,736
				1000	35,513	2,530	32,983	38,043
				10000	29,870	0,618	29,252	30,488
$\hat{M}/M/1$	0,02 – 0,08	0,1	18,874	500	20,163	1,752	18,411	21,915
				1000	20,371	1,259	19,112	21,630
				10000	18,733	0,356	18,377	19,089
$\hat{M}/\hat{M}/1$	0,02 – 0,08	0,04-0,16	27,130	500	30,846	2,785	28,061	33,631
				1000	30,669	2,142	28,527	32,811
				10000	27,028	0,565	26,463	27,593

Результаты исследований подтверждают выводы [13 – 15], что даже если при моделировании затрачивается большой объем вычислительных усилий для улучшения оценки показателя производительности, его оценка будет подвержена значительной изменчивости из-за неопределенности в точечных оценках параметров распределений. Если неточность входных данных не учитывается должным образом, то дополнительные усилия по моделированию могут привести к еще более низким доверительным интервалам с меньшим охватом. При малом числе испытаний достаточно широкий доверительный интервал перекрывает погрешности переходного периода. При увеличении же числа испытаний сужается доверительный интервал, и, несмотря на увеличение точности моделирования, есть риск исключения истинного значения параметра из доверительного интервала. В [15] используется непараметрический подход при неопределенности для улучшения оценки доверительных интервалов.

Очевидно, что сравнение систем удобнее проводить при одинаковых коэффициентах загрузки, которые меняются при изменении коэффициентов неопределенности из-за смещения средних времен между поступлениями и обслуживания.

При рассмотрении зависимости относительного среднего времени ожидания (к среднему времени обслуживания) ω_1/β_1 от коэффициентов неопределенности Δ_α и Δ_β при фиксированном коэффициенте загрузки ρ=0,5 (рисунок 2) можно увидеть, что характеристики СМО с неопределенностью более чувствительны к случайности параметров обслуживания, чем к случайности параметров входного потока [16].

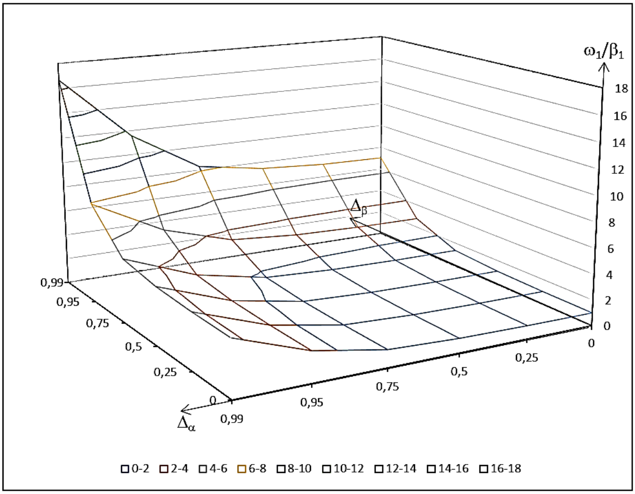

Рис. 2. Зависимость ω_1/β_1 от коэффициентов Δ_α и Δ_β

Генерацию случайных чисел, подчиняющихся распределениям фазового типа, отсутствующим в библиотечных ГСЧ GPSS World, например, распределения Эрланга, можно выполнить с помощью его обобщенной формы – гамма-распределения, при целом положительном параметре *a*, задающем форму распределения (число фаз).

Математическое ожидание времени обслуживания в этом случае будет определяться по формуле: M_β=ab+s, где s=0 – смещение, b – среднее время обслуживания на одной фазе. Для реализации распределения Эрланга 2-го порядка со случайным параметром b, распределенным в диапазоне [c, d], применим выше описанную схему:

Advance (Gamma(6,0,(1/Uniform(7, c, d)),2)).

Кроме того, для генерации случайных времен со случайными параметрами может использоваться схема с тройной генерацией:

1) генерируются случайные реализации случайных параметров распределений фазового типа;

2) генерируются случайные времена задержки на каждой из фиктивных фаз в соответствии с полученными параметрами;

3) выполняется процедура аддитивного или вероятностного смешивания случайных задержек.

Например, для реализации генерации времени обслуживания по закону Эрланга 2-го порядка со случайными параметрами $\hat{\mu}_i$ используется аддитивная схема (суммирование задержек):

Advance(Exponential(5,0,(1/Uniform(6,c1,d1)))+Exponential(7,0,(1/Uniform(8,c2,d2)))).

При различных границах диапазонов изменения параметров [c1,d1], [c2,d2] может быть реализовано обобщенное распределение Эрланга со случайными параметрами. При одинаковых границах реализуется простое распределение Эрланга.

Для генерации гиперэкспоненциального распределения используется схема с логическими переключателями [36], имеющими два состояния (включен, выключен), поскольку для генерации случайной величины нужно будет выбрать только одну из случайных величин с заданной вероятностью (листинг 1).

```
***************************Область описания********************************
Ver1      EQU      0.396      ; Вероятность перехода транзакта на Kluch1
Ver2      EQU      (1-Ver1)   ; Вероятность перехода транзакта на Kluch2
T1        EQU      26.33      ; Время обслуживания транзакта в 1 фазе
T2        EQU      15.85      ; Время обслуживания транзакта во 2 фазе
***********************Имитация работы ключей*******************************
GENERATE ,,,1              ; Формирование 1 транзакта
Variator TRANSFER Ver1,Kl1,Kl2 ; Переход с вероятностью Ver1 в Kl2
Kl1       LOGIC S  Kluch1     ; Включение ключа Kluch1
ADVANCE (T1#5)             ; Задержка транзакта в блоке на T1*5 ед. модельного времени
          LOGIC R  Kluch1     ; Выключение ключа Kluch1
          TRANSFER Variator ; Безусловный переход переключатель ключей
Kl2       LOGIC S  Kluch2     ; Включение ключа Kluch2
ADVANCE (T2#5)             ; Задержка транзакта в блоке на T2*5 ед. модельного времени
          LOGIC R  Kluch2     ; Выключение ключа Kluch2
          TRANSFER ,Variator; Безусловный переход в переключатель ключей
```

Листинг 1. Имитация работы ключей

Код имитации обслуживания заявок по гиперэкспоненциальному закону 2-го порядка с помощью блока GATE приведен на листинге 2.

```
*********************Имитация обслуживания заявок****************************
GENERATE (Exponential(11,0,10)) ; Формирование простейшего потока
GATE LS    Kluch1,Met10 ; Если ключ Kluch1 включен, то переход к следующему
                              ; блоку, иначе переход на Met10
SEIZE Uzel ; Попытка занять устройство Uzel
ADVANCE (Exponential(1,0,T1)) ; Обслуживание заявки в 1 фазе
RELEASE Uzel ; Освобождение устройства Uzel
TRANSFER ,Met20 ; Безусловная передача транзакта на выход из системы
Met10       SEIZE       Uzel  ; Попытка занять устройство Uzel
ADVANCE (Exponential(2,0,T2)) ; Обслуживание заявки во 2 фазе
RELEASE Uzel ; Освобождение устройства Uzel
Met20       TERMINATE 1
```

Листинг 2. Имитация обслуживания заявок

Теперь рассмотрим пример реализации сетевой модели массового обслуживания сегмента АСУ ЖТ из трех обслуживающих узлов (0-й узел – исток, 4-й узел – сток), приведенной на рисунке 3.

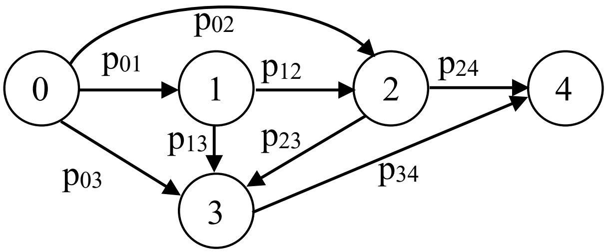

Рис. 3. Сетевая модель обслуживания сегмента АСУ ЖТ

Дано: узлы одноканальные, дисциплина обслуживания FIFO, очереди к узлам не ограничены. Пусть узел 1 реализует *Модуль управления ресурсами станций*, на который поступают данные о времени прибытия/отправления поездов. Узел 2 реализует *Базу данных с интеграционным слоем*, которая обеспечивает хранение данных и выдачу результатов запросов. На него поступают актуальные данные о состоянии ресурсов станций с узла 1, а также данные от внешних узлов. 3 узел имитирует *Модуль прогнозирования и аналитики*, на который поступают оперативные и исторические данные для анализа. Результатом обработки на узле 3 являются аналитические отчеты и рекомендации для оптимизации работы.

Нулевой узел имитирует источник заявок сети (в частности, от *Модуля управления расписанием*, *Модуля управления движением* и т.д.), узел 4 – сток (выход сети, результаты обработки данных).

Примем следующие вероятности передач между узлами сети: $p_{01} = 0{,}5$; $p_{02} = 0{,}4$; $p_{03} = 0{,}1$; $p_{12} = 0{,}7$; $p_{13} = 0{,}3$; $p_{23} = 0{,}4$; $p_{24} = 0{,}6$; $p_{34} = 1$. Плотности распределения интервалов между заявками входного потока $a(t)$ и времени обслуживания заявок в узлах $b_i(x)$ будем считать экспоненциальными, со случайными равномерно распределенными параметрами λ и μ_i: $\lambda \in [a, b]$, $\mu_i \in [c_i, d_i]$. Следует найти характеристики времени обработки заявок в сети без учета и с учетом факторов неопределенности при $\lambda = 10 \pm 8$ мин$^{-1}$, $\mu_1 = 5 \pm 3$ мин$^{-1}$, $\mu_2 = 8 \pm 6$ мин$^{-1}$, $\mu_3 = 10 \pm 6$ мин$^{-1}$.

Если факторы случайности (неопределенности) параметров распределений не учитывать, сеть будет рассчитываться как обычная экспоненциальная сеть массового обслуживания. Но если в качестве исходных данных брать усредненные случайные параметры распределений вероятностей, т.е. $\lambda = (a+b)/2$, $\mu_i = (c_i+d_i)/2$, получим искаженные средние времена между входящими заявками α_1 и времена обслуживания в узлах β_{1i} со сдвигом влево (таблица 4) и, соответственно, коэффициенты загрузки узлов сети ρ_i (в данном случае завышенные). При учете факторов неопределенности исходных параметров [16, 17] первые начальные моменты времени между входящими заявками α_1 и времени обслуживания в узлах β_{1i} (таблица 1) будут иметь вид:

$$\alpha_1 = \frac{\ln(b/a)}{b-a}, \;\; \beta_{1i} = \frac{\ln(d_i/c_i)}{d_i - c_i}. \tag{21}$$

Средние интенсивности потоков $1/\alpha_1$ и $1/\beta_{1i}$ оказываются меньше средних значений случайных параметров λ, μ_i. Это является следствием теоремы 1 из [14], гласящей, что *математическое ожидание случайной неотрицательной величины* $\hat{x}$ *всегда не меньше обратного значения математического ожидания обратной случайной величины* $1/\hat{x}$.

В результате имитационного моделирования получаем средние времена пребывания заданий в узлах γ_{1i}, затем рассчитываем среднее время пребывания заданий в сети γ_1 (таблица 4).

Таблица 4. Результаты моделирования сегмента АСУ ЖТ

Узел	Без учета неопределенности				С учетом неопределенности			
	α_1	β_1	ρ	γ_1	α_1	β_1	ρ	γ_1
1 узел	0,249	0,2	0,82	1,111	0,335	0,231	0,690	1,073
2 узел	0,2	0,125	0,625	0,333	0,275	0,162	0,590	0,595
3 узел	0,133	0,1	0,75	0,4	0,183	0,116	0,631	0,439
Сеть				**1,078**				**1,216**

Введенные ранее коэффициенты неопределенности параметров для рассматриваемого примера принимают следующие значения: $\Delta_\alpha = 0{,}8$, $\Delta_{\beta_1} = 0{,}6$, $\Delta_{\beta 2} = 0{,}75$, $\Delta_{\beta 3} = 0{,}6$.

Из анализа результатов, приведенных в таблице 4, следует, что при учете неопределенности по сравнению с отсутствием учета неопределенности оценка задержки прохождения заявок в модели сегмента АСУ ЖТ увеличивается на 11,35%. Таким образом, результаты имитационного моделирования показали, что учет возможной неопределенности (случайности, неточности, колебаний, в том числе из-за действия внешних дестабилизирующих факторов) параметров распределений позволяет не только показать, что учет неопределенности важен, но и численно по результатам моделирования (с учетом и без учета неопределенности) обосновать, насколько именно он способствует улучшению оценок задержек в обслуживании и формулированию адекватных требований к производительности распределенных вычислительных систем.

6. Заключение. Композиционный подход позволяет проводить как аналитическое, так и имитационное моделирование стохастических систем при наличии неточности, размытости или изменчивости параметров распределений вероятностей, заданных в качестве исходных. При этом предполагается нестандартное использование экспоненциального распределения как основы для создания более сложных распределений, что может привести к новым интересным результатам в стохастических процессах и теории распределений. Но в отличие от аналитических расчетов, имитационное моделирование не ограничивается исследованием простейших экспоненциальных моделей, а позволяет задействовать другие распределения фазового и нефазового типа со случайными параметрами (гиперэкспоненциальное, Эрланга, Кокса, гипердельтное, равномерное и др.).

Сравнивая композиционный подход и численные методы, можно отметить, что оба эти подхода обладают своими уникальными преимуществами и ограничениями в зависимости от специфики задачи. Однако композиционный подход особенно выделяется своей способностью к анализу систем с неопределенными параметрами благодаря его модульности, гибкости и возможности интегрировать широкий спектр вероятностных распределений. Это делает его особенно ценным на различных этапах проектирования и модернизации ИВС, позволяя более обоснованно предъявлять требования к производительности и надежности ИВС, что критично для поддержания устойчивости их функционирования.

Практическая значимость метода определяется его возможностью использования на различных этапах проектирования и модернизации ИВС в зависимости от имевшегося объема исходных данных, и более обоснованного предъявления требования к производительности ИВС, критичных к нарушению устойчивости функционирования.

Дальнейшие исследования по вопросам практически полезного применения рассматриваемого в статье метода имитационного моделирования, на наш взгляд, целесообразно продолжить в части оценивания доверительных интервалов показателей оперативности систем с неопределенностью [13, 15], анализа возможностей и технологий эффективного использования в современных актуальных сферах обеспечения требуемого уровня оперативности, надежности и кибербезопасности функционирования информационных систем, сетей передачи данных и обработки больших данных [37 – 39].

Литература

1. Khomonenko A., Khalil M., Kassymova D. Probabilistic Models for Evaluating the Performance of Cloud Computing Systems with Web Interface. SPIIRAS Proceedings. 2016. vol. 6. no. 49. pp. 49–65.
2. Dudina O., Dudin A. Optimization of queueing model with server heating and cooling // Mathematics. 2019. vol. 7. no. 9. DOI: org/10.3390/math7090768.
3. Klimenok V., Dudin A., Dudina O., Kochetkova I. Queuing system with two types of customers and dynamic change of a priority // Mathematics. 2020. vol. 8(5). DOI: org/10.3390/math8050824.
4. Khomonenko A.D. Performance analysis of the multiprocessor systems with priority processing of heterogeneous requests flow // Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika. 1991. no. 4. pp. 55–64.
5. Краснов С.А., Лохвицкий В.А., Хабаров Р.С. Численный анализ многоканальных систем массового обслуживания с абсолютным приоритетом на основе фазовой аппроксимации периода непрерывной занятости // Труды Военно-космической академии имени А.Ф. Можайского. 2022. № 682. С. 7–20.
6. Nazarov A., Strik J., Kvach A. A survey of recent results in finite-source retrial queues with collisions // Information technologies and mathematical modelling. Queueing Theory and Applications: 17th International Conference and 12th

Workshop on Retrial Queues and Related Topics. 2018. vol. 912. pp. 1–15. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_1.

7. Gaitonde J., Tardos E. Stability and learning in strategic queuing systems // Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation. 2020. pp. 319–347.
8. Заяц О.И., Кореневская М.М., Ильяшенко А.С., Мулюха В.А. Система массового обслуживания с абсолютным приоритетом, вероятностным выталкивающим механизмом и повторными заявками // Информатика и автоматизация. 2024. Т. 23. № 2. С. 325–351.
9. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. М.: Наука, 1978. 400 с.
10. Ивницкий В.А. Об оценке точности результатов моделирования сложных систем с неточной входной информацией при схеме независимых испытаний // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. 1974. Т. 4. С. 208–217.
11. Law A.M. Simulation Modeling and Analysis, 6th Edition. McGraw Hill. 2024. 688 p.
12. Гончаренко В.А. Формальный аппарат представления случайных процессов обслуживания с возмущающими воздействиями и неопределенностью параметров // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2015. № 648. С. 13–18.
13. Corlu C.G., Akcay A., Xie W. Stochastic simulation under input uncertainty: A review // Operations Research Perspectives. 2020. vol. 7. DOI: 10.1016/j.orp.2020.100162.
14. Shone R., Glazebrook K., Zografos K.G. Applications of stochastic modeling in air traffic management: Methods, challenges and opportunities for solving air traffic problems under uncertainty // European Journal of Operational Research. 2021. vol. 292. no. 1. pp. 1–26.
15. Xie W., Li C., Wu Y., Zhang P. A nonparametric Bayesian framework for uncertainty quantification in stochastic simulation // SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2021. vol. 9. no. 4. pp. 1527–1552.
16. Гончаренко В.А. Модели и методы анализа систем массового обслуживания с параметрической неопределенностью // Интеллектуальные технологии на транспорте. 2017. № 4. С. 5–11.
17. Гончаренко В.А. Моделирование и оценивание характеристик случайных потоков событий в компьютерных сетях при параметрической неопределенности // Труды Военно-космической академии им. А.Ф. Можайского. 2015. № 649. С. 16–22.
18. Кочегаров В.А., Фролов Г.А. Проектирование систем распределения информации. Марковские и немарковские модели. М.: Радио и связь, 1991. 216 с.
19. Буранова М.А., Карташевский В.Г. Анализ времени ожидания для узла сети типа G/D/1 при неточном знании параметров трафика // Информационные технологии и телекоммуникации. 2017. Т. 5. № 1. С. 24–33.
20. Букашкин С.А., Карташевский В.Г., Сапрыкин А.В. Анализ функционирования сетевого узла при неточном знании параметров трафика // DSPA: Вопросы применения цифровой обработки сигналов. 2017. Т. 7. № 2. С. 14–17.
21. Рыжиков Ю.И. Имитационное моделирование. Авторская имитация систем и сетей с очередями: Учебное пособие. СПб.: Издательство «Лань», 2019. 112 с.
22. Stefanov S.K. On the Basic Concepts of the Direct Simulation Monte Carlo Method. Physics of Fluids. 2019. vol. 31. no. 6. DOI: 10.1063/1.5099042.
23. Грешилов А.А. Анализ и синтез стохастических систем. Параметрические модели и конфлюентный анализ. М.: Радио и связь, 1990. 320 с.

24. Кузнецов В.П. Интервальные статистические модели. М.: Радио и связь, 1991. 452 с.
25. Левин В.И. Вычисления в условиях неопределенности с помощью интервальной математики // Донецкие чтения 2019: образование, наука, инновации, культура и вызовы современности. Материалы IV Международной научной конференции. Том 1 - Физико-математические и технические науки, Часть 2. 2019. С. 184–185.
26. Лазарев В.Л., Уваров Р.А. Организация адаптивного управления на основе информационных критериев. Мягкие измерения и вычисления. 2023. Т. 64. № 3. С. 46–57.
27. Zhao Y., Wu H., Yang C., Liu Z., Cheng Q. New Reliability Modeling Methods for Structural Systems with Hybrid Uncertainty. Quality and Reliability Engineering International. 2020. vol. 36. no. 6. pp. 1855–1871.
28. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции. Вып. 2. Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958. 307 с.
29. Гончаренко В.А. Композиционный метод формирования аппроксимационных распределений с произвольной фазовой функцией // Труды СПИИРАН. 2016. Т. 3(46). С. 212–225.
30. He Q.-M., Liu B., Wu H. Continuous Approximations of Discrete Phase-Type Distributions and Their Applications to Reliability Models. Performance Evaluation. 2022. vol. 154. DOI: 10.1016/j.peva.2022.102284.
31. Sarada Y., Shenbagam R. Approximations of Availability Function Using Phase Type Distribution. Opsearch. 2022. vol. 59. pp. 1337–1351.
32. Wang L., Li Y., Qian Y., Luo X. A Parameter Estimation Method of Shock Model Constructed with Phase-Type Distribution on the Condition of Interval Data. Mathematical Problems in Engineering. 2020. vol. 2020. no. 11. DOI: 10.1155/2020/1424105.
33. Смагин В.А., Филимонихин Г.В. О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения // Автоматика и вычислительная техника. 1990. № 1. С. 25–31.
34. Буранова М.А., Карташевский В.Г. Рекурсивный подбор параметров гиперэкспоненциальных распределений при аппроксимации распределений с «тяжелыми хвостами». Труды учебных заведений связи. 2023. Т. 9. № 2. С. 40–46.
35. Докучаева А.Н. Статистическое имитационное моделирование систем массового обслуживания с параметрической неопределенностью посредством динамических упрощенных моделей // Системы управления и информационные технологии. 2019. № 1(75). С. 11–16.
36. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Имитационное моделирование систем массового обслуживания на основе составных распределений – вероятностных смесей // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2023. Т. 17. № 3. С. 14–19.
37. Gofman M.V., Kornienko A.A., Glukharev M.L. A Method for Watermark Detection in Digital Audio Signals by Authorized Users // Automatic Control and Computer Sciences. 2021. vol. 55. no. 8. pp. 1005–1019.
38. Privalov A., Lukicheva V., Kotenko I., Saenko I. Increasing the sensitivity of the method of early detection of cyber-attacks in telecommunication networks based on traffic analysis by extreme filtering // Energies. 2020. vol. 13. no. 11.
39. Glukharev M., Solomatova M. Access Differentiation in Object-Oriented Databases Based on the Extended Object-Oriented Harrison–Ruzzo–Ullman Model // Automatic Control and Computer Sciences. 2020. vol. 54. pp. 1007–1012.

Гончаренко Владимир Анатольевич — канд. техн. наук, доцент кафедры, кафедра «информационные и вычислительные системы», Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I; преподаватель кафедры, кафедра информационно-вычислительных систем и сетей, ВКА им. А.Ф. Можайского. Область научных интересов: теория очередей, математическое моделирование, системы массового обслуживания с неопределенностью, информационная безопасность, устойчивость компьютерных сетей. Число научных публикаций — 111. vlango@mail.ru; улица Ждановская, 13, 197198, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)347-9524.

Хомоненко Анатолий Дмитриевич — д-р техн. наук, профессор кафедры, кафедра «информационные и вычислительные системы», Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I; профессор кафедры, кафедра математического и программного обеспечения, ВКА им. А.Ф. Можайского. Область научных интересов: численная теория массового обслуживания, моделирование сложных систем, программирование, операционные и информационные системы, системы массового обслуживания, надежность программного обеспечения, информационные системы, безопасность информационных систем. Число научных публикаций — 287. khomon@mail.ru; Московский проспект, 9, 190031, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)457-8356.

Абу Хасан Рахеб — аспирант, кафедры «информационные и вычислительные системы», Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I. Область научных интересов: информационные системы, хранилища данных, модели надежности. Число научных публикаций — 5. ragheb1997@yandex.ru; Московский проспект, 9, 190031, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)457-8356.

DOI 10.15622/ia.23.6.1

V. GONCHARENKO, A. KHOMONENKO, R. ABU KHASAN

A COMPOSITIONAL APPROACH TO THE SIMULATION OF QUEUING SYSTEMS WITH RANDOM PARAMETERS

Goncharenko V., Khomonenko A., Abu Khasan R. **A Compositional Approach to the Simulation of Queuing Systems with Random Parameters.**

Abstract. A general approach to modeling random service processes under conditions of disturbances and uncertainty of the initial data is substantiated. A compositional approach to constructing simulation models of queuing with parametric uncertainty based on phase-type distributions and phase functions is proposed. The calculation and comparison of the characteristics of the developed simulation models with analytical solutions were carried out to confirm their effectiveness and accuracy. The problems of uncertainty of the initial data and their impact on the modeling of service systems are highlighted. The importance of taking into account parametric uncertainty in simulation models is emphasized in order to increase their adequacy and applicability in practice. The study includes a description of a general approach to modeling random service processes with uncertainty, as well as methodological foundations for the application of phase distributions and functions in compositional modeling. Four classes of service models are considered, differing in the type of integral core and phase function, which makes it possible to implement a variety of random service processes, taking into account their characteristics and conditions of their occurrence. The analysis of a model with an exponential integral core and various types of phase functions is carried out, which demonstrates the flexibility and wide possibilities of the proposed compositional approach to the study and modeling of service systems. The results of simulation modeling are presented, confirming analytical studies and showing the applicability and effectiveness of the developed approach in the construction and analysis of models of service systems with random parameters. The practical significance of the compositional method for the design and modernization of information and computing systems at various stages of their development, taking into account the uncertainty of the initial data, is noted. The work is focused on the development of simulation methods for queuing systems and opens up new prospects for their research and optimization in conditions of uncertainty of initial parameters.

Keywords: compositional approach, integral kernel, simulation modeling, random parameter, parametric uncertainty, hyper-delta probability distribution, generalized function, phase-type distribution, uniformly exponential distribution, approximation, phase function, queueing systems.

References

1. Khomonenko A., Khalil M., Kassymova D. Probabilistic Models for Evaluating the Performance of Cloud Computing Systems with Web Interface. SPIIRAS Proceedings. 2016. vol. 6. no. 49. pp. 49–65.
2. Dudina O., Dudin A. Optimization of queueing model with server heating and cooling. Mathematics. 2019. vol. 7. no. 9. DOI: org/10.3390/math7090768.
3. Klimenok V., Dudin A., Dudina O., Kochetkova I. Queuing system with two types of customers and dynamic change of a priority. Mathematics. 2020. vol. 8(5). DOI: org/10.3390/math8050824.
4. Khomonenko A. Performance analysis of the multiprocessor systems with priority processing of heterogeneous requests flow. Avtomatika i Vychislitel'naya Tekhnika. 1991. no. 4. pp. 55–64.

5. Krasnov S., Lokhvitskiy V., Khabarov R. [Numerical analysis of multi-channel queuing systems with absolute priority based on phase approximation of the period of continuous employment]. Trudy Voyenno-kosmicheskoy akademii imeni A.F. Mozhayskogo – Proceedings of the Military Space Academy named after A.F. Mozhaisky. 2022. no. 682. pp. 7–20. (In Russ.).
6. Nazarov A., Strik J., Kvach A. A survey of recent results in finite-source retrial queues with collisions. Information technologies and mathematical modelling. Queueing Theory and Applications: 17th International Conference and 12th Workshop on Retrial Queues and Related Topics. 2018. vol. 912. pp. 1–15. DOI: 10.1007/978-3-319-97595-5_1.
7. Gaitonde J., Tardos E. Stability and learning in strategic queuing systems. Proceedings of the 21st ACM Conference on Economics and Computation. 2020. pp. 319–347.
8. Zayats O., Korenevskaya M., Ilyashenko A., Muliukha V. Prioritized Retrial Queueing Systems with Randomized Push-Out Mechanism. Informatics and Automation. 2024. vol. 23. no. 2. pp. 325–351. (In Russ.).
9. Buslenko N.P. Modelirovanie slozhnyh sistem [Modeling of complex systems]. M.: Nauka, 1978. 400 p. (In Russ.).
10. Ivnitskiy V. [On evaluating the accuracy of the simulation results of complex systems with inaccurate input information in the independent test scheme]. Izvestiya AN SSSR. Tekhnicheskaya kibernetika – Izvestia of the USSR Academy of Sciences. Technical cybernetics. 1974. no. 4. pp. 208–217. (In Russ.).
11. Law A. Simulation Modeling and Analysis, 6th Edition. McGraw Hill. 2024. 688 p.
12. Goncharenko V. [The formal apparatus of representation of stochastic processes of service with the disturbance and uncertainty parameters]. Trudy VKA imeni A.F. Mozhajskogo – Proceedings of Military Space Academy named A.F. Mozhaysky. 2015. vol. 648. pp. 13–18. (In Russ.).
13. Corlu C., Akcay A., Xie W. Stochastic simulation under input uncertainty: A review. Operations Research Perspectives. 2020. vol. 7. DOI: 10.1016/j.orp.2020.100162.
14. Shone R., Glazebrook K., Zografos K. Applications of stochastic modeling in air traffic management: Methods, challenges and opportunities for solving air traffic problems under uncertainty. European Journal of Operational Research. 2021. vol. 292. no. 1. pp. 1–26.
15. Xie W., Li C., Wu Y., Zhang P. A nonparametric Bayesian framework for uncertainty quantification in stochastic simulation. SIAM/ASA Journal on Uncertainty Quantification. 2021. vol. 9. no. 4. pp. 1527–1552.
16. Goncharenko V. [Models and methods of queueing systems analysis with parametric uncertainty]. Intellektual'nye tekhnologii na transporte – Intellectual Technologies on Transport. 2017. no. 4. pp. 5–11. (In Russ.).
17. Goncharenko V. [Modelling and estimation of characteristics of random flows of events in computer networks under parametric uncertainty]. Trudy VKA imeni A.F. Mozhajskogo – Proceedings of Military Space Academy named A.F. Mozhaysky. 2015. vol. 649. pp. 16–22. (In Russ.).
18. Kochegarov V., Frolov G. Proektirovanie sistem raspredelenija informacii. Markovskie i nemarkovskie modeli. [Designing of systems of information distribution.Markovian and non-Markovian models]. M.: Radio i svjaz', 1991. 216 p. (In Russ.).
19. Buranova M., Kartashevskiy V. [The Analysis of the Latency Period for Knot of Network of the G/D/1 Type at Inaccurate Knowledge of Parameters of the Traffic]. Informatsionnye tekhnologii i telekommunikatsii – Inf. Technol. Telecommunications. 2017. vol. 5. no. 1. pp. 24–33. (In Russ.).

20. Bukashkin S., Kartashevskij V., Saprykin A. [Analysis of the functioning of a network node with inaccurate knowledge of traffic parameters]. DSPA: Voprosy primeneniya cifrovoj obrabotki signalov – DSPA: Issues of application of digital signal processing. 2017. vol. 7. no. 2. pp. 14–17. (In Russ.).
21. Ryzhikov Yu. Imitacionnoe modelirovanie. Avtorskaya imitaciya sistem i setej s ocheredyami. [Simulation modeling. Author's simulation of systems and networks with queues]. St. Petersburg: Lan Publishing House, 2019. 112 p. (In Russ.).
22. Stefanov S. On the Basic Concepts of the Direct Simulation Monte Carlo Method. Physics of Fluids. 2019. vol. 31. no. 6. DOI: 10.1063/1.5099042.
23. Greshilov A. Analiz i sintez stohasticheskih sistem. Parametricheskie modeli i konflyuentnyj analiz [Analysis and synthesis of stochastic systems. Parametric models and confluent analysis]. M.: Radio i svyaz', 1990. 320 p. (In Russ.).
24. Kuznetsov V. Interval'nye statisticheskie modeli [Interval statistical models]. M.: Radio i svyaz', 1991. 452 p. (In Russ.).
25. Levin V. [Calculations under uncertainty using interval mathematics] Doneckie chteniya 2019: obrazovanie, nauka, innovacii, kul'tura i vyzovy sovremennosti. Materialy IV Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii [Donetsk Readings 2019: education, science, innovation, culture and modern challenges. Materials of the IV International Scientific Conference]. 2019. pp. 184–185. (In Russ.).
26. Lazarev V., Uvarov R. [The organization of adaptive management based on information criteria]. Myagkie izmereniya i vychisleniya – Soft measurements and calculations. 2023. vol. 64. no. 3. pp. 46–57. (In Russ.).
27. Zhao Y., Wu H., Yang C., Liu Z., Cheng Q. New Reliability Modeling Methods for Structural Systems with Hybrid Uncertainty. Quality and Reliability Engineering International. 2020. vol. 36. no. 6. pp. 1855–1871.
28. Gel’fand M., Shilov G. Obobshhennye funkcii. Vyp. 2. Prostranstva osnovnyh i obobshhennyh funkcij [Generalized functions. Vol 2. Spaces of the test and generalized functions.]. M.: Fizmatgiz. 1958. 307 p. (In Russ.).
29. Goncharenko V. [Composite Method of Forming Approximating Distributions with an Arbitrary Phase Function]. Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proc. 2016. vol. 46. no. 3. pp. 212–225. (In Russ.).
30. He Q.-M., Liu B., Wu H. Continuous Approximations of Discrete Phase-Type Distributions and Their Applications to Reliability Models. Performance Evaluation. 2022. vol. 154. DOI: 10.1016/j.peva.2022.102284.
31. Sarada Y., Shenbagam R. Approximations of Availability Function Using Phase Type Distribution. Opsearch. 2022. vol. 59. pp. 1337–1351.
32. Wang L., Li Y., Qian Y., Luo X. A Parameter Estimation Method of Shock Model Constructed with Phase-Type Distribution on the Condition of Interval Data. Mathematical Problems in Engineering. 2020. vol. 2020. no. 11. DOI: 10.1155/2020/1424105.
33. Smagin V., Filimonihin G. [About modelling of stochastic processes on a basis of hyperdelta distribution]. Avtomatika i vychislitel'naja tehnika – Automation and Computer Engineering. 1990. no. 1. pp. 25–31. (In Russ.).
34. Buranova M., Kartashevsky V. [Recursive selection of parameters of hyperexponential distributions in the approximation of distributions with "heavy tails"]. Trudy uchebnyh zavedenij svyazi – Proceedings of educational institutions of communication. 2023. vol. 9. no. 2. pp. 40–46. (In Russ.).
35. Dokuchaeva A. [Monte-Carlo Simulation of the Queuing Systems with Parametric Uncertainty by the Dynamic Simplified Models]. Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii – Control systems and information technologies. 2019. no. 1(75). pp. 11–16. (In Russ.).

36. Tarasov V., Bakhareva N. [Simulation modeling of queuing systems based on composite distributions – probabilistic mixtures]. T-Comm: Telecommunications and Transport – T-Comm: Telekommunikacii i transport. 2023. vol. 17. no. 3. pp. 14–19.
37. Gofman M., Kornienko A., Glukharev M. A Method for Watermark Detection in Digital Audio Signals by Authorized Users. Automatic Control and Computer Sciences. 2021. vol. 55. no. 8. pp. 1005–1019.
38. Privalov A., Lukicheva V., Kotenko I., Saenko I. Increasing the sensitivity of the method of early detection of cyber-attacks in telecommunication networks based on traffic analysis by extreme filtering. Energies. 2020. vol. 13. no. 11.
39. Glukharev M., Solomatova M. Access Differentiation in Object-Oriented Databases Based on the Extended Object-Oriented Harrison–Ruzzo–Ullman Model. Automatic Control and Computer Sciences. 2020. vol. 54. pp. 1007–1012.

Goncharenko Vladimir — Ph.D., Associate professor of the department, Department of information and computing systems, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University; Lecturer of the department, Information and computing systems and networks department, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: queue theory, mathematical modeling, queueing systems with uncertainty, information security, stability of computer networks. The number of publications — 111. vlango@mail.ru; 13, Zhdanovskaya St., 197198, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)347-9524.

Khomonenko Anatoly — Ph.D., Dr.Sci., Professor of the department, Department of information and computing systems, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University; Professor of the department, Department of mathematical and software engineering, Mozhaisky Military Space Academy. Research interests: numerical theory of queuing, modeling of complex systems, programming, operating and information systems, queuing systems, software reliability, information systems, information system security. The number of publications — 287. khomon@mail.ru; 9, Moskovsky Ave., 190031, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)457-8356.

Abu Khasan Rakheb — Graduate student, Department of information and computing systems, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University. Research interests: information systems, data warehouses, reliability models. The number of publications — 5. ragheb1997@yandex.ru; 9, Moskovsky Ave., 190031, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)457-8356.