УДК 004.82+004.89

А.А. Фильченков

МЕРЫ ИСТИННОСТИ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ДЛЯ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЗНАНИЙ С НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬЮ

Фильченков А.А. **Меры истинности и вероятностные графические модели для представления знаний с неопределенностью.**
Аннотация. Для представления знаний с неопределенностью необходимы как математический формализм, позволяющий описывать и обрабатывать неопределенность, так и теоретико-компьютерные модели, ограничивающие требования такого представления и обработки к памяти и времени. В работе рассмотрены основные меры истинности, используемые в искусственном интеллекте для представления неопределенности, в первую очередь вероятностная мера, а также вероятностные графические модели, которые за счет локализации вычислений позволяют ограничить рост сложности алгоритмов обработки и требований к памяти для представления знаний с неопределенностью.
Ключевые слова: байесовские сети, внутренняя и внешняя меры, вероятностные графические модели, знания с неопределенностью, меры истинности.

Filchenkov A.A. **Measures of truth and probabilistic graphical models for representation of knowledge with uncertainty.**
Abstract. For representation of knowledge with uncertainty both mathematical formalism allowing to describe and handle uncertainty and theoretical computer model limiting memory and time used for such representation and its processing, are required. The paper gives an overview of the main truth measures including probability measure that being applied in artificial intelligence for uncertainty representation, and probabilistic graphical models which allow to limit the growth of processing algorithms complicity and memory requirements for modelling knowledge with uncertainty by means of computation localisation.
Keywords: Bayesian networks, internal and external measures, probabilistical graphic models, knowledge with uncertainty, measures of truth.

1. Введение. Моделирование и обработка знаний в интеллектуальных системах [3, 11, 13, 22] неизбежно сталкиваются с вопросами моделирования и обработки знаний с НЕ-факторами [2,19,20, 25], т. е. характеризуемых неполнотой, неточностью и т. д. Термином «знания с неопределенностью» ряд авторов [40,78,87] называет знания с недоопределенностью и неточностью.

Рассматривая знания как информационную модель, можно указать три основных причины, вынуждающие включать в эту модель неопределенность [116]:

- в предметной области, которую описывает модель, может быть недостаточно теоретических знаний о закономерностях и взаимосвязях;

- даже если известны все закономерности и взаимосвязи, могут быть недоступны измерения параметров отдельного объекта предметной области, либо же такие измерения могут быть проведены с ошибками;
- даже если известны как общие закономерности, так и параметры отдельных объектов, для экономии ресурсов модель может учитывать не все известные сведения.

С теоретической точки зрения, моделирование и обработка знаний с неопределенностью требует математического формализма, обладающего достаточной выразительной силой, чтобы операционализировать работу с неопределенностью. Широко распространены количественные подходы к представлению неопределенности, среди которых классическим, но единственным, является вероятностная мера.

С точки зрения информатики, необходимы теоретико-компьютерные модели, обеспечивающие удобное представление знаний с неопределенностью для компьютеризации их обработки. В этом срезе возникает проблема роста сложности работы алгоритмов и требований к памяти, необходимых для представления и обработки таких знаний. Данную проблему успешно решают вероятностные графически модели, которые за счет локализации вычислений, основанной на декомпозиции и предположениях об условной независимости, позволяют ограничить указанные требования.

Целью данной работы является систематическое изложение контекста количественных и структуралистских подходов к представлению знаний с неопределенностью для обеспечения развития теории алгебраических байесовских сетей.

2. Моделирование неопределенности знаний с помощью мер истинности. Длительное время специалисты и ученые, занимающиеся искусственным интеллектом, дистанцировались от использования вероятностных рассуждений [119]. Последнее объясняется [119] тем, что длительное время искусственный интеллект связывался с символьными манипуляциями, а не с численными вычислениями. Взгляды на это изменились в связи необходимостью иметь доступ к большим объемам знаний, в частности, экспертным системам [95, 119]. Благодаря этому в искусственном интеллекте возник вопрос о численном представлении знаний, в том числе знаний с неопределенностью [95, 116].

В этом разделе мы проследим развитие математического аппарат для формального представления неопределенности, а также рассмотрим основные подходы к моделированию неопределенности с помощи мер истинности.

2.1. Вероятность и вероятностная мера. Принято считать [4], что в европейской науке вопрос о количественном измерении неопределенности берет свое начало из анализа азартных игр, который можно отследить вплоть до X века. В 1494 году в книге Луки Пачоли [104] встречается серия задач, которые сводятся к тому, чтобы справедливо разделить выигрыш между участниками прервавшегося состязания пропорционально их шансам на победу при достигнутом состоянии. Если не считать разрозненных попыток исследовать исходы бросков кости, первый систематический анализ был проведен Джироламо Кардано в 1565 году [61], но эта работа оставалась неопубликованной до 1663 года. Впрочем, в вышедшей в 1539 году «Практике общей арифметики» [62] содержались критические замечания в отношении решения задач Пачоли, однако правильного решения в этой книге предложено не было.

Утверждению теории вероятностей как математической дисциплины способствовало открытие Блезом Паскалем систематического способа вычисления вероятностей [105], который был инспирирован перепиской с Пьером Ферма, посвященной решении задачи, похожей на задачу Пачоли. Первый учебник по теории вероятностей принадлежит перу Христиана Гюйгенса [84], написавшего его 1657 году. Якоб Бернулли в 1689 году доказал закон больших чисел в простейшем случае независимых испытаниях [56], благодаря чему стал первым широко трактовать вероятность как число, равное отношению благоприятствующих событию шансов к числу всех возможных [4, 55]. Особенно важно в рамках данной работы отметить сформулированное Томасом Байесом правило формирования рассуждений об условных вероятностях, которое теперь носит название теоремы Байеса. Работы [54] Байеса были опубликованы только после его смерти в 1763 году.

В связи со стремительным развитием математики в XIX веке теория вероятностей начинает применяться к анализу ошибок наблюдений; значительный вклад в этот период внесли Пьер-Симон Лаплас, Симеон Дени Пуассон, Карл Фридрих Гаусс и Огюст Луи Коши (по их именам названы часто используемые вероятностные распределения). Во второй половине XIX века важную роль сыграли исследования русских учёных: Пафнутий Львович Чебышев, Александр Александрович Марков и Александр Михайлович Ляпунов во многом сформировали современный облик теории вероятности. В это время были доказаны закон больших чисел, центральная предельная теорема, а также разработана теория цепей Маркова [48].

Различные подходы к формализации теории вероятности в виде системы аксиом были предприняты рядом исследователей, в том числе Сергеем Натановичем Бернштейном [1] и Рихардом фон Мизесом [125]. Общепризнанный ныне аксиоматический метод был предложен Андреем Николаевичем Колмогоровым в работе [94], вышедшей в 1933 году. Считается, что с этого момента теория вероятности окончательно утвердилась как один из разделов математики.

Вероятностные пространством называется тройка вида

$$\langle \Omega, \mathcal{A}, p \rangle,$$

где Ω — *пространство элементарных событий* (также *исходов*), $\mathcal{A}$ — *алгебра*, а p — *вероятность* (*вероятностная мера*). В общем случае [48] рассматривается сигма-алгебра $\mathcal{F}$, однако для дальнейших рассуждений достаточно будет опираться на алгебру, а не на сигма-алгебру.

Элементарные события, содержащиеся в пространстве Ω, взаимоисключающие, т. е. одновременно может произойти ровно одно элементарное событие, наблюдаться ровно один исход. Подмножества пространства элементарных событий (в том числе пустое множество) называются *событиями.* На события распространяются те же операции, что и на подмножества — объединение, пересечение, дополнение, которые для событий называются соответственно *суммой*, *произведением* и *отрицанием.*

Если пространство элементарных событий (и, следовательно, число событий) конечно, то говорят об *алгебре событий* $\mathcal{A}$, аксиоматически задаваемой системой требований:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.

2. $X \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{X} = \Omega \backslash X \in \mathcal{A}$.

3. $X, Y \in \mathcal{A} \Rightarrow X \cup Y \in \mathcal{A}$.

Из определения алгебры следует также, что и пересечение двух элементов алгебры так же лежит в алгебре, поскольку $X \cap Y = \overline{\bar{X} \cup \bar{Y}}$.

В том же случае, когда пространство элементарных событий бесконечно, вводится *сигма-алгебра* $\mathcal{F}$, которая задается тем же сходным набором аксиом, что и алгебра, отличие же состоит в последней аксиоме, в которой речь идет уже не об объединении двух (а потому и конечного числа) элементов, но об объединении счетного числа элементов:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$.

2. $X \in \mathcal{F} \Rightarrow \bar{X} = \Omega \backslash X \in \mathcal{F}$.

3. $X_i \in \mathcal{F}$, $i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcup X_i \in \mathcal{F}$.

Алгебра задает те события, на которых определяется вероятность p — неотрицательная аддитивная (для сигма-алгебры — сигма-аддитивная) нормированная единицей функция множеств на алгебре $\mathcal{F}$ [48]:

$$p : \mathcal{A} \longrightarrow [0; 1].$$

Вероятность задается следующими аксиомами:

1. $\forall X \in \mathcal{F}\ p(X) \geq 0$.

2. $p(\Omega) = 1$.

3. $\forall X_i, X_j \in \mathcal{F}, X_i \cap X_j = \emptyset\ p\left(X_i \cup X_j\right) = p\left(X_i\right) + p\left(X_j\right)$.

Полная группа событий $B = \{X_k\}_{k=1}^{k=n}$ — это разбиение Ω событиями из алгебры $\mathcal{F}$:

1. $\forall X_i, X_j \in B$, $i \neq j \Rightarrow X_i \cap X_j = \emptyset$;

2. $\bigcup\limits_{k=1}^{k=n} X_k = \Omega$.

На элементах полной группы событий B задается *плотность вероятности* p° — функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1. $p^\circ : B \longrightarrow [0;1]$.
2. $\forall X \in B \; p^\circ(X) \geq 0$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{k=n} p^\circ(X) = 1$.

Вероятность любого события, входящего в алгебру $\mathcal{A}$ может быть выражена через плотность вероятности. В этом случае функция p на алгебре-замыкании $\mathcal{A} = [B]_{\bar{\ },\cup,\cap}$, $p : \mathcal{A} \longrightarrow [0;1]$, заданная как

$$p(X) = \sum_{\substack{X' \subset X \\ X' \in B}} p^\circ(X'), \quad \forall X \in \mathcal{X},$$

выступает вероятностной мерой для вероятностного пространства $\langle \Omega, [B]_{\bar{\ },\cup,\cap}, p \rangle$, причем она совпадает с p° на элементах разбиения B.

2.2. Интерпретации вероятности и виды неопределенности. Для того, чтобы говорить о вероятностной мере как о мере истинности, необходимо рассуждать о вероятности истинности утверждения, тогда как аксиоматика Колмогорова задает вероятность для событий.

Применимость математического аппарата к описанию и решению задач реального мира связана с интерпретацией понятий и методов аппарата. Исторически понятие «вероятность» появилось раньше, чем его аксиоматизация. Им пользовались все перечисленные выше исследователи, которые не прибегали к понятию «шанс». Однако интерпретация понятия «вероятность» у различных исследователей была различной. Для соблюдения строгости изложения мы будем обозначать понятие «вероятности» при помощи кавычек, чтобы отличать ее от формально заданной в предыдущем разделе меры.

Физическая или *объективистская* интерпретация исходит из понимания «вероятности» как численного описания неопределенности, связанной со свойствами рассматриваемой предметной области. В рамках физической интерпретации разделяются *частотная* или *фреквенстистская* интерпретация (frequency probability) и *предрасположенностная* интерпретация (propensity probability). Сторонники частотной интерпретации, к которым относились Ганс

Райхенбах и фон Мизес [75], рассматривали «вероятность» как предел относительной частоты наступления события x [126]:

$$P_{\text{freq}}(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число испытаний, в которых событие наступило, а n — общее число испытаний.

В основе предрасположенностной интерпретации лежит семантика вероятностных миров Чарльза Пирса [109], который сам, впрочем, относился скорее к частотникам. Сама же интерпретация развита Карлом Поппером [100]. В рамках этого подхода «вероятность» рассматривается как некоторое свойство, присущее объекту (т. е., например, орел выпадает с вероятностью 0,5 из-за физических законов, которые мы не можем явно перечислить, но можем объединить в вероятностную меру).

Свидетельская или *байесовская* (часто встречается и «субъективистская», но мы будем говорить так в более узком смысле) интерпретация «вероятности» рассматривает ее с точки зрения рассуждений субъекта (агента) о возможности наступления того или иного события. Выделим три подхода: классический, субъективистский и логический.

Классическая интерпретация, связана с определением «вероятности», данной Лапласом [96]: «вероятность» определяется как доля благоприятных исходов среди всех возможных исходов, которые считаются равновероятными:

$$P_{\text{classic}}(x) = \frac{X}{N},$$

где X — число благоприятных исходов, а N —общее число равновероятных исходов. Несмотря на кажущее сходство с частотной интерпретацией «вероятности», определение Лапласа опирается на понятие «равновероятных исходов», однако то, что именно считать равновероятностными исходами, опирается на агента, что вызывает целый ряд парадоксов (например, парадокс Бертрана [57], парадокс «мальчика и девочки» [74]).

В *субъективистской интерпретации* «вероятность» рассматривается как степень уверенности агента в том, что событие произойдет. К сторонниками субъективистской интерпретации относились Бруно де Финетти [66], Леонард Сэведж [117] и Франк Рамсей.

Последний предпринял попытку формализовать и численно выразить субъективные уверенности через рассуждения о ставках.

К представителям *логической интерпретации* относятся Рудольф Карнап [63], Джон Милрад Кейнс [88], а также и Рамсей [112], которые в той или иной степени пытались формализовать логические отношения между вероятностными суждений и способами вывода из них.

Следует обратить внимание на то, что приведенная классификация относится к интерпретации именно понятия «вероятность», которую нельзя смешивать с интерпретацией статистического вывода [53]. Выделяют «частотный» (связанный с Робертом Дж. Фишером) «байесовский» (связанный с Байесом) вывод. Байесовский вывод, которого мы коснемся в следующем разделе, может быть как субъективным, так и объективным, в зависимости от природы используемых в нем априорных вероятностей.

Колмогоровская аксиоматика, в основе которой лежал частотный подход, может служить базисом для построения математического аппарата, основанного на любой из описанных выше интерпретаций «вероятности».

Для рассуждении о степени уверенности агента мы не станем отдельно вводить аксиомы теории вероятности, переписанные для утверждений. Строгая формализация Фаджина, Хальперна и Меджиддо приведена в [73], нам же достаточно следовать наивному подходу [78], рассматривая конечное множество утверждений S, для которого выполняется:

1. $x \in S \Rightarrow \bar{x} \in S$.

2. $x, y \in S \Rightarrow xy \in S$, где xy — конъюнкция.

В таком «наивном» задании, которого, оказывается достаточно для того, чтобы сравнить вероятность с другими мерами истинности, сумме событий соответствует конъюнкция, а произведению — дизъюнкция.

Теперь рассмотрим другие аспекты критики, направленные на вероятностную меру, которые возникли уже в связи с попыткой численных рассуждений о неопределенности в знаниях, извлекаемых из экспертов [120].

Во-первых, при заданных вероятностях $p(x)$ и $p(y)$, мы не можем без дополнительных предположений рассуждать о вероятности конъюнкции $p(xy)$ и дизъюнкции $p(x \vee y)$ этих утверждений, можно указать лишь границы, в которых лежат эти вероятности:

$$\max\{0, p(x) + p(y) - 1\} \leq p(xy) \leq \min\{p(x), p(y)\};$$

$$\max\{p(x), p(y)\} \leq p(x \vee y) \leq \min\{p(x) + p(y), 1\}.$$

Во-вторых, вероятность того, что событие не произойдет, выражается однозначно через вероятность того, что оно произойдет: $p(\bar{x}) = 1 - p(y)$. Таким образом, мера вероятности не в достаточной степени позволяет агенту (эксперту) описать неопределенность и свои степени уверенности относительно истинности или ложности утверждения, поскольку агент может быть не уверен ни в том, ни в другом. Например, вероятность выпадения решки у «настоящей» монеты равна 1/2, и это соответствует предположениям агента. Рассмотрим двустороннюю монету, у которой обе стороны совпадают, однако неизвестно, что на них — орел или решка. Если ничего дополнительно не известно про монету, то вероятность выпадения орла по-прежнему равна 1/2. Однако в этом случае агент не может быть уверен ни в выпадении орла, как, впрочем, не может он быть и уверен в выпадении решки, поскольку вероятность обоих событий может быть равна нулю.

2.3. Меры доверия и правдоподобия. Теория, получившая название теории Демпстера–Шафера, была впервые предложена Артуром Демпстером [68,69], который выдвинул и развил эвристическую идею о том, что агент необязательно уверен в истинности утверждения в той же степени, в которой он не уверен в ложности обратного утверждения. Демпстер строго формализовал приведенные выше суждения, введя меры доверия и правдоподобия, через которые описываются уверенность субъекта в истинности утверждения и ложности обратного утверждения, и обосновал правила комбинирования для использования этих мер. После того как в дальнейшем была опубликована работа Гленна Шафера [120], теория Демпстера–Шафера (ТДШ) стала рассматриваться как научный подход, способный конкурировать с вероятностным подходом.

Как уже было сказано, двумя основными объектами теории Демпстера-Шафера, формализующие степень уверенности в отношении истинности утверждения x, являются *мера доверия* $\mathrm{Bel}(x)$ и *мера правдоподобия* $\mathrm{Pl}(x)$, находящихся в отношении:

$$\mathrm{Pl}(x) = 1 - \mathrm{Bel}(\bar{x}),$$

т. е., агент считает x правдоподобным ровно настолько, насколько он не доверяет его отрицанию $\bar{x}$.

Благодаря этому соотношению задания одной из мер достаточно для задания обеих. Базовой считается именно мера доверия, которая как неотрицательная нормированная единицей функция на множестве утверждений S

$$\mathrm{Bel} : S \longrightarrow [0; 1].$$

вводится аксиоматически следующим образом:

1. $\forall x \in S \ \mathrm{Bel}(x) \geq 0.$

2. $\mathrm{Bel}(W) = 1.$

3. $\mathrm{Bel}(\bigwedge_{i=1}^{n} x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Bel}(x_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{Bel}(x_i x_j) +$
$+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathrm{Bel}(x_i x_j x_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{Bel}(x_1 x_2 \ldots x_n).$

Весовая функция семантически представляет распределение свидетельств «за» на некотором множестве базовых утверждений. $m : 2^{\mathcal{W}} \longrightarrow [0, 1]$, где W –множество возможных миров. Ее свойства и связь с мерой доверия таковы:

1. $\forall V \subset W \ m(V) \geq 0;$

2. $\sum V \subset W m(W) = 1;$

3. $\forall W \subset Q \ \mathrm{Bel}(W) = \sum\limits_{T \subset V} m(V).$

Таким образом, мы ввели случайный элемент — «случайное множество», а m задает плотность распределения на случайных множествах. Через весовые функции можно представить меры доверия, а именно для весовой функции m на V, функция $\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \ \forall A \in 2^V$, является функцией доверия на V. Причем для функци доверия существует единственная весовая функция, удовлетворяющая определению.

Весовая функция задается экспертом для количественного выражения его «поддержки» свидетельства. Для учета свидетельств, полученных от разных экспертов, в ТДШ используется операция комбинирования. Существует множество различных операций комбинирования, рассмотрим введенную Демпстером.

Для весовых функций m_1 и m_2, их *комбинация* m задается следующим образом:

$$m(V) = \frac{\sum\limits_{V=V_1 \cap V_2} m_1(V_1)m_2(V_2)}{\sum\limits_{V_1 \cap V_2 \neq \emptyset} m_1(V_1)m_2(V_2)},$$

причем заданная таким образом m является весовой функцией. Если же знаменатель в дроби обращается в нуль, то это говорит о противоречии в свидетельствах экспертов.

У ТДШ был выявлен ряд недостатков, среди которых наиболее важными являются [40]:

1. Неоднозначность трактовки операции комбинирования свидетельств;
2. Трудноопределимый вид независимости свидетельств, который предполагает операция их комбинирования;
3. Вычислительная сложность, нестабильность и некорректность результатов вывода операции комбинирования.

2.4. Меры возможности и необходимости. Нечеткие множества были разработаны Лотфи Заде [130] для устранения сложностей при представлении точных входных данных для интеллектуальных систем. Нечеткая логика часто некорректно трактуется как прямой конкурент теории вероятностей, тогда как в этой теории фактически рассматриваются другие вопросы. Для вычислений с учетом неопределенности в нечетких системах была предложена теория возможностей (possibility theory) [131], которая имеет много общего с теорией Демпстера–Шафера. Серьезный вклад в теорию возможностей внесли Дидье Дюбуа и Анри Прад (поэтому часто теорию называют по их именам) [70–72].

Основными понятиями теории возможности являются *мера необходимости* $\mathrm{Nec}(x)$ и *мера возможности* $\mathrm{Pos}(x)$, которые задаются и соотносятся так же, как мера доверия и мера правдоподобия:

$$\mathrm{Nec}(\bar{x}) = 1 - \mathrm{Pos}(x).$$

Как и для мер доверия и правдоподобия, достаточно задать лишь одну из мер необходимости и возможности, чтобы выразить другую. Для меры правдоподобия Pos, которая задается на 2^W должны выполняться следующие аксиомы:

1. $\mathrm{Pos}(\emptyset) = 0$.

2. $\mathrm{Pos}(W) = 1$.

3. $\mathrm{Pos}(x \vee y) = \max\{\mathrm{Pos}(x), \mathrm{Pos}(y)\}$.

Интервал $\big[\mathrm{Nec}(x); \mathrm{Pos}(x)\big]$ является характеристикой нечеткости истинности утверждения x.

В рамках рассматриваемой теории заданы правила вычисления мер возможности и необходимости дизъюнкции и конъюнкции:

$$\mathrm{Pos}(xy) = \min\{\mathrm{Pos}(x), \mathrm{Pos}(y)\},$$
$$\mathrm{Nec}(xy) = \min\{\mathrm{Nec}(x), \mathrm{Nec}(y)\},$$
$$\mathrm{Nec}(x \vee y) = \max\{\mathrm{Nec}(x), \mathrm{Nec}(y)\}.$$

2.5. Внешняя и внутренняя меры. Наконец, рассмотрим подход к представлению неопределенности, который тесно связан с теорией вероятности, а именно — аппарат внешних и внутренних мер. Уже тот факт, что в теории вероятностей рассматривается именно алгебра $\mathcal{A}$, возможно, менее богатая, чем алгебра над 2^{Ω}, учитывает существование *неизмеримых событий*, т. е. таких подмножеств Ω, на которых не задана вероятностная мера p.

Вопрос о том, что для представления неопределенности оказывается недостаточно одного числа, был поднят еще Джоном Булем [58] и рассматривался множеством исследователей [59, 121]. Впоследствии формализация идеи представления неопределенности истинности утверждения через внутреннюю и внешнюю меры была предложена Фаджиным и Хальпенром [73] в 91–м году, хотя схожие подходы предлагались и ранее (например, [50]).

Идея, лежащая в основе данного подхода, формулируется достаточно просто: множество значений вероятностных мер, которыми можно характеризовать неопределенность наступления события x, образует отрезок, границы которого можно использовать для характеристики указанной неопределенности.

В общем случае сделать однозначный выбор значения $p(X)$ для неизмеримого события X невозможно. Однако можно (поскольку мы рассуждаем о конечных множествах) указать границы значений, которые может принимать вероятность истинности этого утверждения:

$$p^-(X) = p\left(\bigcup_{\substack{X' \subseteq X\\ X' \in \mathcal{A}}} X'\right), \qquad p^+(X) = p\left(\bigcap_{\substack{X'' \supseteq X\\ X'' \in \mathcal{A}}} X''\right).$$

Введенные таким образом, $p^-(X)$ называется *внутренней мерой* на 2^Ω, порожденной мерой p на $\mathcal{A}$, а $p^+(X)$ — *внешней мерой* на 2^Ω, порожденной мерой p на $\mathcal{A}$.

При этом выполняются уже знакомые свойства:

1. $\forall X \in 2^\Omega\ 0 \leq p^-(X) \leq p(X) \leq p^+(X)$.
2. $p^-(\Omega) = 1$, $p^+(\Omega) = 1$; $p^-(\emptyset) = 0$, $p^+(\emptyset) = 0$.
3. $\forall X \in 2^\Omega\ p^-(\bar{X}) = 1 - p^+(X)$.

Кроме этого, внешняя мера супераддитивна:

$$p^+\left(\bigcup_k X_k\right) \leq \sum_k p^+(X_k),$$

а внутренняя мера субаддитивна:

$$p^-\left(\bigcup_k X_k\right) \geq \sum_k p^-(X_k)$$

Аппарат внешних и внутренних мер является теоретической основой для обработки интервальных оценок вероятностей. Его выразительные способности сопоставимы с выразительными способностями мер доверия и правдоподобия [73, 115] и мер возможности и необходимости. Актуальность использования интервальных оценок для моделирования в различны предметных областях описана в [12].

3. Вероятностные графические модели. Истоки идеи представления взаимосвязей в виде графа невозможно отследить, поскольку благодаря естественности и интуитивной понятности, оно применялось задолго до появления собственно математического понятия «граф» (например, генеалогическое древо). Использовать же графы для представления именно вероятностных взаимосвязей стали в начале XX века, дав тем самым начало классу вероятностных графических моделей.

Статистическая физика и теория случайных процессов служат неисчерпаемым источником подходов, методов, и задач для вероятностных графических моделей, тогда как начиная с конца 80-х годов все большее влияние имеет использование методов т. н. «байесовской статистики», основанной на байесовском выводе.

Формально вероятностная графическая модель представляет собой граф, с узлами которого ассоциированы случайные элементы. Такая модель задает вероятностное распределение или семейство вероятностных распределений. В основе вероятностных графических моделей лежит принцип *вероятностной декомпозиции*, который позволяет ограничить число связей между случайными элементами, которые необходимо принять к рассмотрению, за счет определенных предположений об условной независимости. Именно декомпозиция предметной области на *фрагменты знаний*, состоящие из ограниченного числа случайных элементов, позволяет избежать экспоненциального времени работы алгоритмы и экспоненциального объема памяти [40], которые требуются в случае моделирования знаний о предметной области без дополнительных предположений о случайных элементах.

В этом разделе для краткости и удобства введем следующие сокращения. Случайные элементы и их значения будем обозначать прописными буквами (например, X), а утверждения, как и прежде, строчными (например, x). Если S — случайная величина с множеством значений $\{X_1, \dots X_n\}$, то

1. Под $p(X_i)$ будем понимать значение вероятности $p(S = X_i)$;
2. Под $P(S)$ будем понимать вектор вероятностей всевозможных означиваний S: $P(S) = (p(X_1), \dots, p(X_n))$;
3. Под $P(S_1, \dots, S_n)$ и под $P(S_1, \dots S_n | S_{n+1}, \dots, S_r)$ будем понимать тензоры вероятностей (условных вероятностей), всех возможных означиваний случайных величин, входящих в выражение.

3.1. Марковская цепь. Рассмотрение вероятностных графических моделей мы начнем с *марковских цепей*, непосредственно связанных с одноименными случайными процессами. Именно Марков [15] начал исследование вероятностной связи случайных элементов, которое стало базой общей теории случайных процессов и легло в основу таких прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и многих других. При этом Марков не использовал для описания случайных процессов графы. Как уже было сказано, теория случайных процессов имеет особое значение для теории вероятностных графических моделей, поскольку именно из случайных процессов было заимствовано понятие *марковского свойства*, на котором в той или форме основана вероятностная декомпозиция.

Формально, марковская цепь является марковским случайным процессом, т. е. время и пространство состояний в ней непрерывно, тогда как обычно марковскую цепь рассматривают с конечным числом состояний. В данной работе будет описан именно этот случай марковской сети.

Марковская цепь представляет собой цепной граф, узлам которого приписана модель возможных состояний, которая с течением времени случайно переходит из состояния в другое (рис. 1). Множество состояний представляет последовательность дискретных случайных величин, а время является либо дискретным (и тогда говорят про марковские цепи с дискретным временем), либо непрерывным (и тогда говорят про марковские цепи с непрерывным временем).

Через $S(t)$ обозначим состояние системы в момент времени t, которое может принимать одно из множества значений $X = \{X_1, \ldots X_n\}$. Состояния цепи обладают марковским свойством, то есть вероятности $P(S)$ зависит только от состояния системы в предыдущий момент времени, если речь идет о дискретном времени (в непрерывном случае связь несколько более сложная). Соответственная условная зависимость представляется в виде матрицы $\mathbf{A}(t)$: $\mathbf{A}(t)\,[i,j] = p\left(S\left(t+1\right) = X_i | S\left(t\right) = X_j\right)$. Матрица $\mathbf{A}(t)$ называется *переходной матрицей*. Она является стохастической. В том случае, когда матрица не зависит от номера шага, т. е. $\mathbf{A}\left(t\right) = \mathbf{A} = \left(a_{i,j}\right)$, такая модель называется *однородной*. Обычно рассматриваются именно однородные модели. Вообще говоря, переходной матрицей может выступать любая стохастическая матрица.

Марковская цепь используется термодинамике и статистической механике, химии, тестировании, статистике, финансах (например, для прогнозирования обвалов рынка), генерации текстов

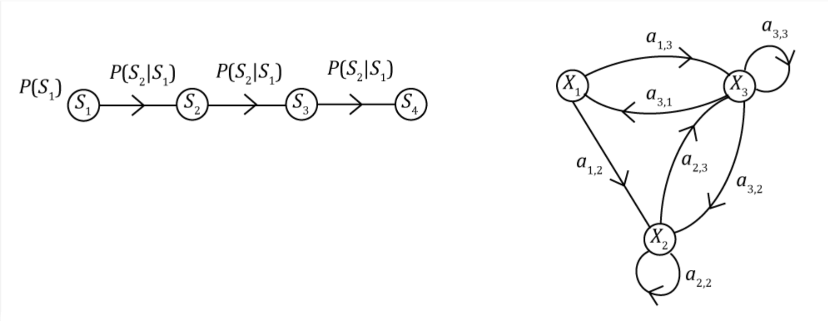

Рис. 1: Однородная марковская цепь с дискретным временем и тремя состояниями.

В левой части показаны переходы между значениями системы во времени, а слева — переходы между состояниями системы.

и музыки [51], а также в биоинформатике и ряде других областей [93]. Сам Марков впервые использовал ее в 1913 году для анализа текста «Евгения Онегина» [16].

3.2. Модель Изинга. Первой моделью, в которой графическое представление соединено с вероятностными рассуждениями, была описывает намагничивание материала модель Изинга [85], предложенная Эрнстом Изингом в 1925 году и основанная на высказанных в 1920 году Вильгельмом Ленцем идеях [99].

Было известно, что ферромагнетизм связан с большим числом вращающихся в одном направлении электронов, но возникала вопрос, каким образом могут согласовывать направление своего вращения удаленные друг от друга электроны, если воздействовать электрон способен только на своих соседей [60]. Сам Изинг пришел к выводу, что в одномерном случае не проявляется ожидавшихся свойств ферромагнетизма, поэтому сама модель осталось известной физике лишь за счет возможности применения ее в иных областях, таких как моделирование поведения атомов в сплавах [60]. Двумерный случай, которое оказалось намного сложнее, был проанализирован лишь в 1944 году Лансом Онзагером [103].

Приведем описание одномерного случая (в больших размерностях меняются степени вершин), минимально затрагивая стоящие

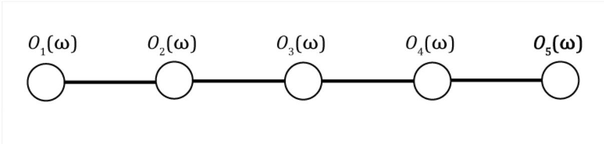

Рис. 2: Модель Изинга в одномерном случае.
Узлам приписаны означивания спинов соответствующих электронов.

за моделью физические процессы. В этом случае *модель Изинга* представляет цепь (рис. 2), вершины которой ассоциированы со спинами электронов, принимающих одно из двух состояний (означиваний). Означивание i–го спина зададим функцией O_i, принимающее значения из $\{-1, 1\}$. Для n вершин существует 2^n означиваний спинов, которые мы будем обозначать через ω_k. Каждому из таких означиваний приписывается энергия, которая зависит только от попарного взаимодействия соседних спинов:

$$U(\omega) = -J \sum_{i,j} O_i(\omega) O_j(\omega) - mH \sum_i O_i(\omega),$$

где J, m и H — определенные константы. Вероятность спинов получить означивание ω задается пропорциональным $e^{\frac{U(\omega)}{kT}}$, где k — еще одна константа, а T — переменная, задающая температуру. Введенная таким образом распределение является *распределение Гиббса.*

Довольно неожиданные применения модель нашла также для моделирования активности нейронов человеческого мозга [83], социологических [81,127] и социолингвистических [101] исследованиях.

3.3. Марковское случайное поле. Обобщением модели Изингна являются *марковские случайные поля*, которые были введены в теории вероятностей как стохастические процессы в конце 60–х годов, куда они пришли из статистической физики [23]. Так, марковские случайные поля являются обобщением модели Изинга [91]. Их предложил Роланд Добрушин в 1965 году [9], а Карл Престон [110] в 1974 году формально обобщил идею для графового представления (Добрушин исследовал лишь решетки).Следует также отметить, что допустимо название «марковские сети» (которое как

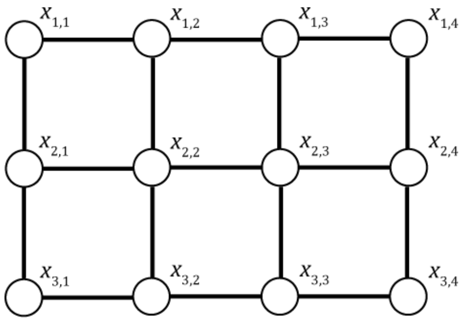

Рис. 3: Марковское случайное поле.
Узлам приписаны случайные элементы $X_{i,j}$.

раз и пришло из искусственного интеллекта и обозначает именно вероятностную графическую модель, тогда как «марковское случайное поле» изначально использовалось в физике).

Марковское случайное поле является графом, построенным над случайными элементами и задаваемое случайной многомерной величиной, такое, что оно удовлетворяет марковскому свойству (т.е. значение каждого элемента зависит только от смежных с ним величин). По сути, случайное марковское поле являет многомерным обобщением марковской цепи (рис. 3).

Формально это выражается в следующих условиях на случайные элементы, входящие в случайное марковское поле:

- любые две несмежных элеметнта условно независимы с учетом всех других случайных;
- случайный элемент условно независим от всех элементов с учетом своих соседей;
- любые два подмножества независимы от третьего подмножества, если любой путь из первого подмножества во второе проходит через элементы третьего.

Марковские случайные поля применяются для анализа последовательностей наблюдений, распознавания изображений, голоса, текста, финансового анализа рынков, решение задач статистической физике, моделировании сложных систем и анализе макроэкономических показателей [91, 93, 116].

3.4. Скрытая марковская модель. Скрытая марковская модель является частным случаем случайного марковского поля, однако появилась независимо от него и благодаря своей простоте нашла очень широкое применение. Скрытая марковская модель и связанные с ней алгоритмы вероятностного вывода и автоматического обучения, включая алгоритм «вперед–назад», были разработаны Л. Баумом и Т. Петри (которого не следует путать с Карлом Петри — создателем сети Петри) [52] в 1966 году. Независимо от них схожие идеи были высказаны в сообществе специалистов по калмановской фильтрации [113] еще в 1965.

В базовом случае скрытая марковская модель состоит последовательности скрытых состояний во времени $S = \{S_1, \dots S_m\}$, S_i принимают значения из X — набора возможных значений скрытых состояний $X = \{X_1, \dots, X_n\}$; матрицы перехода $\mathbf{A} = P(S_{i+1}|S_i)$, вектора начального распределения $\mathbf{x} = P(S_1)$, последовательности возможных наблюдений во времени $O = \{O_1, \dots, O_m\}$, O_i принимаеют значения из Y — набора возможных наблюдений $Y = \{Y_1, \dots, Y_k\}$; и матрицы вероятности наблюдений $\mathbf{B} = P(O_j|S_j)$ (рис. 4). Другими словами, скрытая марковская модель является графом, который строится над двумя согласованными временными рядами: рядом скрытых состояний и рядом наблюдений. При этом значения скрытых состояний неизвестны, однако известны условные вероятности перехода скрытых состояний (которые, удовлетворяют марковскому свойству), а также условные вероятности наблюдений от скрытых состояний.

В теории скрытых марковских моделей традиционно выделяют три основные задачи [111].

Первая задача — *оценка правдоподобия наблюдений* — состоит в определении вероятности поступающей последовательности наблюдений во времени относительно заданной скрытой марковской модели. Первая задача решается при помощи алгоритма «вперед–назад».

Вторая задача — *декодирование скрытой последовательности* — состоит в том, чтобы определениьть наиболее вероятную последовательность скрытых состояний при заданных модели и поступившей последовательности наблюдений. Вторая задача решается при

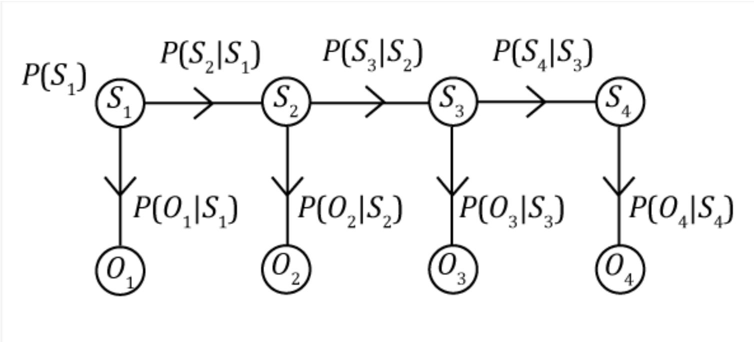

Рис. 4: Скрытая марковская модель в виде байесовской сети доверия.

Ребрам приписаны вероятности перехода, начальному узлу приписаны исходные вероятности.

помощи алгоритма Витерби.

Третья задача — *обучение скрытой марковской модели* — состоит в том, чтобы выбрать вероятности в матрице скрытой марковской модели так, чтобы максимизировать вероятность набора последовательностей наблюдений. Третья задача решается при помощи алгоритма Баума–Вэлха .

Скрытые марковские модели применяют во многих современных системах распознавания речи, в большинстве приложений вычислительной молекулярной биологии, для сжатии информации, в системах статистического машинного перевода, приложениях компьютерного зрения [93, 111, 116].

3.5. Тропинчатая модель. Описанные выше модели используют понятие *соседнего элемента*, основанного на пространственных или временных отношениях, потому сравнительно легко представимых визуально и формализуемых. Заметно сложнее представимы связи между случайными величинами, не характеризующиеся подобными отношениями. Подобная взаимосвязь может устанавливаться статистически или экспертно.

Использование собственно графов для представления вероятностной информации началось с работ Сьюэлла Райта по вероятностному анализу генетического наследования и показателей

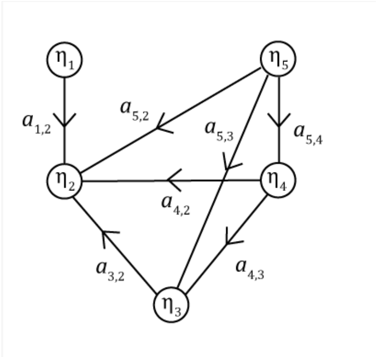

Рис. 5: Тропинчатая модель.
Узлам приписаны случайные величины, а ребрам —корреляции между ними.

развития животных: для предложенной в [128] в 1921 идеи формализм был приведен лишь в 1934 году [129]. В последней статье Райт стал использовать графы для отображения причинно-следственных связей, причем параметризовать эти отношения.

В общем виде *тропинчатая модель* представляет собой граф, вершины которого ассоциированы со случайными величинами, а ребра направленные ребра, проводятся между вершинами от величины, которая является «причиной» к величине, которая является «следствием» (рис. 5. Важно отметить, что между двумя вершинами могут быть проведены два ребра в обоих направлениях. На направленных ребрах дополнительно заданы коэффициенты, на которые участвуют в выражении случайных величин через их родителей линейной функцией. Так, через $\mathrm{path}(x)$ будем обозначать множество родителей вершины x, т. е. таких вершин, из которых в x ведет ребро. Матрица $\mathbf{A} = \{a_{ij}\}$ задает линейные коэффициенты. Тогда случайная величина η_n выражается в тропинчатой модели следующим образом:

$$\eta_n = \sum_{\eta_i \in \mathrm{path}(\eta_n)} a_{in}\eta_i.$$

Принцип построения тропинчатых моделей —*анализ троп* опирается на два принципа декомпозиции, которые разъясняют соотношение между коэффициентами, возникающими на ребрах соответствующего графа. Первое правило указывает на жесткое соотношение между корреляциями и линейными причинно-следственными связями, позволяя выразить корреляцию между двумя элементами a и b, где a — предок b, как сумму коэффициентов корреляций между a и каждым родителем b, домноженным на коэффициент пути между a и этим родителем. Второе правило декомпозиции корреляций в коэффициенты пути позволяет расписать указанную выше корреляцию как сумму оценок активных путей между a и b.

Два этих правила позволяют параметризовать тропинчатую модель «напрямую»: применить любое из двух правил декомпозиции Райта, и сформировать систему, связывающую коэффициент корреляции с коэффициентами пути, решить эту систему относительно коэффициентов пути и рассчитать численные значения на основе выборочных коэффициентов корреляции, получаемых из эмпирических данных.

Подход стал популярен из-за своей простоты, поскольку он предполагает линеаризуемость зависимостей между случайными величинами. Несмотря на кажущуюся грубость этого предположения, тропинчатые модели достаточно хорошо справляются со своими задачами за счет удачно подобранной замены переменных. Подход Райта лег в основу моделирования с помощью структурных уравнений [80], который применяется в эконометрике, и является в определенном смысле обобщением байесовских сетей доверия, рассматриваемых в следующем подразделе. Следует указать, что тропинчатые модели не используют марковского свойства, и обычно упоминаются в отношении вероятностных графических моделей только как одна из вех на пути развития рассуждений о зависимости между случайными величинами.

3.6. Байесовская сеть доверия. Впервые байесовские рассуждения применил еще Лаплас, рассуждая о вероятности восхода солнца [96]. Гуд разработал вероятностные представления и методы байесовского вероятностного вывода [76], которые могут рассматриваться как предшествующие современным байесовским сетям. Поиском причинно-следственных связей между случайными элементами на основе выборок занимался Райхенбах [114]. Он сформулировал принцип общей причины: если две переменные вероятностно взаимосвязаны, то либо одна из них обуславливает другую, либо они обе обусловлены другой переменной (которая называется их предком). Это принцип лег в основу анализа отношений времени и причинности . Указанный принцип предвосхитил принцип d-разделимости, используемый в байесовских сетях доверия.

В искусственном интеллекте байесовские вероятностные рассуждения стали использоваться начиная с 1960-х годов, причем применялись не только для составления диагноза на основании доступных свидетельств, но и для выбора дополнительных вопросов и тестов с использованием теории информационного значения, если доступные свидетельства не позволяли прийти к окончательному выводу. Одна из систем превзошла людей-экспертов в области диагностики острых брюшных инфекций [64]. Наиболее существенным недостатком таких систем были высокие требования ко времени и памяти для обработки данных (в них не применялся принцип вероятностной декомпозиции). Кроме того, они были чувствительными к данным, представленным небольшими выборками [65]. Из-за этих сложностей вероятностные методы решения задач в условиях неопределенности не вызывали интереса у большинства исследователей в области искусственного интеллекта в период 1970-х — середины 1980-х годов [116].

В начале 80-х годов Джуди Перл разработал метод передачи сообщений для осуществления вероятностного вывода в древовидных сетях [108] и ввел понятие полидревовидных сетей [90], а также объяснил важность составления причинных, а не диагностических вероятностных моделей. Само понятие байесовской сети доверия было предложено Перлом в 1986 году в статье [106], а соответствующий аппарат был представлен в [107]. Схожий подход к преобразованию полидеревьев на основе кластеризации разрабатывался Дэвидом Шпигельхальтером и Штеффаном Лауритценом [97]. Включение непрерывных случайных величин в модель рассматривалось кроме Перла также Шахтером и Кенли [118] (для линейными гауссовых распределений). Гибридный случай рассмотрен Лауритценом и Вермутом [98].

Благодаря Перлу [108] и Шпигельхальтеру [123] байесовские сети стали применяться в экспертных системах: первой такой системой стала, стала Convince [89], распространение получили также Munin [49] и Pathfinder [79].

Байесовская сеть представляет собой ациклический направленный граф, в котором узлы ассоциированы со случайными элементами, вероятностная зависимость между которыми задается тензорами условных вероятностей (рис. 6). При этом существенно, что граф ациклический. Вероятностная декомпозиция осуществляется за счет свойства *d-разделимости*.

Две вершины a и b направленного графа называются d-разделенными, если для любого ненаправленного пути между a в b существует такой промежуточный узел z, что либо связь в этом узле последовательная: $x \to z \to y$, и z получил означиваине, либо расходующаяся: $x \leftarrow z \to y$, и z получил означивание, либо сходящаяся: $x \to z \leftarrow y$, и ни z, ни один из его предков не получил означивания.

Два множества вершин X и Y называются *d-разделимы* относительно множества вершин Z, если любой ненаправленный путь между X в Y d-разделим каким-либо элементом из Z. Введенное таким образом понятие d-разделимости позволяет выявлять независимые элементы в графе, на основе чего осуществлять декомпозицию.

За счет свойства d-разделимости применяется *цепное правило*: вероятность совместного означивания всех элементов сети равна произведению условных вероятностей всех элементов от означивания их родителей (кроме вершин, у которых нет родителей — для них в формуле используется их маргинальная вероятность):

$$P(X_1, \dots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i | \mathrm{parents}(X_i))$$

Байесовские сети используются для моделирования в биоинформатике (генетические сети, структура белков), медицине, классификации документов, обработке изображений, обработке данных и системах принятия решений [86,116,124]. Байесовские сети доверия могут моделировать определенные классы марковских случайных полей и скрытых марковских моделей, при этом одновременно допускают представление в виде марковских сетей [93].

3.7. Динамическая байесовская сеть доверия. Динамические байесовские сети доверия, являясь частным случаем байесовских сетей доверия, могут рассматриваться как обобщение для скрытых марковских моделей. Динамические байесовские сети были предложены Дином и Канадзава [67], Николсон [102] и Кьерульфом [92] в конце 80-х. Последняя работа включает описание общего

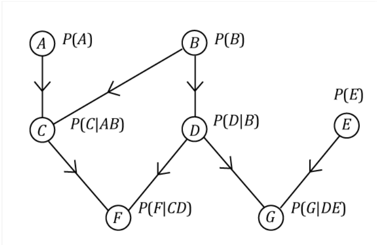

Рис. 6: Байесовская сеть доверия.
Узлам приписаны либо тензоры условных вероятностей (когда у них есть родители), либо маргинальные вероятности

дополнения к системе сетей доверия Hugin, которое предоставляет необходимые средства для формирования и компиляции динамической байесовской сети.

Динамическая байесовская сеть представляет последовательность зависимостей между изменениями в вероятностной модели [8]. Эти последовательности являются временными рядами, последовательностями символов или состояний. Каждое дискретное состояние сети может иметь любое количество переменных состояний и переменных свидетельств. Если каждая переменная может иметь родительские переменные только в своем собственном дискретном состоянии или в непосредственно предшествующем состоянии, то такая динамическая байесовская сеть представляет собой скрытую марковскую модель первого рода. Также, каждая модель с фильтром Калмана может быть представлена в виде динамической байесовской сети с непрерывными переменными и линейными гауссовыми распределениями условных вероятностей. В отличие от фильтра Калмана, динамическая байесовская сеть позволяют моделировать произвольные распределения. Эта выразительная сила является неоспоримым преимуществом в работе реальных приложений.

Динамические байесовские сети доверия нашли широкое применение для моделирования различных сложных процессов движения в системах машинного зрения. В [122] явно показана связь между скрытыми марковскими моделями и динамическими байесовскими сетями доверия, а также между алгоритмом «вперед–назад» и алгоритмом пропагации свидетельств в динамической байесовской сети доверия.

3.8. Алгебраическая байесовская сеть. Алгебраические байесовские сети были предложены Владимиром Ивановичем Городецким в 1984 году [77] как новая парадигма экспертных систем, использующая для представления неточности интервальные оценки вероятностей. Алгебраические байесовские сети создавались для того, чтобы устранить два существующих недостатка байесовских сетей доверия [5, 40]:

1. Ограниченность в представлении неопределенности лишь вероятностной мерой, хотя она не способна адекватно отражать существующие неточности в данных и обрабатывать данные с пропусками;

2. Обязательность указания причинно-следственных связей в модели байесовской сети доверия, тогда как подобные связи могут быть установлены далеко не всегда.

В 1996 году были предложены алгоритмы поддержания непротиворечивости в сети [7,31,37]. В 2000 и 2001 годах были предложены схемы решений для задач априорного вывода и апостериорного вывода в локальном случае [24, 29, 39].

С 2006 года ведутся исследования свойств глобальной структуры АБС и алгоритмов вывода на ней и ее обучения [28,33,34,42,46]. В 2009 году вышла монография [41], на сегодняшний день содержащая наиболее полное представление об алгебраических байесовских сетях (в том числе и про локальное обучение — т. е. обучение отдельного фрагмента знаний на основе выборки).

Алгебраическая байесовская сеть представляет граф (рис. 7), построенный на наборе максимальных фрагментов знаний, где максимальным фрагментом знаний называется пара (C, P), где C — это идеал положительно означенных конъюнкций над атомарными пропозициональными формулами (атомами) за исключением пустого конъюнкта, а p — вероятностное распределение, заданное над указанным идеалом. При этом оценки в p могут быть как скалярным (точечными), так и интервальными (и тогда вместе одно распределения p можно говорить про два распределения: p^- и p^+, соответствующие нижним и верхним границам семейства вероятностных распределений).

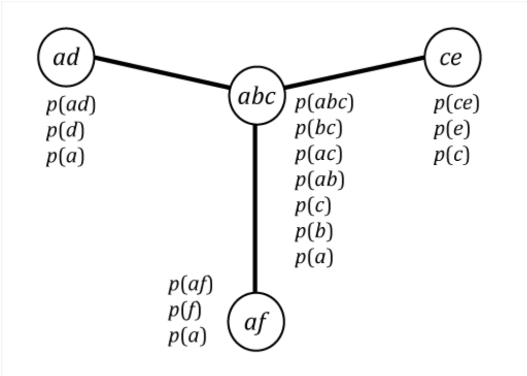

Рис. 7: Алгебраическая байесовская сеть со скалярными оценками. К узлам приписаны вероятности конъюнктов, входящих в соответствующие идеалы.

Набор фрагментов знаний называется *первичной структурой* сети, тогда как построенный над ней граф — *вторичной структурой*. В качестве вторичной структуры может быть использован только *граф смежности* — особым образом определяемый граф, вершинам которого ставятся в соответствие наборы атомов, над котороыми задаются фрагменты занний.

Алгебраическая байесовская сеть решает задачи поддержания нескольких видов непротиворечивости, а также осуществления *априорного логико-вероятностного вывода* и *апостериорного логико-вероятностного вывода* [26, 27, 30, 32, 35, 36]. Задача априорного логико-вероятностного вывода состоит в оценке вероятности истинности произвольной формулы. Первая задача апостериорного логико-вероятностного вывода стоит в оценке вероятности наблюдать свидетельство для заданной сети, а вторая — в вычислении вероятности оценок, заданных сетью, при условии поступившего свидетельства. Задачи решаются как на уровне фрагмента знаний, так и на уровне всей сети, причем для всех возможных вариантов свидетельств.

Работа с интервальным оценками осуществляется за счет решения ряда задач линейного программирования по согласованию оценок конъюнктов (в случае скалярного и неточного свидетельств оценки получаются накрывающими). При этом в случае интервальных оценок АБС задает семейство распределений. Если же фрагменты знаний задаются со скалярными оценками, то вероятностная декомпозиция реализуется за счет предположения, что распределения, задаваемыми двумя фрагментами знаний, условно независимы при распределении, задаваемом подфрагментом знаний, являющимся пересечением исходных.

На сегодняшний день наиболее острыми проблемами в теории алгебраических байесовских сетей являются вопросы глобального обучения (т. е. обучения глобальной структуры) [21, 43–45, 47], оценки устойчивости выводов, чувствительности выводов и априорного глобального вывода [40, 41].

Алгебраические байесовские сети не получили такого же распространения, как байесовские сети доверия, что объясняется тем, что соответствующий математический аппарат, в особенности алгоритмы автоматического обучения, развит еще не полностью. Тем не менее, для алгебраических байесовских сетей предложено применение в классификации текстов [14], поиске ассоциативных правил [6], распознавании изображений, моделировании скрытых марковских моделей [17, 18] и байесовских сетей доверия [38, 40].

4. Заключение В работе рассмотрены как меры истинности, используемые для формализации неопределенности в знаниях, так и основные этапы развития вероятностных графических моделей. Особое внимание было уделено байесовским сетями доверия и алгебраическим байесовским сетям.

Вероятностный подход остается на сегодняшний день наиболее проработанным и широко распространенным на практике методом к формализации и обработке неопределенности. Аппарат внешней и внутренней мер обеспечивает достаточную выразительную мощность, не уступающую другим мерам истинности, во многом опираясь на классический и глубоко проработанный аппарат вероятностной меры.

Вероятностные графические модели обладают следующими преимуществами [82]:

- стандартизированный подход (схожая структура моделей, использование одинаковых методов и комбинирование этих методов);

- визуальное представление информации (за счет использование графов человеку становятся ясны не только решаемые проблемы, но и процессы, которые стоят за решением);
- быстрое создание прототипов.

Существует также достаточно большое число стоящих задач и нерешенных проблем:

- вычисления требуют оптимизации;
- быстрое создание прототипов зачастую ограничено особенностью версий существующего программного обеспечения;
- наблюдается быстрый рост числа параметров при масштабировании задачи;
- обучение требует большого объема данных.

Класс вероятностных графических моделей характеризуется большим числом представителей, что обуславливается сравнительной простотой адаптации существующих моделей к конкретным задачами. Это позволяет говорить о парадигме вероятностных графических моделей, которая состоит в декомпозиции и графическом представлении вероятностной информации.

Вероятностные графические модели нашли свое применение в широчайшем спектре задач: от распознавания изображений до диагностики медицинских заболеваний, от исследования рынков до моделирования физических процессов: их традиционно применяют в распознавании изображений, звуков, медицинской диагностики, расшифровке генома, лингвистическом моделировании и распознавании речи, статистической физике, теории массового обслуживания, популяционной биологии и во многих других областях.

Литература

1. *Бернштейн С.Н.* Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей // Сообщ. харьковск. матем. об-ва. 1917. Вып. 15. С. 209–274.

2. *Вагин В.Н.* Знание в интеллектуальных системах // Новости искусственного интеллекта. 2002. №6. С. 8–18.

3. *Гаврилова Т.А., Хорошевский В.Ф.* Базы знаний интеллектуальных систем. СПб.: Питер, 2000. 384 с.

4. *Гнеденко Б.В.* Очерк по истории теории вероятностей. М.: УРСС, 2001. 88 с.

5. *Городецкий В.И.* Алгебраические байесовские сети — новая парадигма экспертных систем // Юбилейный сборник трудов институтов Отделения информатики, вычислительной техники и автоматизации РАН. Т. 2. М.: РАН, 1993. С. 120–141.

6. *Городецкий В.И., Самойлов В.В.* Ассоциативный и причинный анализ и ассоциативные байесовские сети // Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. С. 13–65.

7. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Изв. РАН. Сер. «Теор. и сист. управл.». 1997. № 5. С. 33–42.

8. *Дайнеко В.Ю.* Динамическая байесовская сеть в системах обнаружения вторжения — электронный ресурс http://fppo.ifmo.ru/kmu/kmu8/vipusk_1/1_5.pdf Доступ на 01.10.2011.

9. *Добрушин Р.Л.* Существование фазового перехода в двумерной и трехмерной моделях Изинга // Теория вероятностей и ее применения. 1965. Вып. 10. С. 209–230.

10. *Добрушин Р.Л.* Описание случайного поля при помощи условных вероятностей и условия его регулярности // Теория вероятностей и ее применения. 1968. Вып. 2. С. 201–229.

11. Искусственный интеллект. В 3-х книгах. Книга 2. Модели и методы: Справочник. / Под ред. Д.А. Поспелова. М.: Радио и связь, 1990. 304 с.

12. *Крейнович В.Я., Нгуен Х.Т., Городецкий В.И., Нестеров В.М., Тулупьев А.Л.* Применение интервальных степеней доверия: аналитический обзор // Интеллектуальные методы и информационные технологии. Вып. 3. СПб: СПИИРАН, 1999. С. 6–61.

13. *Кондрашина Е.Ю., Литвинцева Л.В., Поспелов Д.А.* Представление знаний о времени и пространстве в интеллектуальных системах. / Под ред. Д.А. Поспелова. Москва: Наука, 1989. 328 с.

14. *Лобацевич А.В., Тулупьев А.Л.* Применение методов индуктивного обучения и аппарата алгебраических байесовских сетей для решения задач классификации текстовой информации // IV Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика-95 (РИ-95)» (Санкт-Петербург, 15-18 мая 1995 г.): Тезисы. СПб., 1995. С. 61–62.

15. *Марков А.А.* Распространение закона больших числе на величины, зависящие друг от друга // Известия Физико-математического общества при Казанском университете. 1906. Сер. 2. Том. 15. С. 135–156.

16. *Марков А.А.* Пример статистического исследования над текстом "Евгения Онегина иллюстрирующих связь испытаний в цепь // Труды Академии наук, Санкт-Петебург, № 7. 1913. С. 153-=162.

17. *Момзикова М.П., Великодная О.И., Пинский М.Я., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л., Фильченков А.А.* Оценка вероятности наблюдаемой последовательности в бинарных линейных по структуре скрытых марковских моделях с помощью апостериорного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 13. С. 122–142.

18. *Момзикова М.П., Великодная О.И., Пинский М.Я., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л., Фильченков А.А.* Представление бинарных линейных по структуре скрытых марковских моделей в виде алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 12. С. 134–150.

19. *Наринъяни А.С.* НЕ-факторы: краткое введение // Новости искусственного интеллекта. 2004. № 2, С. 52–63.

20. *Нариньяни А.С.* Недоопределенность в системах представления и обработки знаний // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1986. № 5. С. 3–28.

21. *Опарин В.В., Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Матроидное представление семейства графов смежности над набором фрагментов знаний // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики. 2010. Вып. 4. С. 73–76.

22. *Осипов Г.С.* Приобретение знаний интеллектуальными системами. Основы теории и технологии. М.: Наука, Физматлит, 1997. 112 с.

23. *Рахматуллаев А.М., Розиков У.А.* Гиббсовские меры и случайные марковские поля с отношением I // Математические заметки. 2002. Том 72, вып. 1. С. 84–101.

24. *Ромашова М.Н., Тулупьев А.Л.* Эмпирическая оценка устойчивости априорного вывода в вероятностной модели фрагмента знаний с неопределенностью // VII Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика-2000 (РИ-2000)», Санкт-Петербург, 5–8 декабря 2000 г.: Тезисы докладов. Секция «Теоретические проблемы информатизации», подсекция «Теоретические основы информационных технологий». СПб., 2000. С. 7.

25. *Рыбина Г.В.* Теория и технология построения интегрированных экспертных систем. М.: Научтехлитиздат, 2008. 482 с.

26. *Сироткин А.В.* Проверка и поддержание непротиворечивости алгебраических байесовских сетей: вычислительная сложность алгоритмов // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 15. С. 162–192.

27. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).

28. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностная модель баз фрагментов знаний с неопределенностью // Всероссийская научная конференция по нечетким системам и мягким вычислениям НСМВ-2006 (20–22 сентября 2006 г.). Труды. Тверь, 2006. С 31–47.

29. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети. Логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 292 с.

30. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).

31. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 76 с.

32. *Тулупьев А.Л.* Апостериорные оценки вероятностей в идеале конъюнктов // Вестник СПбГУ. Серия 10. 2010. Вып. 1. С. 95–104.

33. *Тулупьев А.Л.* Ациклические алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный вывод // Нечеткие системы и мягкие вычисления: Научный журнал Российской ассоциации нечетких систем и мягких вычислений. 2006. Том 1, № 1. С. 57–93.

34. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

35. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в алгебраических байесовских сетях // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 3. С. 144–151.

36. *Тулупьев А.Л.* Тулупьев А.Л. Непротиворечивость оценок вероятностей в идеалах конъюнктов и дизъюнктов // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 121-–131.

37. *Тулупьев А.Л.* Поддержание непротиворечивости фрагмента знаний с интервальной нечеткой мерой оценки неопределенности // Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий: Сб. трудов СПИИРАН. СПб.: СПИИРАН, 1998. С. 82–92.

38. *Тулупьев А.Л.* Преобразование ациклических байесовских сетей доверия в ал-гебраические байесовские сети // Известия высших учебных заведений: Приборостроение. 2009. Вып. 3. С. 21–23.

39. *Тулупьев А.Л., Никитин Д.А., Ромашова М.Н., Лакомов Д.П., Тишков А.В.* Априорный и апостериорный вывод на элементе структурированной сети фрагментов знаний, геометрическое представление фрагментов знаний // VII Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика-2000 (РИ-2000)», Санкт-Петербург, 5-8 декабря 2000 г.: Труды конференции. СПб., 2001. С. 112–116.

40. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.

41. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 400 с.

42. *Тулупьев А.Л., Столяров Д.М., Ментюков М.В.* Представление локальной и глобальной структуры алгебраической байесовской сети в Java-приложениях // Труды СПИИРАН. 2007. Вып. 5. СПб.: Наука, 2007. С. 71–99.

43. *Тулупьев А.Л., Фильченков А.А., Вальтман Н.А.* Алгебраические байесовские сети: задачи автоматического обучения // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2011. N. 9, № 11. С. 57–61.

44. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л.* Структурный анализ систем минимальных графов смежности // Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 11. С. 104-–127.

45. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Особенности анализа вторичной структуры алгебраической байесовской сети // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 12. С. 97–118.

46. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Ребра графов смежности в контексте компаративного анализа клик минимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 3 (14). С. 132–149.

47. *Фильченков А.А., Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Структурный анализ клик максимальных графов смежности алгебраических байесовских сетей // Вестн. Тверск. гос. ун-та. Сер.: Прикладная математика. 2011. № 20. С. 139-–151.

48. *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1979. 581 с.

49. *Andersen S.K., Olesen K.G., Jensen F.V., Jensen F.* HUGIN — a shell for building Bayesian belief universes for expert systems // Proceedings of the Eleventh International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-89) Vol. 2. Detroit. Morgan Kaufmann, 1989. P. 1080–1085.

50. *Anger B., Lembcke J.* Infinite subadditive capacities as upper envelopes of measures // Zeitschrift fur Wahrscheinlichkeitstheorie. 1985. No. 68. P. 403–414.

51. *Ariza C.* Music and Technology: Algorithmic and Generative Music. http://ocw.mit.edu/courses/music-and-theater-arts/21m-380-music-and-technology-algorithmic-and-generative-music-spring-2010/ - электронный ресурс. Доступ на 01.10.2011.

52. *Baum L.E, Petrie T.* Statistical Inference for Probabilistic Functions of Finite State Markov Chains // Ann. Math. Statist. 1966. Vol. 37, no. 6. P. 1554–1563.

53. *Barnett V.* Comparative Statistical Inference. 3rd Ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 1999. 410 pp. (Wiley Series in Probability and Statistics)

54. *Bayes T.* An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 53, 176. P. 370–418.

55. *Bernoulli J.* Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallice scripta de ludo pilae reticularis, Basel: Thurneysen Brothers, 1713.

56. *Bernoulli J.* Tractatus de Seriebus Infinitis. 1689.

57. *Bertrand J.* Calcul des probabilites. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1889. 332 p.

58. *Boole G.* An Investigation into the Laws of Thought on Which Are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities. London: Macmillan, 1854. 424 pp.

59. *Borel E.* Les Probabilits et la Vie. Paris: Presses Universitaires de France, 1943. 120 p.

60. *Brush S.* History of the Lenz-Ising Model // Reviews of Moder Physics. 1967. Vol. 39. No. 4. P. 883–893.

61. *Cardano G.* Liber de ludo aleae. 1663.

62. *Cardano G.* Practica arithmetice et mensurandi singularis. Milan, 1539.

63. *Carnap R.* Logical Foundations of Probability. Chicago, University of Chicago Press, 1950. 607 pp.

64. *de Dombal F.T., Leaper D.J., Horrocks J.C., Staniland J.R.* Human and computer-aided diagnosis of abdominal pain: Further report with emphasis on performance of clinicians // British Medical Journal. 1974. No. 1. P. 376–380.

65. *de Dombal F.T., Staniland J.R., Clamp S.E.* Geographical variation in disease presentation // Medical Decision Making. 1981. No. 1. P. 59–69.

66. *de Finetti B.* La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives. Paris: Institut Henri Poincaré, 1937. 68 p.

67. *Dean T., Kanazawa K.* A model for reasoning about persistence and causation // Computational Intelligence. 1989. No 5(3). P. 142–150.

68. *Dempster A.P.* A generalization of Bayesian inference // Journal of the Royal Statistical Society. 1968. No. 30 (Series B). P. 205–247.

69. *Dempster A.P* Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping // Annals of Mathematical Statistics. 1967. No. 38. P. 325–339.

70. *Dubois D., Prade H.* An introduction to possibilistic and fuzzy logics // Readings in Uncertain Reasoning / Ed. by G. Shafer, J. Pearl. San Francisco: Morgan Kaufmann, 1990. P. 742–761.

71. *Dubois D., Prade H.* On several representations of an uncertain body of evidence // Fuzzy Information and Decision Processes / Ed. by M.M. Gupta, E. Sanchez. Amsterdam: North-Holland, 1982. P. 167–181 . .

72. *Dubois D., Prade H.* The principle of Minimum Specifity as a Basis for Evidentional Reasoning // Uncertainty in Knowledge-Based Systems / Ed. by B. Bouchon, R.R. Yager. Berlin: Springer-Verlag, 1987. P. 75–84.

73. *Fagin R., Halpern J.Y.* Uncertainty, belief, and probability // Computational Intelligence. 1991. No. 7(3). P. 160–173.

74. *Gardner M.* The Second Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. Chicago: University of Chicago Press, 1987. 256 pp.

75. *Gillies D.* Philosophical Theories of Probability. London: Routledge, 2000. 240 p.

76. *Good I.J.* A causal calculus // British Journal of the Philosophy of Science. 1961. No. 11. P. 305–318.

77. *Gorodetsky V.I., Drozdgin V.V., Jusupov R.M.* Application of Attributed Grammar and Algorithmic Sensitivity Model for Knowledge Representation and Estimation // Artificial Intelligence and Information, Control Systems of ROBOTSA. Amsterdam: Elsevier Science Publishers B.V., 1984. P. 232–237.

78. *Halpern J.* Reasoning about Uncertainty. Cambridge, MA: MIT Press, 2003. 483 pp.

79. *Heckerman D., Horwitz E., Nathwani B.* Towards normative expert systems: Part I, the Pathfinder project // Methods of Information in Medicine. 1992. No 31. P. 90–105.

80. *Herbert S.* Causal ordering and identifiability // *Hood, W., Koopmans T.* Studies in Econometric Method. New York: Wiley, 1953. P. 49–74.

81. *Hohnisch M., Pittnauer S., Solomon S., Stauffer D.* Socioeconomic interaction and swings in business confidence indicators // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2005. Vol. 345. P. 646–656.

82. *Hornler B.* Graphical Models for Pattern Recognition http://www.mmk.ei.tum.de/~hbe/Slides_GraphicalModels.pdf - электронный ресурс. Доступ на 01.10.2011.

83. *Hopfield J.J.* Neural networks and physical systems with emergent collective compu-tational abilities // Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA 79. 1982. No. 8 (8). P. 2554–2558.

84. *Huygens C.* De Ratiociniis in Ludo aleae. In van Schooten F. (Ed.), Exercitionum Mathematicorum. Elsevirii, Amsterdam. 1657. 537 pp.

85. *Ising E.* Beitrag zur Theorie des Ferromagnetismus // Z. Phys. N. 31. 1925. S. 253–258.

86. *Jensen F.* Bayesian Networks and Decision Graphs. NY: Springer, 2001. 268 p.

87. Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases / Ed. by Kahneman D., Slovic P., Tversky A. Cambridge/New York: Cambridge University Press, 1982. 544 p.

88. *Keynes J.M.* A Treatise on Probability. NY: MacMillan, 1921. 466 p.

89. *Kim J.H.* CONVINCE: A Conversational Inference Consolidation Engine. Ph.D. thesis, Department of Computer Science, University of California at Los Angeles. 1983. 163 pp.

90. *Kim J.H., Pearl J.* A computational model for combined causal and diagnostic reason-ing ininference systems // Proceedings of the Eighth International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI-83). Karlsruhe, Germany. Morgan Kaufmann. 1983. P. 190–193.

91. *Kindermann R., Snall J.* Markov random fields and their applications. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1980. 142 pp.

92. *Kjaerulff U.* A computational scheme for reasoning in dynamic probabilistic networks // Uncertainty in Artificial Intelligence: Proceedings of the Eighth Conference. Stanford, CA: Morgan Kaufmann, 1992. P. 121–129.

93. *Koller D., Friedman N.* Probabilistic Graphical Models. Principles and Techniques. Cambridge, Massachusetts, London: MIT Press, 2009. 1231 pp.

94. *Kolmogorov A.N.* Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitrechnung. Berlin: Julius Springer, 1933. 62 s.

95. *Korb K.B., Nicholson A.E.* Bayesian Artificial Intelligence. New York: Chapman and Hall/CRC, 2004. 364 pp.

96. *Laplace, P.-S.* Essai philosophique sur les probabilites. Paris: Courcier, 1814. 184 p.

97. *Lauritzen S., Spiegelhalter D.* Local computations with probabilities on graphical structures andtheir application to expert systems // Journal of the Royal Statistical Society. 1988. No. 50(2). P. 157–224.

98. *Lauritzen S., Wermuth N.* Graphical models for associations between variables, some of which are qualitative and some quantitative // Annals of Statistics. 1989. No. 17. P. 31–57.

99. *Lenz W.* Beitrage zum Verstandnis der magnetischen Eigenschaften in festen Korpern // Physikalische Zeitschrift. 1920. N. 21. S. 613-615.

100. *Miller R.* Propensity: Popper or Peirce? // British Journal for the Philosophy of Science. 1975. No. 26(2). P. 123–132.

101. *Nettle D.* Is the rate of linguistic change constant? // Lingua. 1999. Vol. 18. P. 119–136.

102. *Nicholson A., Brady J.M.* The data association problem when monitoring robot vehiclesusing dynamic belief networks // ECAI 92: 10th European Conference on Artificial Intelligence Proceeding. Vienna, Austria: Wiley, 1992. P. 689–693.

103. *Onsager L.* Crystal statistics. I. A two-dimensional model with an order-disorder tran-sition // Phys. Rev. 1944. No 65 (3–4). P. 117–149.

104. *Pacioli L.* Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita. Venice, 1494. 27 p.

105. *Pascal B.* Traite du triangle arithmetique avec quelques autres petits traites sur la meme matiere. 1654 (издан 1665).

106. *Pearl J.* Fusion, propagation, and structuring in belief networks // Artificial Intelligence. 1986. No. 29 (3). P. 241–288.

107. *Pearl J.* Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems. NYC: Morgan Kaufmann, 1988. 552 pp.

108. *Pearl J.* Reverend Bayes on inference engines: A distributed hierarchical approach // Proceedings of the National Conference on Artificial Intelligence (AAAI-82). 1982. Pittsburgh, Pennsylvania. Morgan Kaufmann. P. 133-136.

109. Collected Papers of Charles Sanders Peirce / Ed. by Peirce Ch.R., Burks, A.W. Vols. 7–8. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1958. 798 pp.

110. *Preston C.J.* Gibbs States on Countable Sets. Cambridge: Cambridge University Press, 1974. 137 pp.

111. *Rabiner L.R.* A Tutorial on Hidden Markov Models and Selected Applications in Speech Recognition // Proceedings of the IEEE. 1989. Vol. 77, no 2. P. 257–287.

112. *Ramsey F.* Truth and Probability (dated 1926) // Foundations of Mathematics and other Essays / Ed. by Braithwaite B. London: Routledge, 1931. P. 156–198.

113. *Rauch H.E., Tung F., Striebel C.T.* Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems // AIAA Journal. 1965. No. 3(8). P. 1445–1450.

114. *Reichenbach H.* The Direction of Time. Berkeley, CA: The University of California Press, 1956. 291 pp.

115. *Ruspini E.H.* The logical foundations of evidential reasoning. Technical Report SRIN408, SRI Int., 1987. 38 pp.

116. *Russel S., Norvig P.* Artificial Intelligence: A Modern Approach. 3rd Ed. New Jersey: Prentice Hall, 2011. 1152 pp.

117. *Savage L.J.* The foundations of statistics. New York: John Wiley and Sons, 1954. 294 pp.

118. *Shachter R.D., Kenley C.R.* Gaussian influence diagrams // Management Science. 1989. No. 35(5). P. 527–550.

119. *Shafer G.* Probability judgment in artificial intelligence and expert systems // Statistical Science. 1987. Vol. 2, no. 1. P. 3–44.

120. *Shafer G.* A Mathematical Theory of Evidence. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, Princeton, 1976. 314 pp.

121. *Smith C.* Consistency in Statistical Inference and Decision // Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological). 1961. Vol. 23, no. 1. P. 1–37.

122. *Smyth P., Heckerman D., Jordan M.I.* Probabilistic independence networks for hidden Markov probability models // Neural Computation. 1997. No. 9(2). P. 227–269.

123. *Spiegelhalter D.J., Knill-Jones R.P.* Statistical and knowledge-based approaches to clinical decision-support systems // Journal of the Royal Statistical Society. Series A. 1984. No. 147. P. 35–77.

124. *Tang Y.* Applications of Bayesian netwroks. 2010. http://web.cs.gc.cuny.edu/~tang/teachings/cis7414x/slides/lecture10.pdf - электронный ресурс. Доступ на 01.10.2011.

125. *von Mises R.* Grunflagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung // Math. Ztschr., 1919. V. 5. S. 52–99.

126. *von Mises R.* Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit. Wien: Springer, 1928. 189 S.

127. *Weidlich W.* The statistical description of polarization phenomena is society // British Journal of Mathematical and Statistical Psychology. 1971. No. 24. P. 251–266.

128. *Wright S.* Correlation and causation // Journal of Agricultural Research. 1921. No. 20. P. 557–585.

129. *Wright S.* The method of path coefficients // Annals of Mathematical Statistics. 1934. No. 5. P. 161–215.

130. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets // Information and Control. 1965. No. 8. P. 338–353.

131. *Zadeh L.A.* Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility // Fuzzy Sets and Systems. 1978. No. 1. P. 3–28.

Фильченков Андрей Александрович — аспирант кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ), младший научный сотрудник лаборатории ТиМПИ СПИИРАН. Область научных интересов: автоматическое обучение вероятностных графических моделей. Число научных публикаций — 77. aaafil@mail.ru, СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812) 328-3337, факс +7(812) 328-4450. Научный руководитель — А.Л. Тулупьев.

Filchenkov Andrey Alexandrovich — PhD student of Computer Science Department, SPbGU, junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research area: machine learning of probabilistic graphical models. The number of publications — 77. aaafil@mail.ru, SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812) 328-3337, fax +7(812) 328-4450. Scientific advisor — A.L. Tulupyev.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гран-ты №№ 12-01-00945-а и 12-01-31202-мол_а.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. А.Л. Тулупьев, д.ф.-м.н., проф.

Статья поступила в редакцию 14.07.2012.

РЕФЕРАТ

Фильченков А.А. **Меры истинности и вероятностные графические модели для представления знаний с неопределенностью**

Моделирование и обработка знаний с неопределенностью является одной из актуальных проблем в искусственном интеллекте. Это требует как математического формализма, обладающего достаточной выразительной силой, чтобы операционализировать работу с неопределенностью, так и теоретико-компьютерных моделей, обеспечивающие удобное представление знаний с неопределенностью и решающих проблему роста сложности работы алгоритмов и требований к памяти. Целью работы является систематическое изложение контекста количественных и структуралистских подходов к представлению знаний с неопределенностью для обеспечения развития теории алгебраических байесовских сетей.

В первой части работы рассматриваются меры истинности, наиболее широко известной из которых является вероятностная мера. Помимо этого также рассмотрены аппараты мер доверия и правдоподобия и меры возможности и необходимо, а также аппарат внешней и внутренней меры, который опирается на вероятностную меру и обладает мощной выразительной силой.

Вторая часть работы посвящена вероятностным графическим моделям, которые за счет локализации вычислений, основанной на декомпозиции и предположениях об условной независимости, позволяют ограничить требования к сложности алгоритмов и требованию памяти. В работе рассмотрены как модели, относящиеся к классу «марковских» (марковские цепи, марковские случайные поля, скрытые марковские модели), так и к классу «байесовских» (байесовские сети доверия, динамические байесовские сети доверия, алгебраические байесовские сети).

Вероятностный подход остается на сегодняшний день наиболее проработанным и широко распространенным на практике методом к формализации и обработке неопределенности. Аппарат внешней и внутренней мер обеспечивает достаточную выразительную мощность, не уступающую другим мерам истинности, во многом опираясь на классический и глубоко проработанный аппарат вероятностной меры.

SUMMARY

Filchenkov A.A. **Measures of truth and probabilistic graphical models for representation of knowledge with uncertainty**

Modeling and processing of knowledge with uncertainty is the actual problems in artificial intelligence studies. It requires both a mathematical formalism that has sufficient expressive power to operationalize work with uncertainty, and theoretical computer models that provide a convenient representation of knowledge with uncertainty and solving problem of growing complexity of the algorithms and requirements of memory. The goal of the work is a systematic overview of the context of quantitative and structural approaches for knowledge with uncertain representation for the of the of algebraic Bayesian networks theory development maintenance.

Measures of truth, the most well-known of which is a probability measure are observed in the first part of the work. Also belief and plausibility measures, possibility and necessary measures, as well as internal and external measures, which relies on a probability measure and has a strong expressive power, are listed.

The second part is concerning in probabilistic graphical models that allows to limit requirements for the complexity of the algorithms and the requirement of memory by means of computational localization, based on decomposition and assumptions on the conditional independences. The paper discusses both the models belonging to the «Markov models» class (Markov chains, Markov random fields, hidden Markov models) and a «Bayesian network» class (belief Bayesian networks, dynamic belief Bayesian networks, algebraic Bayesian networks) .

The probabilistic approach is the most researched and widely used in practice way to formalize and handle uncertainty. External and internal measures provide sufficient expressive power, no less than other measures of truth, is largely based on the classic and well-developed probability measure.