

Г.М. Водинчар, Л.К. Феценко

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ПОСТРОЕНИЯ КАСКАДНЫХ МОДЕЛЕЙ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Водинчар Г.М., Феценко Л.К. **Вычислительная технология построения каскадных моделей магнитогиродинамической турбулентности.**

Аннотация. В работе рассматривается вычислительная технология построения одного вида моделей мелкомасштабной магнитогиродинамической турбулентности – каскадных моделей (shell models). Любая такая модель является системой обыкновенных квадратично-нелинейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Каждая фазовая переменная интерпретируется по абсолютной величине как мера интенсивности одного из полей турбулентной системы в определенном диапазоне пространственных масштабов (масштабной оболочке). Уравнения любой каскадной модели должны обладать несколькими квадратичными инвариантами, которые являются аналогами законов сохранения в идеальной магнитогиродинамике. Вывод уравнений модели заключается в получении таких выражений для постоянных коэффициентов, при которых наперед заданные квадратичные выражения действительно будут инвариантами. Вывод этих выражений вручную является достаточно громоздким и вероятность ошибок в формульных преобразованиях велика. Особенно это касается нелокальных моделей, в которых могут взаимодействовать далекие по величине масштабные оболочки. Новизна и оригинальность работы состоит в том, что авторами предложена вычислительная технология, которая позволяет автоматизировать процесс вывода уравнений каскадных моделей. Технология реализована с использованием методов компьютерной алгебры, что позволило получать параметрические классы моделей, в которых инвариантность заданных квадратичных форм выполняется абсолютно точно – в формульном виде. Определение значений параметров в полученном параметрическом классе моделей далее выполняется за счет согласования мер взаимодействия оболочек в модели с вероятностями их взаимодействия в реальной физической системе. Идея описанной технологии и ее реализация принадлежит авторам. Отдельные ее элементы публиковались авторами ранее, однако в настоящей работе впервые дается ее систематическое описание для моделей с комплексными фазовыми переменными и согласованием мер взаимодействия оболочек с вероятностями. Аналогичных работ других авторов ранее не было. Технология позволяет быстро и безошибочно генерировать уравнения новых нелокальных каскадных моделей турбулентности и может быть полезна специалистам, занимающимся моделированием турбулентных систем.

Ключевые слова: автоматизация моделирования, компьютерная алгебра, турбулентность, магнитогиродинамика, каскадные модели.

1. Введение. Турбулентное движение включает пространственно-временные структуры различных масштабов, оно хаотично как во времени, так и в пространстве [1, 2]. При описании турбулентных систем часто используют представление полей системы пространственными спектрами, т.е. система описывается в пространстве волновых векторов, или масштабов [2 – 5]. Это обладает рядом преимуществ по сравнению с описанием в физическом пространстве, поскольку позволяет разделить

три основных процесса, протекающих в системе: возбуждение течений внешним воздействием, нелинейное взаимодействие вихревых структур и диссипацию. Именно представление турбулентной системы в пространстве масштабов лежит в основе каскадных моделей (shell models) турбулентности, об автоматизированном построении которых идет речь в настоящей работе.

Прямое численное моделирование турбулентности требует использования огромного числа узлов пространственно-временной сетки и мощных вычислительных ресурсов. Если же интерес для исследователя представляют только некоторые свойства турбулентной системы, можно использовать упрощенные модели, к которым относятся и каскадные модели. Эти модели являются квадратично-нелинейными динамическими системами с постоянными коэффициентами относительно небольшой размерности и интенсивно используются для моделирования процессов переноса энергии от интегрального масштаба (размера турбулентной системы) до диссипативного масштаба и для моделирования распределения статистических характеристик турбулентного потока [2, 6 – 16].

В отсутствие линейных членов и внешних воздействий каждая каскадная модель магнитогиродинамической (МГД) турбулентности должна обладать некоторым набором квадратичных инвариантов. Эти инварианты являются аналогами законов сохранения, выполняющихся в идеальной МГД. Поэтому вывод каждой новой модели связан с получением таких выражений для коэффициентов квадратичных членов, при которых заданные квадратичные формы от фазовых переменных будут инвариантами, причем точными инвариантами. Это требует проведения громоздких, хотя и идейно простых, алгебраических преобразований. Такая громоздкость приводит к временным затратам и является потенциальным источником ошибок при получении выражений для коэффициентов.

Целью настоящей работы является построение вычислительной технологии, которая позволила бы автоматизировать процесс формульного расчета коэффициентов каскадных моделей, при которых заданные квадратичные выражения были бы точными инвариантами. Эти коэффициенты должны формироваться либо в формульном виде, как функции свободных параметров, либо в виде точных числовых выражений (не в виде десятичных приближений). Технология позволит в автоматизированном режиме получать уравнения новых каскадных моделей и будет полезным вычислительным инструментом для специалистов, занимающихся изучением турбулентности с помощью

каскадных моделей. Под вычислительной технологией мы подразумеваем совокупность расчетных методик, алгоритмов и программ.

Поскольку речь идет о программировании алгебраических преобразований, ясно, что для реализации технологии необходимо использовать методы и системы компьютерной алгебры (computer algebra system – CAS). Идея такой технологии принадлежит авторам, отдельные ее элементы публиковались ранее [17, 18], однако систематическое описание дается впервые. Подчеркнем, что речь идет не о численном исследовании готовых каскадных моделей, а именно о составлении уравнений, получении их коэффициентов в формульном виде. Отметим также, что ранее было описано применение CAS для автоматизации процесса построения спектральных моделей геодинамики [19, 20]. Следует отметить, что в настоящее время применение CAS широко распространено в математике, естественных и технических науках [21 – 25]. Данная работа демонстрирует такую возможность их использования, как автоматизацию процесса составления математических моделей.

2. Общий вид каскадных моделей МГД-турбулентности.

Наиболее естественным образом можно подойти к построению каскадных моделей, исходя из спектральной формы МГД-уравнений, которые фактически и дают описание турбулентной системы в пространстве масштабов.

Физическое поле F произвольного тензорного ранга можно представить в реальном физическом пространстве как функцию $F(\mathbf{x}, t)$ радиус-вектора \mathbf{x} и времени t . В равносильной форме оно допускает представление в пространстве волновых векторов \mathbf{k} (пространстве Фурье) с помощью функции $\hat{F}(\mathbf{k}, t)$, называемой пространственным спектром. Это соответствие дается парой преобразований Фурье [1, 2]:

$$\begin{aligned}\hat{F}(\mathbf{k}, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{x}, \\ F(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{F}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} d\mathbf{k}.\end{aligned}\tag{1}$$

МГД-уравнения для вязкой несжимаемой жидкости в физическом пространстве имеют вид [1]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \frac{1}{\mu \mu_0 \sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B} \times \mathbf{B} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \\ \nabla \mathbf{v} &= 0, \quad \nabla \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где поля \mathbf{v} , p , \mathbf{B} и \mathbf{f} – это скорость, давление, магнитная индукция и заданная массовая плотность внешних сил соответственно. Остальные параметры в системе постоянны.

Равносильные уравнения в пространстве волновых векторов для спектров полей имеют следующий вид [1, 2]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial t} &= \imath \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} ds \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{s}) S(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) \bullet \hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{q}) \bullet \hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{s}) + \\ &+ \frac{\imath}{\mu \mu_0 \sigma} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} ds \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{s}) L(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) \bullet \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{q}) \bullet \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{s}) - \\ &- \nu k^2 \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{f}}) / k^2, \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \imath \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} ds \delta(\mathbf{k} + \mathbf{q} + \mathbf{s}) W(\mathbf{k}, \mathbf{q}, \mathbf{s}) \bullet \hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{q}) \bullet \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{s}) - \\ &- \eta k^2 \hat{\mathbf{B}}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $S(\cdot, \cdot, \cdot)$, $L(\cdot, \cdot, \cdot)$, $W(\cdot, \cdot, \cdot)$ – некоторые вещественные тензорные функции 3-го ранга (их конкретный вид неважен для настоящей работы), $k = \|\mathbf{k}\|$ – волновое число, $\delta(\cdot)$ – трехмерная δ -функция, символ \bullet означает тензорную свертку, а звездочка – комплексное сопряжение.

В интегральных членах идет интегрирование (непрерывное суммирование) по всем волновым векторам \mathbf{q} и \mathbf{s} . Формально имеет место взаимодействие любых трех волн, но из-за наличия δ -функции реально взаимодействуют только те волны, из волновых векторов которых можно составить треугольник. Это очень важно для построения каскадных моделей далее.

На спектральной форме МГД-уравнений (3) и основывается построение каскадных моделей.

Для этого прежде всего проводится иерархическое разбиение пространства волновых векторов на масштабные оболочки по следующей схеме [2, 6]. В качестве основного пространственного масштаба используется размер физической турбулентной системы, принимаемый за единицу длины. Также фиксируется число $q > 1$. Далее вводятся иерархические диапазоны масштабов $D_n = (q^{-n-1}; q^{-n}]$, где $n \in \mathbb{Z}$, и разбиение пространства волновых векторов на соответствующие оболочки $P_n = \{\mathbf{k} \mid q^n \leq \|\mathbf{k}\| < q^{n+1}\}$. Ясно, что объединением всех диапазонов масштабов будет $(0; +\infty)$. Исключено лишь нулевое волновое число, связанное с бесконечно большим масштабом, который не представляет физического интереса.

Затем вводятся комплексные переменные $U_n(t)$ и $B_n(t)$, называемые коллективными, модули которых интерпретируются как суммарные меры интенсивности волновых структур скорости и магнитного поля, волновые векторы которых лежат в оболочке P_n . Направления волновых векторов и конкретные значения волновых чисел могут быть какими угодно, важно лишь, чтобы эти числа лежали в пределах заданных диапазонов. Идея каскадных моделей в том, чтобы турбулентную систему упрощенно описать в терминах динамики этих коллективных переменных. Тогда для них необходимо составить динамические уравнения. Эти уравнения можно получать различными способами [1, 2, 6], но физически наиболее естественный – это взять прямой аналог спектральных уравнений (3), предварительно их обезразмерив.

Тогда возникают общие уравнения каскадной модели:

$$\frac{dU_n}{dt} = \imath \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} S_{nlm} U_l^* U_m^* + \imath \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} L_{nlm} B_l^* B_m^* - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + f_n(t), \quad (4)$$

$$\frac{dB_n}{dt} = \imath \sum_{l,m=-\infty}^{+\infty} W_{nlm} U_l^* B_m^* - \text{Rm}^{-1} k_n^2 B_n,$$

где $k_n = q^n$ – характерное волновое число n -ой оболочки, S_{nlm} , L_{nlm} , W_{nlm} – некоторые постоянные вещественные коэффициенты (коэффициенты нелинейных взаимодействий), заданная функция $f_n(t)$ моделирует внешний подвод энергии в n -ую оболочку, Re – число

Рейнольдса, Rm – магнитное число Рейнольдса. Обычно полагают $f_n(t) \equiv 0$ при $n \neq 0$, что соответствует подводу энергии только на основном масштабе турбулентной системы.

Прямая аналогия между спектральными уравнениями (3) и каскадными уравнениями (4) очевидна. Такая форма каскадных уравнений известна как модели типа GOY [1, 2, 6]. Модели этого типа отличаются друг от друга коэффициентами нелинейных взаимодействий. Именно технология их расчета с помощью символьных вычислений, с учетом тех или иных ограничений, является предметом настоящей работы. Кроме моделей типа GOY, часто используют еще и модели типа Sabra [1, 2, 8]. Их отличие от (4) в том, что в каждом квадратичном члене либо только одна фазовая переменная входит в сопряжении, либо обе без сопряжения. Предлагаемая в данной работе технология расчета коэффициентов для моделей типа GOY легко может быть модифицирована для Sabra, а также для комбинированных моделей.

Коэффициенты квадратичных членов уравнений (4) определяются тремя индексами, первый из которых соответствует номеру уравнения, то есть номеру выделенной масштабной оболочки, а два других – номерам оболочек, взаимодействующих с выделенной, т.е. имеется некоторая неоднородность в пространстве масштабов. Однако в реальности для нелинейного переноса энергии в пределах инерционного интервала существует масштабная однородность (самоподобие). В таком случае взаимодействие i -ой и j -ой оболочек с n -ой должно зависеть не от самих i и j , а только от их отличия от n . Кроме этого, все нелинейные члены уравнений в физическом пространстве (2) содержат оператор набла. Аналогом этого оператора в n -ой масштабной оболочке выступает волновое число k_n .

Поэтому модели (4) часто записывают в другой форме:

$$\frac{dU_n}{dt} = ik_n \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \hat{S}_{ij} U_{n+i}^* U_{n+j} + ik_n \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \hat{L}_{ij} B_{n+i}^* B_{n+j} - \text{Re}^{-1} k_n^2 U_n + f_n(t), \quad (5)$$

$$\frac{dB_n}{dt} = ik_n \sum_{i,j=-\infty}^{+\infty} \hat{W}_{nij} U_{n+i}^* B_{n+j} - \text{Rm}^{-1} k_n^2 B_n,$$

где матрицы коэффициентов \hat{S}_{ij} и \hat{L}_{ij} симметричные. Ясно, что соответствие между коэффициентами в (4) и (5) будет таким:

$$S_{nlm} = k_n \hat{S}_{ij}, \quad L_{nlm} = k_n \hat{L}_{ij}, \quad W_{nlm} = k_n \hat{W}_{ij},$$

$$i = l - n, \quad j = m - n. \quad (6)$$

Первый вариант записи каскадной модели оказывается удобнее для расчета коэффициентов. Второй же вариант соответствует представлению о пространственном самоподобии турбулентного потока.

Число q , определяющее иерархию волновых оболочек P_n , довольно произвольно, но обычно берут в практике построения каскадных моделей либо $q = 2$, либо $q = (1 + \sqrt{5})/2$ – «золотое сечение». У обоих этих вариантов есть свои преимущества. Первый хорошо отражает представление о турбулентности как об иерархической структуре из вложенных вихрей, когда каждый трехмерный вихрь распадается на восемь подвихрей вдвое меньшего размера. Второй оптимален с точки зрения эффективности переноса энергии в системе [2].

Рассмотрим теперь, какие ограничения на коэффициенты каскадных моделей накладывает требование существования квадратичных инвариантов. Известно, что при $\nu = \eta = 0$ и $\mathbf{f} \equiv 0$ МГД-уравнения (2) обладают следующими инвариантами:

- полная энергия

$$E = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbf{v}^2(\mathbf{x}, t) + \mathbf{B}^2(\mathbf{x}, t)) \, d\mathbf{x}; \quad (7)$$

- перекрестная спиральность

$$H_C = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}; \quad (8)$$

- квадрат потенциала магнитного поля (для двумерных течений)

$$A^2 = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}^2(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x}, \quad (9)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ – потенциал поля магнитной индукции, определяемый равенствами $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, $\nabla \mathbf{A} = 0$;

– магнитная спиральность (для трехмерных течений)

$$H_B = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}. \quad (10)$$

Выражения для этих инвариантов через спектры полей имеют вид:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{16\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{v}}^*(\mathbf{k}, t) + \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) \right) d\mathbf{k}, \\ H_C &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, t) \cdot \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}, \\ A^2 &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{k^4} \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \right) \cdot \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) \right) d\mathbf{k}, \\ H_B &= \frac{1}{8\pi^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{i}{k^2} \cdot \left(\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{k}, t) \right) \cdot \hat{\mathbf{B}}^*(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (11)$$

В таком случае каскадные модели (4) и (5) тоже должны обладать при $\text{Re}^{-1} = \text{Rm}^{-1} = 0$ и $f_n(t) \equiv 0$ квадратичными по коллективным переменным инвариантами, являющимися каскадными аналогами (11). Для полной энергии, перекрестной спиральности и квадрата потенциала прямые аналоги очевидны, они определяются формулами (сохраняем обозначения инвариантов):

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (U_n U_n^* + B_n B_n^*), \\ H_C &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (U_n B_n^* + U_n^* B_n), \\ A^2 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n^{-2} B_n B_n^*. \end{aligned} \quad (12)$$

С инвариантом магнитной спиральности ситуация сложнее. Прямым ее аналогом по четвертой формуле (11) будет $\sum_{n=-\infty}^{\infty} k_n^{-1} B_n B_n^*$, однако это выражение знакоположительное, а спиральность может быть любого знака. Поэтому можно рассматривать различные варианты

введения каскадной формы магнитной спиральности с помощью знакопеременных выражений, составленных из волновых чисел k_n и коллективных переменных магнитного поля $B_n(t)$. Простейший вариант – это искусственное введение знакопеременности и определение каскадной магнитной спиральности формулой

$$H_B = \sum_n (-1)^n k_n^{-1} B_n B_n^*. \quad (13)$$

Иногда рассматривают знакопеременное выражение более общего вида

$$H_B^\lambda = \sum_n (-1)^n k_n^{-\lambda} B_n B_n^*, \quad (14)$$

с произвольным $\lambda > 0$, называя его обобщенной спиральностью [2]. Ясно, что оно имеет размерность спиральности только при $\lambda = 1$ и совпадает в этом случае с (13).

3. Вычислительная технология для составления каскадной модели. Для получения уравнений конкретной модели в форме (4) или (5) необходимо найти коэффициенты нелинейных членов. Их расчет основан на ограничениях, которым должны удовлетворять уравнения модели. Эти ограничения следующие:

1. Существование квадратичных инвариантов в отсутствие диссипации и внешних источников, т.е. при $\text{Re}^{-1} = \text{Rm}^{-1} = 0$ и $f_n(t) \equiv 0$.

2. Возможность нелинейного взаимодействия оболочек P_n , P_{n+i} и P_{n+j} .

3. Предельная, допускаемая в модели, дальность взаимодействия в пространстве масштабов.

4. Существование степенных стационарных решений (не обязательно).

5. Согласование величины коэффициентов с вероятностями взаимодействия оболочек.

От каскадных моделей в отсутствие диссипации и внешних источников обычно требуют еще сохранения фазового объема, однако несложно показать, что модели типа GOY сохраняют его при любых коэффициентах нелинейных членов.

Далее мы опишем вычислительную технологию расчета коэффициентов, удовлетворяющих этим ограничениям. Учет первых четырех ограничений реализован с помощью методов компьютерной алгебры и дает классы моделей, в которых эти ограничения будут выполняться точно – на формульном уровне. Для случая каскадных моделей с вещественными коллективными переменными подобная технология была описана в [17]. Схема расчета для комплексных каскадных моделей гидродинамики и конвекции была описана в [18]. Случай комплексных каскадных моделей магнитогидродинамики описан в настоящей работе впервые.

После получения выражений для коэффициентов выбор конкретных значений параметров в этих выражениях проводится путем согласования коэффициентов с вероятностями взаимодействия оболочек с помощью численной оптимизации.

Общая схема разработанной технологии приведена на рисунке 1. Сначала кратко опишем ее блоки, а потом перейдем к детальному описанию.

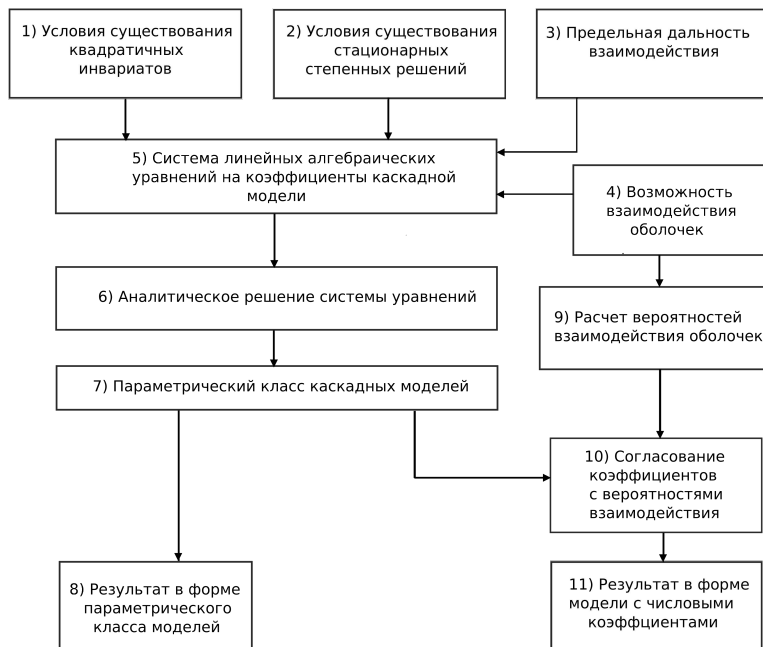


Рис. 1. Схема разработанной технологии составления каскадных моделей

Условия существования квадратичных инвариантов и стационарных степенных решений (блоки 1 и 2 на схеме) получаются в виде семейства линейных однородных алгебраических уравнений на коэффициенты нелинейных членов. Исходными данными здесь являются формулы инвариантов и стационарного решения, а на выходе получаются уравнения для коэффициентов.

Предельная дальность взаимодействия Q (блок 3 на схеме) является целочисленным задаваемым параметром.

Возможность взаимодействия оболочек P_n, P_{n+i}, P_{n+j} (блок 4 на схеме) задается в форме предиката $Q(i, j)$, определяющего их индексы и не зависящего от n . Формула предиката в технологии задана и определяется вручную по критерию: если в S_n, S_{n+i}, S_{n+j} существуют волновые векторы, из которых составляется треугольник, то оболочки могут взаимодействовать. Этот предикат определяет коэффициенты модели, которые могут быть отличны от нуля.

На основе выходов блоков 1-4 программно в CAS формируется система линейных алгебраических уравнений на коэффициенты (блок 5 на схеме). Затем средствами CAS ищется аналитическое решение данной системы (блок 6 на схеме). На выходе этого блока получается решение в виде выражений, зависящих от свободных параметров.

Выход блока 6 дает параметрический класс каскадных моделей, которые при любых значениях параметров обладают нужными инвариантами, стационарными решениями и предельной дальностью взаимодействий (блок 7 на схеме).

Если не ставится задача согласования коэффициентов с вероятностями, данный класс является итоговым результатом (блок 8 на схеме). В противном случае проводятся дальнейшие численные расчеты. Сначала методом Монте-Карло вычисляются вероятности взаимодействия оболочек P_n, P_{n+i}, P_{n+j} , т.е. вероятности того, что из трех векторов, случайно взятых по одному из каждой оболочки, можно составить треугольник (блок 9 на схеме).

По выходам блоков 7 и 9 численно выполняется минимизация относительных отклонений коэффициентов модели (мер взаимодействия оболочек) от вероятностей этих взаимодействий. Минимизация выполняется по параметрам (блок 10 на схеме). В результате получается модель с числовыми значениями коэффициентов (блок 11 на схеме).

Теперь опишем этапы технологии более подробно.

3.1. Условия существования квадратичных инвариантов.

Дифференцирование квадратичных форм (12) и (13) по времени и подстановка вместо производных коллективных переменных их

выражений из правых частей (4) даст кубичные формы от коллективных переменных. Коэффициенты этих форм будут линейными комбинациями коэффициентов нелинейных взаимодействий. Поскольку тождественное равенство нулю кубичных форм возможно только при всех нулевых коэффициентах этих форм, будем получать набор однородных линейных уравнений для искомым коэффициентов нелинейных взаимодействий.

Практическая реализация этого требует весьма громоздких формульных преобразований, которые удобно выполнять, используя средства CAS, чтобы избежать ошибок в алгебраических преобразованиях. Мы будем использовать пакет Maple [26, 27].

Начнем с условия сохранения полной энергии. Для ее изменения получаем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_n (U_n U_n^* + B_n B_n^*) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{dU_n}{dt} U_n^* + \frac{dU_n^*}{dt} U_n + \frac{dB_n}{dt} B_n^* + \frac{dB_n^*}{dt} B_n \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Далее рассмотрим выполнение необходимых преобразований в пакете Maple и результат работы пакета. Удобно ввести действительные и мнимые части коллективных переменных $U_n = x_n + iy_n$ и $B_n = g_n + ih_n$. Выполним в Maple следующий набор команд из Листинга 1.

```

assume(x[n], real, x[l], real, x[m], real):
2 assume(y[n], real, y[l], real, y[m], real):
assume(g[n], real, g[l], real, g[m], real):
4 assume(h[n], real, h[l], real, h[m], real):
assume(S[n, l, m], real, L[n, l, m], real, W[n, l, m], real):
6 u[n] := x[n] + I * y[n]: B[n] := g[n] + I * h[n]:
u[l] := x[l] + I * y[l]: B[l] := g[l] + I * h[l]:
8 u[m] := x[m] + I * y[m]: B[m] := g[m] + I * h[m]:
du[n] := I * S[n, l, m] * conjugate(u[l]) * conjugate(u[m]) +
10 I * L[n, l, m] * conjugate(B[l]) * conjugate(B[m]):
dB[n] := I * W[n, l, m] * conjugate(u[l]) * conjugate(B[m]):

```

Листинг 1. Определение выражений для коллективных переменных и уравнений модели

Команды вида `assume(eq, real)` в строках 1-5 указывают пакету, что переменная `eq` является вещественной. Это важно при

работе с операцией сопряжения, т.к. по умолчанию Maple считает все переменные комплексными. В строках 6-8 в соответствующих переменных формируются в общем виде выражения для коллективных переменных модели. Заметим, что мнимая единица i в Maple задается как системная константа I . Далее (строки 9-11) в переменных $du[n]$ и $dB[n]$ формируются правые части уравнений (4). Все символы суммирования здесь и далее опускаются, поскольку они излишне загромождали бы формируемые Maple выражения, а фактически они нигде не используются, поскольку работа идет только с одночленами форм.

Результат выполнения этих команд (вывод Maple) представлен на рисунке 2, который является распечаткой фрагмента экрана при сеансе работы с пакетом. Наличие символа тильда справа от имени переменной при выводе означает, что на переменную было наложено ранее ограничение с помощью команды `assume`.

$$\begin{aligned} du_n &:= I S_{n,l,m} (x_{\sim l} - I y_{\sim l}) (x_{\sim m} - I y_{\sim m}) + I L_{n,l,m} (g_{\sim l} - I h_{\sim l}) (g_{\sim m} - I h_{\sim m}) \\ dB_n &:= I W_{n,l,m} (x_{\sim l} - I y_{\sim l}) (g_{\sim m} - I h_{\sim m}) \end{aligned}$$

Рис. 2. Результат выполнения Maple команд, определяющих алгебраические выражения для уравнений каскадной модели

Далее в переменной dE формируются члены кубичной формы условия сохранения энергии по формуле (15). Соответствующая команда Maple представлена в Листинге 2.

```

20 dE := 1/2 * simplify(
      du[n] * conjugate(u[n]) + u[n] * conjugate(du[n]) +
22      dB[n] * conjugate(B[n]) + B[n] * conjugate(dB[n])
    );

```

Листинг 2. Формирование кубичной формы для изменения энергии

Результат выполнения этой команды приведен на рисунке 3.

$$\begin{aligned} dE &:= S_{n,l,m} x_{\sim l} x_{\sim m} y_{\sim n} + S_{n,l,m} x_{\sim l} y_{\sim m} x_{\sim n} + S_{n,l,m} y_{\sim l} x_{\sim m} x_{\sim n} - S_{n,l,m} y_{\sim l} y_{\sim m} y_{\sim n} \\ &+ L_{n,l,m} g_{\sim l} g_{\sim m} y_{\sim n} + L_{n,l,m} g_{\sim l} h_{\sim m} x_{\sim n} + L_{n,l,m} h_{\sim l} g_{\sim m} x_{\sim n} - L_{n,l,m} h_{\sim l} h_{\sim m} y_{\sim n} \\ &+ W_{n,l,m} x_{\sim l} g_{\sim m} h_{\sim n} + W_{n,l,m} x_{\sim l} h_{\sim m} g_{\sim n} + W_{n,l,m} y_{\sim l} g_{\sim m} g_{\sim n} - W_{n,l,m} y_{\sim l} h_{\sim m} h_{\sim n} \end{aligned}$$

Рис. 3. Результат построения Maple одночленов формы условия сохранения энергии

Из выражения на рисунке 3 видно, что после соответствующих перестановок индексов требуется обеспечить равенство нулю суммы пяти

кубических форм: одной с одночленами $x_l x_m y_n$, второй с одночленами $y_l y_m y_n$, третьей с одночленами $g_l g_m y_n$, четвертой с одночленами $h_l h_m y_n$ и пятой с одночленами $g_l h_m x_n$. Для этого необходимо и достаточно равенство нулю всех коэффициентов форм, однако надо учесть подобные слагаемые. Для первой формы подобные слагаемые получаются перестановками индексов l и m , поэтому получим условие

$$S_{nlm} + S_{nml} + S_{mln} + S_{lmn} + S_{lnm} + S_{mnl} = 0. \quad (16)$$

Ясно, что в ситуации, когда $l = m$, подобных слагаемых не будет и эти перестановки не нужны, однако их формальное выполнение просто приведет к умножению всех членов уравнения на два.

Для второй формы с одночленами $y_l y_m y_n$ подобные слагаемые получаются перестановками всех трех индексов. Получится то же самое уравнение, что и в предыдущем случае.

Для третьей формы с одночленами $g_l g_m y_n$ так же, как и для первого случая, подобные слагаемые получаются перестановками индексов l и m . Получится следующее условие

$$L_{nlm} + L_{nml} + W_{mnl} + W_{lnm} = 0. \quad (17)$$

Это же условие получается для двух оставшихся форм. Ясно, что и здесь при совпадении двух или всех трех индексов перестановки излишни, но их формальное выполнение просто приведет к умножению членов уравнения на два или шесть.

Теперь целесообразно перейти к двухиндексному варианту записи в соответствии с формулами (6). Получим из (16) и (17) уравнения на коэффициенты, обеспечивающие выполнение закона сохранения энергии

$$\begin{aligned} & q^n \hat{S}_{l-n, m-n} + q^n \hat{S}_{m-n, l-n} + q^l \hat{S}_{n-l, m-l} + q^l \hat{S}_{m-l, n-l} + \\ & + q^m \hat{S}_{l-m, n-m} + q^m \hat{S}_{n-m, l-m} = 0 \\ & q^n \hat{L}_{l-n, m-n} + q^n \hat{L}_{m-n, l-n} + q^m \hat{W}_{n-m, l-m} + q^l \hat{W}_{n-l, m-l} = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Деля почленно на q^n и переходя к индексам (i, j) по схеме $i = l - n, j = m - n$, получаем

$$\begin{aligned}
 & \hat{S}_{i,j} + \hat{S}_{j,i} + q^i \left(\hat{S}_{-i,j-i} + \hat{S}_{j-i,-i} \right) + \\
 & + q^j \left(\hat{S}_{i-j,-j} + \hat{S}_{-j,i-j} \right) = 0, \\
 & \hat{L}_{i,j} + \hat{L}_{j,i} + q^i \hat{W}_{-i,j-i} + q^j \hat{W}_{-j,i-j} = 0.
 \end{aligned} \tag{19}$$

Итак, условие сохранения полной энергии дает два семейства уравнений (19).

Проводя похожие расчеты, можно получить уравнения, обеспечивающие и другие инварианты. Сами эти расчеты в тексте не описываем, приведем только итоговые уравнения.

Сохранение перекрестной спиральности H_C дает следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
 & \hat{L}_{i,j} + \hat{L}_{j,i} + q^i \left(\hat{L}_{-i,j-i} + \hat{L}_{j-i,-i} \right) + \\
 & + q^j \left(\hat{L}_{i-j,-j} + \hat{L}_{-j,i-j} \right) = 0, \\
 & \hat{S}_{i,j} + \hat{S}_{j,i} + q^i \hat{W}_{j-i,-i} + q^j \hat{W}_{i-j,-j} = 0.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Требование сохранения квадрата магнитного потенциала приводит к уравнениям:

$$\hat{W}_{i,i} + q^{-j} \hat{W}_{i-j,-j} = 0. \tag{21}$$

Наконец, условие сохранения магнитной спиральности H_B дает уравнения:

$$\hat{W}_{i,j} + (-1)^j \hat{W}_{i-j,-j} = 0. \tag{22}$$

Коллективные переменные каскадных моделей не содержат информации о геометрии движений, о том, моделируется ли двумерный или трехмерный поток. Однако двумерная и трехмерная турбулентность ведет себя существенно разным образом [1, 6, 28, 29]. Поэтому необходимо как-то различать эти случаи в каскадных моделях. Это можно сделать с помощью инвариантов. Поскольку в двумерном потоке

сохраняется квадрат потенциала поля, а в трехмерном – магнитная спиральность, то, потребовав от модели сохранения одного из этих выражений, можно косвенно внести в модель информацию о размерности движения.

Итак, на выходе блока 1 схемы с рисунке 1 получаем семейства уравнений (19, 20, 21, 22) на коэффициенты модели.

3.2. Условие существования стационарных степенных решений. Известно, что в однородной изотропной турбулентности в пределах итерационного интервала некоторые статистические характеристики обладают степенными законами распределения по масштабам, а значит, и по волновым числам [1]. Пусть $Q(k) \sim k^\lambda$ – одна из таких характеристики. Тогда связанное с коллективными переменными интегральное значение этой характеристики в n -ой оболочке будет

$$Q_n \sim \int_{q^n}^{q^{n+1}} Q(k) dk \sim \int_{q^n}^{q^{n+1}} k^\lambda dk \sim q^{n(\lambda+1)}. \quad (23)$$

В качестве примера наиболее известного спектрального закона возьмем закон Колмогорова для энергии $E(k) \sim k^{-5/3}$. Применяя соотношения (23), получим, что коллективное значение энергии в n -ной масштабной оболочке должно быть $E_n \sim q^{(-2/3)n}$. В то же время энергия n -ной оболочки в каскадной модели – это $|U_n + B_n|^2/2$.

Если требовать существования в каскадной модели стационарного решения, соответствующего закону Колмогорова, то оно должно иметь вид: $U_n = U_0 q^{-n/3}$ и $B_n = B_0 q^{-n/3}$, где U_0 и B_0 – заданные числа.

Спектральные законы турбулентности выполняются в пределах инерционного интервала масштабов, где нет внешних источников и диссипации, поэтому подставим стационарные решения в уравнения каскадной модели (5) без источника и диссипативных членов. Подстановка даст стационарные уравнения

$$\begin{aligned} iq^n \sum_{i,j} \left(\hat{S}_{ij} |U_0|^2 q^{-(2n+i+j)/3} + \hat{L}_{ij} |B_0|^2 q^{-(2n+i+j)/3} \right) &= 0, \\ iq^n \sum_{i,j} \hat{W}_{ij} |U_0 B_0| q^{-(2n+i+j)/3} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

После очевидных преобразований получим уравнения на коэффициенты модели

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \left(\left| \frac{U_0}{B_0} \right|^2 S_{ij} + L_{ij} \right) q^{-(i+j)/3} &= 0, \\ \sum_{i,j} \hat{W}_{ij} q^{-(i+j)/3} &= 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Подобные уравнения составляются для каждого вида стационарных степенных по масштабам решений.

В отличие от требования существования инвариантов, требование существования степенных стационарных решений не всегда учитывают при расчете коэффициентов модели. Это связано с тем, что существование степенных решений вовсе не гарантирует их устойчивости. Более того, численные эксперименты в некоторых простейших каскадных моделях свидетельствуют о неустойчивости таких решений и реализации степенных распределений только в среднем [1]. Отметим также, что степенное распределение в комплексной каскадной модели связано с модулями коллективных переменных, т.е. надо говорить о стационарных значениях только модулей, аргументы могут при этом меняться. Однако условие существования решений со степенным стационарным распределением модулей переменных приводит к нелинейным уравнениям на коэффициенты, аналитическое решение которых не представляется возможным.

Итак, на выходе блока 2 схемы описываемой технологии получаются линейные однородные уравнения на коэффициенты каскадной модели для каждого спектрального закона, если разработчик этой модели хочет обеспечить их существование.

3.3. Возможность и предельная дальность взаимодействия оболочек. Для того, чтобы волны из оболочек P_n , P_{n+i} и P_{n+j} могли взаимодействовать, надо, чтобы нашлись такие числа $a \in D_n$, $b \in D_{n+i}$ и $c \in D_{n+j}$, что

$$a + b \geq c, \quad a + c \geq b, \quad b + c \geq a. \quad (26)$$

Ясно, что в действительности это не зависит от n , поэтому можно положить $n = 0$ и рассматривать оболочки P_0 , P_i и P_j . Поэтому возможность взаимодействия определяется только парой индексов (i, j) .

Соответствующие области на плоскости индексов зависят от q , но имеют характерную форму, представленную на рисунке 4. Серым цветом выделены области возможных взаимодействий для $q = (1 + \sqrt{5})/2$ и $q \geq 2$. Области неограниченно продолжаются вдоль осей влево и вниз и по диагонали вправо-вверх с сохранением формы.

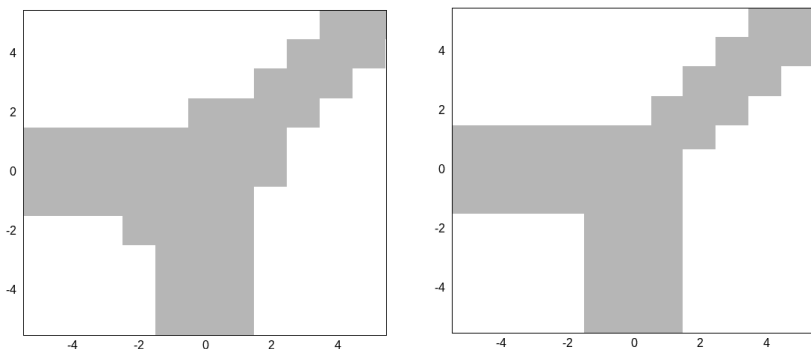


Рис. 4. Области возможных взаимодействий оболочек P_n, P_{n+i} и P_{n+j} (i, j) на плоскости индексов (i, j) для $q = (1 + \sqrt{5})/2$ и $q = 2$

Пусть предикат $Q(i, j)$ определяет область взаимодействий для заданного q . Например, для $q = 2$ он имеет вид

$$Q = (|i| \leq 1 \wedge j \leq 1) \vee (|j| \leq 1 \wedge i \leq 1) \vee (i \geq 1 \wedge j \geq 1 \wedge |i - j| \leq 1).$$

Области возможных взаимодействий на рисунке 4 неограниченны, однако если считать не принципиальную возможность взаимодействия трех выбранных в оболочках волн, а вероятность этого взаимодействия при случайном и равномерном выборе волн в оболочках, то она очень резко спадает с ростом модулей индексов. Такие вероятности легко считаются методом Монте-Карло, подробнее об этом будет сказано ниже.

Тогда маловероятными взаимодействиями можно пренебречь, и в каскадную модель закладывается предельная «дальность» взаимодействия P . Можно сказать, что P – это параметр модели, характеризующий ее нелокальность в пространстве масштабов.

Итак, на выходе блоков 3 и 4 схемы мы получаем выражение для предиката $Q(i, j)$ и число P . Все коэффициенты модели, индексы которых удовлетворяют условию

$$|i| \geq P \vee |j| \geq P \vee \neg Q(i, j), \quad (27)$$

полагаются нулевыми.

3.4. Составление системы уравнений для коэффициентов модели и ее решение. В блоке 5 схемы на рисунке 1 составляется система уравнений на коэффициенты модели. Эта система включает, прежде всего, семейства уравнений, полученных в блоке 1, причем (19, 20) включаются в любом случае, а из (21) и (22) – только одно в зависимости от размерности моделируемого потока. Формально уравнений в каждом семействе, а значит, и в системе бесконечно много, однако с учетом ограничений на предельную дальность взаимодействия P только конечное число уравнения не вырождается в тождества.

Понятно, что составление самой системы и ее последующее решение – задача трудоемкая. Однако ее можно программно реализовать с помощью CAS.

Прежде всего, отметим, что в каждой их групп уравнений (19, 20, 21, 22) пара индексов (i, j) однозначно определяет уравнение в пределах группы – является его идентификатором. Само уравнение может содержать еще $\pm(i - j)$, $-i$ и $-j$ в качестве индексов искомым коэффициентов. Если все эти индексы по модулю окажутся больше P , т.е.

$$(|i| > P \vee |j| > P) \wedge (|i| > P \vee |j - i| > P) \wedge (|j| > P \vee |i - j| > P),$$

то уравнение будет тождеством. Тогда не обязательно вырождаются в тождества только уравнения с идентификатором (i, j) , задаваемым предикатом

$$\begin{aligned} d(i, j) = & (|i| \leq P \wedge |j| \leq P) \vee (|i| \leq P \wedge |i - j| \leq P) \vee \\ & \vee (|j| \leq P \wedge |i - j| \leq P). \end{aligned} \quad (28)$$

Геометрически этот предикат выделяет на плоскости (i, j) звездообразную область D , изображенную на рисунке 5. Отметим, что и среди этих уравнений некоторые могут оказаться тождествами.

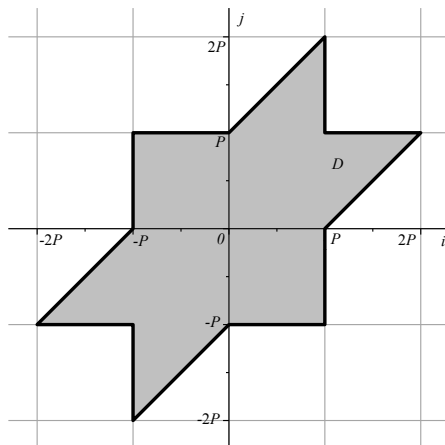


Рис. 5. Область пар индексов (i, j) , которые определяют уравнения, не обязательно вырождающиеся в тождества. Пояснения в тексте

Тогда содержание блока 5 схемы заключается в следующих этапах:

1. Объявляем двумерные массивы коэффициентов $\hat{S}_{i,j}$, $\hat{L}_{i,j}$, $\hat{W}_{i,j}$ с индексами $i, j = -2P, \dots, 2P$.

2. Для индексов $i, j = -2P, \dots, 2P$ и не удовлетворяющих условию (27) элементам массивов присваиваем нулевые значения. Остальные элементы остаются неопределенными, но с ограничениями $\hat{S}_{i,j} = \hat{S}_{j,i}$ и $\hat{L}_{i,j} = \hat{L}_{j,i}$.

3. Объявляем список левых частей уравнений на коэффициенты и полагаем его пустым.

4. Для $i, j = -2P, \dots, 2P$, если (i, j) удовлетворяют условию (28), формируем выражение левой части каждого из уравнений, обеспечивающих инварианты (выход блока 1). Если полученное выражение ненулевое, формируем уравнение и добавляем его в список.

5. Если необходимо обеспечить существование стационарных степенных по масштабу решений, формируем уравнения вида (25) (выход блока 2) и добавляем их в список.

6. На основе списка составляем однородную систему линейных алгебраических уравнений.

Понятно, что эти этапы легко программно реализовать средствами любой CAS. Приведем псевдокод составления этой системы уравнений для коэффициентов (Листинг 3).

```

2  k := 1;
   for i := -2P to 2P do for j := -2P to i do
       if Q(i, j) then
4      $\hat{S}_{i,j} := x_k$ ;  $\hat{S}_{j,i} := x_k$ ; k := k + 1;
        $\hat{L}_{i,j} := x_k$ ;  $\hat{L}_{j,i} := x_k$ ; k := k + 1;
6     else
        $\hat{S}_{i,j} := 0$ ;  $\hat{L}_{i,j} := 0$ ;
8     end if;
   end do; end do;
10 for i := -2P to 2P do for j := -2P to 2P do
    if Q(i, j) then
12      $\hat{W}_{i,j} := x_k$ ; k := k + 1;
    else
14      $\hat{W}_{i,j} := 0$ ;
    end if;
16 end do; end do;
    num_var := k - 1;
18 n := 1;
    list_eq := [];
20 for l := -2P to 2P do for m := -2P to 2P do
    if d(l, m) then
22     for expr_eq ∈ L_inv do
       expr := Subs(expr_eq, [i' = l, j' = m]);
24     if expr ≠ 0 then
       list_eq := list_eq ∪ [expr = 0];
26     n := n + 1;
       end if;
28     end do;
    end if;
30 end do; end do
    for expr_eq ∈ L_stat do
32     expr_sum := 0;
       for l = -P to P do for m = -P to P do
34     expr := Subs(expr_eq, [i' = l, j' = m]);
       if expr ≠ 0 then
36     expr_sum := expr_sum + expr;
       end if;
38     end do; end do;
       if expr_sum ≠ 0 then
40     list_eq := list_eq ∪ [expr_sum = 0];
       n := n + 1;
42     end if;
    end do;
44 num_eq := n - 1;

```

Листинг 3. Псевдокод составления системы уравнений для коэффициентов модели

Предполагаем, что выражения левых частей уравнений (19, 20) и (21) или (22) с неопределенными значениями индексов i, j и параметра q предварительно записаны в списке L_inv , а выражения (i, j) -слагаемых левых частей уравнений (25) записаны в списке L_stat . В этом псевдокоде функция $Subs$ выполняет подстановку числовых индексов l и m в выражение $expr_eq$ вместо символов i и j . Соответствующая функция есть в любой CAS.

В результате выполнения этого псевдокода в списке $list_eq$ сформирована система из num_eq однородных линейных уравнений с вектором неизвестных x , содержащим num_var компонент. Полученная система является выходом блока 5 технологии.

3.5. Параметрический класс моделей. Полученная на выходе блока 5 система может быть аналитически решена средствами CAS, поскольку любая из них содержит солверы для решения линейных систем, которые реализуют ту или иную форму метода Гаусса. На основе найденных элементов вектора решений можно далее получить значения коэффициентов. Приведем соответствующий псевдокод (Листинг 4), где через $linear_solv$ обозначен солвер CAS для линейных систем.

```

2   $y := linear\_solv(list\_eq, x);$ 
3   $k := 1;$ 
4  for  $i := -2P$  to  $2P$  do for  $j := -2P$  to  $i$  do
5    if  $Q(i, j)$  then
6       $\hat{S}_{i,j} := y_k; \hat{S}_{j,i} := y_k; k := k + 1;$ 
7       $\hat{L}_{i,j} := y_k; \hat{L}_{j,i} := y_k; k := k + 1;$ 
8    else
9       $\hat{S}_{i,j} := 0; \hat{L}_{i,j} := 0;$ 
10   end if;
11 end do; end do;
12 for  $i := -2P$  to  $2P$  do for  $j := -2P$  to  $2P$  do
13   if  $Q(i, j)$  then
14      $\hat{W}_{i,j} := y_k; k := k + 1;$ 
15   else
16      $\hat{W}_{i,j} := 0;$ 
17   end if;
18 end do; end do;

```

Листинг 4. Псевдокод нахождения значений коэффициентов в уравнениях модели

Поскольку решаемая система однородная, то возможны два случая. В первом система имеет только нулевое решение. Это говорит о том, что каскадной модели с заданным дальнодействием P , заданным набором инвариантов и стационарных решений не существует. Во втором случае

система имеет линейное многообразие решений, и CAS даст выражение для коэффициентов каскадной модели через свободные параметры. Эти выражения будут линейными однородными по параметрам и дробно-рациональными по q . После выполнения псевдокода Листинга 4 в массивах $\hat{S}_{i,j}$, $\hat{L}_{i,j}$, $\hat{W}_{i,j}$ будут записаны выражения для коэффициентов (выход блока 6 схемы). В результате получим параметрический класс моделей (выход блока 7), возможно, пустой, если модели не существует.

Если разработчик модели не предполагает получение числовых значений коэффициентов, то вычисления на этом заканчиваются (блок 8). В противном случае реализуются этапы блоков 9-11.

3.6. Согласование коэффициентов нелинейных членов и вероятностей взаимодействия оболочек. Ранее в работе уже упоминалось, что вероятности взаимодействия случайно выбранных волн из трех оболочек P_n, P_{n+i}, P_{n+j} сильно отличаются для различных i и j и не зависят от n . Ясно также, что они симметричны по i и j . Эти вероятности легко посчитать методом Монте-Карло для заданного числового значения q в большой серии испытаний. В каждом испытании случайно выбираются три числа, равномерно распределенные в масштабных диапазонах D_0, D_i, D_j . Если эти три числа удовлетворяют неравенствам треугольника, испытание считается успешным. В качестве оценок вероятностей принимаются относительные частоты успешных испытаний.

На рисунке 6 совмещены область возможных взаимодействий и карта вероятностей этих взаимодействий p_{ij} для $q = (1 + \sqrt{5}) / 2$. Вероятности вычислялись по 10^6 испытаний для каждой пары (i, j) .

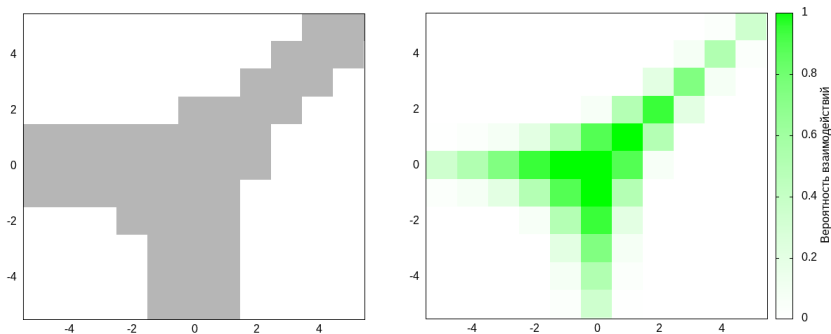


Рис. 6. Область возможных взаимодействий (слева) и карта вероятностей взаимодействия p_{ij} (справа) для $q = (1 + \sqrt{5}) / 2$

Псевдокод расчета этих вероятностей приведен в Листинге 5, где через $rnd(\alpha, \beta)$ обозначена стандартная функция генерации равномерно распределенного на отрезке $[\alpha; \beta]$ псевдослучайного числа.

```

2   $q := (1 + \sqrt{5})/2;$ 
2  for  $i := -P$  to  $P$  do
     $b\_left = q^{-i-1}; b\_right = q^{-i};$ 
4  for  $j := -P$  to  $i$  do
     $c\_left = q^{-j-1}; c\_right = q^{-j};$ 
6     $p_{ij} := 0;$ 
    for  $n := 1$  to  $10^6$  do
8       $a := rnd(q^{-1}, 1);$ 
       $b := rnd(b\_left, b\_right);$ 
10      $c := rnd(c\_left, c\_right)$ 
      if  $a + b \geq c$  and  $a + c \geq b$  and  $b + c \geq a$  then  $p_{ij} := p_{ij} + 1;$ 
12     end do;
     $p_{ij} := p_{ij}/10^6;$ 
14     $p_{ji} := p_{ij};$ 
    end do;
16 end do;

```

Листинг 5. Псевдокод расчета вероятностей взаимодействия оболочек

Итак, на выходе блока 9 схемы получаем распределение вероятностей взаимодействия масштабных оболочек.

В каскадных моделях (5) коэффициенты при каждом нелинейном члене по абсолютной величине имеют смысл интенсивности взаимодействия волн из оболочек P_n , P_{n+i} и P_{n+j} в процессе, соответствующем этому члену. Например, $|\hat{V}_{ij}|$ характеризует, насколько эффективно генерируются магнитные волны из оболочки P_n механизмом динамо при взаимодействии волн скорости из P_{n+i} с магнитными волнами из P_{n+j} . Поэтому разумно потребовать при расчете коэффициентов модели, чтобы их модули были в каком-то смысле согласованы с вероятностями взаимодействия оболочек.

На выходе блока 7 получены выражения для коэффициентов модели, линейно зависящие от вектора свободных параметров $s = (s_1, s_2, \dots, s_m)$. Если какой-либо из коэффициентов оказался равен нулю, это означает, что взаимодействие оболочек именно в этом члене запрещено законами сохранения и согласовывать уже ничего не надо. Поэтому будем рассматривать здесь только ненулевые коэффициенты, зависящие от s .

Ясно, что минимизация различий между модулями коэффициентов и вероятностями p_{ij} требует минимизации выражений вида

$$\left| \frac{\hat{S}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right|, \quad \left| \frac{\hat{L}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right|, \quad \left| \frac{\hat{W}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right|. \quad (29)$$

Нормирование каждой разности в (29) на вероятность p_{ij} уравнивает большие и малые значения вероятностей в задаче минимизации. Эта минимизация должна быть по всем коэффициентам и является многокритериальной, поэтому допускает различные варианты постановки.

Один из наиболее естественных вариантов постановки с равноправием всех коэффициентов – это минимизация критерия

$$\sum_{i,j} \left[\left| \frac{\hat{S}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right| + \left| \frac{\hat{L}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right| + \left| \frac{\hat{W}_{ij}(\mathbf{s})}{p_{ij}} - p_{ij} \right| \right], \quad (30)$$

которая является содержанием блока 10.

Задача минимизации (30) решалась уже с помощью специально разработанного в C++ приложения, псевдокод которого приведен ниже. Это связано с тем, что вероятности взаимодействий определены с помощью имитационного моделирования, поэтому проведение точных вычислений компьютерной алгебры становится уже бессмысленным. Кроме того, вычисления с плавающей точкой в системах компьютерной алгебры очень медленные, а задача минимизации, представленная выше, требует очень большого объема вычислений.

С другой стороны, хотелось остаться в рамках рациональных значений коэффициентов модели, причем с небольшими числителями и знаменателями. Поэтому использовался перебор рациональных значений свободных параметров вида p/r , где p изменялось в диапазоне $-10, \dots, 10$, а r в диапазоне $1, \dots, 10$ с переходом к несократимой форме. Всего таких различных дробей 127, т.е. общее число вариантов свободных параметров 127^m .

Рассмотрим псевдокод этого приложения (Листинг 6). Здесь $next_placement(\mathbf{z}, n, k)$ означает функцию, которая данное k -элементное размещение с повторениями \mathbf{z} из чисел $1, 2, \dots, n$ преобразует в непосредственно следующее за ним в лексикографическом порядке и возвращает *true* [30]. Если такого размещения нет, то она ничего не

изменяет в \mathbf{z} и возвращает *false*. Предполагается, что все 127 возможных значений p/r записаны в векторе \mathbf{w} .

```

n := 127;
2 for l := 1 to m do zl := 1;
  first_placement := true;
4 do
  for l := 1 to m do sl := wl;
6 target := 0;
  for i = -P to P do for j = -P to P do
8   if  $\hat{S}_{ij}(\mathbf{s}) \neq 0$  then
      target := target +  $|\hat{S}_{ij}(\mathbf{s}) - p_{ij}| / p_{ij}$ ;
10  end if;
    if  $\hat{L}_{ij}(\mathbf{s}) \neq 0$  then
12     target := target +  $|\hat{L}_{ij}(\mathbf{s}) - p_{ij}| / p_{ij}$ ;
    end if;
14    if  $\hat{W}_{ij}(\mathbf{s}) \neq 0$  then
      target := target +  $|\hat{W}_{ij}(\mathbf{s}) - p_{ij}| / p_{ij}$ ;
16    end if;
  end do; end do;
18 if first_placement then
  min_target := target;
20 smin :=  $\mathbf{s}$ ;
  first_placement := false;
22 else
  if target < min_target then
24   min_target := target;
   smin :=  $\mathbf{s}$ ;
26   end if;
  end if;
28 while next_placement( $\mathbf{z}, n, m$ );

```

Листинг 6. Псевдокод для минимизации критерия (30)

В результате выполнения этого псевдокода в векторе \mathbf{s}_{min} записаны рациональные значения параметров приведенного выше типа, минимизирующие (30).

Рассмотрим некоторые результаты расчетов для $P = 3$ (минимальная нелокальность). На рисунке 7 представлены логарифмы отношения модулей полученных коэффициентов взаимодействия к вероятностям взаимодействия для модели двумерного потока, а на рисунке 8 – для трехмерного потока.

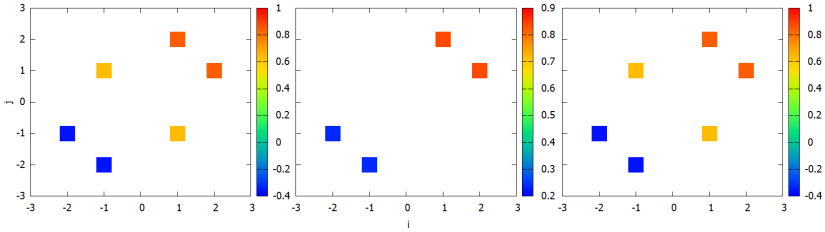


Рис. 7. Отношения моделей полученных коэффициентов взаимодействия к вероятностям взаимодействия в логарифмическом масштабе (двумерный поток).

Слева направо коэффициенты \hat{S}_{ij} , \hat{L}_{ij} , \hat{W}_{ij}

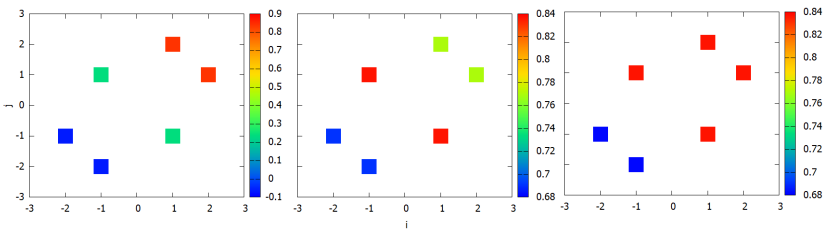


Рис. 8. Отношения полученных коэффициентов взаимодействия к вероятностям взаимодействия в логарифмическом масштабе (трехмерный поток). Слева

направо коэффициенты \hat{S}_{ij} , \hat{L}_{ij} , \hat{W}_{ij}

Видно, что модули коэффициентов и вероятности отличаются не более, чем на порядок. Это можно считать хорошим согласованием.

4. Заключение. Результатом настоящей работы является вычислительная технология автоматизированного составления каскадных моделей типа GOY для магнитогидродинамической турбулентности. С ее помощью можно получать уравнения новых каскадных моделей турбулентности, в том числе и нелокальных, с параметрическими выражениями для коэффициентов или с числовыми коэффициентами. В обоих случаях сохранение необходимых квадратичных инвариантов и стационарность заданных степенных решений будут абсолютно точными. Разработанная технология может быть полезным вычислительным инструментом для специалистов, занимающимся моделированием мелкомасштабной турбулентности.

Идея технологии и ее реализация принадлежат авторам работы. Технология реализована с использованием систем компьютерной алгебры. Они позволяют программно генерировать системы уравнений на коэффициенты составляемых моделей и решать эти системы в

общем формульном виде. В результате получаются параметрические классы моделей, которые обладают необходимыми квадратичными инвариантами и степенными стационарными решениями. При составлении моделей есть возможность произвольно выбирать предельное дальное действие в пространстве масштабов – масштабную нелокальность модели. Для последующего численного исследования моделей необходимо фиксировать значения свободных параметров. В предложенной технологии реализован один формальный способ нахождения рациональных значений свободных параметров, при которых коэффициенты нелинейных взаимодействий масштабов будут согласованы с вероятностями этих взаимодействий.

Авторы планируют в дальнейшем использовать технологию для сопряжения крупномасштабных моделей гидромагнитного динамо, описывающих крупные турбулентные вихри, и каскадных моделей для описания мелкомасштабной динамики.

Литература

1. Фрик П.Г. Турбулентность: подходы и модели. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 332 с.
2. Ditlevsen P.D. Turbulence and shell models. New York: University Press, 2011. 152 p. DOI: 10.1017/CBO9780511919251.
3. Gibbon J.D., Vincenzi D. How to extract a spectrum from hydrodynamic equations? // Journal of Nonlinear Science. 2022. vol. 32. no. 6. pp. 1–25.
4. Gurcan D., Xu S., Morel P. Spiral chain models of two-dimensional turbulence // Physical Review E. 2019. vol. 100. no. 4. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.043113.
5. Mailybaev A.A. Hidden scale invariance of intermittent turbulence in a shell model // Physical Review Fluids. 2021. vol. 6. no. 1. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.L012601.
6. Plunian, F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence // Physics Reports. 2013. vol. 523. no. 1. pp. 1–60.
7. Munoz V., Dominguez M., Riquelme M., Nigro G., Carbone V. Fractality of an mhd shell model for turbulent plasma driven by solar wind data: a review // Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics. 2021. vol. 214. DOI: 10.1016/j.jastp.2020.105524.
8. Chen N., Li Y., Lunasin E. An efficient continuous data assimilation algorithm for the sabra shell model of turbulence // Chaos. 2021. vol. 31. no. 10. DOI: 10.1063/5.0057421.
9. Li L., Liu P., Xing Y., Guo H. Shell models for confined rayleigh–taylor turbulent convection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2020. vol. 84. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105204.
10. Verdini A., Grappin R., Montagud-Camps V. Turbulent heating in the accelerating region using a multishell model // Solar Physics. 2019. vol. 294. DOI: 10.1007/s11207-019-1458-y.
11. Bhadra A., Mishra P.K. Energy spectrum and energy budget of superfluid turbulence using two-fluid shell model // AIP Advances. 2022. vol. 12. no. 2. DOI: 10.1063/5.0083847.
12. Nabil H., Balhamri A., Belafhal A. Propagation of besel-gaussian shell-model beam through a jet engine exhaust turbulence // Optical and Quantum Electronics. 2022. vol. 54. no. 6. DOI: 10.1007/s11082-022-03743-3.

13. Tropina A.A., Miles R.B. Parametrical study of aero-optical effects using shell models of turbulence // AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum 2022. DOI: 10.2514/6.2022-0986.
14. Inage S. Control parameter optimization for turbulence shell model // Computers and Fluids. 2021. vol. 229. DOI: 10.1016/j.compfluid.2021.105084.
15. Mailybaev A.A. Solvable intermittent shell model of turbulence // Communications in Mathematical Physics. 2021. vol. 388. no. 1. pp. 469–478.
16. Gurcan O.D. Dynamical network models of the turbulent cascade // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2021. vol. 426. DOI: 10.1016/j.physd.2021.132983.
17. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Автоматизированная генерация каскадных моделей турбулентности методами компьютерной алгебры. // Вычислительные технологии. 2021. Т. 26. № 5. С. 65–80.
18. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К., Подлесный Н.В. Генерация комплексных каскадных моделей турбулентных систем методами компьютерной алгебры // Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. 2022. Т. 41. № 4. С. 9–31.
19. Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System // Mathematics. 2023. vol. 11(13). DOI: 10.3390/math11133000.
20. Водинчар Г.М., Фещенко Л.К. Применение компьютерной алгебры для составления спектральных моделей кинематического осесимметричного динамо // Вычислительные технологии. 2023. Т. 28. № 2. С. 4–18.
21. Bright C., Kotsireas I., Ganesh V. Applying computer algebra systems with SAT solvers to the Williamson conjecture // Jour. Symbolic Comp. 2020. vol. 100. pp. 187–209.
22. Gayoso Martinez, V., Hernandez Encinas, L., Martin Munoz, A., Queiruga Dios, A. Using Free Mathematical Software in Engineering Classes // Axioms. 2021. vol. 10(4). DOI: 10.3390/axioms10040253.
23. Bazan E.R., Hubert E. Multivariate interpolation: Preserving and exploiting symmetry // Journal of Symbolic Computation. 2021. vol. 107. pp. 1–22.
24. Conceicao A.C., Pires J.C. Symbolic Computation Applied to Cauchy Type Singular Integrals // Math. Comput. Appl. 2022. vol. 27(1). DOI: 10.3390/mca27010003.
25. Campo-Montalvo E., Fernandez de Sevilla M., Magdalena Benedito J.R., Perez-Diaz S. Some New Symbolic Algorithms for the Computation of Generalized Asymptotes // Symmetry. 2023. vol. 15. no. 1. DOI: 10.3390/sym15010069.
26. Кирсанов М.Н. Математика и программирование в Maple. М.: Ай Пи Ар Медиа, 2020. 160 с.
27. Wang F.Y. Physics with Maple: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics. New York: Wiley, 2006. 625 p.
28. Campanelli L. One-dimensional model of freely decaying two-dimensional turbulence // Journal of the Korean Physical Society. 2022. vol. 80. no. 10. pp. 972–980.
29. Campanelli L. Dimensional analysis of two-dimensional turbulence // Modern Physics Letters B. 2019. vol. 33. no. 19. DOI: 10.1142/S021798491950218X.
30. Федоряева Т.И. Комбинаторные алгоритмы. Новосибирск: НГУ, 2011. 118 с.

Водинчар Глеб Михайлович — канд. физ.-мат. наук, доцент, ведущий научный сотрудник, и.о. заведующего лабораторией, лаборатория моделирования физических процессов, Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. Область научных интересов: моделирование гидромагнитного динамо, динамические системы с памятью, нелинейная динамика, методы компьютерной алгебры в геофизике и магнитогидродинамике. Число научных публикаций — 140. gvodinchar@ikir.ru; улица

Мирная, 7, 684034, село Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Россия; р.т.: +7(41531)33-193.

Фещенко Любовь Константиновна — канд. физ.-мат. наук, научный сотрудник, лаборатория моделирования физических процессов, Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН. Область научных интересов: математическое моделирование в магнитогидродинамических задачах, применение систем символьных вычислений в магнитогидродинамике, каскадные модели, динамические системы, геодинамо. Число научных публикаций — 57. feshenko.lk@yandex.ru; улица Мирная, 7, 684034, село Паратунка, Елизовский район, Камчатский край, Россия; р.т.: +7(41531)33-193.

Поддержка исследований. Работа выполнена за счет Государственного задания ИКИР ДВО РАН (рег. № темы 124012300245-2).

G. VODINCHAR, L. FESHCHENKO
**COMPUTATIONAL TECHNOLOGY FOR SHELL MODELS OF
MAGNETOHYDRODYNAMIC TURBULENCE CONSTRUCTING**

Vodinchar G., Feshchenko L. **Computational Technology for Shell Models of Magnetohydrodynamic Turbulence Constructing.**

Abstract. The paper discusses the computational technology for constructing one type of small-scale magnetohydrodynamic turbulence models – shell models. Any such model is a system of ordinary quadratic nonlinear differential equations with constant coefficients. Each phase variable is interpreted in absolute value as a measure of the intensity of one of the fields of the turbulent system in a certain range of spatial scales (scale shell). The equations of any shell model must have several quadratic invariants, which are analogues of conservation laws in ideal magnetohydrodynamics. The derivation of the model equations consists in obtaining such expressions for constant coefficients for which the predetermined quadratic expressions will indeed be invariants. Derivation of these expressions «manually» is quite cumbersome and the likelihood of errors in formula transformations is high. This is especially true for non-local models in which large-scale shells that are distant in size can interact. The novelty and originality of the work lie in the fact that the authors proposed a computational technology that allows one to automate the process of deriving equations for shell models. The technology was implemented using computer algebra methods, which made it possible to obtain parametric classes of models in which the invariance of given quadratic forms is carried out absolutely accurately – in formula form. The determination of the parameter values in the resulting parametric class of models is further carried out by agreement with the measures of the interaction of shells in the model with the probabilities of their interaction in a real physical system. The idea of the described technology and its implementation belong to the authors. Some of its elements were published by the authors earlier, but in this work, for the first time, its systematic description is given for models with complex phase variables and agreement of measures of interaction of shells with probabilities. There have been no similar works by other authors previously. The technology allows you to quickly and accurately generate equations for new non-local turbulence shell models and can be useful to researchers involved in modeling turbulent systems simulating.

Keywords: automation of modeling, computer algebra, turbulence, magnetohydrodynamics, shell models.

References

1. Frick P.G. Turbulentnost': podhody i modeli [Turbulence: Approaches and Models]. Moscow-Izhevsk: NRC «Regular and Chaotic Dynamic», 2010. 342 p. (In Russ.).
2. Ditlevsen P.D. Turbulence and shell models. New York: University Press, 2011. 152 p. DOI: 10.1017/CBO9780511919251.
3. Gibbon J.D., Vincenzi D. How to extract a spectrum from hydrodynamic equations? Journal of Nonlinear Science. 2022. vol. 32. no. 6. pp. 1–25.
4. Gurcan D., Xu S., Morel P. Spiral chain models of two-dimensional turbulence. Physical Review E. 2019. vol. 100. no. 4. DOI: 10.1103/PhysRevE.100.043113.
5. Mailybaev A.A. Hidden scale invariance of intermittent turbulence in a shell model. Physical Review Fluids. 2021. vol. 6. no. 1. DOI: 10.1103/PhysRevFluids.6.L012601.
6. Plunian, F., Stepanov R., Frick P. Shell models of magnetohydrodynamic turbulence. Physics Reports. 2013. vol. 523. no. 1. pp. 1–60.

7. Munoz V., Dominguez M., Riquelme M., Nigro G., Carbone V. Fractality of an mhd shell model for turbulent plasma driven by solar wind data: a review. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*. 2021. vol. 214. DOI: 10.1016/j.jastp.2020.105524.
8. Chen N., Li Y., Lunasin E. An efficient continuous data assimilation algorithm for the sabra shell model of turbulence. *Chaos*. 2021. vol. 31. no. 10. DOI: 10.1063/5.0057421.
9. Li L., Liu P., Xing Y., Guo H. Shell models for confined rayleigh–taylor turbulent convection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2020. vol. 84. DOI: 10.1016/j.cnsns.2020.105204.
10. Verdini A., Grappin R., Montagud-Camps V. Turbulent heating in the accelerating region using a multishell model. *Solar Physics*. 2019. vol. 294. DOI: 10.1007/s11207-019-1458-y.
11. Bhadra A., Mishra P.K. Energy spectrum and energy budget of superfluid turbulence using two-fluid shell model. *AIP Advances*. 2022. vol. 12. no. 2. DOI: 10.1063/5.0083847.
12. Nabil H., Balhamri A., Belafhal A. Propagation of bessel-gaussian shell-model beam through a jet engine exhaust turbulence. *Optical and Quantum Electronics*. 2022. vol. 54. no. 6. DOI: 10.1007/s11082-022-03743-3.
13. Tropina A.A., Miles R.B. Parametrical study of aero-optical effects using shell models of turbulence. *AIAA Science and Technology Forum and Exposition, AIAA SciTech Forum* 2022. DOI: 10.2514/6.2022-0986.
14. Inage S. Control parameter optimization for turbulence shell model. *Computers and Fluids*. 2021. vol. 229. DOI: 10.1016/j.compfluid.2021.105084.
15. Mailybaev A.A. Solvable intermittent shell model of turbulence. *Communications in Mathematical Physics*. 2021. vol. 388. no. 1. pp. 469–478.
16. Gurcan O.D. Dynamical network models of the turbulent cascade. *Physica D: Nonlinear Phenomena*. 2021. vol. 426. DOI: 10.1016/j.physd.2021.132983.
17. Vodinchar G.M., Feshenko L.K. [Automated generation of turbulence shell models by the methods of computer algebra]. *Vychislitel' nye tehnologii – Computational Technologies*. 2021. vol. 26. no. 5. pp. 65–80. (In Russ.).
18. Vodinchar G.M., Feshenko L.K., Podlesnyi N.V. [Construction of complex shell models of turbulent systems by computer algebra methods]. *Vestnik KRAUNC. Fiziko-matematicheskie nauki – Vestnik KRAUNC. Physical and mathematical sciences*. 2022. vol. 41. no. 4. pp. 9–31. (In Russ.).
19. Vodinchar G.M., Feshchenko L.K. Computational Technology for the Basis and Coefficients of Geodynamo Spectral Models in the Maple System. *Mathematics*. 2023. vol. 11(13). DOI: 10.3390/math11133000.
20. Vodinchar G.M., Feshenko L.K. [Computer algebra application for the developed of the spectral models of kinematic axisymmetric dynamo]. *Vychislitel' nye tehnologii – Computational Technologies*. 2023. vol. 28. no. 2. pp. 4–18. (In Russ.).
21. Bright C., Kotsireas I., Ganesh V. Applying computer algebra systems with SAT solvers to the Williamson conjecture. *Jour. Symbolic Comp.* 2020. vol. 100. pp. 187–209.
22. Gayoso Martinez, V., Hernandez Encinas, L., Martin Munoz, A., Queiruga Dios, A. Using Free Mathematical Software in Engineering Classes. *Axioms*. 2021. vol. 10(4). DOI: 10.3390/axioms10040253.
23. Bazan E.R., Hubert E. Multivariate interpolation: Preserving and exploiting symmetry. *Journal of Symbolic Computation*. 2021. vol. 107. pp. 1–22.
24. Conceicao A.C., Pires J.C. Symbolic Computation Applied to Cauchy Type Singular Integrals. *Math. Comput. Appl.* 2022. vol. 27(1). DOI: 10.3390/mca27010003.
25. Campo-Montalvo E., Fernandez de Sevilla M., Magdalena Benedito J.R., Perez-Diaz S. Some New Symbolic Algorithms for the Computation of Generalized Asymptotes. *Symmetry*. 2023. vol. 15. no. 1. DOI: 10.3390/sym15010069.

26. Kirsanov M.N. Matematika i programirovanie v Maple [Mathematics and programming in Maple]. M.: APR Media, 2020. 160 p. (In Russ.).
27. Wang F.Y. Physics with Maple: The Computer Algebra Resource for Mathematical Methods in Physics. New York: Wiley, 2006. 625 p.
28. Campanelli L. One-dimensional model of freely decaying two-dimensional turbulence. Journal of the Korean Physical Society. 2022. vol. 80. no. 10. pp. 972–980.
29. Campanelli L. Dimensional analysis of two-dimensional turbulence. Modern Physics Letters B. 2019. vol. 33. no. 19. DOI: 10.1142/S021798491950218X.
30. Fedorjaeva T.I. Kombinatornye algoritmy [Combinatorial algorithms] Novosibirsk: NSU, 2011. 118 p. (In Russ.).

Vodinchar Gleb — Ph.D., Associate Professor, Leading researcher, acting head of the laboratory, Laboratory for simulation of physical processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS. Research interests: hydromagnetic dynamo simulation, dynamical systems with memory, nonlinear dynamics, computer algebra methods in geophysics and magnetohydrodynamics. The number of publications — 140. gvodinchar@ikir.ru; 7, Mirnaya St., 684034, Paratunka, Elizovskiy district, Kamchatka region, Russia; office phone: +7(41531)33-193.

Feshchenko Lyubov — Ph.D., Researcher, Laboratory for modeling physical processes, Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation FEB RAS. Research interests: mathematical modeling in magnetohydrodynamic problems, application of symbolic computation systems in magnetohydrodynamics, cascade models, dynamic systems, geodynamo. The number of publications — 57. feshchenko.lk@yandex.ru; 7, Mirnaya St., 684034, Paratunka, Elizovskiy district, Kamchatka region, Russia; office phone: +7(41531)33-193.

Acknowledgements. The work was supported by IKIR FEB RAS State Task (subject registration № 124012300245-2).