УДК 004.8

А.В. Сироткин, В.Ф. Мусина, А.Л. Тулупьев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ БАЙЕСОВСКИЕ СЕТИ: НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА ОПТИМИЗАЦИИ В ЛОКАЛЬНОМ АПОСТЕРИОРНОМ ВЫВОДЕ ПРИ АТОМАРНОМ СТОХАСТИЧЕСКОМ СВИДЕТЕЛЬСТВЕ

Сироткин А.В, Мусина В.Ф., Тулупьев А.Л. **Алгебраические байесовские сети: нелинейная задача оптимизации в локальном апостериорном выводе при атомарном стохастическом свидетельстве.**

Аннотация. Второй задачей апостериорного вывода является пересчет имеющихся оценок вероятности истинности при условии поступившего свидетельства. Цель статьи состоит в анализе нелинейной задачи оптимизации, возникающей при пропагации атомарного стохастического свидетельства во фрагменте знаний с интервальными оценками алгебраической байесовской сети. Переход к накрывающим оценкам границ интервала позволяет привести задачу нелинейной оптимизации к серии задач квадратичного или дробно-линейного программирования.

Ключевые слова: алгебраическая байесовская сеть, апостериорный вывод, фрагмент знаний.

Sirotkin A.V., Musina V.F., Tulupyev A.L. **Algebraic Bayesian network: non-linear optimization problem in local posteriori inference with atomic stochastic evidence.**

Abstract. Recalculation of an existing truth probability estimates given the probability of incoming evidence constutes the second problem of posterior inference in algebraic Bayesian networks. We consider the analysis of non-linear optimization problem arising from the atomic stochastic evidence propagation in the knowledge pattern with interval estimations. Conversion to enclosing interval boarders estimates allows one to reduce the non-linear optimization problem to series of quadratic or hyperbolic mathematical programming problems.

Keywords: algebraic Bayesian network, posteriori inference, knowledge pattern.

1. Введение. Апостериорный вывод — получение новых вероятностных оценок истинности по поступившим свидетельствам — один из ключевых процессов, алгоритмизация которого развивается и изучается в теории алгебраических байесовских сетей (АБС) [2, 5–11, 13, 15, 16, 18] . С математической точки зрения, апостериорный вывод сводится к определению вероятности истинности приходящего свидетельства и соответствующему пересчету вектора вероятностей конъюнктов, причем оценки этих вероятностей могут быть как интервальными, так и скалярными, при условии поступившего свидетельства. Свидетельства могут быть разнообразными: эксперт может сообщить как и точное значение вероятности истинности той или иной атомарной пропозиции, так и указать интервал, в котором лежит её значение; может высказать предположение об отдельной атомарной пропозиции или о некоторой их совокупности сразу.

В серии предшествующих работ [4, 7, 10, 14, 15, 18] решение задач апостериорного вывода сводилось либо к рассчетам по матрично-векторным формулам, либо к решению задач линейного программирования (ЗЛП). В ряде случаев с помощью ЗЛП можно получить лишь накрывающие оценки искомых величин [3], но вообще говоря, в таких случаях возникают задачи нелинейного программирования.

Пусть имеется фрагмент знаний алгебраической байесовской сети с интервальными оценками истинности вектора вероятностей конъюнктов. Поступает стохастическое свидетельство, то есть свидетельство, характеризующееся апостериорной вероятностью своей истинности. В этом случае идея апостериорного вывода состоит в поиске ожидаемых оценок, или, более строго, в поиске верхней и нижней границы (т.к. оценки интервальные) математического ожидания оценки.

Цель статьи — рассмотреть указанный случай пропагации атомарного свидетельства, постановку и исследование возникающей экстремальной задачи, а так же метод её приближенного решения.

2. Постановка задачи. Задан фрагмент знаний АБС с носителем C, имеющий интервальные оценки истинности вероятностей конъюнктов. Поступает атомарное стохастическое свидетельство $\langle p^a(\tilde{x})\rangle$. Рассмотрим более подробно вторую задачу апостериорного вывода: задачу оценки условных вероятностей истинности элементов фрагмента знаний при предположении, что такое свидетельство имеет место быть.

В иллюстративных целях будем далее рассматривать два фрагмента знаний, построенных над $\{x_1, x_2\}$ и над $\{x_1, x_2, x_3\}$, при этом будем считать, что поступает свидетельство $\langle p^a(\tilde{x}_1)\rangle$. Для удобства обозначим:

$$p^a(x_1) = p,$$
$$p^a(\bar{x}_1) = 1 - p = q.$$

Выпишем в явном виде возникающие экстремальные задачи в этих случаях.

Для фрагмента знаний второго порядка $\{x_1, x_2, x_1x_2\}$ заданы непротиворечивые интервальные оценки истинности (ограничения предметной области) $\mathcal{D}^2$:

$$\begin{cases} p_1^- \leq p(x_1) \leq p_1^+, \\ p_2^- \leq p(x_2) \leq p_2^+, \\ p_{12}^- \leq p(x_1x_2) \leq p_{12}^+. \end{cases} \quad (1)$$

Теоретико-вероятностные ограничения $\mathcal{E}^2$ для вероятностей истинности элементов фрагмента знаний второго порядка:

$$\begin{cases} p(x_1x_2) \geq 0, \\ p(x_1) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ p_(x_2) - p(x_1x_2) \geq 0, \\ 1 - p(x_1) - p(x_2) + p(x_1x_2) \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

Вместе ограничения $\mathcal{E}^2$ и $\mathcal{D}^2$ составляют ограничения $\mathcal{R}^2$ анализируемой экстремальной задачи. При выписанных ограничениях необходимо найти следующие экстремумы:

$$p_a^-(x_2) = \min_{\mathcal{R}^2} \left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \quad (3)$$

$$p_a^+(x_2) = \max_{\mathcal{R}^2} \left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)} q \right). \quad (4)$$

Для фрагмента знаний $C = \{x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3, x_1x_2x_3\}$ третьего порядка, построенного над алфавитом $\{x_1, x_2, x_3\}$, потребуется решать больше оптимизационных задач. Для этого фрагмента знаний заданы непротиворечивые интервальные оценки $\mathcal{D}^3$:

$$\begin{cases} p_1^- \leq p(x_1) \leq p_1^+, \\ p_2^- \leq p(x_2) \leq p_2^+, \\ p_2^- \leq p(x_2) \leq p_2^+, \\ p_{12}^- \leq p(x_1x_2) \leq p_{12}^+, \\ p_{13}^- \leq p(x_1x_3) \leq p_{13}^+, \\ p_{23}^- \leq p(x_2x_3) \leq p_{23}^+, \\ p_{123}^- \leq p(x_1x_2x_3) \leq p_{123}^+. \end{cases} \quad (5)$$

Кроме того заданы вероятностные ограничения $\mathcal{E}^3$:

$$
\begin{cases}
p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1x_2) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_1) - p(x_1x_2) - p(x_1x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_3x_3) - p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_2) - p(x_1x_2) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
p(x_3) - p(x_1x_3) - p(x_2x_3) + p(x_1x_2x_3) \geq 0, \\
1 - p(x_1) - p(x_2) - p(x_3) + p(x_1x_2) + p(x_1x_3) + p(x_2x_3) - \\
\quad - p(x_1x_2x_3) \geq 0.
\end{cases}
\tag{6}
$$

Как и прежде, в совокупности ограничения $\mathcal{E}^3$ и $\mathcal{D}^3$ образуют множество ограничений $\mathcal{R}^3$ анализируемой экстремальной задачи. При выписанных ограничениях необходимо решить ряд оптимизационных задач:

$$
p_a^-(x_2) = \min_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{7}
$$

$$
p_a^-(x_3) = \min_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_3)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_3)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{8}
$$

$$
p_a^-(x_2x_3) = \min_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_2x_3)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2x_3)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{9}
$$

$$
p_a^+(x_2) = \max_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{10}
$$

$$
p_a^+(x_3) = \max_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_3)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_3)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{11}
$$

$$
p_a^+(x_2x_3) = \max_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1x_2x_3)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1x_2x_3)}{p(\bar{x}_1)} q \right). \tag{12}
$$

Для простоты будем использовать в качестве индекса конъюнкта $Z \in \{x_2, x_3, x_2x_3\}$, тогда выписанные выше экстремальные соотношения можно переписать короче:

$$
p_a^- = \min_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)} q \right), \tag{13}
$$

$$
p_a^+ = \max_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)} p + \frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)} q \right). \tag{14}
$$

В рассматриваемом случае (апостериорный вывод, интервальные оценки вероятности истинности, пропагация стохастического свидетельства) получаются задачи дробно-линейного программирования, т.к. множества ограничений $\mathcal{R}^2$ и $\mathcal{R}^3$ содержат лишь линейные неравенства, а целевые функции (3)–(4) и (7)–(12) являются дробно-линейными.

Заметим, что ряд соотношений может быть записан в более обозримой форме на матрично-векторном языке [3, 5, 17]. Это становится возможным после введения особого порядка (индексации) на квантах и конъюнктах.

В рамках иллюстративных примеров, рассматриваемых в настоящей работе, введем обозначения для векторов квантов и конъюнктов (упорядоченных должным образом):

$$\mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_2x_1) \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_{\mathbf{q}}^{(2)} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_2x_1) \\ p(x_2\bar{x}_1) \\ p(x_2x_1) \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ p(x_1) \\ p(x_2) \\ p(x_2x_1) \\ p(x_3) \\ p(x_3x_1) \\ p(x_3x_2) \\ p(x_3x_2x_1) \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_{\mathbf{q}}^{(3)} = \begin{pmatrix} p(\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_3\bar{x}_2x_1) \\ p(\bar{x}_3x_2\bar{x}_1) \\ p(\bar{x}_3x_2x_1) \\ p(x_3\bar{x}_2\bar{x}_1) \\ p(x_3\bar{x}_2x_1) \\ p(x_3x_2\bar{x}_1) \\ p(x_3x_2x_1) \end{pmatrix}.$$

Введем в рассмотрение матрицу

$$\mathbf{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{[n]}$$

где n — степень Кронекера матрицы.

В веденных обозначениях соответствующие вероятностные ограничения, подробно выписанные в (2) и (6), выглядят следующим образом:

$$\mathbf{I}_2\mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)} \geq \mathbf{0},$$
$$\mathbf{I}_3\mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(3)} \geq \mathbf{0},$$

а экспертные ограничения, которые выписаны в (1) и (5), —

$$\mathbf{P}^{-,(2)} \le \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)} \le \mathbf{P}^{+,(2)}, \tag{15}$$
$$\mathbf{P}^{-,(3)} \le \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(3)} \le \mathbf{P}^{+,(3)}, \tag{16}$$

где $\mathbf{P}^{-,(2)}$ и $\mathbf{P}^{+,(2)}$ задают верхнюю и нижнюю границы интервальных оценок вероятности истинности для фрагмента знаний второго порядка, а $\mathbf{P}^{-,(3)}$ и $\mathbf{P}^{+,(3)}$ — для фрагмента знаний третьего порядка.

Перенумерация компонентов векторов вероятностей конъюнктов и квантов позволяет представить и получающиеся экстремальные задачи в более удобочитаемой форме.

Если исходить из того, что свидетельство — это тоже фрагмент знаний, то в случае атомарного стохастического свидетельства формальная запись будет такой: $\left\langle \{x_1\}, \begin{pmatrix} 1 \\ p^a(x_1) \end{pmatrix} \right\rangle$. В свою очередь для удобства обозначим $\mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ p^a(x_1) \end{pmatrix}$. Помимо этого, вектор вероятностей квантов, соответствующий такому свидетельству, будет выглядеть так: $\begin{pmatrix} p^a(\bar{x}_1) \\ p^a(x_1) \end{pmatrix}$.

Приходящее стохастическое свидетельство $\langle \{x_1\}, \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{a} \rangle$ можно интерпретировать как случайный элемент, принимающий значение детерминированных свидетельств, соответствующих элементам $Q_{\{x_1\}}$ (множество квантов, заданных над алфавитом $\{x_1\}$). Тогда вторая задача апостреriорного вывода для пропагации стохастического свидетельства во фрагменте знаний с интервальными оценками вероятности истинности для фрагментов знаний второго порядка:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{c},a}^{-,(2)} = \min_{\mathcal{R}^2} \sum_{i=0}^{1} \frac{T^{(2)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)}}{(T^{(2)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)})[0]} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{a})[i],$$
$$\mathbf{P}_{\mathbf{c},a}^{+,(2)} = \max_{\mathcal{R}^2} \sum_{i=0}^{1} \frac{T^{(2)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)}}{(T^{(2)} \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{(2)})[0]} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{P}_{\mathbf{c}}^{a})[i].$$

Для фрагмента знаний третьего порядка экстремальная задача выглядит так:

$$\mathbf{P}^{-,(3)}_{\mathbf{c},a} = \min_{\mathcal{R}^3} \sum_{i=0}^{1} \frac{\mathsf{T}^{(3)} \times \mathbf{P}^{(3)}_{\mathbf{c}}}{(\mathsf{T}^{(3)} \times \mathbf{P}^{(3)}_{\mathbf{c}})[0]} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{P}^{a}_{\mathbf{c}})[i],$$

$$\mathbf{P}^{+,(3)}_{\mathbf{c},a} = \max_{\mathcal{R}^3} \sum_{i=0}^{1} \frac{\mathsf{T}^{(3)} \times \mathbf{P}^{(3)}_{\mathbf{c}}}{(\mathsf{T}^{(3)} \times \mathbf{P}^{(3)}_{\mathbf{c}})[0]} (\mathbf{I}_1 \times \mathbf{P}^{a}_{\mathbf{c}})[i].$$

Матрица $\mathsf{T}^{(n)}$ является матрицей перехода от вектора априорных вероятностей к ненормированному вектору апостериорных (при условии поступившего свидетельства) и имеет особый вид [15, 17].

3. Анализ задачи нелинейного программирования. В общем случае задачи оптимизации (3)–(4) при условиях (1)–(2), (13)–(14) и (5)–(6) являются задачами нелинейного программирования. При их решении исследователь сталкивается с известными трудностями и зачастую должен принимать дополнительные усилия по исследованию свойств результатов. Однако если задача получения точных значений границ интервала не стоит, возможно сведение задачи нелинейного программирования к серии более простых задач математического программирования. При этом мы получаем накрывающие (обертывающие) оценки границ интервала вероятности истинности элементов фрагмента знаний.

Один из подходов заключается в отдельном вычислении экстремума числителя и противоположного экстремума знаменателя. Действительно, приведем к одному знаменателю целевые функции (3)–(4) и (13)–(14):

$$p^{-}_{a} = \min_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1 Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1 Z)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)} \right) \geq \geq \frac{\min\limits_{\mathcal{R}^3} (p(x_1 Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1 Z)p(x_1)q)}{\max\limits_{\mathcal{R}^3} p(\bar{x}_1)p(x_1)}; \tag{17}$$

$$p^{+}_{a} = \max_{\mathcal{R}^3} \left(\frac{p(x_1 Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1 Z)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)} \right) \leq \leq \frac{\max\limits_{\mathcal{R}^3} (p(x_1 Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1 Z)p(x_1)q)}{\min\limits_{\mathcal{R}^3} p(\bar{x}_1)p(x_1)}. \tag{18}$$

Здесь и далее $Z \in \{x_2, x_3, x_2x_3\}$. В случае алфавита над двумя элементами:

$$p_a^- = \min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)}\right) \geq \\ \geq \frac{\min\limits_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right)}{\max\limits_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1)}; \tag{19}$$

$$p_a^+ = \max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)}\right) \leq \\ \leq \frac{\max\limits_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right)}{\min\limits_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1)}. \tag{20}$$

Получаем, что искомые оценки для верхней и нижней границы интервала вероятности при пропагации стохастического свидетельства представляют собой отношение решений двух задач квадратичного программирования, т.к. ограничения $\mathcal{R}^2$ и $\mathcal{R}^3$ линейны и целевые функции в оптимизационных задачах (21)–(28) квадратичны.

$$\min_{\mathcal{R}^3}\left(p(x_1Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1Z)p(x_1)q\right), \tag{21}$$

$$\max_{\mathcal{R}^3} p(\bar{x}_1)p(x_1), \tag{22}$$

$$\max_{\mathcal{R}^3}\left(p(x_1Z)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1Z)p(x_1)q\right), \tag{23}$$

$$\min_{\mathcal{R}^3} p(\bar{x}_1)p(x_1). \tag{24}$$

В случае фрагмента знаний второго порядка:

$$\min_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right), \tag{25}$$

$$\max_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1), \tag{26}$$

$$\max_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right), \tag{27}$$

$$\min_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1). \tag{28}$$

Другим способом упрощения исходной оптимизационной задачи является представление экстремума суммы суммой экстремумов:

$$\begin{gathered} p_a^- = \min_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)}p + \frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \geq \\ \geq \min_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)}p\right) + \min_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right); \end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered} p_a^+ = \max_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)}p + \frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \leq \\ \leq \max_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)}p\right) + \max_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(\bar{x}_1Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right); \end{gathered} \tag{30}$$

а в случае фрагмента знаний второго порядка:

$$\begin{gathered} p_a^- = \min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \geq \\ \geq \min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p\right) + \min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right); \end{gathered} \tag{31}$$

$$\begin{gathered} p_a^+ = \max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p + \frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \leq \\ \leq \max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p\right) + \max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right). \end{gathered} \tag{32}$$

В случае (29)–(30) и (31)–(32) вместо исходной задачи нелинейного программирования возникает серия задач дробно-линейного программирования, т.к. ограничения $\mathcal{R}^2$ и $\mathcal{R}^3$ линейны, целевые функции в оптимизационных задачах (33)–(40) дробно-линейны.

$$\min_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1Z)}{p(x_1)}p\right), \tag{33}$$

$$\min_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(\bar{x}_1 Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right), \tag{34}$$

$$\max_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(x_1 Z)}{p(x_1)}p\right), \tag{35}$$

$$\max_{\mathcal{R}^3}\left(\frac{p(\bar{x}_1 Z)}{p(\bar{x}_1)}q\right). \tag{36}$$

В случае фрагмента знаний второго порядка:

$$\min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1 x_2)}{p(x_1)}p\right), \tag{37}$$

$$\min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(\bar{x}_1 x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right), \tag{38}$$

$$\max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1 x_2)}{p(x_1)}p\right), \tag{39}$$

$$\max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(\bar{x}_1 x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right). \tag{40}$$

В обоих случаях в результате получается интервал вероятности, накрывающий истинный (найденный при решении исходной оптимизационной задачи).

4. Численный пример. При помощи программного пакета Maple была смоделирована описанная ситуация. Рассмотрим фрагмент знаний, построенный над $\{x_1, x_2\}$. В качестве интервалов вероятностей истинности заданы следующие значения:

$$\begin{aligned} 0.3 \le p(x_1) \le 0.6 \\ 0.3 \le p(x_2) \le 0.6 \\ 0.2 \le p(x_1 x_2) \le 0.5 \end{aligned}$$

Рассматривается пропагация стохастического свидетельства, которое характеризуется апостериорной вероятностью своей истинности: $p = p^a(\tilde{x}) = 0.8$ При помощи пакета Optimization были вычислены экстремумы исходной задачи нелинейного программирования, соответствующих серий задач квадратичного и дробно-линейного программирования; были получены следующие значения:

$$\min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)}\right) \approx 0.367, \qquad (41)$$

$$\frac{\min\limits_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right)}{\max\limits_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1)} \approx 0.304, \qquad (42)$$

$$\min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p\right) + \min_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \approx 0.267, \qquad (43)$$

$$\max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q}{p(\bar{x}_1)p(x_1)}\right) \approx 0.886, \qquad (44)$$

$$\frac{\max\limits_{\mathcal{R}^2}\left(p(x_1x_2)p(\bar{x}_1)p + p(\bar{x}_1x_2)p(x_1)q\right)}{\min\limits_{\mathcal{R}^2} p(\bar{x}_1)p(x_1)} \approx 1.001, \qquad (45)$$

$$\max_{\mathcal{R}^2}\left(\frac{p(x_1x_2)}{p(x_1)}p\right) + \max_{\mathcal{R}^x}\left(\frac{p(\bar{x}_1x_2)}{p(\bar{x}_1)}q\right) \approx 1.00. \qquad (46)$$

Получили истинный интервал оценки вероятности (41)–(42), накрывающий интервал, полученный в серии задач дробно-линейного программирования (43)–(44), накрывающий интервал, полученный в серии задач квадратичного программирования (45)–(46).

Действительно, переход к рассмотрению накрывающих интервалов позволяет рассматривать более простые задачи математического программирования. Отметим, что в случае фрагмента знаний второго порядка возникающая задача нелинейного программирования решается при помощи численных методов, однако при переходе к более высоким размерностям её сложность резко увеличивается, и численные методы могут быть уже не столь эффективны.

Литература

1. *Гавурин М.К., Малоземов В.Н.* Экстремальные задачи с линейными ограничениями: учебное пособие. Л.: ЛГУ, 1984. 175 с.

2. *Городецкий В.И., Тулупьев А.Л.* Формирование непротиворечивых баз знаний с неопределенностью // Изв. РАН. Сер. Теория и системы управления. 1997. Т. 5. С. 33–42.

3. *Сироткин А.В.* Вычислительная сложность алгоритмов локального апостериорного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2011. №18 С. 188–214.

4. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Матричные уравнения локального логико-вероятностного вывода в алгебраических байесовских сетях // Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 6. СПб.: Наука, 2008. С. 134–143.

5. *Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Моделирование знаний и рассуждений в условиях неопределенности: матрично-векторная формализация локального синтеза согласованных оценок истинности. // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 3(18). С. 108-135

6. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: теоретические основы и непротиворечивость. СПб.: СПИИРАН, 1995. 76 с.

7. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: логико-вероятностный подход к моделированию баз знаний с неопределенностью. СПб.: СПИИРАН, 2000. 282 с.

8. *Тулупьев А.Л.* Метод построения и исследования баз фрагментов знаний с неопределенностью // Труды СПИИРАН. Вып. 1. 2002. Т. 1. С. 258–271.

9. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с.

10. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. Элементы мягких вычислений. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с.

11. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

12. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: система операций локального логико-вероятностного вывода // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2009. № 4. С. 41–44.

13. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость оценок вероятностей в идеалах конъюнктов и дизъюнктов // Вестник СПбГУ. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 121–131.

14. *Тулупьев А.Л.* Апостериорные оценки вероятностей в идеале конъюнктов // Вестник СПбГУ. 2010. Серия 10. Вып. 1. С. 95–104.

15. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 608 с.

16. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Алгебраические байесовские сети: принцип декомпозиции и логико-вероятностный вывод в условиях неопределенности // Информационно-измерительные и управляющие системы. 2008. №10, т. 6. С. 85–87.

17. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В.* Локальный апостериорный вывод в алгебраических байесовских сетях как система матрично-векторных операций // Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте. V-я Международная научно-практическая конференция. Сборник научных трудов. В 2-х т. Т. 1. СПб.: Наука, 2009. С. 425–434.

18. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2009. 400 с.

Сироткин Александр Владимирович — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: алгебраические байесовские сети, вычислительные аспекты логико-вероятностного вывода в условиях неопределенности, математические методы анализа генома. Число научных публикаций — 64. avs@iias.spb.su; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — Тулупьев А.Л.

Alexander Vladimirovich Sirotkin — junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS. Research interests: algebraic Bayesian networks, algorithms of probabilistic-logic inference under uncertainty. The number of publications — 64. avs@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 39, 14-th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Мусина Валерия Фуатовна — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, студент магистратуры экономического факультета СПбГУ. Область научных интересов: вероятностное и статистическое моделирование реальных процессов, биостатистика, стохастическая финансовая математика. Число научных публикаций — 10. , www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Musina Valeria Fuatovna — junior research fellow of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS), graduate student of Faculty of Economics at Saint Petersburg State University. Research area: probabilistic and statistic modeling, biostatistics, stochastic finance mathematics. Number of publications — 10. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Тулупьев Александр Львович — д.ф.-м.н., доцент; заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, профессор кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД, методы автоматизированной оценки защищенности персонала информационных систем от социоинженерных атак. Число научных публикаций — 230. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Alexander Lvovich Tulupyev — PhD in Computer Science, Dr. of Sc., Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications — 230. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проектов № 09-01-00861-а, 12-01-00945-а.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. Тулупьев А.Л., д.ф.-м.н., доцент.

Статья поступила в редакцию 23.03.2012.

РЕФЕРАТ

Сироткин А.В., Мусина В.Ф., Тулупьев А.Л. **Алгебраические байесовские сети: нелинейная задача оптимизации в локальном апостериорном выводе при атомарном стохастическом свидетельстве.**

Одной из основных задач, возникающих при работе с алгебраическими байесовскими сетями (АБС), является анализ апостериорных вероятностей при пропагации различных типов свидетельств, т.е. при условии поступления новой информации об объектах АБС. В статье рассматривается случай интервальных оценок вероятности истинности при пропагации атомарного стохастического свидетельства, которое характеризуется скалярной оценкой вероятности своей истинности. В этом случае задача пропагации свидетельства состоит в расчете новых границ интервалов истинности элементов фрагмента знаний после поступления свидетельства.

В основе расчетов лежит нахождение решения оптимизационной задачи, которая, в общем случае, является задачей нелинейного программирования. В статье представлены соответствующие целевые функции и ограничения для фрагментов знаний второго и третьего порядков. В этих случаях решение оптимизационной задачи может быть найдено при помощи имеющихся программных и технических средств, однако при переходе к более высоким размерностям сложность возникающих задач резко увеличивается.

В ряде случаев возможно рассматривать не точные интервалы оценки вероятности истинности, а интервалы, накрывающие их. В этом случае возможен переход от нелинейной задачи оптимизации к сериям задач дробно-линейного или квадратичного программирования, которые могут быть решены известными методами с помощью коммерческих или свободно распространяемых пакетов (библиотек) программ.

В статье приведен пример вычисления границ интервалов оценок вероятности истинности для фрагмента знаний второго порядка при пропагации стохастического свидетельства. Для моделирования ситуации использован программный пакет Maple. Согласно приведенным в статье формулам найдены решения исходной нелинейной задачи оптимизации и соответствующих ей серий задач квадратичного и дробно-линейного программирования.

SUMMARY

Sirotkin A.V, Musina V.F., Tulupyev A.L. **Algebraic Bayesian network: non-linear optimization problem in local posteriori inference with atomic stochastic evidence.**

Abstract. Analysis of posterior probabilities propagating different types of evidences which represent a new information of ABN's objects is one of the main problems of the theory of algebraic Bayesian networks. We consider the case of propagation of stochastic evidence described with scalar estimation of its truth probability in the knowledge pattern with the interval estimations. In this case the problem is to recalculate new truth estimations of interval borders of knowledge pattern's elements after the new information has been received.

The calculations are based on the solving of optimization problem which in general case is non-linear optimization problem. The corresponding objective functions and restrictions for two-dimensional and three-dimensional knowledge patterns are represented in the paper. In these cases the optimization problem can be solved with existing hardware and software but in the case of higher dimensions complexity of the problems increase dramatically.

In some cases one can consider the covering intervals of truth estimates instead of accurate ones. This allows to reduce non-linear optimization problem to series of quadratic or linear-fractional mathematical programming problems which can be solved with the known methods using commercial or free software (packages or libraries).

An example of calculating interval borders of truth probability for two-dimensional knowledge pattern propagating stochastic evidence is considered in the paper. A commercial computer algebra system Maple is used for modelling the situation. Due to presented formulas the initial non-linear optimization problem and consequent series of quadratic or linear-fractional mathematical programming problems are solved.