

К.В. КРОТОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ
ВЫПОЛНЕНИЯ ПАКЕТОВ ЗАДАНИЙ В КОНВЕЙЕРНЫХ
СИСТЕМАХ С ПРОМЕЖУТОЧНЫМИ БУФЕРАМИ
ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ**

Кротов К.В. Математическое моделирование процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах с промежуточными буферами ограниченных размеров.

Аннотация. Современные методы планирования процессов в конвейерных системах с буферами определенного размера между обрабатывающими приборами позволяют оптимизировать расписания выполнения единичных заданий либо фиксированных пакетов заданий при их ограниченном количестве и ограниченном количестве приборов. Применение математических моделей процессов выполнения единичных заданий (пакетов заданий), используемых этими методами, при оптимизации составов пакетов и расписаний их выполнения в системах с произвольным количеством пакетов и приборов является невозможным. В то же время математические модели процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах при наличии буферов ограниченных размеров между приборами являются основой для разработки методов оптимизации их (пакетов) составов и расписаний реализации действий с ними на приборах конвейерных систем. В связи с этим в статье разработаны математические модели многостадийных процессов выполнения произвольного количества пакетов заданий в конвейерных системах при наличии промежуточных буферов ограниченных размеров для двух и трех приборов, а также для произвольного количества приборов. Использование этих моделей позволяет определять моменты времени начала выполнения пакетов заданий на приборах конвейерных систем с учетом ограниченных размеров промежуточных буферов, а также длительности интервалов времени использования этих ресурсов и эффективность их использования в течение времени. Также разработан алгоритм математического моделирования процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах при наличии промежуточных буферов ограниченных размеров, осуществляющий на основе заданного порядка реализации действий с пакетами заданий на приборах конвейерных систем вычисление временных характеристик этих процессов. Осуществлена разработка приложения, реализующего синтезированные математические модели процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах с промежуточными буферами ограниченных размеров и соответствующий метод моделирования этих процессов. Разностороннее тестирование разработанного приложения показало, что полученные математические модели и метод моделирования адекватно описывают ход многостадийных процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах, задаваемый с использованием различных значений их (процессов) параметров.

Ключевые слова: конвейерные системы, обрабатывающие приборы, промежуточные буферы, пакеты заданий, многостадийные процессы, расписания, математическое моделирование.

1. Введение. Обрабатывающая система конвейерного типа представляет собой последовательность приборов, выполняющих задания в соответствии со строго заданным маршрутом их перемещения между приборами. Процесс выполнения заданий в конвейерных системах (КС), характеризуемый наличием стадий

(этапов) реализации действий с ними на приборах этих систем, называется многостадийным процессом. Выполнение заданий в конвейерных системах характеризуется длительностями: 1) выполнения заданий на приборах КС; 2) длительностями переналадки приборов КС на выполнение заданий. С учетом указанных параметров задания могут быть типизированы следующим образом: к одному типу относятся задания, имеющие равные значения длительностей их выполнения на приборах КС и длительностей переналадки приборов на реализацию действий с ними. Повышение эффективности выполнения заданий разных типов в КС связано с формированием пакетов. Под пакетом заданий (ПЗ) подразумевается совокупность заданий одного типа, реализация действий с которыми на приборах КС не связана с их переналадкой. Автором предложен метод многоуровневой оптимизации, позволивший реализовать в составе иерархической системы решение задач: 1) оптимизации расписаний многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС [1] посредством поиска локально оптимальных решений по их составам на верхнем уровне и поиска локально оптимальных решений по порядкам их выполнения на приборах на нижнем уровне; 2) оптимизации расписаний многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при формировании комплектов из результатов [2 – 3] посредством поиска локально оптимальных решений по составам ПЗ и по порядкам реализации действий с ними на приборах на соответствующих уровнях иерархии; 3) оптимизации расписаний процессов выполнения ПЗ в КС при задании ограничения на длительности интервалов времени их функционирования [4] посредством поиска локально оптимальных решений по: составам ПЗ на первом уровне, составам групп пакетов, выполняемых в течение интервалов времени функционирования КС ограниченной длительности, на втором уровне, порядкам выполнения пакетов из групп на приборах на нижнем (третьем) уровне.

Развитие иерархического подхода связано с решением задачи оптимизации расписаний многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при задании ограничения на другой вид ресурсов, используемых при реализации действий с пакетами в КС – размеров буферов, находящихся между обрабатываемыми приборами. В них размещаются задания, входящие в пакеты, после завершения каждой стадии многостадийных процессов реализации действий с ними на приборах КС.

С использованием иерархического подхода решение задачи оптимизации расписаний многостадийных процессов выполнения ПЗ в

КС при ограничении на размеры промежуточных буферов осуществляется путем оптимизации решений по составам пакетов на верхнем уровне и оптимизации расписаний реализации действий с ними на приборах указанных систем на нижнем уровне. Оптимизация порядков реализации действий с заданиями на приборах КС осуществляется на основе математической модели многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при учете ограничения на размеры буферов. Задача разработки математической модели многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при ограниченных размерах промежуточных буферов в настоящее время не решена требуемым образом с точки зрения возможности ее использования при оптимизации составов пакетов и расписаний. В связи с этим разработка математической модели процессов выполнения ПЗ в КС при наличии между обрабатываемыми приборами буферов ограниченных размеров является актуальной.

Одной из первых работ по планированию процессов выполнения единичных заданий (ЕЗ) в системе Flow Shop (FS) при ограничении на размер b промежуточного буфера является работа [5]. В ней рассматривается задача построения расписаний выполнения ЕЗ в системе с двумя приборами и одним промежуточным буфером единичного размера. Доказывается, что задача является NP-трудной, а также исследуются свойства процесса выполнения заданий, связывающие моменты времени начала/окончания выполнения i -х заданий на первом приборе и $(i-b-1)$ -х заданий на втором приборе. В [6] введена в рассмотрение модель процесса выполнения ЕЗ на приборах КС при ограниченных в b единиц размерах буферов, позволяющая формировать моменты времени начала реализации действий с i -ми заданиями на l -х приборах, учитывающая моменты времени окончания выполнения этих заданий на $(l-1)$ -х приборах, предшествующих им $(i-1)$ -х заданий на l -х приборах, а также моменты времени начала выполнения $(i-b-1)$ -х заданий на $(l+1)$ -х приборах. При этом способы вычисления моментов времени начала выполнения i -х заданий на первом и последнем приборах этой моделью не определяются. Использование предложенных в [6] эвристических правил позволяет формировать порядок выполнения ЕЗ на приборах КС с учетом промежуточных буферов ограниченных размеров. В работе [7] рассматривается система Flexible Flow Shop (FFS), представляющая собой последовательность из машин с параллельно функционирующими приборами (Batch Processing Machine (BPM)) и промежуточными буферами между ними. Приборы в BPM разной производительности. В связи с этим возникает задача выбора для каждого задания

обрабатывающего прибора, входящего в BPM, таким образом, чтобы минимизировать общее время реализации их выполнения. Разработана модель MILP (mixed-integer linear programming), в которой процессу выполнения ЕЗ на приборах КС при заданных размерах буферов соответствует система ограничений на множество допустимых решений. В [8] рассматривается обрабатывающая система, представляющая собой последовательность BPM и промежуточных буферов между ними. Постановка задачи интерпретирует рассматриваемую систему как FFS, что предусматривает выбор в каждой BPM приборов, реализующих выполнение ЕЗ. Для оптимизации маршрутов выполнения ЕЗ в FFS и расписаний проведения действий с ними на приборах разработан алгоритм имитации поведения стаи китов (Whale Optimization Algorithm (WOA)), для реализации которого разработана математическая модель рассматриваемого процесса в системе указанного типа. В [9] для решения рассматриваемой задачи оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в КС применены метаэвристические алгоритмы (в частности, алгоритм оценки распределения – Estimation of Distribution Algorithm (EDA)). При этом используется математическая модель определения моментов времени начала выполнения каждого i -го ЕЗ на l -х приборах КС ($l \neq 1$, $l \neq L$, где L – идентификатор последнего прибора в КС), аналогичная [6]. Построению модели MILP оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системах FS на примере металлургического производства посвящена работа [10]. Наличие в системе буферов ограниченных размеров учитывается в ограничениях разработанной модели MILP. Для понижения вычислительной сложности задачи в [10] реализуется релаксация ограничений модели MILP. Рассматриваемая в [11] система выполнения ЕЗ представляет собой последовательность из одной BPM и одной Job Processing Machine (JPM), в которой задания из пакетов выполняются последовательно. Размер промежуточного буфера кратен количеству приборов в BPM. Для оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в КС в [11] введена модель MILP, в которой наличие промежуточного буфера ограниченного размера и заданная конфигурация системы (в виде последовательности BPM и JPM) определяются видом ограничений на множество допустимых решений. В [12] рассматривается задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в КС, состоящей из двух приборов и цифрового промежуточного буфера между ними. Первый прибор обеспечивает получение файла для воспроизведения и размещение его в буфере, второй – воспроизведение файла. В [12] сопоставляется длительность выполнения i -й работы по получению файла и его объем (единица объема данных загружается в единицу времени). В выражениях для расчета моментов времени начала

выполнения заданий по получению файла его объем интерпретируется как длительность закачки. Аналогично интерпретируется и размер буфера – максимальное количество данных в буфере сопоставляется с длительностью интервала их получения. Также размер данных в буфере интерпретируется как длительность интервала времени воспроизведения находящегося в нем файла. В силу указанных особенностей введенная в [12] модель имеет ограничения на ее использование, вытекающее из особенностей интерпретации входных параметров. Рассматриваемая в [13] система представляет собой две параллельно функционирующие системы Flow Shop с общими рабочими станциями и промежуточными буферами ограниченного размера между приборами. Для оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системе указанного вида разработана модель MILP, учитывающая наличие единичных промежуточных буферов между приборами в параллельных потоках выполнения заданий и общих рабочих станций, которые разделяются между заданиями. Оптимизация расписаний реализуется с использованием модифицированного алгоритма NEH (авторы алгоритма Nawaz, Enscore, Nam – NEH). Задача, рассматриваемая в [14], аналогична задаче с промежуточным буфером ограниченного размера. В ней буфер является выходным и интерпретируется как склад готовой продукции. Обработка заданий может приводить к заполнению склада, продукция из которого извлекается в директивные сроки, что приводит к блокированию обрабатывающего прибора. С целью решения указанной задачи синтезирована модель MILP с нелинейными ограничениями. В качестве целевой функции выступают суммарные штрафы за хранение продукции на складе и за нарушение директивных сроков. В [15] рассматривается система FS гибридного типа с повторной обработкой на приборах и буферами ограниченных размеров (задания повторно выполняются на одном и том же приборе в соответствии с технологическими маршрутами). Сформирована оптимизационная модель построения расписаний, в которой целевая функция имеет вид взвешенного аддитивного критерия, учитывающего время окончания выполнения всех заданий в системе и среднее время выполнения заданий, а дополнительные условия определяют: 1) необходимость повторного направления заданий на приборы в соответствии с технологическими маршрутами; 2) запрет на прерывание выполнения задания на приборе; 3) ограничения на размеры промежуточных буферов. В [16] рассматривается задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в FS, содержащей 3 прибора, с нулевым буфером между приборами, ограниченным количеством ЕЗ (не более 9) и требованием минимизации блокирования предшествующих машин при

невозможности последующих машин приступить к выполнению заданий, действия с которыми завершены на предыдущем этапе. Представлены модели MILP, различающиеся способами вычисления момента времени окончания выполнения всех заданий в системе. Результаты, полученные с использованием указанных моделей, сравниваются с результатами, полученными с использованием жадного алгоритма, предложенного в работе. В [17] рассматривается задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в FS с двумя альтернативными маршрутами. Разработана модель процесса выполнения заданий в FS с отсутствующими операциями (операциями с нулевой длительностью). Для оптимизации решений разработан алгоритм дискретной китовой стаи (DWSA). Используется модель процесса выполнения заданий в FS, аналогичная моделям из [6, 9].

В [18] решается задача оптимизации расписаний в системах Flexible Job Shop (FJS) с промежуточными буферами ограниченных размеров при использовании сетей Петри в качестве моделей производственных процессов реализации действий с ЕЗ на приборах указанных систем. Оптимизация расписаний выполнения ЕЗ в системах FJS реализуется с использованием предложенного алгоритма Hybrid Estimation of Distribution Algorithm (HEDA), который воспроизводит новую популяцию потомков (новую совокупность решений) на основе вероятностных моделей. Предложенный в [18] алгоритм HEDA реализует локальную оптимизацию расписаний выполнения ЕЗ в системах FJS посредством формирования новых решений на основе вероятностных моделей. Формируемые с использованием HEDA решения интерпретируются с помощью предложенного в [18] подхода на основе сетей Петри.

В [19] задача оптимизации расписаний процессов выполнения ЕЗ в системах FFS с промежуточными буферами ограниченных размеров решается с использованием многоцелевого алгоритма имитации отжига (Multi Objective Simulated Annealing – MOSA) и многоцелевого эволюционного алгоритма, основывающегося на декомпозиции (Multi Objective Evolutionary Algorithm Based on Decomposition – MOEA/D). В качестве критериев заданы: 1) взвешенное время окончания выполнения заданий; 2) штраф за время ожидания заданиями в буфере и стоимость производства. В модели введены бюджетные ограничения на техническое обслуживание и приостановку работ. Применение алгоритма MOEA/D для решения рассматриваемой проблемы предполагает разложение многоцелевой задачи на ряд одноцелевых задач с помощью скалярной функции и введения весовых векторов.

Использование метода MOEA/D при решении задач оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системах Hybrid Flow Shop (HFS–аналог FFS) рассмотрено в [20]. В качестве критериев введены: 1) энергопотребление процесса выполнения ЕЗ в HFS в соответствии с расписанием; 2) суммарное время запаздывания относительно задаваемых для ЕЗ директивных сроков. В [20] буферы рассматриваются как машины с нулевым временем обработки – этапы буферизации интерпретируются как этапы обработки с нулевой длительностью.

В [21] задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системах FS решается с использованием алгоритма Hybrid Shuffled Frog Leaping Algorithm – HSFLA, сочетающего в себе поиск по переменным окрестностям (Variable Neighborhood Search – VNS) и алгоритм «прыжок лягушки» (Shuffled Frog Leaping Algorithm – SFLA). Оптимизация расписаний предусматривает генерацию начальной совокупности решений с использованием алгоритма NEH и их оптимизацию посредством HSFLA. С целью исключения преждевременной сходимости алгоритма введен адаптивный оператор перемещения для улучшения размера шага, оператор пересечения для обновления подгрупп решений, а также используются три вида окрестностей.

В [22] рассматривается трех стадийная система, в которой на первом этапе реализуется производство деталей на параллельно функционирующих приборах, на втором этапе реализуется сборка на одном приборе из обработанных деталей готовых изделий, на третьем этапе в соответствии с типом изделий реализуется дифференциация их обработки на параллельных приборах. Предложенный в [22] Dual-Space Co-Evolutionary Memetic algorithm (DCMA) является разновидностью алгоритмов степенной эволюции (метаэвристический алгоритм), предусматривает поиск лучших расписаний как в непрерывном пространстве, так и в дискретном пространстве решений.

В [23] определение расписаний выполнения ЕЗ в системах FFS осуществляется путем построения бинарных деревьев выбора решений, реализующих определенные правила по формированию последовательностей их (заданий) выполнения на приборах указанных систем. Алгоритм построения деревьев предусматривает использование обучающих примеров – решений, полученных с использованием программирования в ограничениях. Дерево позволяет реализовать выбор с точки зрения анализа текущих ситуаций (состояний системы), соответствующих решениям, сформированным с использованием программирования в ограничениях. Формирование нескольких деревьев

позволяет идентифицировать лучший способ выполнения заданий в FFS.

В [24] рассмотрена система FFS выполнения ЕЗ с индивидуальными буферами для каждого прибора и общедоступным буфером ограниченного размера. В общедоступный буфер задания перемещаются в случае заполнения индивидуальных буферов соответствующих приборов и извлекаются из него при освобождении позиций в индивидуальных буферах. Для оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системах указанного вида применены нейронные сети Хопфильда, использующие для расширения пространства поиска алгоритм имитации отжига. В дополнении к правилам использования индивидуальных и общего буферов в модели и алгоритме оптимизации учтены правила управления транспортными устройствами, перемещающими детали между накопителями. Количество итераций оптимизации решений с использованием нейронных сетей Хопфильда является ограниченным.

В [25] решается задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системе FS с BPM в качестве обрабатывающих устройств, промежуточными буферами ограниченного размера между ними, при профилактическом обслуживании (ПО) приборов в BPM. Особенностью является стохастический характер задачи, связанный с исправностью отдельных приборов BPM, в целом BPM, а также с доступностью всей системы. С учетом статистических характеристик процесса функционирования приборов в BPM оптимизируются расписания выполнения ЕЗ и периодичность операций ПО при учете ограничений на доступность приборов системы с точки зрения работоспособности. В [26] рассмотрена задача оптимизации расписаний выполнения ЕЗ в системах FS с BPM и буферами при наличии транспортеров, которые размещают задания в накопителях при окончании их выполнения на приборах и перемещают задания из накопителей на последующие приборы в случае их готовности. При этом реализуется ПО транспортеров. Синтезирована двухкритериальная модель оптимизации решений по назначению заданий на приборы BPM, порядкам выполнения заданий на приборах, выбору операций ПО транспортеров и периодичности реализации ПО. Статистические характеристики процесса функционирования транспортеров, связанные с отказом и восстановлением, учитываются при определении уровня недоступности системы в критерии и в ограничениях. Рассмотренные работы [5 – 26] ориентированы на оптимизацию расписаний выполнения ЕЗ в системах FS, FFS, FJS при ограниченных размерах буферов. Методы, в них изложенные, не позволяют решать задачу оптимизации составов пакетов

и расписаний их выполнения в КС при учете ограниченных ресурсов для их хранения.

Одной из первых работ, посвященных оптимизации расписаний выполнения пакетов заданий (ПЗ) в КС (Batch Scheduling Processing – BSP), состоящей из двух приборов, при введении между приборами промежуточного буфера ограниченного размера, является работа [27]. Доказывается, что задача BSP в указанной постановке является NP-трудной при размере буфера $b > 0$. Модель процесса выполнения пакетов позволяет вычислять интервал времени от начала выполнения заданий в каждом пакете на первом приборе до окончания выполнения заданий в пакете на этом же приборе. Критерий оптимизации расписаний имеет вид суммы интервалов времени выполнения всех пакетов в последовательности на первом приборе и дополнительного интервала времени обработки оставшихся заданий в последнем пакете на втором приборе. Введено понятие устойчивого состояния пакета, а также условий, при выполнении которых пакет переходит в устойчивое состояние. Определена нижняя граница количества заданий в пакетах, для которого пакет перейдет в указанное состояние, а сама задача BSP может быть проинтерпретирована как частный случай задачи коммивояжера, для решения которой используются полиномиальные алгоритмы. Аналогичным образом в работе [28] формулируется подход к решению задачи BSP для последовательности из двух приборов и промежуточного буфера ограниченного размера между ними. Работа [28] отличается от работы [27] способом вычисления интервала времени выполнения ПЗ на первом приборе. В [28] способ вычисления значения указанного интервала дополнительно учитывает время наладки первого прибора на выполнение заданий в пакете, а также время удаления заданий из системы после окончания их выполнения на первом приборе. Вид критерия оптимизации расписаний выполнения ПЗ в КС, введенный в [28], аналогичен работе [27]. Аналогичны условия устойчивого состояния ПЗ и условия, определяющие возможность интерпретации рассматриваемой задачи BSP как частного случая задачи коммивояжера с целью применения полиномиальных алгоритмов.

В [29] также рассматривается система потокового типа, состоящая из двух приборов с одним промежуточными буфером между ними. Модель многостадийного процесса строиться с учетом предположения, что расписание формируется только для двух ПЗ, выполняемых на приборах (два пакета размещаются в последовательностях реализации действий с ними на двух приборах). Составы пакетов являются заданными и не оптимизируются (задача

оптимизации расписаний выполнения двух фиксированных ПЗ в двух приборной системе потокового типа с буфером ограниченного размера). Предложенная модель обеспечивает определение интервалов времени, затрачиваемых на выполнение каждого из пакетов на приборах КС (между моментом времени начала настройки первого прибора на выполнение заданий в пакете и моментом времени удаления пакета со второй машины).

Рассмотренные в [27–29] способы вычисления интервалов времени выполнения ПЗ могут быть использованы только в двух приборных КС. В тоже время эти способы не позволяют определять моменты времени начала выполнения отдельных заданий, включенных в пакеты, на соответствующих приборах и моменты времени начала/окончания использования ограниченных ресурсов хранения. Это делает невозможным формирование критериев, позволяющих определять эффективность использования ограниченных ресурсов хранения заданий. В силу сказанного использование представленных в [27–29] подходов не позволяет решать задачу оптимизации составов ПЗ и расписаний их выполнения в КС. По этой причине разработка новых моделей процессов выполнения ПЗ на приборах КС при наличии промежуточных буферов ограниченного размера является актуальной.

2. Математическая модель многостадийных процессов выполнения пакетов заданий в конвейерных системах при задании ограничения на размеры промежуточных буферов.

Постановка задачи предполагает, что в КС выполняются наборы однотипных заданий (количество типов заданий равно N). Переход от выполнения заданий одного типа к выполнению заданий другого типа требует переналадки приборов КС. Для повышения эффективности использования ресурсов приборов КС, а также уменьшения длительности выполнения всех заданий, входящих в наборы, формируются пакеты. Выполнение однотипных заданий, входящих в пакеты, осуществляется без переналадки приборов КС на реализацию действий с ними. Особенностью КС является наличие буферов между обрабатываемыми приборами, в каждый из которых задания поступают после окончания реализации действий с ними на предшествующих им приборах. При этом размеры буферов являются ограниченными. В том случае, если в буфере находится количество заданий, равное его размеру, то выполнение заданий на предшествующем приборе прекращается (прибор блокируется). Предшествующий буферу обрабатывающий прибор блокируется до тех пор, пока следующий за буфером прибор не начнет выполнение задания из буфера. Таким образом, в КС реализуется выполнение ПЗ

разных типов, между обрабатываемыми приборами имеются буферы ограниченных размеров, выполнение заданий, входящих в пакеты, на обрабатываемых приборах, предшествующих буферам, блокируется в случае их заполнения до тех пор, пока следующий за буфером прибор не начнет выполнения задания из буфера.

В работе реализуется синтез математических моделей процессов выполнения ПЗ в КС при ограничении на размеры промежуточных буферов для следующих задач: 1) двух приборная задача с одним промежуточным буфером; 2) трех приборная задача с двумя промежуточными буферами; 3) обобщенная задача моделирования процессов выполнения ПЗ в КС, содержащих L приборов и $(L-1)$ промежуточный буфер. Построение математической модели процессов выполнения ПЗ в КС обеспечивается введением обозначений: N – количество типов заданий, пакеты которых выполняются в КС; i – идентификатор типа заданий, пакеты которых выполняются в КС ($i = \overline{1, N}$); l – идентификаторы приборов КС ($l = \overline{1, L}$); π^l – последовательности выполнения ПЗ на l -х приборах КС, соответствующие порядкам реализации действий с ними; $\mathbf{M} = (m_1, m_2, \dots, m_N)^T$ – вектор количества ПЗ i -ых типов ($i = \overline{1, N}$); N_p –

количество ПЗ, размещаемых в последовательностях π^l ($N_p = \sum_{i=1}^N m_i$);

$\mathbf{T} = \|t_{il}\|_{L \times N}$ – матрица длительностей выполнения заданий разных типов

на приборах КС; $\mathbf{T}^l = \|t_{il}^l\|_{N \times N}$ ($l = \overline{1, L}$) – матрицы длительностей переналадок l -х приборов с выполнения заданий i -х на выполнение заданий i^l -х типов ($t_{ii}^l = 0$); j – номера позиций, которые занимают ПЗ в

последовательностях π^l ($l = \overline{1, L}$); $\mathbf{P} = \|p_{ij}\|_{N \times N_p}$ – матрица порядка

выполнения ПЗ в последовательностях π^l ($p_{ij} = 1$, если ПЗ i -го типа занимает в π^l j -ю позицию; $p_{ij} = 0$, если ПЗ i -го типа не занимает

π^l КС j -ю позицию); $\mathbf{R} = \|r_{ij}\|_{N \times N_p}$ – матрица количества заданий i -х

типов в пакетах, занимающих в π^l j -е позиции; N_j – количество

заданий в пакетах, занимающих в π^l j -е позиции ($N_j = \sum_{h=1}^N r_{hj}$;

$j = \overline{1, N_p}$); $\mathbf{T}^{0l} = \|t_{jq}^{0l}\|_{N_p \times Q}$ – матрицы моментов времени начала

выполнения q -х заданий ($q = \overline{1, N_j}$), входящих в пакеты, занимающих j -е позиции в последовательностях π^l ($Q = \max_j(N_j)$); b – размер буферов.

В соответствии с введенными обозначениями постановка задачи математического моделирования многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при ограничении на размеры промежуточных буферов формулируется следующим образом. Заданными являются: вектор \mathbf{M} количества ПЗ i -х типов ($i = \overline{1, N}$); матрица \mathbf{T} длительностей выполнения заданий на приборах КС; матрицы \mathbf{T}^l ($l = \overline{1, L}$) длительностей переналадок l -х приборов; матрица \mathbf{P} порядка выполнения ПЗ в π^l ; матрица \mathbf{R} количества заданий i -х типов в пакетах, занимающих в π^l j -е позиции; размеры b промежуточных буферов. Требуется определить значения элементов t_{jq}^{ol} ($j = \overline{1, N_p}$; $q = \overline{1, N_j}$; $l = \overline{1, L}$) матриц \mathbf{T}^{ol} моментов времени начала выполнения заданий в пакетах, занимающих j -е позиции в последовательностях π^l ($l = \overline{1, L}$).

Для задачи с двумя приборами и промежуточным буфером между ними рассуждения с целью построения математической модели многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС реализуются в соответствии с заданными видами последовательностей, представленными на рисунке 1. Рассматривается задача моделирования выполнения двух ПЗ, занимающих в последовательностях π^l ($l = \overline{1, 2}$) соответственно ($j=1$)-ю и ($j=2$)-ю позиции. Типы заданий в пакетах, занимающих в π^l указанные позиции, обозначены как i_1 и i_2 . Виды последовательностей и соответствующие им выражения модели формируются с учетом значений параметров t_{li} ($l = \overline{1, 2}$) для заданий в пакетах занимающих j -х позиции в π^l (i_1 -го и i_2 -го типов). Рассматриваются виды последовательностей и формируются выражения модели для следующих соотношений указанных параметров: 1) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$; 2) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}$, $t_{1i_2} > t_{2i_2}$; 3) $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$; 4) $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} > t_{2i_2}$. Количество заданий в пакете равно 5 ($N_1 = 5$, $N_2 = 5$), размер буфера b равен 3 ($b=3$). При $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$ (рисунок 1(а)) задание с $q=1$ в пакете в ($j=1$)-й позиции в π^1 после выполнения на ($l=1$)-м приборе перемещается в буфер, а затем из буфера перемещается на обработку на ($l=2$)-м приборе. Следующие b заданий после обработки на ($l=1$)-м

приборе размещаются в буфере (заполнение буфера) и $(l=1)$ -й прибор блокируется в ожидании освобождения позиции в буфере. В момент времени $t_{12}^{02} = t_{11}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1}$ задание с $q=2$ в пакете в $(j=1)$ -й позиции в π^1 поступает для выполнения на $(l=2)$ -й прибор (позиция в буфере освобождается) и $(l=1)$ -й прибор приступает к выполнению задания с $q=5$ (тогда $t_{15}^{01} = t_{12}^{02}$). Аналогичные рассуждения строятся для всех заданий с q , удовлетворяющих условию: $b+1 < q \leq N_1$. С учетом выполненных рассуждений выражения для определения значений t_{1q}^{01} ($q = \overline{1, N_1}$) для $(j=1)$ -го пакета на $(l=1)$ -м приборе получены в виде:

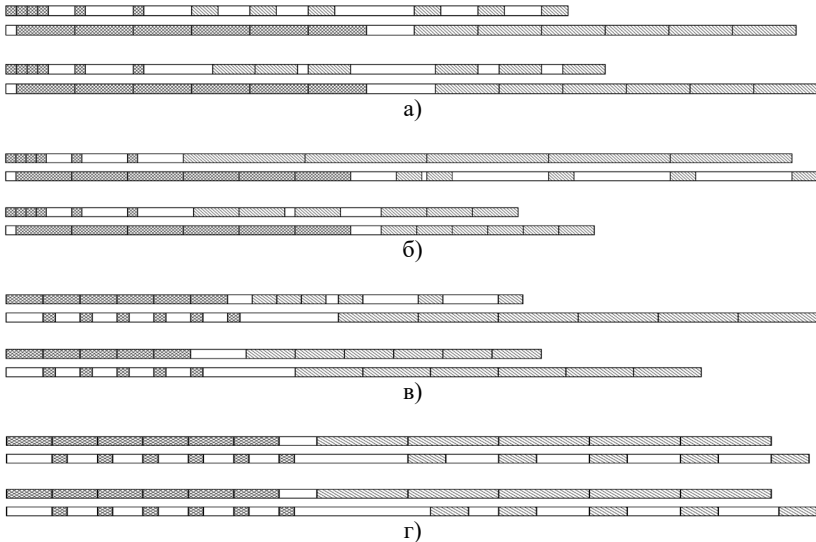


Рис. 1. Вид последовательностей реализации действий с ПЗ, используемых при построении математической модели многостадийных процессов их выполнения в КС, состоящей из двух приборов, при:

а) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}, t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$; б) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}, t_{1i_2} > t_{2i_2}$; в) $t_{1i_1} > t_{2i_1}, t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$;

г) $t_{1i_1} > t_{2i_1}, t_{1i_2} > t_{2i_2}$

$$q=l: t_{11}^{0l} = 0, \tag{1}$$

$$1 < q \leq b+1 : t_{1q}^{01} = t_{1,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot P_{s1}, \quad (2)$$

$$b+1 < q \leq N_1 : t_{1q}^{01} = t_{1,(q-b)}^{02}, \quad (3)$$

где $(q-b)$ – идентификатор задания в $(j=1)$ -м ПЗ на $(l=2)$ -м приборе.

Для q -х заданий ($q = \overline{2, N_1}$) в $(j=1)$ -м пакете в π^2 на $(l=2)$ -м приборе моменты времени начала их выполнения равны моментам времени окончания реализации действий на этом приборе с предшествующими им заданиями (рисунок 1(а)), тогда значения t_{1q}^{02} ($q = \overline{1, N_1}$) вычисляются в соответствии с выражениями вида:

$$q=1 : t_{11}^{02} = t_{11}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot P_{s1}, \quad (4)$$

$$1 < q \leq N_1 : t_{1q}^{02} = t_{1,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot P_{s1}. \quad (5)$$

При $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$ (рисунок 1(а)) $(l=1)$ -й прибор приступает в выполнении $(q=1)$ -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 в случае начала выполнения $(q=4)$ -го ($(N_1 - b + 1)$ -го) задания из пакета в $(j=1)$ -й позиции на $(l=2)$ -м приборе либо при условии окончания переналадки $(l=1)$ -го прибора на выполнение заданий i_2 -го типа (в этом пакете). Аналогично, $(l=1)$ -й прибор может приступить в выполнении q -х заданий ($1 < q \leq b$) в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 в случае начала выполнения $(N_1 - b + q)$ -го задания из пакета в $(j=1)$ -й позиции на $(l=2)$ -м приборе либо при окончании выполнения $(q-1)$ -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 (окончания выполнения задания в $(j=2)$ -м пакете, предшествующего рассматриваемому q -му заданию из этого же пакета). Также, $(l=1)$ -й прибор может приступить к выполнению q -х заданий ($b+1 \leq q \leq N_2$) в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 в случае начала выполнения $(q-b)$ -го задания из пакета в $(j=2)$ -й позиции на $(l=2)$ -м приборе. Тогда выражения для вычисления значений t_{2q}^{01} ($q = \overline{1, N_2}$) для q -х заданий из $(j=2)$ -го пакета на $(l=1)$ -м приборе имеют следующий вид:

$$q=1: t_{21}^{01} = \max \left\{ t_{1,N_1}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1} + t_{i_1, i_2}^1; t_{1, (N_1 - b + 1)}^{02} \right\}, \quad (6)$$

$$1 < q \leq b: t_{2q}^{01} = \max \left\{ t_{2, (q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{1, (N_1 - b + q)}^{02} \right\}, \quad (7)$$

$$b + 1 \leq q \leq N_2: t_{2q}^{01} = t_{2, (q-b)}^{02}. \quad (8)$$

Для q -х заданий из ($j=2$)-го пакета в последовательности π^2 на ($l=2$)-м приборе значения t_{2q}^{02} ($q = \overline{1, N_2}$) определяются в соответствии с выражениями вида (рисунок 1(a)):

$$q=1: t_{21}^{02} = t_{1, N_1}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} + t_{i_1, i_2}^2, \quad (9)$$

$$1 < q \leq N_2: t_{2q}^{02} = t_{2, (q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2}. \quad (10)$$

Выражение (9) позволяет идентифицировать момент времени окончания переналадки ($l=2$)-го прибора на выполнение заданий i_2 -го типа, выражение (10) – момент времени окончания выполнения предшествующего ($q-1$)-го задания в ($j=2$)-м пакете в π^2 .

При $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}$, $t_{1i_2} > t_{2i_2}$ (рисунок 1(б)) выражения для вычисления значений t_{1q}^{01} и t_{1q}^{02} для q -х заданий ($q = \overline{1, N_1}$), входящих в пакет в ($j=1$)-й позиции в π^1 ($l = \overline{1, 2}$), аналогичны выражениям (1)–(3), (4), (5). Выражения для вычисления значений t_{2q}^{01} для q -х заданий ($1 \leq q \leq b$), входящих в пакет в ($j=2$)-й позиции в π^1 на ($l=1$)-м приборе аналогичны выражениям (6), (7). Для q -х заданий ($b + 1 \leq q \leq N_2$), входящих в пакет в ($j=2$)-й позиции в π^1 на ($l=1$)-м приборе, выражение для вычисления t_{2q}^{01} имеет вид $t_{2q}^{01} = t_{2, (q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}$. Выражение для вычисления t_{21}^{02} аналогично выражению (9), а выражение для вычисления t_{2q}^{02} ($1 < q \leq N_2$) имеет вид:

$$t_{2q}^{02} = \max \left\{ t_{2,q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{2,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2} \right\}. \quad (11)$$

При $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$ (рисунок 1(в)) выражения для вычисления значений t_{1q}^{01} для q -х заданий ($q = 1, 1 < q \leq b+1$), входящих в пакет в ($j=1$)-й позиции в π^1 , аналогичны выражениям (1), (2) соответственно, выражение для вычисления значений t_{1q}^{01} ($b+1 < q \leq N_1$) аналогично выражению (2). Для q -х заданий ($q = 1, N_1$) в ($j=1$)-м пакете в π^2 на ($l=2$)-м приборе выражения для определения значений t_{1q}^{02} имеют вид:

$$t_{1q}^{02} = t_{1q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}. \quad (12)$$

При $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$ (рисунок 1(в)) выражение для вычисления значения t_{21}^{01} для ($q=1$)-го задания, входящего в пакет в ($j=2$)-й позиции в π^1 имеет вид:

$$t_{21}^{01} = t_{1,N_1}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1} + t_{i_1,i_2}^j. \quad (13)$$

Выражение для вычисления значений t_{2q}^{01} для q -х заданий ($1 < q \leq b+1$), входящих в этот же пакет, получено в виде:

$$t_{2q}^{01} = t_{2,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}, \quad (14)$$

а выражение для вычисления значений t_{2q}^{01} для q -х заданий ($b+1 < q \leq N_2$) в этом же пакете имеет вид:

$$t_{2q}^{01} = \max \left\{ t_{2,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{2,(q-b)}^{02} \right\}. \quad (15)$$

Также при $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} \leq t_{2i_2}$ выражение для вычисления значения t_{21}^{02} для $(q=1)$ -го задания, входящего в пакет в $(j=2)$ -й позиции в π^2 , получено в виде (рисунок 1(в)):

$$t_{21}^{02} = \max \left\{ t_{21}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2} \cdot t_{1,N_1}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} + t_{i_1, i_2}^2 \right\}, \quad (16)$$

а выражение для вычисления значений t_{2q}^{02} для q -х заданий $(1 < q \leq N_2)$, входящих в этот же пакет, аналогично выражению (11).

При $t_{1i_1} > t_{2i_1}$, $t_{1i_2} > t_{2i_2}$ (рисунок 1(г)) выражение для определения значения t_{11}^{01} для $(q=1)$ -го задания в пакете в $(j=1)$ -й позиции в π^1 аналогично выражению (1), выражение для вычисления значений t_{1q}^{01} для q -х заданий в этом же пакете $(1 < q \leq N_1)$ аналогично выражению (2). Выражения для вычисления t_{1q}^{02} для $(q=1)$ -го задания и q -х заданий $(1 < q \leq N_1)$, входящих в $(j=1)$ -й пакет в π^2 на $(l=2)$ -м приборе аналогичны (12). Выражение для определения значения t_{21}^{01} для $(q=1)$ -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 аналогично (13), а выражение для вычисления значений t_{2q}^{01} для q -х заданий в этом же пакете $(1 < q \leq N_2)$ на $(l=1)$ -м приборе аналогично (14). Выражение для вычисления значения t_{21}^{02} для $(q=1)$ -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^2 на $(l=2)$ -м приборе аналогично выражению (16), а выражение для вычисления значений t_{2q}^{02} для q -х заданий в этом же пакете $(1 < q \leq N_2)$ на $(l=2)$ -м приборе аналогично (10).

Обобщение полученных выражений при $N_p \geq 2$ позволило сформировать математическую модель многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС, состоящей из двух приборов, при ограниченном размере b буфера в следующем виде (выражения для вычисления значений t_{jq}^{0l} для q -х заданий $(q = \overline{1, N_j})$, входящих в пакеты, занимающие j -е позиции $(j = \overline{1, N_p})$ в последовательностях π^l их выполнения на l -х приборах $(l = \overline{1, 2})$):

1) выражения для вычисления значений t_{1q}^{01} ($q = \overline{1, N_1}$) для ПЗ в $(j=1)$ -й позиции в последовательности π^1 :

$$q=1: t_{11}^{01} = 0, \quad (17)$$

$$1 < q \leq b+1: t_{1q}^{01} = t_{1,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}, \quad (18)$$

$$b+1 < q \leq N_1: t_{1q}^{01} = \max \left\{ t_{1,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-b)}^{02} \right\}; \quad (19)$$

2) выражения для вычисления значений t_{1q}^{02} ($q = \overline{1, N_1}$) для ПЗ в $(j=1)$ -й позиции в последовательности π^2 :

$$q=1: t_{11}^{02} = t_{11}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}, \quad (20)$$

$$1 < q \leq N_1: t_{1q}^{02} = \max \left\{ t_{1q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} \right\}; \quad (21)$$

3) выражения для вычисления значений t_{jq}^{01} ($q = \overline{1, N_j}$) для ПЗ в j -х позициях ($j = \overline{2, N_p}$; $N_p \geq 2$) в последовательности π^1 :

$$q=1: t_{j1}^{01} = \max \left\{ t_{(j-1), N_{j-1}}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s, j-1} + t_{j-1, i_j}^l; t_{(j-1), (N_{j-1}-b+1)}^{02} \right\}, \quad (22)$$

$$1 < q \leq b: t_{jq}^{01} = \max \left\{ t_{j,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{sj}; t_{(j-1), (N_{j-1}-b+q)}^{02} \right\}, \quad (23)$$

$$b+1 \leq q \leq N_2: t_{jq}^{01} = \max \left\{ t_{j,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-b)}^{02} \right\}; \quad (24)$$

4) выражения для вычисления значений t_{jq}^{02} для ПЗ в j -х позициях ($j = \overline{2, N_p}$; $N_p \geq 2$) в последовательности π^2 :

$$q=l: t_{j1}^{02} = \max \left\{ t_{j1}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{sj}; t_{(j-1),N_{j-1}}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s,(j-1)} + t_{i_{j-1},i_j}^2 \right\}, \quad (25)$$

$$1 < q \leq N_2: t_{jq}^{02} = \max \left\{ t_{jq}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s,j} \right\}. \quad (26)$$

Выражения (17) – (26) являются математической моделью в общем виде многостадийных процессов выполнения ПЗ в двух приборной КС при наличии промежуточного буфера ограниченного размера b и количестве пакетов $N_p \geq 2$ в последовательностях π^l ($l = \overline{1,2}$).

Рассмотренный подход использован при построении математической модели многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС, содержащей три прибора, которая затем обобщена для произвольного количества приборов. Построение математической модели многостадийных процессов выполнено при условиях: $L=3$; $b=3$; $N_p = 2$; $N_j = 8$ ($j = \overline{1,2}$). Синтез выражений математической модели реализован с использованием заданных видов последовательностей π^l ($l = \overline{1,3}$) выполнения ПЗ в КС, представленных на рисунке 2 ((а) и (б)), которые различаются значениями t_{i_1,i_2}^1). Выражения математической модели процессов выполнения ПЗ в КС получены в следующем виде:

1) выражения для вычисления значений t_{1q}^{01} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в пакете в ($j=1$)-й позиции в последовательности π^1 :

$$- \quad q=l: t_{11}^{01} = 0, \quad (27)$$

- $1 < q \leq b+1$ (реализуется заполнение буфера между первым и вторым приборами при условии, что ($q=1$)-е задание в ($j=1$)-м пакете после окончания выполнения на ($l=1$)-м приборе начинает выполнение на ($l=2$)-м приборе, рисунок 2(а, б, в)):

$$t_{1q}^{01} = t_{1,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}, \quad (28)$$

- $b+1 < q \leq N_1$ (выполнение q -го задания начинается либо в момент времени окончания действий с предшествующим ему ($q-1$)-м

заданием в этом пакете, либо в момент времени освобождения позиции в буфере, связанного с началом выполнения $(q-b)$ -го задания из этого же пакета на $(l=2)$ -м приборе, рисунок 2(а, б, в)):

$$t_{1q}^{0l} = \max \{ t_{1,(q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-b)}^{02} \}; \quad (29)$$

2) выражения для вычисления значений t_{1q}^{02} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в пакете в $(j=1)$ -й позиции в последовательности π^2 :

$$- \quad q=1: t_{11}^{02} = t_{11}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}, \quad (30)$$

- $1 < q \leq b+1$ (заполнение буфера между вторым и третьим приборами при условии, что $(q=1)$ -е задание в $(j=1)$ -м пакете после окончания выполнения на $(l=2)$ -м приборе начинает выполнение на $(l=3)$ -м приборе, рисунок 2 (а, в)):

$$t_{1q}^{02} = \max \{ t_{1q}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} \}, \quad (31)$$

- $b+1 < q \leq N_1$ (выполнения q -го задания начинается либо в момент времени окончания его выполнения на $(l=1)$ -м приборе, либо в момент времени окончания выполнения $(q-1)$ -го задания в этом пакете на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени освобождения позиции в буфере между $(l=2)$ -м и $(l=3)$ -м приборами, рисунок 2(а, в, г, д)):

$$t_{1q}^{02} = \max \{ t_{1q}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-b)}^{03} \}; \quad (32)$$

3) выражения для вычисления значений t_{1q}^{03} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в пакете в $(j=1)$ -й позиции в последовательности π^3 :

$$- \quad q=1: t_{11}^{03} = t_{11}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} = \sum_{l=1}^2 \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{s1}, \quad (33)$$

– $1 < q \leq N_1$ (начало выполнения q -го задания возможно либо в момент времени окончания его выполнения на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени окончания выполнения $(q-1)$ -го задания в этом же пакете на $(l=3)$ -м приборе, рисунок 2(а, д)):

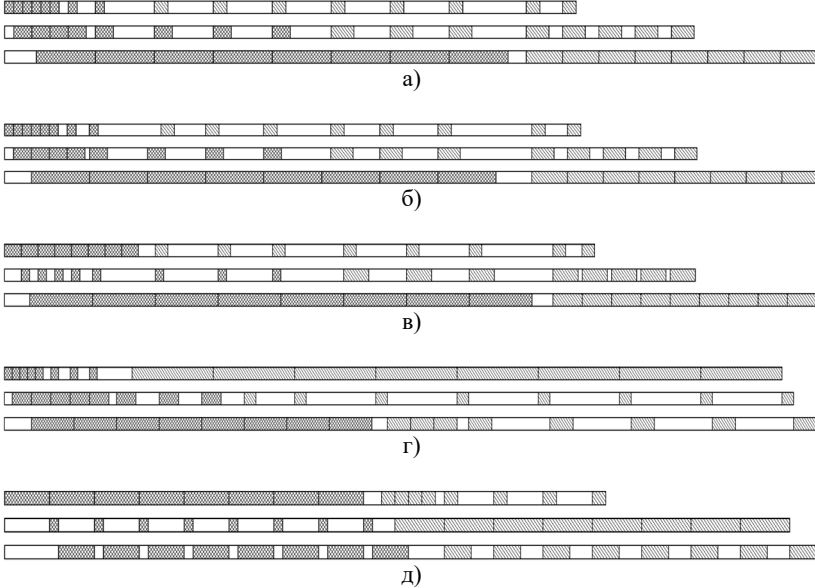


Рис. 2. Вид последовательностей реализации действий с ПЗ, используемых при построении математической модели многостадийных процессов их выполнения в КС, состоящей их трех приборов, при:

- а) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}, t_{2i_1} \leq t_{3i_1}, t_{1i_2} \leq t_{2i_2}, t_{2i_2} \leq t_{3i_2}$; б) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}, t_{2i_1} \leq t_{3i_1}, t_{1i_2} \leq t_{2i_2}, t_{2i_2} \leq t_{3i_2}$; в) $t_{1i_1} > t_{2i_1}, t_{2i_1} \leq t_{3i_1}, t_{1i_2} \leq t_{2i_2}, t_{2i_2} \leq t_{3i_2}$; г) $t_{1i_1} \leq t_{2i_1}, t_{2i_1} \leq t_{3i_1}, t_{1i_2} > t_{2i_2}, t_{2i_2} \leq t_{3i_2}$; д) $t_{1i_1} > t_{2i_1}, t_{2i_1} \leq t_{3i_1}, t_{1i_2} > t_{2i_2}, t_{2i_2} \leq t_{3i_2}$

$$t_{1q}^{03} = \max \left\{ t_{1q}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-1)}^{03} + \sum_{s=1}^N t_{3s} \cdot p_{s1} \right\}; \quad (34)$$

4) выражения для вычисления значений $t_{2q}^{01} (q = \overline{1, N_2})$ для q -х заданий в $(j=2)$ -м пакете в последовательности π^1 на $(l=1)$ -м приборе:

– $q=1$ (выполнение $(q=1)$ -го задания начинается в момент времени окончания переналадки $(l=1)$ -го прибора на выполнение

заданий i_2 -го типа в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 , либо в момент времени освобождения одной позиции в буфере между $(l=1)$ -м и $(l=2)$ -м приборами, вызванного началом выполнения $(N_1 - b + 1)$ -го задания из пакета в $(j=1)$ -й позиции на $(l=2)$ -м приборе, рисунок 2(а, б, г):

$$t_{21}^{01} = \max \left\{ t_{1,N_1}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1} + t_{i_1, i_2}^1; t_{1,(N_1-b+1)}^{02} \right\}, \quad (35)$$

– $1 < q \leq b$ (начало выполнения q -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 возможно в момент времени окончания выполнения предшествующего $(q-1)$ -го задания в этом же пакете, либо в момент времени освобождения позиции в буфере между $(l=1)$ -м и $(l=2)$ -м приборами, вызванного началом выполнения $(N_1 - b + q)$ -го задания из пакета в $(j=1)$ -й позиции на $(l=2)$ -м приборе, рисунок 2(а, г, д):

$$t_{2q}^{01} = \max \left\{ t_{2,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{1,(N_1-b+q)}^{02} \right\}, \quad (36)$$

– $b+1 \leq q \leq N_2$ (начало выполнения q -го задания в пакете в $(j=2)$ -й позиции в π^1 возможно в момент времени окончания выполнения предшествующего $(q-1)$ -го задания в этом же пакете, либо в момент времени освобождения одной позиции в буфере между $(l=1)$ -м и $(l=2)$ -м приборами, связанного с началом выполнения $(q-b)$ -го задания из этого же пакета на $(l=2)$ -м приборе, рисунок 2(а, г):

$$t_{2q}^{01} = \max \left\{ t_{2,(q-1)}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{2,(q-b)}^{02} \right\}; \quad (37)$$

5) выражения для вычисления значений $t_{2q}^{02} (q = \overline{1, N_2})$ для q -х заданий в пакете в $(j=2)$ -й позиции в последовательности π^2 :

– $q=1$ (выполнение $(q=1)$ -го задания начинается в момент времени окончания выполнения этого задания на $(l=1)$ -м приборе, либо в момент времени окончания переналадки $(l=2)$ -го прибора на выполнение заданий i_2 -го типа, либо в момент времени освобождения позиции в буфере между $(l=2)$ -м и $(l=3)$ -м приборами, связанном с

началом реализации действий с $(N_1 - b + 1)$ -м заданием из пакета в $(j=1)$ -й позиции в π^3 на $(l=3)$ -м приборе, рисунок 2 (а, б, д):

$$t_{21}^{02} = \max \left\{ t_{2q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{1,N_1}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s1} + t_{i_1, i_2}^2; t_{1, (N_1 - b + 1)}^{03} \right\}, \quad (38)$$

– $1 < q \leq b$ (выполнение q -го задания начинается в момент времени окончания выполнения этого же задания на $(l=1)$ -м приборе, либо в момент времени окончания выполнения предшествующего $(q-1)$ -го задания из этого же пакета на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени освобождения позиции в буфере между $(l=2)$ -м и $(l=3)$ -м приборами, связанном с началом реализации действий с $(N_1 - b + q)$ -м заданием из пакета в $(j=1)$ -й позиции в π^3 :

$$t_{2q}^{02} = \max \left\{ t_{2q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{2, (q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2}; t_{1, (N_1 - b + q)}^{03} \right\}, \quad (39)$$

– $b + 1 \leq q \leq N_2$ (выполнение q -го задания начинается в момент времени окончания выполнения этого же задания на $(l=1)$ -м приборе, либо в момент времени окончания выполнения предшествующего $(q-1)$ -го задания из этого же пакета на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени освобождения одной позиции в буфере между $(l=2)$ -м и $(l=3)$ -м приборами, связанном с началом реализации действий с $(q - b)$ -м заданием из этого же пакета в $(j=2)$ -й позиции в π^3 , рисунок 2 (а, г, д)):

$$t_{2q}^{02} = \max \left\{ t_{2q}^{01} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s2}; t_{2, (q-1)}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2}; t_{1, (q-b)}^{03} \right\}; \quad (40)$$

б) выражения для вычисления значений $t_{2q}^{03} (q = \overline{1, N_2})$ для q -х заданий в пакете в $(j=2)$ -й позиции в последовательности π^3 :

– $q=1$ (выполнение $(q=1)$ -го задания начинается в момент времени окончания выполнения этого же задания на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени окончания переналадки $(l=3)$ -го прибора на выполнение заданий i_2 -го типа, рисунок 2 (в, г, д)):

$$t_{21}^{03} = \max \left\{ t_{21}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2}; t_{1,N_1}^{03} + \sum_{s=1}^N t_{3s} \cdot p_{s1} + t_{h,i_2}^3 \right\}, \quad (41)$$

– $1 < q \leq N_2$ (выполнение q -го задания начинается в момент времени окончания выполнения этого задания на $(l=2)$ -м приборе, либо в момент времени окончания выполнения предшествующего $(q-1)$ -го задания из этого же пакета на $(l=3)$ -м приборе, рисунок 2 (а, г, д)):

$$t_{2q}^{03} = \max \left\{ t_{2q}^{02} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2}; t_{2,(q-1)}^{03} + \sum_{s=1}^N t_{2s} \cdot p_{s2} \right\}. \quad (42)$$

Выражения (27)–(42) представляют собой математическую модель многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС, содержащей три прибора с промежуточными буферами между ними размером b . На основе модели (27)–(42) синтезирована математическая модель многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС в общем виде (при произвольном количестве приборов L ($L \geq 3$), произвольном количестве пакетов $N_p \geq 2$ в последовательностях π^l ($l = \overline{1, L}$) их выполнения на приборах КС). Выражения математической модели в общем виде многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при количестве приборов $L \geq 3$, ограничении на размеры b буферов между приборами, произвольном количестве $N_p \geq 2$ ПЗ в последовательностях π^l ($l = \overline{1, L}$) их выполнения на приборах КС имеют следующий вид:

1) выражения для вычисления значений t_{1q}^{0l} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в пакете в $(j=l)$ -й позиции в последовательности π^l :

$$- \quad q=1: t_{11}^{0l} = 0, \quad (43)$$

$$- \quad 1 < q \leq b+1: t_{1q}^{0l} = t_{1,(q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}, \quad (44)$$

$$- \quad b+1 < q \leq N_1: t_{1q}^{0l} = \max \left\{ t_{1,(q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-b)}^{02} \right\}; \quad (45)$$

2) выражения для вычисления значений t_{jq}^{0l} ($q = \overline{1, N_j}$) для q -х заданий в пакете в j -х позициях ($j = \overline{2, N_p}$) в последовательности π^l на $(l=1)$ -м приборе:

– $q=1$:

$$t_{j1}^{0l} = \max \left\{ t_{(j-1), N_{j-1}}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s, (j-1)} + t_{i_{j-1}, i_j}^1; t_{(j-1), (N_{j-1}-b+1)}^{02} \right\}, \quad (46)$$

– $1 < q \leq b$:

$$t_{jq}^{0l} = \max \left\{ t_{j, (q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s, j}; t_{(j-1), (N_{j-1}-b+q)}^{02} \right\}, \quad (47)$$

– $b+1 \leq q \leq N_j$:

$$t_{jq}^{0l} = \max \left\{ t_{j, (q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{sj}; t_{j, (q-b)}^{02} \right\}; \quad (48)$$

3) выражения для вычисления значений t_{1q}^{0l} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в $(j=1)$ -м пакете в последовательностях π^l ($l = \overline{2, L-1}$):

– $q=1$:

$$t_{11}^{0l} = t_{11}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1), s} \cdot p_{s1}, \quad (49)$$

– $1 < q \leq b+1$:

$$t_{1q}^{0l} = \max \left\{ t_{1q}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1), s} \cdot p_{s1}; t_{1, (q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1} \right\}, \quad (50)$$

– $b+1 < q \leq N_1$:

$$t_{1q}^{0l} = \max \left\{ t_{1q}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1), s} \cdot p_{s1}; t_{1, (q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{1s} \cdot p_{s1}; t_{1, (q-b)}^{0l+1} \right\}; \quad (51)$$

4) выражения для вычисления значений t_{jq}^{0l} ($q = \overline{1, N_j}$) для q -х заданий в пакетах в j -х позициях ($j = \overline{2, N_p}$) в последовательностях π^l на l -х приборах ($l = \overline{2, L-1}$):

– $q=l$:

$$t_{j1}^{0l} = \max \left\{ t_{j1}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1),s} \cdot p_{sj}; t_{(j-1),N_{j-1}}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{s,(j-1)} + t_{l-1,j}^l; t_{(j-1),(N_{j-1}-b+1)}^{0l+1} \right\}, \quad (52)$$

– $1 < q \leq b$:

$$t_{jq}^{0l} = \max \left\{ t_{jq}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1),s} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{sj}; t_{(j-1),(N_{j-1}-b+q)}^{0l+1} \right\}, \quad (53)$$

– $b+1 \leq q \leq N_j$:

$$t_{jq}^{0l} = \max \left\{ t_{jq}^{0l-1} + \sum_{s=1}^N t_{(l-1),s} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-1)}^{0l} + \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-b)}^{0l+1} \right\}; \quad (54)$$

5) выражения для вычисления значений t_{1q}^{0L} ($q = \overline{1, N_1}$) для q -х заданий в пакете в ($j=1$)-й позиции в последовательности π^L на L -м приборе:

$$– \quad q=l: t_{11}^{0L} = t_{11}^{0L-1} + \sum_{s=1}^N t_{(L-1),s} \cdot p_{s1} = \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{s1}, \quad (55)$$

– $1 < q \leq N_1$:

$$t_{1q}^{0L} = \max \left\{ t_{1q}^{0L-1} + \sum_{s=1}^N t_{(L-1),s} \cdot p_{s1}; t_{1,(q-1)}^{0L} + \sum_{s=1}^N t_{ls} \cdot p_{s1} \right\}; \quad (56)$$

6) выражения для вычисления значений t_{jq}^{0L} ($q = \overline{1, N_j}$, $j = \overline{2, N_p}$) для q -х заданий в пакетах в j -х позициях в последовательности π^L):

– $q=l$:

$$t_{j1}^{0L} = \max \{ t_{jq}^{0L-1} + \sum_{s=1}^N t_{(L-1),s} \cdot p_{sj}; t_{(j-1),N_{j-1}}^{0L} + \sum_{s=1}^N t_{Ls} \cdot p_{s,(j-1)} + t_{i_{j-1},i_j}^L \}, \quad (57)$$

$$- \quad 1 < q \leq N_j :$$

$$t_{jq}^{0L} = \max \{ t_{jq}^{0L-1} + \sum_{s=1}^N t_{(L-1),s} \cdot p_{sj}; t_{j,(q-1)}^{0L} + \sum_{s=1}^N t_{Ls} \cdot p_{sl} \}. \quad (58)$$

Сформированные выражения (43) – (58) представляют собой математическую модель в общем виде многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при наличии между приборами промежуточных буферов ограниченного размера для произвольного количества L обрабатываемых приборов и произвольного их (пакетов) количества в последовательностях $\pi^l (l = \overline{1, L})$ реализации действий с ними.

3. Алгоритм вычисления значений $t_{jq}^{0l} (q = \overline{1, N_j}, j = \overline{1, N_p}, l = \overline{1, L})$ моментов времени начала выполнения q -х заданий, входящих в пакеты, занимающие j -е позиции в последовательностях π^l их выполнения на приборах КС. С учетом вида полученных выражений (43) – (58) разработан алгоритм вычисления значений элементов $t_{jq}^{0l} (q = \overline{1, N_j}, j = \overline{1, N_p}, l = \overline{1, L})$ матриц T^{0l} моментов времени начала выполнения q -х заданий, входящих в пакеты, занимающие j -е позиции в последовательностях π^l их выполнения на приборах КС, которые являются результатом вычислений с использованием рассматриваемой модели. Алгоритм вычисления значений $t_{jq}^{0l} (q = \overline{1, N_j}, j = \overline{1, N_p}, l = \overline{1, L})$ на основе выражений (43) – (58) имеет следующий порядок шагов:

1. Задать номер позиции j , в которой размещен в последовательностях $\pi^l (l = \overline{1, L})$ рассматриваемый ПЗ, равным 0 ($j=0$). Вычислить значение $N_p: N_p = \sum_{i=1}^N m_i$.

2. Задать номер l прибора, для пакетов в последовательности π^l которого реализуется вычисление значений t_{jq}^{0l} моментов времени начала выполнения заданий, равным 1.

3. Модифицировать номер j позиции в последовательности π^l , в которой размещен рассматриваемый ПЗ: $j=j+1$. Определить

количество заданий N_j в пакете, занимающем j -ю позицию в последовательностях π^l ($l = \overline{1, L}$). Задать значение номера q задания в рассматриваемом пакете, занимающем j -ю позицию в последовательностях π^l , равным 1: $q=1$.

4. Если $l=1$ и $j=1$, то выполнить:
 - а. инициализацию значения t_{11}^{01} по формуле (43) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{1q}^{01} по формуле (44) при $1 < q \leq b+1$;
 - в. вычисление значения t_{1q}^{01} по формуле (45) при $b+1 < q \leq N_1$.

Перейти на пункт 10.

5. Если $l=1$ и $2 \leq j \leq N_p$, то выполнить:
 - а. вычисление значения t_{j1}^{01} по формуле (46) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{1q}^{01} по формуле (47) при $1 < q \leq b$;
 - в. вычисление значения t_{1q}^{01} по формуле (48) при $b+1 \leq q \leq N_j$.

Перейти на пункт 10.

6. Если $2 \leq l \leq L-1$ и $j=1$, то выполнить:
 - а. вычисление значения t_{11}^{0l} по формуле (49) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{1q}^{0l} по формуле (50) при $1 < q \leq b+1$;
 - в. вычисление значения t_{1q}^{0l} по формуле (51) при $b+1 < q \leq N_1$.

Перейти на пункт 10.

7. Если $2 \leq l \leq L-1$ и $2 \leq j \leq N_p$, то выполнить:
 - а. вычисление значения t_{j1}^{0l} по формуле (52) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{jq}^{0l} по формуле (53) при $1 < q \leq b$;
 - в. вычисление значения t_{jq}^{0l} по формуле (54) при $b+1 \leq q \leq N_j$.

Перейти на пункт 10.

8. Если $l=L$ и $j=1$, то выполнить:
 - а. вычисление значения t_{11}^{0L} по формуле (55) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{1q}^{0L} по формуле (56) при $1 < q \leq N_1$.

Перейти на пункт 10.

9. Если $l=L$ и $2 \leq j \leq N_p$, то выполнить:
 - а. вычисление значения t_{j1}^{0L} по формуле (57) при $q=1$;
 - б. вычисление значения t_{jq}^{0L} по формуле (58) при $1 < q \leq N_j$.

10. Модифицировать значение номера прибора l : $l=l+1$. Если $l \leq L$, то перейти на пункт 6. Модифицировать значение q : $q=q+1$. Если $q \leq N_j$, то $l=1$, перейти на пункт 4. Если $q > N_j$, то перейти на пункт 11.

11. Модифицировать значение номера позиции j , которую занимает ПЗ: $j=j+1$. Если $j \leq N_p$, то инициализировать номер l прибора КС: $l=1$, перейти на пункт 3. Если $j > N_p$, то перейти на пункт 12.

12. Останов алгоритма.

Разработанная математическая модель многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при количестве приборов $L \geq 3$ и количестве пакетов $N_p \geq 2$, а также разработанный алгоритм моделирования указанных процессов, осуществляющий вычисление значений t_{jq}^{ol} на основе выражений модели, реализованы программно.

На основе вычисленных значений t_{jq}^{ol} формируются диаграммы Ганта, которые отображают процесс выполнения заданий, входящих в пакеты, приборами КС, включающий как интервалы блокирования и простоев приборов в ожидании начала реализации действий с заданиями, так и интервалы непосредственно функционирования при осуществлении действий с ними. На диаграммах Ганта отображаются моменты времени начала выполнения заданий, входящих в пакеты. С целью формирования диаграмм Ганта и отображения значений t_{jq}^{ol} , соответствующих процессу выполнения заданий, входящих в пакеты, разработанное приложение использует листы в программе Microsoft Excel. Вид формируемых приложением на основе модели и алгоритма расчета значений t_{jq}^{ol} диаграмм Ганта представлен на рисунке 3. Анализ формируемых приложением для различных параметров многостадийных процессов диаграмм Ганта показал корректность синтезированных моделей и алгоритма вычисления значений t_{jq}^{ol} . Разработанные модели и алгоритм вычисления значений t_{jq}^{ol} в дальнейшем будут положены в основу применения разработанного иерархического подхода к оптимизации решений по составам ПЗ и расписаниям их выполнения на приборах КС для решения рассматриваемой задачи планирования многостадийных процессов при учете промежуточных буферов ограниченного размера.

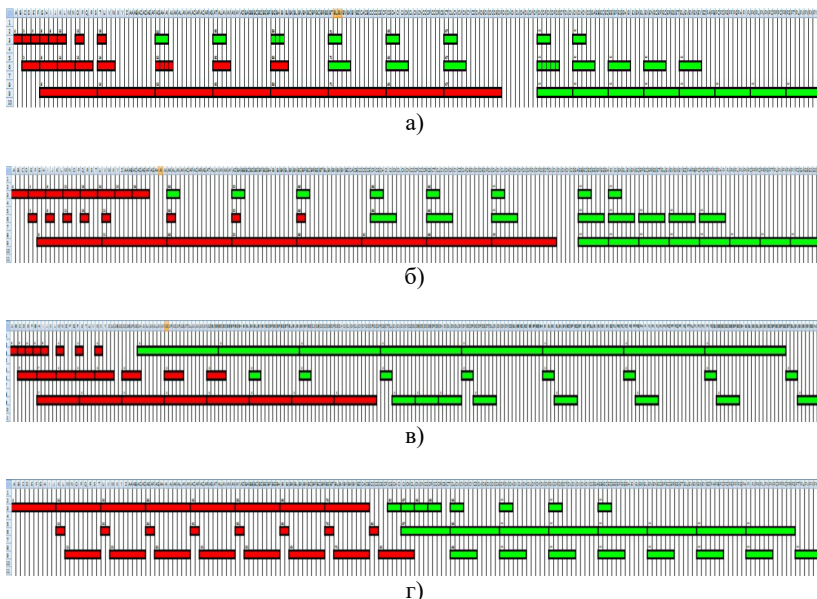


Рис. 3. Виды последовательностей выполнения ПЗ на трех приборах КС и значения моментов времени начала реализации действий с ними, сформированные программой моделирования многостадийных процессов

4. Заключение. Применение современных методов математического моделирования и оптимизации расписаний многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС, включающих буферы заданных размеров, ограничено размерностью решаемых задач (ограниченное количество пакетов заданий и приборов в КС). В тоже время применение предложенного автором иерархического подхода к оптимизации составов ПЗ и расписаний их выполнения в КС (при наличии буферов ограниченных размеров) основывается на математических моделях процессов выполнения пакетов в КС. В связи с этим выполнены исследования, позволившие получить следующие новые научные результаты: 1) синтезирована математическая модель процессов выполнения ПЗ в КС, состоящей из двух приборов при произвольном (не ограниченном, в отличие от существующих методов) их (пакетов) количестве $N_p \geq 2$; 2) синтезирована математическая модель процессов выполнения ПЗ в КС, состоящей из трех приборов при произвольном (не ограниченном) количестве пакетов $N_p \geq 2$; 3) синтезирована математическая модель процессов

выполнения ПЗ в КС, состоящей из $L \geq 3$ приборов при количестве пакетов $N_p \geq 2$; 4) разработан алгоритм вычисления значений моментов времени начала выполнения заданий, входящих в пакеты, на приборах КС. Также разработана программа, интерпретирующая полученные математические модели многостадийных процессов и алгоритм вычисления моментов времени начала выполнения заданий, входящих в пакеты, на приборах КС. Результатом выполнения программы являются формируемые ею диаграммы Ганта, отображающие ход моделируемых многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС. Использование разработанных математических моделей процессов выполнения ПЗ в КС, включающих промежуточные буферы ограниченных размеров, позволяет получать не только моменты времени окончания выполнения всех ПЗ в КС, но и интервалы простоя приборов, связанные с их блокированием по причине заполнения буферов, а также эффективность использования буферов при выполнении ПЗ. Это делает возможным при синтезе математических моделей оптимизации решений по составам ПЗ и расписаний их выполнения в КС формировать критерии, позволяющие учесть эффективность использования различных ресурсов, используемых системой при выполнении пакетов заданий. Дальнейшие исследования в рассматриваемом направлении связаны с: 1) построением модели двухуровневой иерархической игры оптимизации решений, позволяющей определять составы ПЗ на верхнем уровне и расписаниям выполнения пакетов на нижнем уровне; 2) синтезом методов локальной оптимизации решений на каждом из уровней; 3) получением результатов моделирования и оптимизации, которые позволяют определить особенности многостадийных процессов выполнения ПЗ в КС при наличии между приборами буферов ограниченных размеров между приборами.

Литература

1. Кротов К.В. Комплексный метод определения эффективных решений по составам партий данных и расписаниям их обработки в конвейерных системах // Вычислительные технологии. 2018. Т. 23. № 3. С. 58–76.
2. Кротов К.В. Обоснование методов построения комплексных расписаний обработки партий данных при условии оперативного формировании комплектов из результатов // Вестник Воронежского Государственного Университета. Серия: Системный анализ и информационные технологии. 2018. № 4. С. 58–72.
3. Кротов К.В., Скاتков А.В. Построение комплексных расписаний выполнения пакетов заданий при формировании комплектов в заданные директивные сроки // Информатика и автоматизация. 2021. Т. 20. № 3. С. 654–689.
4. Кротов К.В. Построение комплексных расписаний обработки пакетов данных в конвейерной системе при задании ограничений на длительность интервалов

- времени ее функционирования // Труды учебных заведений связи. 2020. Т. 6. № 3. С. 75–89.
5. Papadimitriou C.H., Kanellakis P.C. Flowshop scheduling with limited temporary storage // Journal of Association for Computing Machinery. 1980. vol. 27. no. 3. pp. 533–549.
 6. Leisten R. Flowshop sequencing problems with limited buffer storage // International Journal of Production Research. 1990. vol. 28. no. 11. pp. 2085–2100. DOI: 10.1080/00207549008942855.
 7. Crowder B. Minimizing the makespan in a flexible flowshop with sequence dependent setup times, uniform machines and limited buffers // Graduate Theses, Dissertations and Problem Reports. Morgantown: West Virginia University, 2006. 145 p.
 8. Han Zh., Zhang Q., Shi H., Qi Yu., Sun L. Research on limited buffer scheduling problems in flexible flow shops with setup times // International Journal of Modelling, Identification and Control. 2019. vol. 32. no. 2. pp. 93–104.
 9. Eddaly M., Jarboui B., Siarry P., Rebaï A. An Estimation of Distribution Algorithm for Flowshop Scheduling with Limited Buffers // Natural Intelligence for Scheduling, Planning and Packing Problems. Part of the Studies in Computational Intelligence book series. 2009. vol. 250. pp. 89–110.
 10. Frasc J.V., Krumke S.O., Westphal S. MIP Formulations for Flowshop Scheduling with Limited Buffers // Proceedings of the First International ICST Conference «Theory and Practice of Algorithms in (Computer) Systems» (TAPAS). 2011. pp. 127–138.
 11. Fu Q., Sivakumar A.I., Li K. Optimisation of flow-shop scheduling with batch processor and limited buffer // International Journal of Production Research. 2012. vol. 50. no. 8. pp. 2267–2285.
 12. Кононова П.А. Алгоритмы построения расписаний для цеховых задач потокового типа с цифровым буфером // Дисс. канд. физ.-мат. наук. Новосибирск: Институт вычислительной математики и математической геофизики, 2012. 104 с.
 13. Cakici M.K. Parallel flow shop scheduling with common workstations // MS thesis. Middle East Technical University. 2019. 138 p.
 14. Кононова П.А., Кочетов Ю.А. Алгоритм локального поиска для построения расписаний работы одного станка с переналадкой оборудования и складом // Дискретный анализ и исследование операций. 2019. Т. 26. № 2. С. 60–78. DOI: 10.33048/daio.2019.26.634.
 15. Lin C.C., Liu W.-Y., Chen Y.-H. Considering Stockers in Reentrant Hybrid Flow Shop Scheduling with Limited Buffer Capacity // Computers and Industrial Engineering. 2020. vol. 139. no. 106154. DOI: 10.1016/j.cie.2019.106154.
 16. Takano M.I., Nagano M.S. Solving the permutation flow shop problem with blocking and setup time constraints // International Journal of Industrial Engineering Computations. 2020. no. 11. pp. 469–480. DOI: 10.5267/j.ijiec.2019.11.002.
 17. Zhang C., Tan J., Peng K., Gao L., Shen W., Lian K. A discrete whale swarm algorithm for hybrid flow-shop scheduling problem with limited buffers // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2021. no. 68. DOI: 10.1016/j.rcim.2020.102081.
 18. Gao Z., Feng Ya., Xing K. A hybrid estimation-of-distribution algorithm for scheduling flexible job shop with limited buffers based on Petri Nets // IEEE Access. 2020. vol. 8. pp. 165396–165408. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3022655.
 19. Kazemi Esfeh M., Shojaie A.A., Javanshir H., Khalili-Damghani K. Flexible flow shop scheduling problem with reliable transporters and intermediate limited buffers via considering learning effects and budget constraint // Hindawi journal. Complexity. 2022. vol. 2022. no. 1253336. DOI: 10.1155/2022/1253336.

20. Jiang S.-L., Zhang L. Energy-oriented scheduling for hybrid flow shop with limited buffers through efficient multi-objective optimization // IEEE Access. 2019. vol. 7. pp. 34477–34487. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2904848.
21. Liang X., Wang P., Huang M. Flow shop scheduling problem with limited buffer based on hybrid shuffled frog leaping algorithm // 7th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT). 2019. pp. 87–93. DOI: 10.1109/iccsnt47585.2019.8962427.
22. Zhang G., Wang L., Xing K. Dual-space co-evolutionary memetic algorithm for scheduling hybrid differentiation flow shop with limited buffer constraints // IEEE Transactions on systems, man and cybernetics systems. 2021. vol. 52. no. 11. pp. 6822–6836. DOI: 10.1109/TSMC.2021.3102658.
23. Benda F., Braune R., Doerner K.F., Hartl R.F. A machine learning approach for flow shop scheduling problems with alternative resources, sequence-dependent setup times and blocking // OR Spectrum. 2019. vol. 41. pp. 871–893. DOI: 10.1007/s00291-019-00567-8.
24. Han Zh., Han Ch., Lin Sh., Dong X., Shi H. Flexible flow shop scheduling method with public Buffer // Processes. 2019. vol. 7(10). no. 681. DOI: 10.3390/pr7100681.
25. Rooeinfar R., Raissi S., Ghezavati V.R. Stochastic flexible flow shop scheduling problem with limited buffers and fixed interval preventive maintenance: a hybrid approach of simulation and metaheuristic algorithms // Simulation. 2019. vol. 95(6). pp. 509–528.
26. Kazemi Esfeh M., Shojaei A.A., Javanshir H., Khalili Damghani K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO // International Journal Nonlinear Analysis and Applications. 2022. vol. 13. no. 1. pp. 217–246.
27. Agnetis A., Pacciarelli D., Rossi F. Batch scheduling in a two-machine flow shop with limited buffer // Discrete Applied Mathematics. 1997. vol. 72. no. 3. pp. 243–260.
28. Pranzo M. Batch scheduling in a two-machine flow shop with limited buffer and sequence independent setup times and removal times // European Journal of Operational Research. 2004. vol. 153. no. 3. pp. 581–592.
29. Dai J. Batch Scheduling of Two-machine Limited-buffer Flow Shop with Setup and Removal Times // Georgia Institute of Technology, 2003. 108 p.

Кротов Кирилл Викторович — д-р техн. наук, доцент, профессор кафедры, кафедра «информационные системы», ФГАОУ ВО «Севастопольский государственный университет» (СевГУ). Область научных интересов: теория расписаний, многоуровневая оптимизация, методы дискретной оптимизации. Число научных публикаций — 120. krotov_k1@mail.ru; улица Университетская, 33, 299053, Севастополь, Россия; п.т.: +7(978)730-3819.

К. КРОТОВ

MATHEMATICAL MODELING OF THE PROCESSES OF EXECUTING PACKAGES OF TASKS IN CONVEYOR SYSTEMS WITH INTERMEDIATE BUFFERS OF LIMITED SIZE

Krotov K. Mathematical Modeling of the Processes of Executing Packages of Tasks in Conveyor Systems with Intermediate Buffers of Limited Size.

Abstract. Modern methods of process planning in conveyor systems with buffers of a certain size between processing devices allow optimizing schedules for single tasks or fixed task packages with a limited number of them and a limited number of devices. The use of mathematical models of the processes of performing single tasks (task packages) used by these methods in optimizing the composition of packages and schedules for their execution in systems with an arbitrary number of packages and devices is impossible. At the same time, mathematical models of the processes of executing task packages in conveyor systems in the presence of buffers of limited sizes between devices are the basis for the development of methods for optimizing their (package) compositions and schedules for the implementation of actions with them on the devices of conveyor systems. In this regard, the article develops mathematical models of multi-stage processes of performing an arbitrary number of task packages in conveyor systems in the presence of intermediate buffers of limited sizes for two and three devices, as well as for an arbitrary number of devices. The use of these models makes it possible to determine the time points of the start of the execution of task packages on the devices of conveyor systems, taking into account the limited size of intermediate buffers, as well as the duration of time intervals for the use of these resources and the efficiency of their use over time. An algorithm has also been developed for mathematical modeling of the processes of executing task packages in conveyor systems in the presence of intermediate buffers of limited size, which calculates the time characteristics of these processes based on a given order of implementation of actions with task packages on the devices of conveyor systems. An application has been developed that implements synthesized mathematical models of the processes of executing task packages in conveyor systems with intermediate buffers of limited sizes and an appropriate method for modeling these processes. Versatile testing of the developed application has shown that the obtained mathematical models and the modeling method adequately describe the course of multi-stage processes of task packages in pipeline systems, set using different values of their (processes) parameters.

Keywords: pipeline systems, schedules, buffers of limited size, mathematical modeling of multi-stage processes for the execution of task packages.

References

1. Krotov K.V. [A complex method for determining effective solutions for data batch compositions and processing schedules in conveyor systems]. *Vychislitel'nye tekhnologii*, Izd-vo Instituta vychislitel'nyh tekhnologij SO RAN – Computational Technologies, Publishing House of the Institute of Computational Technologies SB RAS. 2018. vol. 23. no. 3. pp. 58–76. (In Russ).
2. Krotov K.V. [Substantiation of methods for constructing complex schedules for processing batches of data under the condition of prompt formation of sets from the results]. *Vestnik Voronezhskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Seriya: Sistemnyj analiz i informacionnye tekhnologii – Bulletin of the Voronezh State University. Series: System analysis and Information Technologies*. 2018. no. 4. pp. 58–72. (In Russ).

3. Krotov K.V., Skatkov A.V. [Construction of complex schedules for the execution of task packages when forming sets within the specified directive deadlines]. *Informatika i avtomatizacija – Informatics and Automation*. 2021. vol. 20. no. 3. pp. 654–689. (In Russ).
4. Krotov K.V. [Building complex schedules for processing data packets in a pipeline system when setting limits on the duration of time intervals of its operation] *Trudy uchebnyh zavedenij svyazi – Proceedings of educational institutions of communication*. 2020. vol. 6. no. 3. pp. 75–89. (In Russ).
5. Papadimitriou C.H., Kanellakis P.C. Flowshop scheduling with limited temporary storage. *Journal of Association for Computing Machinery*. 1980. vol. 27. no. 3. pp. 533–549.
6. Leisten R. Flowshop sequencing problems with limited buffer storage. *International Journal of Production Research*. 1990. vol. 28. no. 11. pp. 2085–2100. DOI: 10.1080/00207549008942855.
7. Crowder B. Minimizing the makespan in a flexible flowshop with sequence dependent setup times, uniform machines and limited buffers. *Graduate Theses, Dissertations and Problem Reports*. Morgantown: West Virginia University, 2006. 145 p.
8. Han Zh., Zhang Q., Shi H., Qi Yu., Sun L. Research on limited buffer scheduling problems in flexible flow shops with setup times. *International Journal of Modelling, Identification and Control*. 2019. vol. 32. no. 2. pp. 93–104.
9. Eddaly M., Jarboui B., Siarry P., Rebaï A. An Estimation of Distribution Algorithm for Flowshop Scheduling with Limited Buffers. *Natural Intelligence for Scheduling, Planning and Packing Problems. Part of the Studies in Computational Intelligence book series*. 2009. vol. 250. pp. 89–110.
10. Frasc J.V., Krumke S.O., Westphal S. MIP Formulations for Flowshop Scheduling with Limited Buffers. *Proceedings of the First International ICST Conference «Theory and Practice of Algorithms in (Computer) Systems» (TAPAS)*. 2011. pp. 127–138.
11. Fu Q., Sivakumar A.I., Li K. Optimisation of flow-shop scheduling with batch processor and limited buffer. *International Journal of Production Research*. 2012. vol. 50. no. 8. pp. 2267–2285.
12. Kononova P.A. [Algorithms for building schedules for shop tasks of a streaming type with a digital buffer. Dissertation of the Candidate of Physical and Mathematical Sciences]. Novosibirsk: Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics, 2012. 104 p.
13. Cakici M.K. Parallel flow shop scheduling with common workstations. MS thesis. Middle East Technical University. 2019. 138 p.
14. Kononova P.A., Kochetov Yu.A. [Local search algorithm for building schedules for the operation of one machine with equipment changeover and warehouse]. *Diskretnyj analiz i issledovanie operacij – Discrete analysis and operations research*. 2019. vol. 26. no. 2. pp. 60–78. DOI: 10.33048/daio.2019.26.634.
15. Lin C.C., Liu W.-Y., Chen Y.-H. Considering Stockers in Reentrant Hybrid Flow Shop Scheduling with Limited Buffer Capacity. *Computers and Industrial Engineering*. 2020. vol. 139. no. 106154. DOI: 10.1016/j.cie.2019.106154.
16. Takano M.I., Nagano M.S. Solving the permutation flow shop problem with blocking and setup time constraints. *International Journal of Industrial Engineering Computations*. 2020. no. 11. pp. 469–480. DOI: 10.5267/j.ijiec.2019.11.002.
17. Zhang C., Tan J., Peng K., Gao L., Shen W., Lian K. A discrete whale swarm algorithm for hybrid flow-shop scheduling problem with limited buffers. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2021. no. 68. DOI: 10.1016/j.rcim.2020.102081.

18. Gao Z., Feng Ya., Xing K. A hybrid estimation-of-distribution algorithm for scheduling flexible job shop with limited buffers based on Petri Nets. *IEEE Access*. 2020. vol. 8. pp. 165396–165408. DOI: 10.1109/ACCESS.2020.3022655.
19. Kazemi Esfeh M., Shojaie A.A., Javanshir H., Khalili-Damghani K. Flexible flow shop scheduling problem with reliable transporters and intermediate limited buffers via considering learning effects and budget constraint. *Hindawi journal. Complexity*. 2022. vol. 2022. no. 1253336. DOI: 10.1155/2022/1253336.
20. Jiang S.-L., Zhang L. Energy-oriented scheduling for hybrid flow shop with limited buffers through efficient multi-objective optimization. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 34477–34487. DOI: 10.1109/ACCESS.2019.2904848.
21. Liang X., Wang P., Huang M. Flow shop scheduling problem with limited buffer based on hybrid shuffled frog leaping algorithm. 7th International Conference on Computer Science and Network Technology (ICCSNT). 2019. pp. 87–93. DOI: 10.1109/iccsnt47585.2019.8962427.
22. Zhang G., Wang L., Xing K. Dual-space co-evolutionary memetic algorithm for scheduling hybrid differentiation flow shop with limited buffer constraints. *IEEE Transactions on systems, man and cybernetics systems*. 2021. vol. 52. no. 11. pp. 6822–6836. DOI: 10.1109/TSMC.2021.3102658.
23. Benda F., Braune R., Doerner K.F., Hartl R.F. A machine learning approach for flow shop scheduling problems with alternative resources, sequence-dependent setup times and blocking. *OR Spectrum*. 2019. vol. 41. pp. 871–893. DOI: 10.1007/s00291-019-00567-8.
24. Han Zh., Han Ch., Lin Sh., Dong X., Shi H. Flexible flow shop scheduling method with public Buffer. *Processes*. 2019. vol. 7(10). no. 681. DOI: 10.3390/pr7100681.
25. Rooeinfar R., Raissi S., Ghezavati V.R. Stochastic flexible flow shop scheduling problem with limited buffers and fixed interval preventive maintenance: a hybrid approach of simulation and metaheuristic algorithms. *Simulation*. 2019. vol. 95(6). pp. 509–528.
26. Kazemi Esfeh M., Shojaei A.A., Javanshir H., Khalili Damghani K. Solving a bi-objective flexible flow shop problem with transporter preventive maintenance planning and limited buffers by NSGA-II and MOPSO. *International Journal Nonlinear Analysis and Applications*. 2022. vol. 13. no. 1. pp. 217–246.
27. Agnetis A., Pacciarelli D., Rossi F. Batch scheduling in a two-machine flow shop with limited buffer. *Discrete Applied Mathematics*. 1997. vol. 72. no. 3. pp. 243–260.
28. Pranzo M. Batch scheduling in a two-machine flow shop with limited buffer and sequence independent setup times and removal times. *European Journal of Operational Research*. 2004. vol. 153. no. 3. pp. 581–592.
29. Dai J. Batch Scheduling of Two-machine Limited-buffer Flow Shop with Setup and Removal Times. *Georgia Institute of Technology*, 2003. 108 p.

Krotov Kirill — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Professor of the department, Department of "information systems", Sevastopol State University. Research interests: theory of schedules, multilevel optimization, methods of discrete optimization. The number of publications — 120. krotov_kl@mail.ru; 33, Universitetskaya St., 299053, Sevastopol, Russia; office phone: +7(978)730-3819.