УДК 519.6

А. А. Макаров

АЛГОРИТМЫ ВЭЙВЛЕТНОГО УТОЧНЕНИЯ ПРОСТРАНСТВ СПЛАЙНОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Макаров А. А. **Алгоритмы вэйвлетного уточнения пространств сплайнов первого порядка.**
Аннотация. В данной работе для непрерывных сплайнов первого порядка лагранжева типа построено вэйвлетное разложение (уточнение) на неравномерной сетке и соответствующие алгоритмы декомпозиции и реконструкции в случаях бесконечного потока (с сеткой на открытом интервале) и конечного потока (с сеткой на отрезке).
Ключевые слова: сплайн, вэйвлет, вейвлет, всплеск, матрица реконструкции, матрица декомпозиции, уточняющие схемы.

Makarov A. A. **A wavelet refinement algorithms of the first order spline spaces.**
Abstract. The goal of this paper is to obtain a wavelet decomposition (wavelet refinement) of the chain of embedded spaces of splines for an arbitrary refinement of a nonuniform grid, and to derive the corresponding decomposition and reconstruction formulas, to construct wavelet decompositions and decomposition and reconstruction algorithms in the case of an infinite flow for a grid on an open interval and a finite flow for a grid on a segment.
Keywords: spline, wavelet, spline wavelet decomposition, reconstruction matrix, decomposition matrix, subdivision scheme.

1. Введение. Сплайны и вэйвлеты (всплески) нашли широкое применение в теории информации. Вэйвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия или уточнения) больших потоков информации. Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то это ведет к вэйвлетному разложению потока информации и существенно экономит ресурсы вычислительных систем. Хорошо известны вэйвлетные разложения в случае равномерной сетки на интервале $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$. В этом случае применяется мощный аппарат гармонического анализа [1] (в пространстве функций $L^2(\mathbb{R}^1)$ и в пространстве последовательностей l^2), используется лифтинговая схема [2] или вэйвлетная схема [3].

Многие практические приложения требуют рассматривать ограниченный интервал $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ и неравномерную сетку. Например, для эффективной обработки неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики) целесообразно использовать адаптивную неравномерную сетку, учитывающую особенности обрабатываемого потока. Это позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Полученные ранее результаты относились к случаям сплайнов на бесконечной сетке (см. [4–7]). Бесконечность рассматриваемой сетки и соответствующего числового потока облегчают теоретические исследования; однако, на практике, приходится иметь дело с конечными потоками. Данная работа продолжает исследования в конечномерных пространствах, начатые в [8–12].

Цель данной работы — построить вэйвлетное разложение (уточнение) на неравномерной сетке и соответствующие алгоритмы декомпозиции и реконструкции в случаях бесконечного потока (с сеткой на открытом интервале) и конечного потока (с сеткой на отрезке) для пространств сплайнов первого порядка лагранжева типа.

Работа содержит три параграфа. В первом параграфе предлагаемой работы вводятся необходимые предварительные обозначения и, для удобства читателя, формулируются некоторые утверждения из работы [11]. Второй параграф посвящен вэйвлетному уточнению на открытом интервале и содержит алгоритмы декомпозиции и реконструкции для бесконечной сетки (бесконечномерный случай). В третьем параграфе рассматривается вэйвлетное уточнение на отрезке и приводятся алгоритмы декомпозиции и реконструкции в конечномерном случае.

2. Предварительные обозначения и некоторые утверждения. На интервале $(\alpha, \beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$,

$$X: \ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j \to -\infty} x_j$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j \to +\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ не исключаются).

Введем обозначения $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j \in \mathbb{Z}} (x_j, x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j, x_{j+m+1}]$, $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-m, k-m+1, \ldots, k\}$, где $k, j \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$.

Будем рассматривать класс сеток вида (1) со свойством *локаль-*

ной квазиравномерности (подробнее о таких сетках см. [13])

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1} - x_j}{x_j - x_{j-1}} \leqslant K_0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z}, K_0 \geqslant 1,\, K_0 \in \mathbb{R}^1.$$

Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}$: $(\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *цепочкой векторов.* Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_j) \neq 0 \;\; \forall j \in \mathbb{Z}$.

Если цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ полная, то из условий

$$\begin{aligned} \sum_{j' \in J_k} \mathbf{a}_{j'}\, \omega_{j'}(t) \equiv \;\; & \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k, x_{k+1}),\, \forall\, k \in \mathbb{Z}, \\ \omega_j(t) \equiv \;\; & 0 \qquad\;\; \forall\, t \notin S_j \cap M. \end{aligned} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$, причем $\operatorname{supp} \omega_j(t) \subset S_j$.

Линейная оболочка функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *пространством минимальных* $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* m *порядка* на сетке X и обозначается через

$$\mathbb{S}(X, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями*, вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* для $(\mathbf{A}, \boldsymbol{\varphi})$-сплайнов.

Пусть $m = 1$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^2$, задаваемые тождеством $\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j,\, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbb{Z}$, и определим векторы $\mathbf{a}_j^* \in \mathbb{R}^2$ формулой $\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ в покомпонентном виде

$$\mathbf{a}_j^* = ([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0, [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1)^T,\; \mathbf{d}_j = (-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1, [\boldsymbol{\varphi}_j]_0)^T.$$

Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\alpha,\beta)$, $|\det(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\varphi}')(t)| \geqslant const > 0 \,\forall\, t \in (\alpha,\beta)$ и

$X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$, то $\omega_j \in C(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \\ \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{3}$$

Пространство

$$\mathbb{S}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j \, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\}$$

называется *пространством минимальных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов первого порядка* на сетке X.

Замечание 1. *При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, т. е. с одномерными функциями Куранта.*

Рассмотрим конечномерные пространства сплайнов. Введем обозначения

$$a \stackrel{\text{def}}{=} x_0, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x_n, \quad J_{1,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, \dots, n-1, n\}.$$

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$,

$$X_n : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1},$$

из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}^* = \{\mathbf{a}_j^*\}_{j \in \mathbb{Z}}$ выделим конечную цепочку $\mathbf{A}_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{-1}^*, \dots, \mathbf{a}_n^*\}$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X)$ на множество $[a, b]$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j \in J_{1,n-1}} c_j \, \omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\} \subset C[a, b].$$

Рассмотрим случай, когда исходная сетка X дополняется новым узлом $\overline{\xi}$, и на полученной таким образом *измельченной сетке* $\overline{X}$ строятся сплайны $\overline{\omega}_j(t),\ j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$, а $\overline{x}_j$ – узлы вновь полученной сетки $\overline{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\overline{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } \ j \leqslant k, \\ \overline{\xi} & \text{при } \ j = k+1, \\ x_{j-1} & \text{при } \ j \geqslant k+2. \end{cases} \tag{4}$$

Будем надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\overline{X}$. Функции $\overline{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (3), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\overline{x}_j,\ j \in \mathbb{Z}$.

Введем бесконечномерные вектор-столбцы, компонентами которых являются функции $\omega_j(t)$ и $\overline{\omega}_j(t), j \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-2}(t), \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \ldots)^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{\omega}_{-2}(t), \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \overline{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Теорема 1 (см. [11]). *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \ \Leftrightarrow\ \omega_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\overline{\omega}_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{5}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}$ — бесконечная матрица вида $\overline{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, элементы которой задаются равенствами

$$\overline{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \textit{при } \ i \leqslant k-2,\ \forall j, \\ \delta_{k-1,j} & \textit{при } \ i = k-1, j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \textit{при } \ i = k, j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \textit{при } \ i \geqslant k+1,\ \forall j, \end{cases} \tag{6}$$

а также формулами

$$\overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_k^* - \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_k^*}{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*} \right) / \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^*, \tag{7}$$

$$\overline{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_k^*}{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*}. \tag{8}$$

Матрица $\overline{\mathfrak{P}}$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) реконструкции* на интервале (α, β).

Рассмотрим калибровочные соотношения и соответствующие матрицы реконструкции в конечномерном случае, используя введенные ранее сужения всех функций на отрезок $[a, b]$.

Для $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ добавим узел $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$ к сетке X_n; в результате получим измельченную сетку

$$\overline{X}_n: \quad \overline{x}_{-1} < a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_{n+1} = b < \overline{x}_{n+2},$$

где узлы $\overline{x}_i$, $i = -1, \ldots, n+2$ по-прежнему определяются формулами (4).

Введем конечномерные вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \ldots, \omega_{n-1}(t))^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \ldots, \overline{\omega}_n(t))^T.$$

Ввиду равенства (5) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) = \overline{\mathfrak{P}}_n \, \overline{\omega}_{(n)}(t), \tag{9}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}_n$ – прямоугольная числовая матрица размеров $(n+1) \times (n+2)$. Матрица $\overline{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) реконструкции* на отрезке $[a, b]$.

Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$.

Рассмотрим линейные функционалы $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$, заданные на пространстве $C(\alpha, \beta)$ формулой

$$\langle f_j, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{j+1}), \quad u \in C(\alpha, \beta), \, j \in \mathbb{Z}. \tag{10}$$

Ясно, что система линейных функционалов $\{f_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ биортогональна системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j' \in \mathbb{Z}}$, т. е.

$$\langle f_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}, \quad \forall j, j' \in \mathbb{Z}, \tag{11}$$

где $\delta_{j,j'}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим систему функционалов $\{\overline{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ биортогональную системе $\{\overline{\omega}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\mathfrak{q}_{j,j'} \stackrel{\text{def}}{=} \langle f_j, \overline{\omega}_{j'}\rangle\ \forall j, j' \in \mathbb{Z}$. Тогда (см. [11]) для $j, j', k \in \mathbb{Z}$ справедливы равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \begin{cases} \delta_{j,j'} & \text{при } j' \leqslant k-1, \\ 0 & \text{при } j' = k, \\ \delta_{j,j'-1} & \text{при } j' \geqslant k+1. \end{cases} \tag{12}$$

Далее рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, элементы которой задаются формулами (12). Матрица $\mathfrak{Q}$ называется *матрицей декомпозиции* на интервале (α, β). Матрица $\mathfrak{Q}$ является левой обратной к матрице $\overline{\mathfrak{P}}^T$, т. е.

$$\mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}^T = I. \tag{13}$$

Рассмотрим представление матрицы декомпозиции на отрезке $[a, b]$. Выделим из множества функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+1$ функционалов, из множества функционалов $\{\overline{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+2$ функционалов.

Для систем функционалов $\{f_j\}_{j\in J_{1,n-1}}$, $\{\overline{f}_i\}_{i\in J_{1,n}}$ справедливы равенства

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad j, j' \in J_{1,n-1}, \quad \langle \overline{f}_i, \overline{\omega}_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}, \quad i, i' \in J_{1,n},$$

причем $\operatorname{supp} f_j \subset [a, b]$, $\operatorname{supp} \overline{f}_i \subset [a, b]$.

Прямоугольная матрица $\overline{\mathfrak{Q}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j}), i \in J_{1,n-1}, j \in J_{1,n}$, размеров $(n+1)\times(n+2)$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) декомпозиции* на отрезке $[a, b]$.

Аналогично равенству (13) для матриц $\overline{\mathfrak{P}}_n$ и $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ справедливы соотношения

$$\overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathfrak{P}}_n^T = I_{n+1}, \tag{14}$$

где I_{n+1} — единичные квадратная матрица порядка $n+1$.

3. Сплайн-вэйвлетное уточнение на интервале. Согласно калибровочным соотношениям (5) справедливо включение

$$\mathbb{S}(X) \subset \mathbb{S}(\overline{X}).$$

Рассмотрим оператор $\overline{P}$ проектирования пространства $\mathbb{S}(\overline{X})$ на подпространство $\mathbb{S}(X)$, задаваемый формулой

$$\overline{P}\,\overline{u} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \overline{a}_i\,\omega_i, \;\; \overline{a}_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle f_i, \overline{u}\rangle \;\; \forall\, \overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}),$$

и введем оператор $\overline{Q} = I - \overline{P}$.

Пространство $\overline{W} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{Q}\,\mathbb{S}(\overline{X})$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(\overline{X}) = \mathbb{S}(X) \dot{+} \overline{W}, \tag{15}$$

называется *сплайн-вэйвлетным уточнением* пространства $\mathbb{S}(\overline{X})$.

В соответствии с равенством (15) для $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X})$ имеем

$$\overline{u} = \sum_i \overline{a}_i\,\omega_i + \sum_{i'} \overline{b}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} = \sum_{i'} \left(\sum_i \overline{a}_i\,\overline{\mathfrak{p}}_{i,i'} + \overline{b}_{i'} \right) \overline{\omega}_{i'},$$

так что для чисел $\overline{c}_j \stackrel{\text{def}}{=} \langle \overline{f}_j, \overline{u} \rangle$ получаем

$$\overline{c}_j = \sum_i \overline{a}_i\,\overline{\mathfrak{p}}_{i,j} + \overline{b}_j, \quad j \in \mathbb{Z}. \tag{16}$$

Пусть известны коэффициенты $\overline{c}_{i'}$ в разложении элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X})$ по элементам базиса $\overline{\omega}_{i'}$, а именно,

$$\overline{u} = \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'}.$$

Из соотношений (16) имеем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_i \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\overline{a}_i,$$

используя равенство $\overline{a}_i = \langle f_i, \overline{u} \rangle$, получаем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_i \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\langle f_i, \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'} \rangle =$$

$$= \overline{c}_j - \sum_i \overline{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'} \overline{c}_{i'} \langle f_i, \overline{\omega}_{i'} \rangle = \overline{c}_j - \sum_i \overline{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'} \overline{c}_{i'}\,\mathfrak{q}_{i,i'}.$$

Формулы

$$\overline{a}_i = \sum_{i'} \mathfrak{q}_{i,i'}\,\overline{c}_{i'}, \tag{17}$$

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i'} \left(\sum_i \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\mathfrak{q}_{i,i'} \right) \overline{c}_{i'} \tag{18}$$

называются *формулами декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\overline{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{a}_{-1}, \overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots)^T,$$

$$\overline{\mathbf{b}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{b}_{-1}, \overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots)^T,$$

$$\overline{\mathbf{c}} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots)^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (17)–(18) в матричном виде

$$\overline{\mathbf{a}} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \overline{\mathbf{c}} - \overline{\mathfrak{P}}^T\,\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}}.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\mathfrak{Q}$ и используя формулу (13), получаем

$$\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{b}} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}} - \mathfrak{Q}\,\overline{\mathfrak{P}}^T\,\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}} = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\overline{\mathbf{b}}$ содержится в ядре оператора $\mathfrak{Q} : \overline{\mathbf{b}} \in \ker \mathfrak{Q}$.

Рассмотрим пространство $\mathbb{L}$ всех числовых последовательностей, представленных вектор-столбцами, $\mathbf{l} \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, l_{-1}, l_0, l_1, \ldots)^T$, и линейный оператор, определяемый матрицей $\mathfrak{Q}$ в нем (это определение корректно, ибо упомянутая матрица имеет конечное число ненулевых элементов в каждой строке). Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его через $\overline{\mathcal{B}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathbf{b}} \mid \overline{\mathbf{b}} = (\ldots, \overline{b}_{-1}, \overline{b}_0, \overline{b}_1, \ldots)^T,\ \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{b}} = 0\}$, т. е. $\overline{\mathcal{B}} = \ker \mathfrak{Q}$, так что

$$\mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{при } \overline{\mathbf{b}} \in \overline{\mathcal{B}}. \tag{19}$$

Рассмотрим еще два экземпляра пространства $\mathbb{L}$, обозначая их через $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{C}}$: элементами пространства $\overline{\mathcal{A}}$ являются вектор-столбцы $\overline{\mathbf{a}} = (\ldots, \overline{a}_{-1}, \overline{a}_0, \overline{a}_1, \ldots)^T$, а элементами пространства $\overline{\mathcal{C}}$ — вектор-столбцы $\overline{\mathbf{c}} = (\ldots, \overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \overline{c}_1, \ldots)^T$. Пусть $\overline{\mathcal{F}}$ — прямое произведение пространств $\overline{\mathcal{A}}$ и $\overline{\mathcal{B}}$: $\overline{\mathcal{F}} \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{A}} \times \overline{\mathcal{B}}$, т. е.

$$\overline{\mathcal{F}} = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}} \\ \overline{\mathbf{b}} \end{pmatrix} \,\middle|\, \overline{\mathbf{a}} \in \overline{\mathcal{A}},\ \overline{\mathbf{b}} \in \overline{\mathcal{B}} \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\overline{\mathfrak{D}} :\ \overline{\mathcal{C}} \mapsto \overline{\mathcal{F}}, \quad \overline{\mathfrak{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ I - \overline{\mathfrak{P}}^T\,\mathfrak{Q} \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{D}}\,\overline{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\\ I-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix}\overline{\mathbf{c}} \iff \begin{cases}\overline{\mathbf{a}} = \mathfrak{Q}\,\overline{\mathbf{c}}\\ \overline{\mathbf{b}} = (I-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q})\,\overline{\mathbf{c}}\end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 2. *Для сплайн-вэйвлетного уточнения (15) формулы декомпозиции имеют вид*

$$\overline{a}_i = \begin{cases}\overline{c}_i & \textit{при} \;\; i \leqslant k-1,\\ \overline{c}_{i+1} & \textit{при} \;\; i \geqslant k,\end{cases} \tag{20}$$

$$\overline{b}_j = \begin{cases}0 & \textit{при} \;\; j \neq k,\\ \overline{c}_k - \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\,\overline{c}_{k-1} - \overline{\mathfrak{p}}_{k,k}\,\overline{c}_{k+1} & \textit{при} \;\; j = k.\end{cases} \tag{21}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству, проведенному в работе [6]. □

Замечание 2. *Вэйвлетным базисом пространства* $\overline{W}$ *служит сплайн* $\overline{\omega}_k$, *т. е.* $\overline{W} = \{\overline{b}_k\,\overline{\omega}_k \mid \overline{b}_k \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты $\overline{a}_i$ и $\overline{b}_k$ в разложениях проекций элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X})$ на пространства $\mathbb{S}(X)$ и $\overline{W}$: $\overline{P}\overline{u} = \sum\limits_i \overline{a}_i\,\omega_i$, $\overline{Q}\overline{u} = \overline{b}_k\,\overline{\omega}_k$. Найдем формулы для определения коэффициентов $\overline{c}_j$ для представления элемента $\overline{u}$ в виде суммы $\overline{u} = \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} \overline{c}_j\,\overline{\omega}_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции.*

Оператор $\overline{\mathfrak{R}} : \overline{\mathcal{F}} \mapsto \overline{\mathcal{C}}$, $\quad \overline{\mathfrak{R}} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{P}}^T & I\end{pmatrix}$, для которого

$$\overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathfrak{R}}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{P}}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix} \iff \overline{\mathbf{c}} = \overline{\mathfrak{P}}^T\overline{\mathbf{a}} + \overline{\mathbf{b}},$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 3. *Операторы* $\overline{\mathfrak{D}}$ *и* $\overline{\mathfrak{R}}$ *взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств* $\overline{\mathcal{C}}$ *и* $\overline{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Рассмотрим произведение $\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{D}}$:

$$\overline{\mathfrak{R}}\,\overline{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{P}}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\\ I-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q} + I - \overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q} = I.$$

С другой стороны с учетом свойств (13) и (19) имеем

$$\overline{\mathfrak{D}}\,\overline{\mathfrak{R}}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\\ I-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\mathfrak{P}}^T & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{P}}^T & \mathfrak{Q}\\ \overline{\mathfrak{P}}^T-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{P}}^T & I-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}+\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{b}}\\ \overline{\mathbf{b}}-\overline{\mathfrak{P}}^T\mathfrak{Q}\overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{\mathbf{a}}\\ \overline{\mathbf{b}}\end{pmatrix},$$

что и требовалось установить. □

Теорема 4. *Для сплайн-вэйвлетного уточнения (15) формулы реконструкции имеют вид*

$$\overline{c}_i=\begin{cases}\overline{a}_i & \textit{при}\;\; i\leqslant k-1,\\ \overline{b}_k+\overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\,\overline{a}_{k-1}+\overline{\mathfrak{p}}_{k,k}\,\overline{a}_k & \textit{при}\;\; i=k,\\ \overline{a}_{i-1} & \textit{при}\;\; i\geqslant k+1.\end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (20) и (21). □

4. Сплайн-вэйвлетное уточнение на отрезке. Согласно калибровочным соотношениям (9) справедливо включение

$$\mathbb{S}(X_n)\subset\mathbb{S}(\overline{X}_n).$$

Рассмотрим оператор $\overline{P}_n$ проектирования пространства $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ на подпространство $\mathbb{S}(X_n)$, задаваемый формулой

$$\overline{P}_n\,\overline{u}\overset{\text{def}}{=}\sum_{i\in J_{1,n-1}}\overline{a}_i\,\omega_i,\;\;\overline{a}_i\overset{\text{def}}{=}\langle f_i,\overline{u}\rangle\;\;\forall\,\overline{u}\in\mathbb{S}(\overline{X}_n),$$

и введем оператор $\overline{Q}_n=I-\overline{P}_n$, где I – тождественный в $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ оператор.

Пространство $\overline{W}_n\overset{\text{def}}{=}\overline{Q}_n\,\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ называется *пространством вэйвлетов (всплесков)*, а прямое разложение

$$\mathbb{S}(\overline{X}_n)=\mathbb{S}(X_n)\dotplus\overline{W}_n,\tag{22}$$

называется *сплайн-вэйвлетным уточнением* пространства $\mathbb{S}(\overline{X}_n)$.

В соответствии с равенством (22) для $\overline{u}\in\mathbb{S}(\overline{X}_n)$ имеем

$$\overline{u}=\sum_{i\in J_{1,n-1}}\overline{a}_i\,\omega_i+\sum_{i'\in J_{1,n}}\overline{b}_{i'}\,\overline{\omega}_{i'}=\sum_{i'\in J_{1,n}}\left(\sum_{i\in J_{1,n-1}}\overline{a}_i\,\overline{\mathfrak{p}}_{i,i'}+\overline{b}_{i'}\right)\overline{\omega}_{i'},$$

так что для чисел $\overline{c}_j \stackrel{\text{def}}{=} \langle \overline{f}_j, \overline{u}\rangle$ получаем

$$\overline{c}_j = \sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{a}_i\, \overline{\mathfrak{p}}_{i,j} + \overline{b}_j \quad \forall\, j \in J_{1,n}. \tag{23}$$

Пусть известны коэффициенты $\overline{c}_{i'}$ в разложении элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}_n)$ по элементам базиса $\overline{\omega}_{i'}$, а именно,

$$\overline{u} = \sum_{i'\in J_{1,n}} \overline{c}_{i'}\, \overline{\omega}_{i'}.$$

Из соотношений (23) имеем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \overline{a}_i \quad \forall\, j \in J_{1,n},$$

используя равенство $\overline{a}_i = \langle f_i, \overline{u}\rangle$, для всех $j \in J_{1,n}$ получаем

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \langle f_i, \sum_{i'\in J_{1,n}} \overline{c}_{i'}\, \overline{\omega}_{i'}\rangle =$$

$$= \overline{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n}} \overline{c}_{i'} \langle f_i, \overline{\omega}_{i'}\rangle = \overline{c}_j - \sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j} \sum_{i'\in J_{1,n}} \overline{c}_{i'}\, \mathfrak{q}_{i,i'}.$$

Формулы

$$\overline{a}_i = \sum_{i'\in J_{1,n}} \mathfrak{q}_{i,i'}\, \overline{c}_{i'} \quad \forall\, i \in J_{1,n-1}, \tag{24}$$

$$\overline{b}_j = \overline{c}_j - \sum_{i'\in J_{1,n}} \left(\sum_{i\in J_{1,n-1}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \mathfrak{q}_{i,i'} \right) \overline{c}_{i'} \quad \forall\, j \in J_{1,n}, \tag{25}$$

называются *формулами декомпозиции.*

Введем вектор-столбцы

$$\overline{\mathbf{a}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{a}_{-1}, \overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_{n-1})^T,$$

$$\overline{\mathbf{b}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{b}_{-1}, \overline{b}_0, \ldots, \overline{b}_n)^T,$$

$$\overline{\mathbf{c}}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{c}_{-1}, \overline{c}_0, \ldots, \overline{c}_n)^T$$

и перепишем формулы декомпозиции (24)–(25) в матричном виде

$$\overline{\mathbf{a}}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n, \quad \overline{\mathbf{b}}_n = \overline{\mathbf{c}}_n - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\, \overline{\mathfrak{Q}}_n\, \overline{\mathbf{c}}_n.$$

Применяя к предыдущему равенству матрицу $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ и используя формулу (14), получаем

$$\overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathbf{b}}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathbf{c}}_n - \overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathfrak{P}}_n^T\,\overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathbf{c}}_n = \mathbf{0}.$$

Итак, вектор $\overline{\mathbf{b}}_n$ содержится в ядре оператора $\overline{\mathfrak{Q}}_n : \overline{\mathbf{b}}_n \in \ker \overline{\mathfrak{Q}}_n$.

Рассмотрим линейный оператор из пространства $\overline{\mathcal{C}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_n$ в пространство $\overline{\mathcal{A}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{L}_{n-1}$, определяемый матрицей $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ в нем. Ядро этого оператора представляет собой линейное пространство; обозначим его через $\overline{\mathcal{B}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{\mathbf{b}}_n \mid \overline{\mathbf{b}}_n = (\bar{b}_{-1}, \bar{b}_0, \ldots, \bar{b}_n)^T,\ \overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathbf{b}}_n = 0\}$, т. е. $\overline{\mathcal{B}}_n = \ker \overline{\mathfrak{Q}}_n$.

Пусть $\overline{\mathcal{F}}_n$ — прямое произведение пространств $\overline{\mathcal{A}}_n$ и $\overline{\mathcal{B}}_n : \overline{\mathcal{F}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\mathcal{A}}_n \times \overline{\mathcal{B}}_n$, т. е.

$$\overline{\mathcal{F}}_n = \left\{ \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} \;\middle|\; \overline{\mathbf{a}}_n \in \overline{\mathcal{A}}_n,\ \overline{\mathbf{b}}_n \in \overline{\mathcal{B}}_n \right\}.$$

Рассмотрим оператор

$$\overline{\mathfrak{D}}_n :\ \overline{\mathcal{C}}_n \mapsto \overline{\mathcal{F}}_n, \quad \overline{\mathfrak{D}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\,\overline{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix},$$

для которого

$$\begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \overline{\mathfrak{D}}_n\,\overline{\mathbf{c}}_n = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{Q}}_n \\ I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\overline{\mathfrak{Q}}_n \end{pmatrix} \overline{\mathbf{c}}_n \iff \begin{cases} \overline{\mathbf{a}}_n = \overline{\mathfrak{Q}}_n\,\overline{\mathbf{c}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n = (I - \overline{\mathfrak{P}}_n^T\overline{\mathfrak{Q}}_n)\,\overline{\mathbf{c}}_n \end{cases},$$

этот оператор называется оператором *декомпозиции.*

Теорема 5. *Если $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, то для сплайн-вэйвлетного уточнения (22) формулы декомпозиции для $i \in J_{1,n-1}, j \in J_{1,n}$ имеют вид*

$$\bar{a}_i = \begin{cases} \bar{c}_i & \text{при } i \leqslant k-1, \\ \bar{c}_{i+1} & \text{при } i \geqslant k, \end{cases} \tag{26}$$

$$\bar{b}_j = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ \bar{c}_k - \bar{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\,\bar{c}_{k-1} - \bar{\mathfrak{p}}_{k,k}\,\bar{c}_{k+1} & \text{при } j = k. \end{cases} \tag{27}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 2, проведенному в конечномерном случае. □

Замечание 3. *Вэйвлетным базисом пространства* $\overline{W}_n$ *служит сплайн* $\overline{\omega}_k$, *т. е.* $\overline{W}_n = \{\overline{b}_k \,\overline{\omega}_k \mid \overline{b}_k \in \mathbb{R}^1\}$.

Пусть теперь известны коэффициенты $\overline{a}_i, i \in J_{1,n-1}$ и $\overline{b}_k$ в разложениях проекций элемента $\overline{u} \in \mathbb{S}(\overline{X}_n)$ на пространства $\mathbb{S}(X_n)$ и $\overline{W}_n$: $\overline{P}_n \,\overline{u} = \sum\limits_{i \in J_{1,n-1}} \overline{a}_i \,\omega_i$, $\overline{Q}_n \,\overline{u} = \overline{b}_k \,\overline{\omega}_k$. Найдем формулы для определения коэффициентов $\overline{c}_j$ для представления элемента $\overline{u}$ в виде суммы $\overline{u} = \sum\limits_{j \in J_{1,n}} \overline{c}_j \,\overline{\omega}_j$; упомянутые формулы называются *формулами реконструкции.*

Оператор $\overline{\mathfrak{R}}_n : \overline{\mathfrak{F}}_n \mapsto \overline{\mathfrak{C}}_n, \quad \overline{\mathfrak{R}}_n \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix}$, для которого

$$\overline{\mathbf{c}}_n = \overline{\mathfrak{R}}_n \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\mathfrak{P}}_n^T & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\mathbf{a}}_n \\ \overline{\mathbf{b}}_n \end{pmatrix} \iff \overline{\mathbf{c}}_n = \overline{\mathfrak{P}}_n^T \overline{\mathbf{a}}_n + \overline{\mathbf{b}}_n,$$

называется оператором *реконструкции.*

Теорема 6. *Операторы* $\overline{\mathfrak{D}}_n$ *и* $\overline{\mathfrak{R}}_n$ *взаимно обратны; они реализуют линейный изоморфизм пространств* $\overline{\mathfrak{C}}_n$ *и* $\overline{\mathfrak{F}}_n$.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 3. □

Теорема 7. *Если* $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}, i \in J_{1,n}$, *то для сплайн-вэйвлетного уточнения (22) формулы реконструкции имеют вид*

$$\overline{c}_i = \begin{cases} \overline{a}_i & \textit{при} \;\; i \leqslant k-1, \\ \overline{b}_k + \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} \,\overline{a}_{k-1} + \overline{\mathfrak{p}}_{k,k} \,\overline{a}_k & \textit{при} \;\; i = k, \\ \overline{a}_{i-1} & \textit{при} \;\; i \geqslant k+1. \end{cases}$$

Доказательство следует непосредственно из формул (26) и (27). □

Литература

1. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2005. 671 с.
2. **Sweldens W.** The lifting scheme: A construction of second generation wavelets // SIAM J. Math. Anal., Vol. 29, n. 2, 1997, 511-546.
3. **Демьянович Ю. К.** Всплески & минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2003. 200 с.

4. **Демьянович Ю. К.** Всплесковые разложения в пространствах сплайнов на неравномерной сетке // Докл. РАН. 2002. Т. 382, № 3. С. 313–316. *English transl.:* Dokl. Math. 65, 47—50 (2002).

5. **Демьянович Ю. К.** Гладкость пространств сплайнов и всплесковые разложения // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 4. С. 1–4. *English transl.:* Dokl. Math. 71, 220—224 (2005).

6. **Макаров А. А.** О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. Вып. 38. 2008. С. 47–60. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 156 (2009), no. 4, 617—631.

7. **Макаров А. А.** Один вариант сплайн-вэйвлетного разложения пространств B-сплайнов // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 10. 2009. Вып. 2. С. 59-71.

8. **Демьянович Ю. К., Косогоров О. М.** Сплайн-вэйвлетные разложения на открытом и замкнутом интервалах // Проблемы матем. анализа. Вып. 43. 2009. С. 69–86. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 164 (2010), no. 3, 383—402.

9. **Макаров А. А.** Кусочно-непрерывные сплайн-вэйвлеты на неравномерной сетке // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 14. С. 103—131.

10. **Макаров А. А.** Матрицы реконструкции и калибровочные соотношения для минимальных сплайнов // Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. — Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011. С. 39–52. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 178 (2011), no. 6, 605—621.

11. **Макаров А. А.** Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов // Труды СПИИРАН. 2011. Вып. 18. С.

12. **Макаров А. А.** О построении сплайнов максимальной гладкости // Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011. С. 25–38. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 178 (2011), no. 6, 589—604.

13. **Демьянович Ю. К.** Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

Макаров Антон Александрович — к.ф.-м.н.; ассистент кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: вычислительная математика, аппроксимация, интерполяция, сплайны, вэйвлеты, всплески, математические основы цифровой обработки сигналов, сжатие данных, параллельные алгоритмы, компьютерная геометрия. Число научных публикаций — 35. Antony.Makarov@gmail.com; СПбГУ, Университетский пр. д. 28, Петродворец, г. Санкт-Петербург, 198504, РФ.

Anton A. Makarov — PhD in Computer Science, Teaching assistant of Parallel Algorithms Department, St.-Petersburg State University. Research area: computational mathematics, approximation, interpolation, splines, wavelets, digital signal processing, data compression, parallel algorithms, computer aided geometric design. Number of publications — 35. Antony.Makarov@gmail.com; St.-Petersburg State University, Universitetsky pr., 28, Petrodvorets, St. Petersburg, 198504, Russia.

Поддержка исследований. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке КНВШ Правительства Санкт-Петербурга.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. Тулупьев А.Л., д.ф.-м.н., доцент.

Статья поступила в редакцию 15.09.2011.

РЕФЕРАТ

Макаров А. А. **Алгоритмы вэйвлетного уточнения пространств сплайнов первого порядка**

Сплайны и вэйвлеты (всплески) нашли широкое применение в теории информации. Вэйвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки больших потоков информации. Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то это ведет к вэйвлетному разложению потока информации и существенно экономит ресурсы вычислительных систем. Таким образом, исходный поток информации удается разложить на составляющие так, что можно выделить основной и уточняющий информационные потоки. Хорошо известны вэйвлетные разложения в случае равномерной сетки на вещественной оси. В этом случае применяется мощный аппарат гармонического анализа, используется лифтинговая схема или вэйвлетная схема.

Многие практические приложения требуют рассматривать ограниченный интервал и неравномерную сетку. Например, для эффективной обработки (уточнения) неоднородных потоков информации (имеющих сингулярности или быстро меняющиеся характеристики) целесообразно использовать адаптивную неравномерную сетку, учитывающую особенности обрабатываемого потока. Это позволяет улучшить приближение функций без усложнения вычислений. Полученные ранее результаты относились к случаям сплайнов на бесконечной сетке. Бесконечность рассматриваемой сетки и соответствующего числового потока облегчает теоретические исследования; однако, на практике, приходится иметь дело с конечными потоками. Данная работа продолжает исследования в конечномерных пространствах.

Цель данной работы — построить вэйвлетное разложение (уточнение) на неравномерной сетке и соответствующие алгоритмы декомпозиции и реконструкции в случаях бесконечного потока (с сеткой на открытом интервале) и конечного потока (с сеткой на отрезке) для сплайновых пространств первого порядка лагранжева типа.

SUMMARY

Makarov A. A. **A wavelet refinement algorithms of the first order spline spaces.**

Splines and wavelets are widely used in information theory. Wavelet decompositions are connected with constructing effective algorithms for processing large digital information flows. If regarded interval is equal to real line and a grid is uniform, one can apply the powerful tools of harmonic analysis, lifting scheme or wavelet scheme. For digital information flows with rapidly varying characteristics it is reasonable to use a nonuniform grid adapted to the flow under processing. This allows us to improve an approximation of functions without difficult calculations. The situation where a grid is nonuniform and regarded interval does not coincide with the real axis has not been studied well since methods of harmonic analysis are not easily applicable in this case.

The goal of this paper is to construct continuous spline of the first order of Lagrange type, to prove embedding of spaces of spline spaces for arbitrary refinement of grids, to provide a simple realization of the system of functionals biorthogonal to the coordinate splines, to obtain a wavelet decomposition of the chain of embedded spaces of splines for an arbitrary refinement of a nonuniform grid, and to derive the corresponding decomposition and reconstruction formulas, to construct wavelet decompositions and decomposition and reconstruction algorithms in the case of an infinite flow for a grid on an open interval and a finite flow for a grid on a segment.

Note that obtained splines are non-polynomial generalizations of B-splines. The splines include as a special case trigonometric, hyperbolic, and exponential splines.