

И.Г. БУРОВА
О МОДЕЛИРОВАНИИ
НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫХ
ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ПРИБЛИЖЕНИЙ

Бурова И.Г. О моделировании неполиномиальных интегро-дифференциальных приближений.

Аннотация. В статье обсуждается моделирование неполиномиальных интегро-дифференциальных сплайнов, интерполирующих функцию и ее производные в узлах сетки и обеспечивающих совпадение величины интеграла от аппроксимируемой функции и величины интеграла от сплайна по заданному промежутку. Построены разрывные, непрерывные, и непрерывно дифференцируемые предписанное число раз базисные сплайны, позволяющие решать задачу построения приближения в предположении, что кроме значений функции (и производных) в узлах сетки известны значения интегралов от приближаемой функции по сеточным интервалам. Приведены оценки погрешности и примеры сплайновых приближений.

Ключевые слова: сплайны, аппроксимация.

Burova I.G. About modelling nonpolynomial integro-differential approximations.

Abstract. the Summary. In this article the modelling of the nonpolynomial integro-differential splines is discussed. This splines interpolate function and its derivatives in knots of a grid and provide concurrence of integral size from approximated function and size of integral from spline on the set interval. Here explosive, continuous, and continuously differentiated several times basic splines are constructed. They allow to solve problems of the construction of approximation if we know the values of the function and its derivatives in knots of a grid and in the additional assumption that values of integrals from approached function on net intervals are known. Estimations errors are resulted and examples of splines are given.

Keywords: splines, approximation, modelling.

Моделирование поведения функции существенно зависит от используемой информации. В ряде случаев известны значения функции и, возможно, производных этой функции в узлах сетки и/или значения интегралов по одному или нескольким сеточным промежуткам от этой функции.

Для облегчения решения задачи моделирования часто используют локальные интерполяционные базисные сплайны, которые

позволяют по значениям функции (и производных) в узлах сетки восстановить с заданной погрешностью функцию в точках, не совпадающих с узлами интерполяции. Построенная таким образом модель учитывает локальные особенности исходной функции.

Если значения производных в узлах сетки не известны, то для улучшения аппроксимативных моделей можно использовать интегралы по одному или нескольким сеточным промежуткам от функции или применять соответствующие квадратурные формулы, так, чтобы порядок аппроксимации сохранялся. Модели такого вида (при наличии значений функции и интегралов по некоторым промежуткам) рассматривались в полиномиальном случае в работах В.И.Киреева (см. [1] и приведенный там список цитированной литературы).

Полиномиальные интерполяционные эрмитовы и лагранжевы приближения изучены в [2]. В этой работе построим неполиномиальные приближения, использующие кроме значений функции и производных в узлах сетки значения интегралов по сеточным интервалам.

Возьмем целое число $n \geq 2$ и построим на промежутке $[a, b]$ упорядоченную по возрастанию сетку узлов $\{x_k\}$, $k = 0, \dots, n$. В простейшем случае можно взять равномерную сетку узлов с шагом $h = (b - a)/n$. Если известны интегралы от приближаемой функции по одному или нескольким соседним промежуткам, то сплайновые приближения будем называть интегро-дифференциальными сплайнами (i-сплайнами).

1. О построении интегро-дифференциальных сплайнов

Пусть $i, \alpha, m, m_\alpha, l_\alpha, s_\alpha, n, p_1, p_2, q$ — целые неотрицательные числа, $l_\alpha \geq 1, s_\alpha \geq 1, m_i = s_i + l_i, m_0 + \dots + m_q + p_1 + p_2 = m, \{x_k\}$ — сетка упорядоченных узлов, конечная или бесконечная,

$$a < \dots < x_{k-1} < x_k < x_{k+1} \dots < b,$$

возможно $a = -\infty, b = +\infty$, функция $u \in C^m(a, b)$. В дальнейшем будем рассматривать сетку равноотстоящих узлов с шагом h . Пусть $\varphi_j, j = 1, \dots, m$ — чебышевская система на (a, b) , причем функции $\varphi_j \in C^m(a, b), j = 1, \dots, m$, строго монотонны и отличны от нуля на (a, b) . Для функции $u(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$

построим

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & \delta_1 \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} u^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \\ & + \delta_2 \sum_{i=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+i}} u(t) dt \omega_k^{<i>}(x) + \delta_3 \sum_{i=1}^{p_2} \int_{x_{k-i}}^{x_k} u(t) dt \omega_k^{<-i>}(x), \end{aligned}$$

где δ_i , $i = 1, 2, 3$ могут принимать значения нуль или единица. Далее полагаем $\delta_i = 1$, $i = 1, 2, 3$. Другие варианты изучаются аналогично. Базисные функции $\omega_{k,i}(x)$, $\omega_k^{<i'>}(x)$, относительно которых предполагаем что $\text{supp } \omega_{k,i} = [x_{k-s_i}, x_{k+l_i}]$, $i = 0, 1, \dots, q$, $\text{supp } \omega_k^{<i'>} = [x_k, x_{k+1}]$, будем определять из системы уравнений, которую в дальнейшем называем аппроксимационными тождествами:

$$\tilde{u}(x) = u(x), \quad u(x) = \varphi_\nu(x), \quad \nu = 1, \dots, m.$$

Через $\Phi(x)$ и $\Phi_{k,\alpha}(x_j)$ обозначим соответственно

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (\varphi_1(x), \dots, \varphi_m(x))^T, \\ \Phi_{k,\alpha}(x_j) &= (\varphi_1^{(\alpha)}(x_j), \dots, \varphi_m^{(\alpha)}(x_j))^T. \end{aligned}$$

Через $\Psi_{k,\alpha}$, $S\Phi_{p_1}$, $S\Phi_{p_2}$ обозначим группы столбцов

$$\begin{aligned} \Phi_{k,\alpha} &= (\Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha})), \\ S\Phi_{p_1} &= (\int_{x_k}^{x_{k+1}} \Phi(t) dt, \dots, \int_{x_k}^{x_{k+p_1}} \Phi(t) dt), \\ S\Phi_{p_2} &= (\int_{x_{k-1}}^{x_k} \Phi(t) dt, \dots, \int_{x_{k-p_2}}^{x_k} \Phi(t) dt). \end{aligned}$$

Теперь определитель системы уравнений примет вид

$$\Delta = |\Psi_{k,0}, \dots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}|.$$

В ряде случаев определитель может обращаться в нуль. Например, следующий определитель

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x_{j+1} - x_j \\ x_{j-1} & x_j & x_{j+1} & (x_{j+1}^2 - x_j^2)/2 \\ x_{j-1}^2 & x_j^2 & x_{j+1}^2 & (x_{j+1}^3 - x_j^3)/3 \\ x_{j-1}^3 & x_j^3 & x_{j+1}^3 & (x_{j+1}^4 - x_j^4)/4 \end{vmatrix} = \\ & = (x_{j+1} - x_{j-1})(x_j - x_{j-1})(x_{j+1} - x_j)^4(x_j + x_{j+1} - 2x_{j-1})/12 \end{aligned}$$

равен $- .391000e - 10$ при $x_{j-1} = 1.05$, $x_j = 1.07$, $x_{j+1} = 1.1$.

Предположим, что при выбранных значениях параметров определитель отличен от нуля. Тогда базисные функции $\omega_{j,\alpha}(x)$,

$\omega_j^{<i'>}(x)$ можно найти по формулам Крамера. В частности, для определения базисной функции $\omega_{k,\alpha}(x)$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$ имеем соотношение

$$\omega_{k,\alpha}(x) = |\Psi_{k,0}, \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-l_\alpha+1}), \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k-1}), \Phi(x), \Phi_{k,\alpha}(x_{k+1}), \dots, \dots, \Phi_{k,\alpha}(x_{k+s_\alpha}), \dots, \Psi_{k,q}, S\Phi_{p_1}, S\Phi_{p_2}|/\Delta.$$

Нетрудно заметить, что построенные таким образом базисные сплайны $\omega_{j,\alpha}(x)$, $\omega_j^{<i'>}(x)$ и приближение $\tilde{u}(x)$ обладают следующими свойствами:

- 1) на концах каждого промежутка $[x_k, x_{k+1}]$: $u^{(\alpha)}(x_k) = \tilde{u}^{(\alpha)}(x_k)$, $u^{(\alpha)}(x_{k+1}) = \tilde{u}^{(\alpha)}(x_{k+1})$, $\alpha = 0, 1, \dots, q$, $\tilde{u} \in C^q[a, b]$;
- 2) $\int_{x_k}^{x_{k+q}} u(t) dt = \int_{x_k}^{x_{k+q}} \tilde{u}(t) dt$, $q = 1, \dots, p_1$,
 $\int_{x_{k-q}}^{x_k} u(t) dt = \int_{x_{k-q}}^{x_k} \tilde{u}(t) dt$, $q = 1, \dots, p_2$;
- 3) $|\omega_k^{<\gamma>}(x)| \leq K_0/h$, $|\omega_{j,\alpha}(x)| \leq K_1 h^\alpha$, K_0, K_1 — некоторые постоянные.

2. Построение решения ассоциированного дифференциального уравнения и оценка погрешности. Вначале покажем, как получить удобное представление $u(x)$ для получения оценки погрешности приближения. Пусть M — целое число. Построим однородное линейное уравнение, имеющее фундаментальную систему решений $\varphi_1(x), \dots, \varphi_M(x)$.

В соответствии с разделом 6.2.10 книги [3], при $x \in [x_j, x_{j+1}] \subset [a, b]$ составим соотношение

$$\begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \dots & \varphi_M(x), & u(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \dots & \varphi_M'(x), & u'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(M)}(x), & \varphi_2^{(M)}(x), & \dots & \varphi_M^{(M)}(x), & u^{(M)}(x) \end{vmatrix} = 0.$$

Определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \dots & \varphi_M(x) \\ \varphi_1'(x), & \varphi_2'(x), & \dots & \varphi_M'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(M-1)}(x), & \varphi_2^{(M-1)}(x), & \dots & \varphi_M^{(M-1)}(x) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Разлагая определитель по элементам последнего столбца и деля все члены полученного уравнения на $W(x)$, получим искомое уравнение

$$Lu = u^{(M)}(x) + p_1(x)u^{(M-1)}(x) + \dots + p_M(x)u(x) = 0.$$

Построим теперь общее решение неоднородного уравнения $Lu = f(x)$ методом вариации произвольных постоянных. Положим

$$u(x) = \sum_{i=1}^M C_i(x)\varphi_i(x).$$

Для определения $C_i(x)$ имеем систему M дифференциальных уравнений первого порядка

$$\sum_{i=1}^M C'_i(x)\varphi_i(x) = 0,$$

$$\sum_{i=1}^M C'_i(x)\varphi_i^{(k)}(x) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, M-2,$$

$$\sum_{i=1}^M C'_i(x)\varphi_i^{(M-1)}(x) = f(x).$$

Получаем

$$C'_i(x) = \frac{W_{Mi}(x)f(x)}{W(x)},$$

где $W_{Mi}(x)$ — алгебраические дополнения элементов n -й строки определителя $W(x)$. Находим

$$C_i(x) = \int_{\eta}^x \frac{W_{Mi}(t)f(t)}{W(t)} dt + c_i,$$

где c_i — произвольные постоянные, а η — точка из промежутка $[x_j, x_{j+1}]$. Итак, вспоминая, что $f = Lu$, получаем

$$u(x) = \sum_{i=1}^M \varphi_i(x) \int_{\eta}^x \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(x).$$

Теперь перейдем к оценке $|\tilde{u}(x) - u(x)|$. Для определенности возьмем $\delta_i = 1, i = 1, 2, \delta_3 = 0,$.

Нетрудно заметить, что справедливы следующие равенства

$$\sum_{i=1}^M c_i \left(\sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_{\alpha}+1}^{k+s_{\alpha}} \varphi^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{i=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+i}} \varphi(t) dt \omega_k^{<i>}(x) \Big) = \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i(x), \\
& \sum_{i=1}^M \varphi_i^{(\alpha)}(x) W_{Mi}(x) = 0, \quad \alpha = 1, \dots, q.
\end{aligned}$$

Нам потребуются $u^{(\alpha)}(x)$. Имеем в виду последнего равенства

$$u^{(\alpha)}(x) = \sum_{i=1}^M \varphi_i^{(\alpha)}(x) \int_{\eta}^x \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt + \sum_{i=1}^M c_i \varphi_i^{(\alpha)}(x).$$

Представляя $\varphi_i(x_k)$ с помощью формулы Тейлора:

$$\varphi_i(z) = \sum_{l=1}^M \frac{\varphi_i^{(l-1)}(t)}{(l-1)!} (z-t)^{l-1} + (z-t)^M \frac{\varphi_i^{(M)}(\tau_i)}{(M)!},$$

где τ_i = находится между z и t , получаем

$$\varphi_i^{(\alpha)}(z) = \sum_{l=\alpha}^M \frac{\varphi_i^{(\alpha)}(t)}{(l-\alpha)!} (z-t)^{l-\alpha} + (z-t)^{M-\alpha} \frac{\varphi_i^{(M)}(\xi_i)}{(M-\alpha)!}.$$

Принимая во внимание эти соотношения и полагая $\eta = x$, получаем при $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$\begin{aligned}
\tilde{u}(x) - u(x) &= \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} u^{(\alpha)}(x_j) \omega_{j,\alpha}(x) + \\
&+ \sum_{\gamma=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+\gamma}} u(z) dz \omega_k^{<\gamma>}(x) - u(x) = \\
&= \sum_{\alpha=0}^q \sum_{j=k-l_\alpha+1}^{k+s_\alpha} \sum_{i=1}^M \int_x^{x_j} \frac{\varphi_i^{(M)}(\xi_i)}{(M-\alpha)!} (x_j-t)^{M-\alpha} \frac{W_{Mi}(t) Lu(t)}{W(t)} dt \omega_{j,\alpha}(x) + \\
&+ \sum_{\gamma=1}^{p_1} \int_{x_k}^{x_{k+\gamma}} \int_x^z \frac{\varphi_i^{(M)}(\zeta_i)}{M!} (z-t)^M dt dz \omega_k^{<\gamma>}(x),
\end{aligned}$$

ξ_i — находится между x и x_j , ζ_i — находится между x и z . С учетом $|\omega_k^{<\gamma>}(x)| \leq K_0/h$, $|\omega_{j,\alpha}(x)| \leq K_1 h^\alpha$, K_0, K_1 — некоторые постоянные, получаем при $x \in [x_k, x_{k+1}]$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^M K \|Lu\|, \quad K > 0.$$

Здесь $\|f\| = \max_{x \in [x_{k-M}, x_{k+M}]} |f(x)|$.

В частности, при $\varphi_i = x^{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, M$, имеем

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq h^M K \|u^{(M)}\|, \quad K > 0.$$

Далее приведем несколько простых примеров.

3. Построение i-сплайнов при $\delta_1 = 0$, $\delta_2 = \delta_3 = 1$. Рассмотрим построение i-сплайнов второго порядка при $p_1 = 1$, $p_2 = 1$. Пусть известны $\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx$ и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, в виде

$$\tilde{u}(x) = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx \omega_k^{<-1>}(x) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \omega_k^{<1>}(x).$$

Здесь $\omega_k^{<i>}(x)$, $i = -1, 1$, определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x),$$

при $u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x)$, где $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2$ — чебышевская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i(x) dx \omega_k^{<-1>}(x) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x) dx \omega_k^{<1>}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2.$$

Определитель этой системы для полиномиальных базисных функций

$$\begin{vmatrix} x_{k+1} - x_k & x_k - x_{k-1} \\ (x_{k+1}^2 - x_k^2)/2 & (x_k^2 - x_{k-1}^2)/2 \end{vmatrix}$$

равен $(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/2$. При $x_j \neq x_k$, $j \neq k$, определитель отличен от нуля.

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = x$ получаем

$$\omega_k^{<-1>}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 - 2t), \quad \omega_k^{<1>}(th + x_k) = \frac{1}{2h}(1 + 2t).$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$$

и

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq Kh^2 \|u''\|, \quad K > 0,$$

если $u'' \in C[a, b]$.

Если значения интегралов неизвестны, то для сохранения порядка аппроксимации в данном случае можно использовать квадратурную формулу трапеций

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \approx \frac{u(x_{k+1}) - u(x_k)}{2}(x_{k+1} - x_k),$$

$$\int_{x_k}^{x_{k-1}} u(x)dx \approx \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{2}(x_k - x_{k-1}).$$

При $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = e^x$ получаем $\Delta = x_{k+1}(e^{x_k} - e^{x_{k-1}}) + x_k(e^{x_{k-1}} - e^{x_{k+1}}) - x_{k-1}(e^{x_{k+1}} - e^{x_k})$,

$$\omega_k^{<1>}(th + x_k) = \frac{1 - e^h + he^{h+th}}{h(e^h - 1)^2},$$

$$\omega_k^{<-1>}(th + x_k) = \frac{e^h(-he^h - 1 + e^h)}{h(e^h - 1)^2}.$$

Рассмотрим теперь построение i-сплайнов при $p_1 = 2$, $p_2 = 2$.

Пусть известны $I^{<-1>} = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx$, $I^{<-2>} = \int_{x_{k-2}}^{x_k} u(x)dx$, $I^{<1>} = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$ и $I^{<2>} = \int_{x_k}^{x_{k+2}} u(x)dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ строим отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$ в виде

$$\tilde{u}(x) = I^{<-1>} \omega_k^{<-1>}(x) + I^{<-2>} \omega_k^{<-2>}(x) +$$

$$+I^{<1>} \omega_k^{<1>}(x) + I^{<2>} \omega_k^{<2>}(x),$$

где в полиномиальном случае

$$\omega_k^{<1>}(th + x_k) = -(-4 - 8t + 3t^2 + 4t^3)/(6h),$$

$$\omega_k^{<-1>}(th + x_k) = (-8t + 4t^3 - 3t^2 + 4)/(6h),$$

$$\omega_k^{<2>}(th + x_k) = (-1 - t + 3t^2 + 2t^3)/(12h),$$

$$\omega_k^{<-2>}(th + x_k) = -(1 - t - 3t^2 + 2t^3)/(12h).$$

Определитель этой системы равен $(-x_{k-2} + x_{k+2})(-x_{k-2} + x_{k-1})(x_{k-1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-2})(x_{k+1} - x_{k+2})(x_{k+1} - x_{k-1})(x_k - x_{k-2})(x_k - x_{k+2})(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})/24$. При различных узлах интерполяции он отличен от нуля. Нетрудно заметить, что

$$\int_{x_{k-i}}^{x_k} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_{k-i}}^{x_k} u(x)dx, \quad i = 1, 2,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+i}} \tilde{u}(x)dx = \int_{x_k}^{x_{k+i}} u(x)dx, \quad i = 1, 2,$$

и при условии $u'''' \in C[a, b]$ справедливо

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq Kh^4 \|u''''\|, \quad K > 0.$$

4. Построение непрерывных квадратичных сплайнов.

Пусть $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0$, $q = 0$, $l_0 = s_0 = 1$, $p_1 = 1$. Если использовать еще значения функции в узлах сетки, то получим непрерывные приближения. Рассмотрим построение квадратичных интегро-неполиномиальных сплайнов.

Пусть известны $u(x_k)$ — значения функции $u(x)$ в точках x_k, x_{k+1} и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$. Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \omega_k^{<1>}(x), \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь $\omega_{j,0}(x)$, $j = k, k + 1$, $\omega_k^{<1>}(x)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x),$$

при $u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$, где $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$ — чебышевская система на $[x_k, x_{k+1}]$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x) dx \omega_k^{<1>}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Обозначим $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))^T$,

$$S\Phi = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x) dx \right)^T,$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), S\Phi|,$$

а базисные функции определяются соотношениями

$$\omega_{k,0}(x) = |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta,$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x), S\Phi| / \Delta,$$

$$\omega_{k,1}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x)| / \Delta.$$

Построенные таким образом сплайны обладают свойствами:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx, \quad u(x_k) = \tilde{u}(x_k).$$

Выпишем формулы базисных функций на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$.

1. При $\varphi_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, 3$, получаем $\Delta = -(x_k - x_{k+1})^4 / 6$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{1}{h^2} (-h + 3(x - x_k)(x - x_{k+1})),$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{1}{h^2} (x - x_k)(3(x - x_k) - 2h),$$

$$\omega_k^{<1>}(x) = -\frac{6}{h^3}(x - x_k)(x - x_{k+1}).$$

При $t \in [0, 1]$ имеем

$$\omega_{k,0}(x_k + th) = (-1 + 3t)(-1 + t),$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = t(3t - 2),$$

$$\omega_k^{<1>}(x_k + th) = -6t(-1 + t)/h.$$

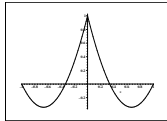
2. При $\varphi_1(x) = 1$, $\varphi_2(x) = \sin(x)$, $\varphi_3(x) = \cos(x)$ получаем $\Delta = 2(1 - \cos(x_k - x_{k+1})) + (x_{k+1} - x_k)\sin(x_k - x_{k+1})$,

$$\omega_{k,0}(x) = \frac{(\cos(h) - 1 - h \sin(x - x_{k+1}) - \cos(x - x_k) + \cos(x - x_{k+1}))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))},$$

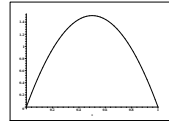
$$\omega_{k+1,0}(x) = \frac{(\cos(x - x_k) - \cos(x - x_{k+1}) + h \sin(x - x_k) - 1 + \cos(h))}{(2\cos(h) - 2 + h \sin(h))},$$

$$\omega_k^{<1>}(x) = \frac{(\sin(x - x_{k+1}) + \sin(h) - \sin(x - x_k))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))}.$$

Если получить формулу $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_{k-1}, x_k]$ и, объединить с формулой для $\omega_{k,0}$ на промежутке $[x_k, x_{k+1}]$, то получим выражение для базисного сплайна $\omega_{k,0}$, заданного на $[x_{k-1}, x_{k+1}]$. На рис.1 приведены графики тригонометрических базисных функций $\omega_{k,0}$ и $\omega_k^{<1>}$ при $h = 1$.



а) $\omega_{k,0}(t)$



б) $\omega_k^{<1>}(t)$

Рис. 1: графики функций $\omega_{k,0}(t)$ и $\omega_k^{<1>}(t)$.

Нетрудно заметить, что при $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \omega_{k,0}(th + x_k) &= \frac{(\cos(h) - 1 - h\sin(th - h) - \cos(th) + \cos(th - h))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))} = \\ &= (3t^2 - 4t + 1) + O(h) = (3t - 1)(t - 1) + O(h), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_{k+1,0}(th + x_k) &= \frac{(\cos(th) - \cos(th - h) + h\sin(th) - 1 + \cos(h))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))} = \\ &= (3t^2 - 2t) + O(h) = t(3t - 2) + O(h), \\ \omega_k^{<1>}(th + x_k) &= \frac{(\sin(th - h) + \sin(h) - \sin(th))}{(2\cos(h) - 2 + h\sin(h))} = \\ &= (3t^2 - 4t + 1) + O(h) = -6t(t - 1)/h + O(h).\end{aligned}$$

Для квадратичных сплайнов, приведенных в этом пункте, справедливы свойства

$$\begin{aligned}\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x)dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx, \\ \tilde{u}(x_j) &= u(x_j), j = 0, \dots, n.\end{aligned}$$

Если $u''' \in C[a, b]$, то для полиномиальной системы

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_1 h^3 \|u'''\|, \quad K_1 > 0,$$

а для тригонометрической системы оценка погрешности приближения имеет вид

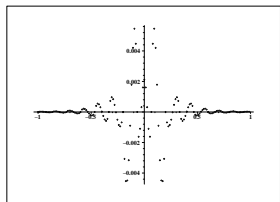
$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_2 h^3 \|u''' + u'\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]}, \quad K_2 > 0.$$

Для улучшения качества приближения хорошо применять адаптивную сетку узлов. Для этого вычислим длину L_{k-1} хорды, соединяющей точки $(x_{k-1}, u(x_{k-1}))$ и $(x_k, u(x_k))$. Точку (x_{k+1}) определим так, чтобы длина L_k хорды, соединяющей точки $(x_k, u(x_k))$ и $(x_{k+1}, u(x_{k+1}))$ была равна L_{k-1} . Решив нелинейное уравнение

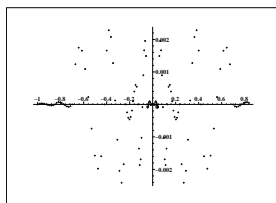
$$\sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (u(x_k) - u(x_{k-1}))^2} = \sqrt{(X - x_k)^2 + (u(X) - u(x_k))^2},$$

находим X и берем $x_{k+1} = X$. Например, для функции $\frac{1}{1+25t^2}$ построим адаптивную сетку узлов: $x_0 = -1, x_1 = -.85, x_2 = -.7, x_3 = -.419, x_4 = -.233, x_5 = -.128, x_6 = -.05, x_7 = -.02, x_8 = 0., x_9 = 0.02, x_{10} = 0.05, x_{11} = .128, x_{12} = .233, x_{13} = .419, x_{14} = .7, x_{15} = .85, x_{16} = 1.$

Результаты аппроксимации тригонометрическими сплайнами функции $\frac{1}{1+25t^2}$ на равномерной сетке, построенной на промежутке $[-1, 1]$ при $n = 15$, и адаптивной сетке при $n = 16$ приведены на рис. 2.



а) График погрешности приближения функции на равномерной сетке



б) График погрешности приближения на адаптивной сетке

Рис. 2: Графики погрешностей приближения функции $\frac{1}{1+25t^2}$ квадратичными тригонометрическими сплайнами

5. Построение кубических сплайнов при $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 1$, $q = 1$. Пусть известны $u(x_k)$ — значения функции $u(x)$ в точках x_k и $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$, $\int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \omega_k^{<1>}(x) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx \omega_k^{<-1>}(x), \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\omega_{j,0}(x)$, $\omega_k^{<i>}$, $j = k, k+1$, $i = -1, 1$ определяются из системы уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x),$$

при $u(x) = \varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x)dx \omega_k^{<1>}(x) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_i(x)dx \omega_k^{<-1>}(x) = \varphi_i(x), \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть φ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ — чебышевская на $[x_k, x_{k+1}]$. Обозначим $\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x))^T$,

$$S\Phi_1 = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_4(x) dx \right)^T,$$

$$S\Phi_2 = \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_1(x) dx, \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_2(x) dx, \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_3(x) dx, \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_4(x) dx \right)^T,$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), S\Phi_1, S\Phi_2|,$$

а базисные функции определяются из соотношений

$$\omega_{k,0}(x) = |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), S\Phi_1, S\Phi_2| / \Delta,$$

$$\omega_{k+1,0}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x), S\Phi_1, S\Phi_2| / \Delta,$$

$$\omega_k^{<1>}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x), S\Phi_2| / \Delta,$$

$$\omega_k^{<-1>}(x) = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), S\Phi_2, \Phi(x)| / \Delta.$$

Построенные таким образом сплайны обладают свойствами:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x) dx,$$

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx, \quad u(x_k) = \tilde{u}(x_k).$$

Примеры базисных функций на $[x_k, x_{k+1}]$.

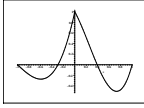
1. $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4$.

$\Delta = (x_{k+1} - x_{k-1})^2 (x_k - x_{k-1})^2 (x_k - x_{k+1})^4 / 24$, Нетрудно заметить, что при $t \in [0, 1]$

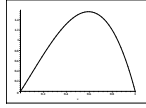
$$\omega_{k,0}(x_k + th) = -(t-1)(2t^2 - 4t + 1),$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = -t(4t^2 - 9t + 4),$$

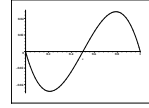
$$\omega_k^{<1>}(x_k + th) = \frac{4t(t-1)(t-2)}{h},$$



а)



б)



в)

Рис. 3: базисные полиномиальные сплайны при $h = 1$: а) $\omega_{k,0}^{<-1>}(t)$, б) $\omega_k^{<1>}(t)$, в) $\omega_k^{<-1>}(t)$.

$$\omega_k^{<-1>}(x_k + th) = \frac{t(2t-1)(t-1)}{2h},$$

2. В случае $\varphi_k(x) = e^{(k-1)x}$, $k = 1, 2, 3, 4$, получаем на равномерной сетке узлов с шагом h : $\Delta = \frac{h}{6} \exp(6x_k + 5h) + \frac{h}{3} \exp(6x_k - 2h) - \frac{1}{3} \exp(6x_k + 3h) + \frac{1}{6} \exp(6x_k) - \frac{5h}{6} \exp(6x_k - h) + \frac{1}{6} \exp(6x_k - 3h) - \frac{7h}{3} h \exp(6x_k + 2h) - \frac{1}{6} \exp(6x_k + 2h) + \frac{1}{3} \exp(6x_k - h) - \frac{2}{3} h \exp(6x_k + 4h) - \frac{1}{2} \exp(6x_k - 2h) + \frac{1}{2} \exp(6x_k + 4h) + \frac{3h}{2} \exp(6x_k + 3h) + \frac{11h}{6} \exp(6x_k + h) - \frac{1}{6} \exp(6x_k + 5h)$,

$$\begin{aligned} \omega_{k,0}(x_k + th) &= (e^h - e^{th})(-e^{5h} + 2e^{4h} - 2e^{th+4h} + 2he^{th+4h} + \\ &+ he^{3h+th} + e^{3h+th} + 3e^{2th+2h} - 2e^{2h} - 3he^{2th+2h} + \\ &+ e^h + he^{th+h} - e^{th+h} + 2e^{th} - 3e^{2th}h - 3e^{2th} + \\ &+ 2e^{th}h)/((e^h - 1)^2(-e^{4h} + 2e^{3h}h - e^{3h} + \\ &+ 3e^{2h}h + e^h + 1 + h)) = -(t-1)(2t^2 - 4t + 1) + O(h), \\ \omega_{k+1,0}(x_k + th) &= e^h(e^{th} - 1)(3e^{2th}h - 3he^{2th+2h} - 6he^{2th+h} - 3e^{2th+h} + \\ &+ 3e^{2th+3h} + 2e^{th+2h} - 2e^{th+4h} + 2he^{th+4h} + 4he^{3h+th} - e^{th+h} - \\ &- 2e^{5h+th} + 3he^{th+2h} - 2he^{th+h} - e^{th}h + 3e^{3h+th} + e^{6h} - e^{5h} + \\ &+ 2e^{3h} + e^{2h} - 2e^{4h} - e^h)/((e^h - 1)^2(-e^{4h} + \\ &+ 2e^{3h}h - e^{3h} + 3e^{2h}h + e^h + 1 + h)) = -t(4 - 9t + 4t^2) + O(h), \\ \omega_k^{<1>}(x_k + th) &= e^h(e^{th} - 1)(e^h - e^{th})(-2e^{6h} + 3e^{5h} + \\ &+ 3e^{th+4h} + 3e^{4h} - 6e^{3h+th} - 6e^{3h} - 6e^{th+2h} + 12he^{th+h} + \\ &+ 6e^{th+h} + 3e^h + 3e^{th} - 1)/((e^h - 1)^3(-e^{4h} + 2e^{3h}h - e^{3h} + 3e^{2h}h + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^h + 1 + h)) = \frac{4t(t-1)(-2+t)}{h} + O(h), \\
\omega_k^{<-1>}(x_k + th) &= -e^h(e^{th} - 1)(eh - e^{th})(e^{3h} - 3e^{th+2h} - 3e^{2h} + \\
& + 6he^{th+h} + 3e^h + 3e^{th} - 1)/((e^h - 1)^3(-e^{4h} + 2e^{3h}h - e^{3h} + \\
& + 3e^{2h}h + e^h + 1 + h)) = \frac{1}{2h}t(t-1)(-1+2t) + O(h).
\end{aligned}$$

Графики базисных функций приведены на рис. 4.

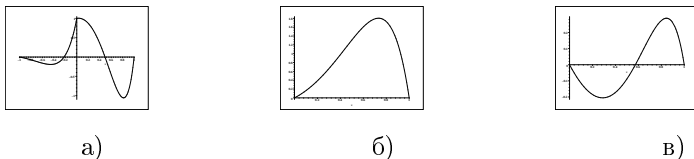
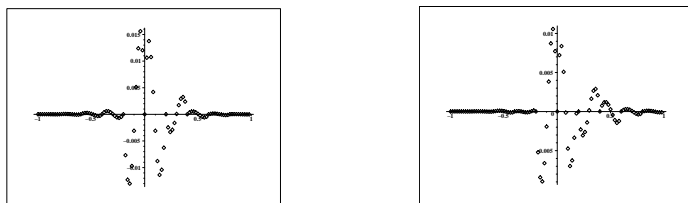


Рис. 4: базисные экспоненциальные сплайны: а) $\omega_{k,0}(t)$, б) $\omega_k^{<1>}(t)$, в) $\omega_k^{<-1>}(t)$.

Результаты аппроксимации функции $\frac{1}{1+25t^2}$ полиномиальными и экспоненциальными сплайнами на равномерной сетке узлов, построенной на промежутке $[-1, 1]$ при $n = 10$, приведены на рис. 5.



а) График погрешности при использовании полиномиальных сплайнов
б) График погрешности при использовании экспоненциальных сплайнов

Рис. 5: Графики погрешностей при использовании кубических сплайнов на равномерной сетке узлов

Оценка погрешности полиномиальными кубическими сплайнами имеет вид

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_3 h^4 \|u''''\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]},$$

где $K_3 > 0$ — некоторая постоянная. Оценка погрешности экспоненциальными кубическими сплайнами имеет вид

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_4 h^4 \|u'''' - 6u''' + 11u'' - 6u'\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]},$$

$K_4 > 0$ — некоторая постоянная.

6. Построение непрерывно дифференцируемых интегро-дифференциальных сплайнов. Пусть $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 0$, $q = 1$. Известны $u(x_k)$ и $u'(x_k)$ — значения функции $u(x)$ и ее первой производной в точках x_k , а также $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx \omega_k^{<1>}(x), \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\omega_{j,i}(x)$, $i = 0, 1$, $j = k, k+1$, $\omega_k^{<1>}(x)$ определяются из системы уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x),$$

при $u(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, 5$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & \varphi'_i(x_k)\omega_{k,1}(x) + \varphi'_i(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x) dx \omega_k^{<1>}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Пусть φ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5$ — чебышевская на $[x_k, x_{k+1}]$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x), \varphi_5(x))^T, \\ \Phi'(x) &= (\varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \varphi'_3(x), \varphi'_4(x), \varphi'_5(x))^T \end{aligned}$$

$$S\Phi = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x) dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x) dx \right)^T,$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), S\Phi|,$$

а базисные функции имеют вид

$$\begin{aligned}\omega_{k,0}(x) &= |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), S\Phi|/\Delta, \\ \omega_{k+1,0}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), S\Phi|/\Delta, \\ \omega_{k,1}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x), \Phi'(x_{k+1}), S\Phi|/\Delta, \\ \omega_{k+1,1}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi(x), S\Phi|/\Delta, \\ \omega_{k,2}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi(x)|/\Delta.\end{aligned}$$

Построенные сплайны обладают свойствами:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx, \quad \tilde{u}(x_k) = u(x_k), \quad \tilde{u}'(x_k) = u'(x_k).$$

Примеры базисных функций.

1. При $\varphi_i(x) = x^{i-1}$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, получаем

$$\Delta = (x_k - x_{k+1})^9/30,$$

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = -(5t + 1)(3t - 1)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,0}(th + x_k) = -t^2(3t - 2)(5t - 6),$$

$$\omega_{k,1}(th + x_k) = -\frac{th}{2}(-2 + 5t)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,1}(th + x_k) = -\frac{t^2h}{2}(5t - 3)(t - 1),$$

$$\omega_k^{<1>}(th + x_k) = \frac{30t^2}{h}(t - 1)^2.$$

В случае, если приближение $\tilde{u}(x)$ на сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, берем в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x) &= u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ &+ u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) +\end{aligned}$$

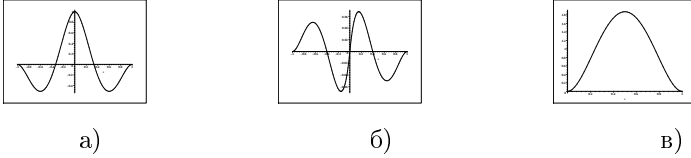


Рис. 6: базисные полиномиальные сплайны (4): а) $\omega_{k,0}(t)$, б) $\omega_{k,1}(t)$, в) $\omega_k^{<1>}(t)$.

$$+ \int_{x_k}^{x_{k+2}} u(x) dx \omega_k^{<2>}(x), \quad (4)$$

то определитель системы равен $\Delta = 1/30(x_k - x_{k+2})^3(x_k - x_{k+1})^4(x_k^2 - 5x_k x_{k+1} + 3x_{k+2} x_k + 10x_{k+1}^2 + 6x_{k+2}^2 - 15x_{k+2} x_{k+1})$, отсюда на равномерной сетке с шагом h $\Delta = -16h^9/15$, а $\omega_{j,i}(x)$, $i = 0, 1, 2$, $j = k, k + 1$, определяются так

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = -\frac{1}{8}(15t^2 - 16t - 8)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,0}(th + x_k) = -t^2(2t - 3),$$

$$\omega_{k,1}(th + x_k) = -\frac{1}{8}th(-8 + 5t)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,1}(th + x_k) = -\frac{1}{4}t^2h(t - 1)(5t - 9),$$

$$\omega_k^{<1>}(th + x_k) = \frac{15t^2}{16h}(t - 1)^2.$$

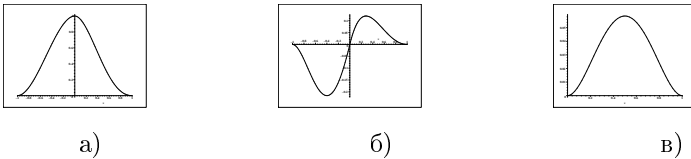


Рис. 7: базисные полиномиальные сплайны (3): а) $\omega_{k,0}(t)$, б) $\omega_{k,1}(t)$, в) $\omega_k^{<2>}(t)$.

Для данных сплайнов справедливо неравенство с некоторой константой $K_5 > 0$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_5 h^5 \|u^{(5)}\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]}$$

В случае, если приближение $\tilde{u}(x)$ на сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$, берем в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \omega_k^{<1>}(x) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx \omega_k^{<-1>}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+2}} u(x)dx \omega_k^{<2>}(x) + \int_{x_{k-2}}^{x_k} u(x)dx \omega_k^{<-2>}(x), \end{aligned} \quad (5)$$

то $\Delta = -\frac{1}{10080}(x_{k+1} - x_{k-2})^3(x_{k+2} - x_{k-2})(-x_{k+2} + x_{k+1})^3(x_k - x_{k-2})^3(x_k - x_{k+1})^9(x_k - x_{k+2})^3(-x_{k-1} + x_{k+1})^3(x_{k-1} - x_{k-2})(x_{k-1} - x_{k+2})(x_k - x_{k-1})^3$, далее

$$\omega_{k,0}(x_k + th) = \frac{1}{4}(16t^5 + 11t^4 - 54t^3 - 39t^2 + 8t + 4)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = \frac{1}{36}t^2(136t^5 - 161t^4 - 510t^3 + 575t^2 + 272t - 276),$$

$$\omega_k^{<1>}(x_k + th) = -\frac{t^2}{216h}(-4332 - 5672t + 1293t^2 + 1784t^3)(t - 1)^2,$$

$$\omega_k^{<-1>}(x_k + th) = \frac{t^2}{24h}(12 - 24t - 5t^2 + 8t^3)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k,1}(x_k + th) = \frac{1}{4}th(-4t - 14t^2 + t^3 + 4 + 4t^4)(t - 1)^2,$$

$$\omega_{k+1,1}(x_k + th) = -\frac{1}{12}t^2h(t - 1)(-4t - 29t^2 + t^3 + 12 + 8t^4),$$

$$\omega_k^{<2>}(x_k + th) = \frac{t^2}{48h}(-3 + 8t^2 + 4t^3)(t - 1)^2,$$

$$\omega_k^{<-2>}(x_k + th) = -\frac{t^2}{432h}(2t - 1)(2t^2 - 2t - 3)(t - 1)^2.$$

7. Построение дважды непрерывно дифференцируемых интегро-дифференциальных сплайнов. Пусть $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = 1$, $\delta_3 = 1$, $q = 2$. Пусть известны $u(x_k)$, $u'(x_k)$ и $u''(x_k)$ — значения функции $u(x)$, ее первой и второй производной соответственно в точках x_k , а также $\int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx$.

Приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & + u''(x_k)\omega_{k,2}(x) + u''(x_{k+1})\omega_{k+1,2}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \omega_k^{<1>}(x), \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь $\omega_{j,i}(x)$, $i = 0, 1, 2$, $j = k, k + 1$, определяются из системы уравнений, получаемых из условий

$$\tilde{u}(x) \equiv u(x),$$

при $u(x) = \varphi_i(x)$, $i = 1, \dots, 7$.

Система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} & \varphi_i(x_k)\omega_{k,0}(x) + \varphi_i(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & \varphi'_i(x_k)\omega_{k,1}(x) + \varphi'_i(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & \varphi''_i(x_k)\omega_{k+1,2}(x) + \varphi''_i(x_{k+1})\omega_{k+1,2}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_i(x)dx \omega_k^{<1>}(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{aligned}$$

Пусть φ_i , $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ — чебышевская на $[x_k, x_{k+1}]$. Обозначим

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_7(x))^T, \\ \Phi'(x) &= (\varphi'_1(x), \varphi'_2(x), \dots, \varphi'_7(x))^T, \\ \Phi''(x) &= (\varphi''_1(x), \varphi''_2(x), \dots, \varphi''_7(x))^T, \end{aligned}$$

$$S\Phi = \left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_1(x)dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_2(x)dx, \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi_3(x)dx \right)^T,$$

тогда определитель системы уравнений принимает вид

$$\Delta = |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi|,$$

а базисные функции таковы

$$\omega_{k,0}(x) = |\Phi(x), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta,$$

$$\begin{aligned}
\omega_{k+1,0}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta, \\
\omega_{k,1}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi(x), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta, \\
\omega_{k+1,1}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi(x), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta, \\
\omega_{k,2}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi(x), \Phi''(x_{k+1}), S\Phi| / \Delta, \\
\omega_{k+1,2}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi(x), S\Phi| / \Delta, \\
\omega_k^{<1>}(x) &= |\Phi(x_k), \Phi(x_{k+1}), \Phi'(x_k), \Phi'(x_{k+1}), \Phi''(x_k), \Phi''(x_{k+1}), \Phi(x)| / \Delta.
\end{aligned}$$

Построенные сплайны обладают свойствами:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \tilde{u}(x) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x) dx,$$

$$\tilde{u}(x_j) = u(x_j), \quad \tilde{u}'(x_j) = u'(x_j), \quad \tilde{u}''(x_j) = u''(x_j), \quad i = k, k+1.$$

Примеры базисных функций.

1. При $\varphi_k(x) = x^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, получаем

$\Delta = \frac{1}{35}(-x_{k+1} + x_k)^9(x_k - x_{k+2})^4(-35x_{k+1}^3 + 84x_{k+2}x_{k+1}^2 + 21x_{k+1}^2x_k - 7x_k^2x_{k+1} - 28x_{k+1}x_{k+2}x_k - 70x_{k+2}^2x_{k+1} + 4x_{k+2}x_k^2 + x_k^3 + 10x_{k+2}^2x_k + 20x_{k+2}^3)$, при равномерной сетке с шагом h определитель принимает значение $\Delta = -208h^{16}/35$, далее

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = \frac{1}{26}(105t^3 - 156t^2 - 78t - 26)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,0}(th + x_k) = -\frac{1}{13}t^3(70t^3 - 288t^2 + 405t - 200),$$

$$\omega_{k,1}(th + x_k) = \frac{1}{26}th(-26 - 78t + 49t^2)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,1}(th + x_k) = \frac{1}{13}t^3h(t - 1)(28t^2 - 95t + 80),$$

$$\omega_{k,2}(th + x_k) = \frac{1}{26}t^2h^2(-13 + 7t)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,2}(th + x_k) = -\frac{1}{78}t^3h^2(-88 + 49t)(t - 1)^2,$$

$$\omega_k^{<1>}(th + x_k) = \frac{35t^3}{52h}(t - 1)^3.$$

Нетрудно показать, что для данных сплайнов справедливо неравенство с некоторой константой $K_7 > 0$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_7 h^7 \|u^{(7)}\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]}$$

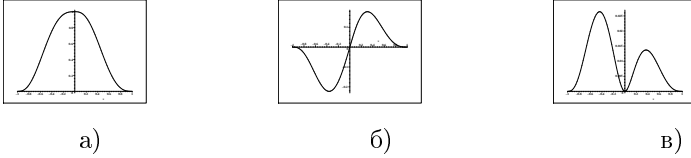


Рис. 8: базисные полиномиальные сплайны (6): а) $\omega_{k,0}(t)$, б) $\omega_{k,1}(t)$, в) $\omega_{k,2}(t)$.

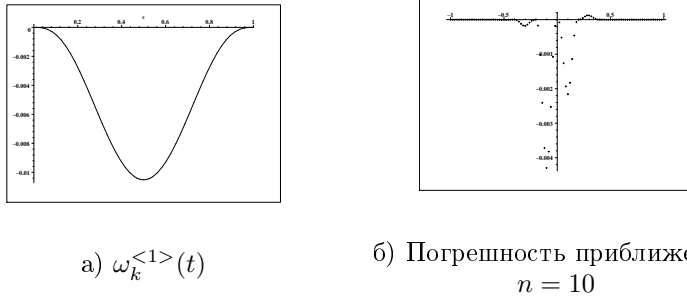


Рис. 9: графики функции $\omega_k^{<1>}(t)$ и погрешности приближения функции $\frac{1}{1+25x^2}$

Если приближение $\tilde{u}(x)$ будем строить отдельно на каждом сеточном интервале $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, \dots, n$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) = & u(x_k)\omega_{k,0}(x) + u(x_{k+1})\omega_{k+1,0}(x) + \\ & + u'(x_k)\omega_{k,1}(x) + u'(x_{k+1})\omega_{k+1,1}(x) + \\ & + u''(x_k)\omega_{k,2}(x) + u''(x_{k+1})\omega_{k+1,2}(x) + \\ & + \int_{x_k}^{x_{k+1}} u(x)dx \omega_k^{<1>}(x) + \int_{x_{k-1}}^{x_k} u(x)dx \omega_k^{<-1>}(x), \end{aligned} \quad (7)$$

то $\Delta = -\frac{1}{280}(x_k - x_{k+1})^1 6(-x_{k-1} + x_{k+1})^4 (x_k - x_{k-1})^4,$

$$\omega_{k,0}(th + x_k) = (56t^4 + 42t^3 - 6t^2 - 3t - 1)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,0}(x_k + th) = \frac{1}{2}t^3(-203t^3 + 98t^4 - 71 + 33t^2 + 145t),$$

$$\omega_k^{<1>}(x_k + th) = -\frac{t^3}{4h}(351 + 418t)(t - 1)^3,$$

$$\omega_k^{<-1>}(x_k + th) = -\frac{t^3}{4h}(-1 + 2t)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k,1}(x_k + th) = th(-1 - 3t + 8t^2 + 12t^3)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,1}(x_k + th) = -\frac{1}{2}t^3h(t - 1)(18t^3 - 17t^2 - 14t + 11),$$

$$\omega_{k,2}(x_k + th) = \frac{1}{6}t^2h^2(-3 + 3t + 8t^2)(t - 1)^3,$$

$$\omega_{k+1,2}(x_k + th) = \frac{1}{6}t^3h^2(-2 + t + 4t^2)(t - 1)^2.$$

Нетрудно показать, что для данных сплайнов справедливо неравенство с некоторой константой $K_8 > 0$

$$|\tilde{u}(x) - u(x)| \leq K_8 h^8 \|u^{(8)}\|_{[x_{k-1}, x_{k+1}]}$$

Литература

1. *Киреев В.И., Пантелеев А.В.* Численные методы в примерах и задачах. М. 2008. 480 с.
2. *Бурова И.Г., Демьянович Ю.К.* Минимальные сплайны и их приложения. СПб.: Издательство СПбГУ, 2010. 364 с.
3. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. СПб.; М.; Краснодар, 2003. 832 с.

Бурова Ирина Герасимовна — д.ф.-м.н., профессор; профессор кафедры вычислительной математики, профессор кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: разработка и применение сплайновых приближений, распараллеливание вычислений. Количество научных публикаций — более 100. BurovaIG@mail.ru, Университетский пр., дом 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург, 198504, Россия, р.т. +7(812)428-4227,

Irina G. Burova — PhD in Computational Science, Professor of the Department of Computational Mathematics, Professor of the Parallel Algorithms Department, Mathematics and Mechanics Faculty, St. Petersburg State University (SPbSU). Research area: the development splines and its applications. Number of publications — more than 100. BurovaIG@mail.ru, office phone +7(812)428-4227.

Поддержка исследований. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ, гранты № 10-01-00297, 10-01-00245.

Рекомендовано кафедрой параллельных алгоритмов, зав. каф. Демьянович Ю.К.

Статья поступила в редакцию 19.10.2011.

РЕФЕРАТ

Бурова И.Г. **О моделировании неполиномиальных интегро-дифференциальных приближений.**

Хорошо известны задачи интерполяции Эрмита и Лагранжа. При их решении на равномерной сетке узлов хорошо себя зарекомендовали полиномиальные интерполяционные сплайны с локальным носителем.

Для построения приближений функции на сеточном интервале требуется составить сумму произведений значений функции (и, возможно, значений производных этой функции) в нескольких соседних узлах сетки и соответствующих базисных сплайнов. Получаемая таким образом модель учитывает локальные особенности используемой информации.

Неполиномиальные базисные функции можно применять для решения различных задач математической физики, в частности, для решения краевых задач вариационными методами, решения задачи Коши.

В ряде случаев для приближения функции на сеточном интервале удобно использовать интегралы от этой функции по соседним сеточным интервалам.

В данной работе построены различные неполиномиальные интерполяционные базисные сплайны. Приближения этими сплайнами интерполируют значения функции, производных от этой функции в узлах сетки, кроме этого совпадают значения интегралов по нескольким соседним сеточным интервалам от приближаемой функции со значениями интегралов по этим же сеточным интервалам от приближения.

Приводятся графики базисных сплайнов, полученных в этой работе и графики, иллюстрирующие качество моделей приближения с использованием рассматриваемых сплайнов.

SUMMARY

Burova I.G. **About modelling nonpolynomial integro-differential approximations**

The Hermite and Lagrange interpolation problems are well-known. Interpolation polynomial splines with the local support have recommended itself well of the decision of these problems at a uniform grid of knots. At their decision polynomial

It is required to make the sum of products of values of function (and may be values of derivatives of this function) in several next knots of a grid and corresponding basic splines for construction of an approximation of function on a net interval. The model received thus considers local features the used information.

The nonpolynomial basic functions can be applied for decisions of various problems of mathematical physics, in particulars, for the decision of bound-value problems by variational Methods, Cauchy problem.

In some cases for approximation of function on net interval it is convenient to use integrals from this function on one or several next to this net intervals.

In the given work are constructed various nonpolynomial interpolation basic splines. Approximations by these splines interpolate values of the function, derivative of this functions in units of a grid, and values of integrals on several next net intervals from approached function coincide with values of integrals on same to net intervals from approximation.

Schedules of basic splines received in this work and the quality of numeric approximation with splines are represented.