УДК 519.8 **DOI** 10.15622/ia.22.3.5

Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина

СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО ПОВЕДЕНИЯ В РЕФЛЕКСИВНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ С ЛИДЕРАМИ

Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. **Сходимость по норме динамики коллективного поведения в рефлексивной модели олигополии с лидерами.**

Аннотация. Рассматривается модель олигополии с произвольным числом рациональных агентов, рефлексирующих по Курно или Штакельбергу, в условиях неполной информации для классического случая линейных функций издержек и спроса. Исследуется проблема достижения равновесия на основе математического моделирования процессов принятия агентами решений. Работы в этом направлении являются актуальными ввиду значимости понимания процессов, происходящих на реальных рынках, и сближения с ними теоретических моделей. В рамках динамической модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент в каждый момент времени корректирует свой объем выпуска, делая шаг в направлении выпуска, максимизирующего его прибыль при ожидаемом выборе конкурентов. Допустимая величина шага задается диапазоном. Ставится и решается задача поиска диапазонов допустимых шагов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость динамики к равновесию. Новизну исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от t-го к (t+1)-му моменту времени. Показано, что динамика сходится, если норма меньше единицы, начиная с некоторого момента времени, и невыполнение этого критерия особенно проявляет себя при разнонаправленном выборе, когда одни агенты выбирают «большие» шаги движения к своим текущим целям, другие, наоборот, – «малые» шаги. Невыполнение критерия также усиливается с ростом рынка. Установлены общие условия на диапазоны сходимости динамики для произвольного числа агентов и предложен метод построения максимальных таких диапазонов, что также составляет новизну исследования. Представлены результаты решения указанных задач для частных случаев олигополии, которые являются наиболее широко распространенными на практике.

Ключевые слова: олигополия, неполная информированность, коллективное поведение, рефлексия, норма матрицы, погрешности процесса, диапазоны сходимости.

1. Введение. В моделях олигополии используются различные предположения о поведении рациональных агентов и их взаимной информированности.

Традиционно выделяют поведение по Курно и поведение по Штакельбергу. Поведение по Курно предполагает, что агент с целью максимизации собственной прибыли устанавливает объем выпуска, считая неизменными объемы выпуска конкурентов, т.е. последним не выгодно менять выпуск для получения «мгновенной прибыли» [1]. Поведение по Штакельбергу заключается в том, что агент с целью максимизации собственной прибыли устанавливает объем выпуска, считая, что все остальные агенты действуют по Курно и он точно знает их реакцию (объемы выпуска) на изменения его объема выпуска [2]. Такого агента называют лидером по Штакельбергу. Агента, действующего по Курно, называют ведомым. Потенциально, лидер имеет возможность получить большую прибыль и вполне оправдано, если рациональный агент стремится стать лидером. Поэтому для исследований представляют интерес модели не только с одним, но и с несколькими лидерами [3 – 12].

Канонической для теоретико-игровых моделей является концепция общего (полного или совершенного) знания, полагающая, что вся существенная информация и принципы принятия решений агентами всем им известны, всем известно, что всем это известно и т.д. до бесконечности [13]. Решение соответствующей игры в нормальной форме представляет собой статическое равновесие Нэша [14], которое достигается в результате однократного выбора агентами своих действий. Вместе с тем, многочисленные исследования свидетельствуют, что для конкурентных рынков условие о наличии общего знания, как правило, невыполнимо. В условиях конкуренции агенты часто не заинтересованы раскрывать другим агентам информацию, являющуюся существенной для принятия ими адекватных решений. Также достижению равновесия, предсказанного теорией, могут препятствовать такие факторы: ограниченность когнитивных возможностей агентов, необходимость уверенности каждого агента в том, что все остальные могут вычислить равновесие Нэша и сделают это, неполная информированность, наличие нескольких равновесий [15 – 20]. В соответствующих моделях равновесие достигается как исход итерационного процесса рефлексивного принятия агентами решений.

Для построения итерационного процесса в данной статье в качестве базовой выбрана индикаторная модель динамики коллективного поведения [21]. В пользу такого выбора можно привести следующие доводы:

– «<…> в теории коллективного поведения традиционно строятся и изучаются модели динамики <…> поведенческих компонент деятельности (внешне проявляемых, наблюдаемых) [11] субъектов (агентов) – их действий и/или результатов деятельности [10]» [22] (*примечание:* здесь и ниже в цитируемом тексте указываются авторские ссылки на свои первоисточники);

– «В отличие от теории игр теория коллективного поведения [4 – 6] занимается исследованием динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Так, например, не всегда требуется наличие среди агентов общего знания относительно множества агентов, множеств допустимых действий и целевых функций оппонентов [4 – 6]. Или считается, что агенты не всегда предсказывают поведение всех оппонентов, как это имеет место в теории игр. Более того, зачастую агенты, принимая решения, могут «не знать о существовании» некоторых других агентов или иметь о них «агрегированную информацию»» [13];

– исследования моделей коллективного поведения «вплотную приближаются к постановке задач агентного имитационного моделирования и имеют с ними много общего. <…> Гипотеза индикаторного поведения является лишь одним из возможных вариантов описания коллективного поведения [32, 39, 41, 45], но ее использование уместно, так как, с одной стороны, ее свойства исследованы наиболее подробно по сравнению с другими процедурами, а с другой стороны – как показывают имитационные эксперименты [5, 45, 63], она достаточно адекватно описывает поведение людей в имитационных и деловых играх» [23];

– «Подходы теории коллективного поведения и теории игр согласованы в том смысле, что и та, и другая исследуют поведение рациональных агентов, а равновесия игры, как правило, являются и равновесиями динамических процедур коллективного поведения (например, равновесие Нэша является равновесием индикаторной модели динамики коллективного поведения)» [13].

Однако, равновесие динамики коллективного поведения не всегда достижимо даже в случае, когда в модели олигополии оно существует. Так для модели с линейными функциями затрат и спроса динамика коллективного поведения сходится к рыночному равновесию при любом числе агентов, если в каждый момент времени агенты корректируют свои предыдущие объемы выпуска малыми шагами. Известно, что диапазоны шагов, для которых динамика сходится, сужаются при увеличении числа агентов. Динамика также сходится для модели дуополии Курно, если каждый из двух агентов делает максимальный шаг, т.е. в каждый момент времени выбирает свой наилучший ответ на ожидаемый объем выпуска конкурента. Для модели рынка с числом агентов больше двух такая динамика расходится, динамика часто не сходится, если агенты выбирают большие шаги [9, 11, 21, 24].

Настоящее исследование посвящено проблеме определения диапазонов шагов, в рамках которых агенты, корректируя, независимо друг от друга, свои предыдущие объемы выпуска, приходят к равновесию. Актуальность проблемы определяется ее значимостью для понимания и регулирования процессов коллективного принятия решений на современных конкурентных рынках и сближения с ними теоретических моделей. Для модели олигополии с произвольным числом агентов, действующих по Курно и\или Штакельбергу, решение данной проблемы не является завершенным даже для случая линейных функций затрат и спроса – основные успехи ограничены набором частных случаев с небольшим числом агентов [25 – 30].

Особенность исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от t-го к (t+1)-му моменту времени. Для линейной модели олигополии критерий сходимости по норме означает, что норма матрицы перехода должна быть меньше единицы, начиная с некоторого момента времени [31].

В проведенном исследовании поставлены и решены две основные задачи:

1) проверка выполнимости критерия сходимости динамики по норме для заданного диапазона шагов;

2) нахождение границ максимальных диапазонов шагов агентов, гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения.

2. Постановка задач исследования. Рассматривается модель олигополии, которая состоит из n конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов. Считается, что спрос определен функцией вида (обратной функцией спроса в зависимости от совокупного выпуска агентов):

$$p(Q) = a - bQ, \qquad (1)$$

где $p(Q)$ – единая рыночная цена, $Q = \sum_{i \in N} q_i$ – совокупный выпуск n агентов $\left(i \in N = \{1, \dots, n\}\right)$, q_i – выпуск i-го агента, a и b – параметры. Параметр a характеризует максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, а параметр b характеризует наклон кривой спроса.

Полные издержки агентов имеют вид:

$$\varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \qquad (2)$$

где c_i, d_i – предельные и постоянные издержки i-го агента, соответственно.

Целевые функции агентов заданы выражением:

$$\Pi_i(p(Q),q_i) = p(Q)q_i - \varphi_i(q_i) \to \max_{q_i}. \quad (3)$$

Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют.

Состояние рынка в момент времени $t\,(t = 0, 1, 2, \ldots)$ задается n-мерным вектором $q^t = \left(q_1^t, \ldots, q_i^t, \ldots, q_n^t\right)$.

Определим базовый процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [20] – в каждый момент времени (t+1) каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени t, и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ согласно следующей итерационной процедуре:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N. \quad (4)$$

Здесь $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$ – параметр, независимо выбираемый каждым i-м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая $\gamma_i^{t+1} = 1,$ тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая $\gamma_i^{t+1} = 0,$ или делать «неполный шаг», если $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1)$.

Текущее положение цели i-го агента $x_i(q_{-i}^t)$ – такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [13]. Здесь $q_{-i}^t = \left(q_1^t, \ldots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \ldots, q_n^t\right)$ – обстановка i-го агента, вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени t, за исключением i-го агента.

Агент может реагировать на действия окружения одним из двух способов: 1) рефлексировать по Курно; 2) рефлексировать по Штакельбергу.

Обозначим: N_c – множество агентов с реакцией по Курно, N_s – множество агентов с реакцией по Штакельбергу; $N_c \cup N_s = N$ и $N_c \cap N_s = \varnothing, |N_c| = n_c, |N_s| = n_s, n_c + n_s = n.$

Определим расчетные формулы для текущего положения цели $x_i(q_{-i}^t)$ [9, 31].

Агент $i \in N_c$ с рефлексией по Курно, точно зная выпуски q^t_{-i} остальных агентов в предыдущий момент времени и не ожидая их изменения в текущий момент времени, рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле:

$$x_i(q^t_{-i}) = \frac{h_i - Q^t_{-i}}{2}. \tag{5}$$

Агент $i \in N_s$ с рефлексией по Штакельбергу, зная выпуски q^t_{-i} остальных агентов в предыдущий момент времени и ожидая в текущий момент времени от них поведения по Курно, полагает, что в точности знает реакцию остальных агентов на свои действия, и рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле:

$$x_i(q^t_{-i}) = \frac{n\left(h_i - Q^t_{-i}\right)}{1+n}. \tag{6}$$

Здесь обозначено: $h_i = \dfrac{a - c_i}{b}$, $Q^t_{-i} = \sum_{j \neq i} q^t_j$ – суммарный выпуск «окружением» i-го агента $\left(i, j \in N\right)$.

Поясним также отличие рефлексивной модели олигополии от классической игры Штакельберга, определяющее вывод формулы (6), и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций и адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно [5, 11]. В игре Штакельберга лидер первым делает ход, который становится известен другим агентам. Здесь же агенты с реакцией по Курно не знают хода лидера, синхронного своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер (лидеры), полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее «интеллектуальными», чем они сами, или что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие агенты действуют так же.

Агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким («нулевым») рангом рефлексии. Лидеры обладают более высоким («первым») рангом рефлексии, считая всех остальных нерефлексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии), и в соответствии с этим предсказывают их выбор. Выбор лидеров будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по их мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существования агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами [13].

Агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции $x_i(q_{-i}^t)$, включая параметры спроса a и b, ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной информацией относительно их ожидаемых объемов выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций.

Предполагаем, что в модели олигополии (1)–(3), как в игре в нормальной форме, равновесие $q^* = \left(q_1^*, \ldots, q_i^*, \ldots, q_n^*\right)$, понимаемое как статическое равновесие Нэша, существует и все агенты конкурентоспособны в равновесии, т.е. $q_i^* > 0 \quad \forall i \in N$. В случае линейных издержек агентов и линейного спроса статическое равновесие существует и единственно.

Равновесие динамики коллективного поведения (4)–(6) является статическим равновесием q^* в модели олигополии (1)–(3), но не всегда достижимо. Условия сходимости динамики относятся к параметрам γ_i^{t+1}, числу агентов на рынке и начальным приближениям $q^0 = \left(q_1^0, \ldots, q_i^0, \ldots, q_n^0\right)$. Полагаем также, что $q^0 > 0$.

В данной работе обсуждаются новые аспекты подхода к исследованию сходимости моделей динамики коллективного поведения, основанного на использовании нормы матрицы перехода от t-го к $(t+1)$-му моменту времени в итерационном процессе (4)–(6). Для линейной модели олигополии подход дает простой критерий сходимости по норме: норма матрицы перехода должна быть меньше единицы, начиная с некоторого момента времени [31]. Когда агенты независимо друг от друга выбирают шаги в диапазоне $[0; 1]$, то критерий по норме, за исключением дуополии, не может быть выполнен. Основная задача статьи для изучаемой прикладной линейной модели олигополии с произвольным числом рациональных агентов – для заданного числа агентов получение диапазонов величин их шагов, при которых выполняется критерий по норме. Тогда при любых начальных приближениях q^0 будет гарантирована сходимость модели динамики коллективного поведения (4)–(6) к равновесию, которое является статическим равновесием Нэша в модели олигополии

(1)–(3). Также не меньший интерес представляет решение задачи поиска максимальных таких диапазонов шагов.

3. Методы исследования. Следуя работе [31], для базовой модели олигополии (1)–(3) приведем формальные выражения для вычисления погрешностей итерационного процесса (4)–(6), а также результаты о его сходимости к равновесию Нэша, основанные на использовании норм матриц перехода погрешностей.

При переходе от t-го к (t+1)-му моменту времени погрешность итерационного процесса $\varepsilon^{t+1} = \left(\varepsilon_1^{t+1}, \varepsilon_2^{t+1}, \ldots, \varepsilon_n^{t+1}\right)^T = \left(q_1^{t+1} - q_1^*, q_2^{t+1} - q_2^*, \ldots, q_n^{t+1} - q_n^*\right)^T$ определяется матричным преобразованием $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1}\varepsilon^t$ $(t = 0, 1, 2, \ldots)$, где B^{t+1} – матрица клеточного вида:

$$B^{t+1} = B(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} B_s^{t+1} & \vdots & 0 \\ \cdots\cdots & \vdots & \cdots\cdots \\ 0 & \vdots & B_c^{t+1} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Вдоль диагонали матрицы (7) идут квадратные подматрицы B_s^{t+1} и B_c^{t+1}, которые определяются как:

$$B_s^{t+1} = B_s(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1-\gamma_1^{t+1} & -n\gamma_1^{t+1}/(1+n) & \ldots & -n\gamma_1^{t+1}/(1+n) \\ -n\gamma_2^{t+1}/(1+n) & 1-\gamma_2^{t+1} & \ldots & -n\gamma_2^{t+1}/(1+n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -n\lambda_{n_s}^{t+1}/(1+n) & -n\lambda_{n_s}^{t+1}/(1+n) & \ldots & 1-\gamma_{n_s}^{t+1} \end{pmatrix},$$

$$B_c^{t+1} = B_c(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1-\gamma_{n_s+1}^{t+1} & -\gamma_{n_s+1}^{t+1}/2 & \ldots & -\gamma_{n_s+1}^{t+1}/2 \\ -\gamma_{n_s+2}^{t+1}/2 & 1-\gamma_{n_s+2}^{t+1} & \ldots & -\gamma_{n_s+2}^{t+1}/2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\gamma_n^{t+1}/2 & -\gamma_n^{t+1}/2 & \cdots & 1-\gamma_n^{t+1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{t+1} = \left(\gamma_1^{t+1}, \ldots, \gamma_i^{t+1}, \ldots, \gamma_n^{t+1}\right).$$

Здесь и далее, для определенности, полагаем, что первые n_s агентов действуют по Штакельбергу, остальные – по Курно и $q^t = (q_1^t, \dots, q_{n_s}^t, q_{n_s+1}^t, \dots, q_n^t)$.

Сходимость итерационного процесса (4)–(6) означает, что $\varepsilon^t \to 0$ по евклидовой норме при $t \to \infty$, и полностью определяется матрицей B^{t+1}. Евклидова норма вектора ε определяется по формуле $\varepsilon = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^2}$. Последовательность векторов $\left\{q^t\right\}_{t=0}^{\infty}$ сходится к равновесию q^* по норме при $t \to \infty$, будем записывать как $q^t \to q^*$. Норма вещественной матрицы B, имеющей n строк и n столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как $\|B\| = \max\limits_{\|\varepsilon\|=1} \|B\varepsilon\|$. Из определения нормы следует, что $\|B\varepsilon\| \le \|B\| \cdot \|\varepsilon\|$ для всех B, ε или $\|B\varepsilon\| \le \|B\|$ для всех B, $\|\varepsilon\| = 1$ [32, 33].

Тогда:

$$\left\|B^{t+1}\right\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \left\|B(\gamma^{t+1})\varepsilon\right\| =$$
$$= \max_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N_s} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n}\left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j\right)\right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j\right)\right]^2}, \tag{8}$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n)$ – произвольный единичный вектор. В (8) опущен верхний индекс «*t*» для компонент вектора ε, как не влияющий на результат.

В терминах нормы матрицы B^{t+1} можно привести следующие результаты о сходимости итерационного процесса.

Лемма 1. Для сходимости к равновесию процесса (4)–(6) при любом начальном приближении q^0 *достаточно, начиная с некоторого момента* t_0, *выполнения условия:*

$$\left\|B^{t+1}\right\| < 1. \tag{9}$$

Доказательство леммы приводится в [31].

Требование неотрицательности текущих выпусков агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано процессом вида:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \le 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Утверждение 1. Если начиная с некоторого момента t_0 $\left\| B^{t+1} \right\| < 1,$ *то процесс (10), (5)–(6) сходится при любом начальном приближении* q^0.

Доказательство утверждения 1 приводится в [31].

По этому утверждению, если для процесса (4)–(6) норма матрицы перехода меньше единицы, то будет сходиться также и процесс (10), (5)–(6), в котором не допускаются отрицательные текущие выпуски.

Обозначим через $f(\gamma^{t+1})$ подкоренное выражение в (8), т.е.:

$$f(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_s} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[\varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right]^2. \quad (11)$$

Утверждение 2. Пусть векторы γ^{t+1}, $\underline{\gamma}^{t+1}$, $\overline{\gamma}^{t+1}$ *такие, что* $\gamma_i^{t+1} \in \left[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \overline{\gamma}_i^{t+1} \right]$, $\left[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \overline{\gamma}_i^{t+1} \right] \subseteq [0;1]$, *и* $\gamma_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}$, *где* $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1]$, $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$, $i \in N$.

Тогда функция $f(\gamma^{t+1})$ *удовлетворяет неравенствам (12) и (13):*

$$f\left(\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_1^{t+1}, \ldots, \alpha_i^{t+1} \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}, \ldots, \alpha_n^{t+1} \underline{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \overline{\gamma}_n^{t+1} \right) \le$$
$$\le \sum_{y_1 \in \left\{ \alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1} \right\}} \ldots \sum_{y_i \in \left\{ \alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \right\}} \ldots \sum_{y_n \in \left\{ \alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1} \right\}} y_1 \cdot \ldots \cdot y_i \cdot \ldots \cdot y_n \cdot f\left(z_1^{t+1}, \ldots, z_i^{t+1}, \ldots, z_n^{t+1} \right), \quad (12)$$

где:

$$\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0;1], \ \alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1, \ z_i^{t+1} = \begin{cases} \underline{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}, \\ \overline{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}, \end{cases}$$

$$\sum_{y_1\in\left\{\alpha_1^{t+1},\beta_1^{t+1}\right\}}\cdots\sum_{y_i\in\left\{\alpha_i^{t+1},\beta_i^{t+1}\right\}}\cdots\sum_{y_n\in\left\{\alpha_n^{t+1},\beta_n^{t+1}\right\}} y_1\cdot\ldots\cdot y_i\cdot\ldots\cdot y_n=1;$$

$$\begin{aligned}&f\left(\alpha_1^{t+1}\underline{\gamma}_1^{t+1}+\beta_1^{t+1}\overline{\gamma}_1^{t+1},\ldots,\alpha_i^{t+1}\underline{\gamma}_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}\overline{\gamma}_i^{t+1},\ldots,\alpha_n^{t+1}\underline{\gamma}_n^{t+1}+\beta_n^{t+1}\overline{\gamma}_n^{t+1}\right)\le\\&\le\sum_{i\in N_s}\alpha_i^{t+1}\left[\varepsilon_i-\frac{\underline{\gamma}_i^{t+1}n}{1+n}\left(\frac{\varepsilon_i}{n}+\sum_{j\in N_s}\varepsilon_j\right)\right]^2+\sum_{i\in N_c}\alpha_i^{t+1}\left[\varepsilon_i-\frac{\underline{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N_c}\varepsilon_j\right)\right]^2+\\&+\sum_{i\in N_s}\beta_i^{t+1}\left[\varepsilon_i-\frac{\overline{\gamma}_i^{t+1}n}{1+n}\left(\frac{\varepsilon_i}{n}+\sum_{j\in N_s}\varepsilon_j\right)\right]^2+\sum_{i\in N_c}\beta_i^{t+1}\left[\varepsilon_i-\frac{\overline{\gamma}_i^{t+1}}{2}\left(\varepsilon_i+\sum_{j\in N_c}\varepsilon_j\right)\right]^2.\end{aligned}\tag{13}$$

Доказательство утверждения 3 приводится в [31].

В частности, неравенство (12) для случая $n=2$ имеет вид:

$$\begin{aligned}&f\left(\alpha_1^{t+1}\underline{\gamma}_1^{t+1}+\beta_1^{t+1}\overline{\gamma}_1^{t+1},\alpha_2^{t+1}\underline{\gamma}_2^{t+1}+\beta_2^{t+1}\overline{\gamma}_2^{t+1}\right)\le\alpha_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}f\left(\underline{\gamma}_1^{t+1},\underline{\gamma}_2^{t+1}\right)+\\&+\beta_1^{t+1}\alpha_2^{t+1}f\left(\overline{\gamma}_1^{t+1},\underline{\gamma}_2^{t+1}\right)+\alpha_1^{t+1}\beta_2^{t+1}f\left(\underline{\gamma}_1^{t+1},\overline{\gamma}_2^{t+1}\right)+\beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1}f\left(\overline{\gamma}_1^{t+1},\overline{\gamma}_2^{t+1}\right).\end{aligned}$$

4. Результаты исследования и их обсуждение. Приведем идею подхода к решению задачи проверки сходимости динамики для заданного диапазона шагов.

Обозначим $\gamma^{t+1}\left(\beta^{t+1}\right)=\left(\gamma_1^{t+1}\left(\beta_1^{t+1}\right),\ldots,\gamma_i^{t+1}\left(\beta_i^{t+1}\right),\ldots,\gamma_n^{t+1}\left(\beta_n^{t+1}\right)\right)$, $\gamma_i^{t+1}\left(\beta_i^{t+1}\right)=\left(1-\beta_i^{t+1}\right)\underline{\gamma}_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}\overline{\gamma}_i^{t+1}\quad\left(i\in N\right)$ и $f^{t+1}=f\left(\gamma^{t+1}\left(\beta^{t+1}\right)\right)$.

Формула (13) преобразуется к неравенству вида $f^{t+1}\le 1-f_s^{t+1}-f_c^{t+1}$, где $f_s^{t+1}\left(f_c^{t+1}\right)$ – квадратичная форма от $n_s\left(n_c\right)$ переменных $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n_s}\left(\varepsilon_{n_s+1},\ldots,\varepsilon_n\right)$. Вначале проверяется выполнение этого неравенства для крайних точек n-мерного прямоугольного параллелепипеда $\left[\underline{\gamma}_1^{t+1},\overline{\gamma}_1^{t+1};\ldots;\underline{\gamma}_i^{t+1},\overline{\gamma}_i^{t+1};\ldots;\underline{\gamma}_n^{t+1},\overline{\gamma}_n^{t+1}\right]$. Если для крайней точки f_s^{t+1} и f_c^{t+1} положительно определены, то для данной крайней точки $f^{t+1}<1$. Если для всех крайних точек $f^{t+1}<1$, то по неравенству (12) для любой внутренней точки параллелепипеда будет $f^{t+1}<1$, а по (8) и (11) для нее также будет $\left\|B^{t+1}\right\|\le\max\limits_{\|\varepsilon\|=1}\sqrt{1-f_s^{t+1}-f_c^{t+1}}<1$. Таким образом, для процесса (4)–(6) для всех точек параллелепипеда $\left[\underline{\gamma}_1^{t+1}, \overline{\gamma}_1^{t+1}; \ldots; \underline{\gamma}_i^{t+1}, \overline{\gamma}_i^{t+1}; \ldots; \underline{\gamma}_n^{t+1}, \overline{\gamma}_n^{t+1}\right]$ будет выполняться критерий сходимости (9).

Если у всех агентов с реакций по Штакельбергу одинаковые левые и правые границы диапазонов, а также одинаковые левые и правые границы диапазонов и у всех агентов с реакций по Курно, то трудоемкость решения данной задачи существенно уменьшается за счет сокращения числа анализируемых крайних точек с 2^n до $(n-2)$. К тому же, проверка на положительную определенность квадратичных форм, составляющая наиболее трудоемкую часть задачи, может быть легко выполнена с использованием современных инструментов компьютерной математики для форм практически любого размера.

Параллельно с этой задачей решается задача нахождения границ максимальных диапазонов шагов агентов (параллелепипеда максимального объема), гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения (4)–(6).

Перейдем к решению указанных задач.

Преобразуем (13) к виду:

$$f(\gamma^{t+1}) \le \sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 - f_s(\gamma^{t+1}) + \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 - f_c(\gamma^{t+1}), \tag{14}$$

где:

$$\begin{aligned} f_s(\gamma^{t+1}) = {} & \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \frac{\underline{\gamma}_i^{t+1} n}{1+n} \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) - \sum_{i \in N_s} \left(\frac{\underline{\gamma}_i^{t+1} n}{1+n} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 + \\ & + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \frac{n}{1+n} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \left[2\varepsilon_i - \frac{n}{1+n} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} + \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right] \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} f_c(\gamma^{t+1}) = {} & \sum_{i \in N_c} \varepsilon_i \underline{\gamma}_i^{t+1} \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) - \sum_{i \in N_c} \left(\frac{\underline{\gamma}_i^{t+1}}{2} \right)^2 \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right)^2 + \\ & + \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \frac{1}{2} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \left[2\varepsilon_i - \frac{1}{2} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} + \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right] \left(\varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right). \end{aligned} \tag{16}$$

Утверждение 3. В модели олигополии (1)–(3) с агентами, рефлексирующими по Штакельбергу и Курно, процесс (4)–(6)

сходится, если положительно определены квадратичные формы $f_s(\gamma^{t+1})$ *и* $f_c(\gamma^{t+1})$.

Доказательство. Пусть положительно определены квадратичные формы $f_s(\gamma^{t+1})$ и $f_c(\gamma^{t+1})$, т.е. $f_s(\gamma^{t+1})>0$ для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_{n_s}$, не все из которых равны нулю, и $f_c(\gamma^{t+1})>0$ для $\varepsilon_{n_s+1},\ldots,\varepsilon_n$, не все из которых равны нулю. Тогда $f(\gamma^{t+1})<1$ для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$, такого что $\sum_{i\in N_s}\left(\varepsilon_i\right)^2+\sum_{i\in N_c}\left(\varepsilon_i\right)^2=1$. Тогда по (12) и (9) $\left\|B^t\left(\lambda^{t+1}\right)\right\|<1$. По лемме 1 процесс сходится при данных значениях параметров $\underline{\gamma}_i^{t+1},\overline{\gamma}_i^{t+1},\beta_i^{t+1}$.

Утверждение 3 доказано.

Утверждение 4. В модели олигополии (1)–(3) с агентами, рефлексирующими по Штакельбергу и Курно, процесс (4)–(6) сходится для диапазона шагов $\left[\underline{\gamma}_i^{t+1};\overline{\gamma}_i^{t+1}\right]$, *если, начиная с некоторого момента времени* t_0, *положительно определены две подматрицы, элементы которых имеют вид:*

$$\begin{aligned}
&f_{ii}^{t+1}=\frac{2\left(1+n\right)\mu_i^{t+1}}{n}-\frac{\left(1+2n\right)\eta_i^{t+1}}{n^2}-\sum_{k\in N_s}\eta_k^{t+1},\\
&f_{ij}^{t+1}=\left(\mu_i^{t+1}-\frac{\eta_i^{t+1}}{n}\right)+\left(\mu_j^{t+1}-\frac{\eta_j^{t+1}}{n}\right)-\sum_{k\in N_s}\eta_k^{t+1},\quad i,j\in N_s,i\neq j.
\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}
&f_{ii}^{t+1}=3\left(\mu_i^{t+1}-\eta_i^{t+1}\right)+\mu_i^{t+1}-\sum_{k\in N_c}\eta_k^{t+1},\\
&f_{ij}^{t+1}=\left(\mu_i^{t+1}-\eta_i^{t+1}\right)+\left(\mu_j^{t+1}-\eta_j^{t+1}\right)-\sum_{k\in N_c}\eta_k^{t+1},\quad i,j\in N_c,i\neq j.
\end{aligned}\tag{18}$$

Здесь $\beta_i^{t+1}\in\left[0;1\right],\quad i\in N;$

$$\mu_i^{t+1}=\frac{n}{1+n}\left[\underline{\gamma}_i^{t+1}+\beta_i^{t+1}\left(\overline{\gamma}_i^{t+1}-\underline{\gamma}_i^{t+1}\right)\right],$$

$$\eta_i^{t+1}=\left(\frac{n}{1+n}\right)^2\left[\left(\underline{\gamma}_i^{t+1}\right)^2+\beta_i^{t+1}\left(\left(\overline{\gamma}_i^{t+1}\right)^2-\left(\underline{\gamma}_i^{t+1}\right)^2\right)\right],\quad i\in N_s;$$

$$\mu_i^{t+1} = \left[\underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \right] \Big/ 2,$$
$$\eta_i^{t+1} = \left[\left(\underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 + \beta_i^{t+1} \left(\left(\overline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 - \left(\underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 \right) \right] \Big/ 4, \quad i \in N_c.$$

Доказательство. Доказательство сводится к преобразованиям (14)–(16). Проведем их для ведущих агентов. Имеем:

$$f_s(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_s} \frac{2n}{1+n} \varepsilon_i \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \left[\underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \left(\overline{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1} \right) \right] -$$
$$- \sum_{i \in N_s} \left(\frac{n}{1+n} \right)^2 \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \left[\left(\underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 + \beta_i^{t+1} \left(\left(\overline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 - \left(\underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 \right) \right] =$$
$$= \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \mu_i^{t+1} - \sum_{i \in N_s} \left(\frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} =$$
$$= \sum_{i \in N_s} \frac{2\left(\varepsilon_i\right)^2}{n} \mu_i^{t+1} + \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \mu_i^{t+1} \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j - \sum_{i \in N_s} \frac{\left(\varepsilon_i\right)^2}{n^2} \eta_i^{t+1} - \sum_{i \in N_s} \frac{2\varepsilon_i \eta_i^{t+1}}{n} \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j -$$
$$- \sum_{i \in N_s} \left(\sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} = \sum_{i \in N_s} \left(\varepsilon_i\right)^2 \left(\frac{2\mu_i^{t+1}}{n} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n^2} \right) +$$
$$+ \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_t \left(\mu_i^{t+1} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n} \right) \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j - \sum_{i \in N_s} \left(\sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} =$$
$$= \sum_{i \in N_s} \left(\varepsilon_t\right)^2 \left(\frac{2\left(1+n\right)\mu_i^{t+1}}{n} - \frac{\left(1+2n\right)\eta_i^{t+1}}{n^2} - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1} \right) +$$
$$+ \sum_{i \in N_s} \sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left[\left(\mu_i^{t+1} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n} \right) + \left(\mu_j^{t+1} - \frac{\eta_j^{t+1}}{n} \right) - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1} \right].$$

Для ведомых агентов подобные преобразования дают:

$$f_c(\gamma^{t+1}) = \sum_{i\in N_c} \left(\varepsilon_i\right)^2 \left(4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum_{k\in N_c} \eta_k^{t+1} \right) +$$

$$+\sum_{i\in N_c} \sum_{j\in N_c\setminus\{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left[\left(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}\right) + \left(\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}\right) - \sum_{k\in N_c} \eta_k^{t+1} \right].$$

Если определители главных миноров подматриц (17) и (18) положительны, то квадратичные формы $f_s(\gamma^{t+1})$ и $f_c(\gamma^{t+1})$ являются положительно определенными [33] и по утверждению 3 процесс сходится при данных значениях параметров $\underline{\gamma}_i^{t+1}, \overline{\gamma}_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}$.

Утверждение 4 доказано.

В [31] для олигополии Курно показано, что для решения вопроса о сходимости процессов на основе применения норм матриц, существенное значение имеет размах значений $\underline{\gamma}_i^{t+1}$ и $\overline{\gamma}_i^{t+1}$. Когда агенты могут действовать разнонаправлено, выбирая «большие» шаги движения к своим текущим целям, или, наоборот, – «малые» шаги, то положительная определенность матрицы перехода погрешностей может не подтверждаться, вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя из научных источников известно, что процесс сходится. Так, для дуополии выбор агентами шагов в классическом диапазоне $\left[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \overline{\gamma}_i^{t+1}\right] = [0;1]$ не гарантирует сходимость по норме динамики коллективного поведения $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in (0;1]$, хотя известно, что она сходится [24, 27–29]. Для рынков с числом агентов больше двух и диапазона шагов $[0;1]$ не удается подтвердить сходимость по норме динамики ни для одного набора параметров β^{t+1}.

С целью преодоления неопределенности в подтверждении гипотезы «процесс сходится» для олигополии Курно в [31] предложено ограничивать диапазоны выбора шагов агентами. При определении границ диапазонов исходили из того, что агенты, выбирая максимально допустимый шаг, выбирают свой наилучший ответ на ожидаемые действия конкурентов. Поэтому для них большие шаги часто являются предпочтительнее малых шагов и правые границы диапазонов желательно иметь как можно ближе к единице. Исходя из этих предпосылок, для дуополии Курно диапазон $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in [0{,}136; 1]$, а для рынка с тремя агентами диапазон $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1}, \gamma_3^{t+1} \in [0{,}334; 1)$ определяют положительно определенные переходные матрицы погрешностей, поэтому динамика сходится к равновесию.

Перейдем к задаче формирования границ диапазонов сходимости динамики.

В первую очередь рассмотрим правые границы. Эту задачу будем решать при предположениях: 1) единая правая граница $\overline{\gamma}_s$ для всех агентов, действующих по Штакельбергу, и моментов времени *t*; 2) единая правая граница $\overline{\gamma}_c$ для всех агентов, действующих по Курно, и моментов времени *t*; 3) правая граница максимально допустима, в случае ее превышения хотя бы одним агентом не гарантируется сходимость процесса.

Далее полезны будут лемма 2 и лемма 3.

Лемма 2. Пусть A квадратная матрица размера $m \times m$ *с элементами вида* $a_{ii} = a, a_{ij} = b, \quad i, j \in M = \{1, \dots, m\}, i \neq j.$ *Тогда* $\det(A) = (a-b)^{m-1}\left[a+(m-1)b\right].$

Доказательство. Будут полезными свойства определителей: 1) определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы какой-либо другой, умноженные на одно и то же произвольное число, 2) определитель треугольной квадратной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

Прибавлением к элементам каждой строки соответствующих элементов следующей строки, умноженных на (-1), получаем:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Затем, разложением по последней строке, с использованием формулы вычисления треугольных определителей, имеем $\det(A) = a(a-b)^{m-1} + (m-1)b(a-b)^{m-1} = (a-b)^{m-1}\left[a+(m-1)b\right].$

Лемма 2 доказана.

Лемма 3. Матрицы (17) и (18) положительно определены при $\gamma_i^{t+1} = \overline{\gamma}_s^{t+1} < \dfrac{2(1+n)}{1+nn_s} \ (i \in N_s),\ \gamma_i^{t+1} = \overline{\gamma}_c^{t+1} < \dfrac{4}{1+n_c} \ (i \in N_c).$

Доказательство леммы. Доказательство проведем для матрицы (17), для матрицы (18) оно аналогично. Имеем $\gamma_i^{t+1} = \overline{\gamma}_s^{t+1}$ при $\beta_i^{t+1} = 1$ и по (17) $\mu_i^{t+1} = \overline{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n}$, $\eta_i^{t+1} = \left(\overline{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n} \right)^2$,

$$f_{ii}^{t+1} = 2\overline{\gamma}_s^{t+1} - \frac{\left(1+2n+n^2 n_s\right)}{\left(1+n\right)^2} \left(\overline{\gamma}_s^{t+1}\right)^2,$$

$$f_{ij}^{t+1} = 2\overline{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n} - \frac{\left(2+nn_s\right)}{1+n} \left(\overline{\gamma}_s^{t+1}\right)^2, \quad i, j \in N_s, i \neq j.$$

Также:

$$a-b = \frac{\overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left(2 - \frac{\overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right), \quad a + \left(n_s - 1\right) b = \frac{\left(1+nn_s\right) \overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left(2 - \frac{\left(1+nn_s\right) \overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right).$$

По лемме 2 определитель матрицы (17) равен $\det\left(F_s \left(\overline{\gamma}_s^{t+1} \right) \right) = \left(\frac{\overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)^{n_s} \left(2 - \frac{\overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)^{n_s - 1} \left(1+nn_s\right) \left(2 - \frac{\left(1+nn_s\right) \overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)$. Он положителен при $\overline{\gamma}_s^{t+1} < \frac{2\left(1+n\right)}{1+nn_s}$. Покажем, что при выполнении данного неравенства также положителен определитель k-го главного минора этой матрицы $\left(k < n_s\right)$. Имеем $a + \left(k-1\right) b = \frac{\overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left[2\left(1+nk\right) - \frac{\left(1+2nk+n^2 n_s k\right) \overline{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right]$. При $\overline{\gamma}_s^{t+1} = \frac{2\left(1+n\right)}{1+nn_s}$ будет $a + \left(k-1\right) b = \frac{2\left(n_s - k\right) n \overline{\gamma}_s^{t+1}}{\left(1+n\right)\left(1+nn_s\right)} > 0.$

Лемма 3 доказана.

Для агентов с реакцией по Штакельбергу для случаев $n_s = 1, 2$ процесс сходится, если правая граница диапазонов максимальна, т.е. $\overline{\gamma}_s^{t+1} = 1$. При $n_s > 2$ правая граница для сходящихся процессов не может быть максимальной, поскольку $\frac{n}{1+n} > \frac{2n}{1+nn_s}$. Так при $n_s = 3$ и $n = 5$ имеем $\overline{\gamma}_s^{t+1} = 0,75$.

Для агентов с реакцией по Курно по лемме 3 для случая $n=2$ имеем $\overline{\gamma}_c^{t+1} < \frac{4}{3}$, поэтому процесс придет в равновесие, когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая $n=3$ должно быть $\overline{\gamma}_c^{t+1} < 1$, поэтому не подтверждается сходимость процесса когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая $n=4$ можно подтвердить сходимость процесса только когда шаги агентов не выходят за правую границу диапазона, равную $\overline{\gamma}_c^{t+1} = 0,8$.

Перейдем к формированию левых границ диапазонов. Эту задачу будем решать для агентов с реакцией по Штакельбергу при предположениях: 1) единая левая граница $\underline{\gamma}_s$ для всех агентов и моментов времени t; 2) в случае их нарушения хотя бы одним агентом не гарантируется сходимость процесса; 3) известны единые правые границы диапазонов $\overline{\gamma}_s$.

По левым границам диапазонов для агентов с реакцией по Курно будем использовать результаты работы [31].

Докажем утверждения 5 и 6.

Утверждение 5. Если в олигополии (1)–(3) с одним агентом с реакцией по Штакельбергу и произвольным числом агентов с реакцией по Курно, начиная с некоторого момента времени t_0, *ведущий агент выбирает шаги в диапазоне* $(0;1]$, *а ведомый агент – в диапазоне* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right]$, *то матрицы перехода погрешностей будут положительно определены,* $\left\|B_s^{t+1}\right\| < 1 \wedge \left\|B_c^{t+1}\right\| < 1$, *и процесс (4)–(6) сходится. В частности, для ведомых агентов по [31], если* $n=3$, *то* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right] = [0,136;1]$, *если* $n=4$, *то* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right] = [0,334;1)$.

Доказательство. На основании леммы 3 правую границу $\overline{\gamma}_s$ диапазона следует взять равной единице. При этом $f_s(\overline{\gamma}_s) = f_s(1) < 1$. По (17) при $\beta_1^{t+1} = 0$ (помня, что ведущим является первый агент) имеем, что $\mu_1^{t+1} = \underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}, \eta_1^{t+1} = \left(\underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}\right)^2, f_{11}^{t+1} = 2\underline{\gamma}_s - \left(\underline{\gamma}_s\right)^2$. Имеем

$f_s\left(\underline{\gamma}_s\right)<1$ при $\underline{\gamma}_s \neq 0$. По (12) при $\gamma_1^{t+1} \in (0;1]$ будет $f_s\left(\gamma_1^{t+1}\right)<1$ и $\left\|B_s^{t+1}\right\|<1$.

Утверждение доказано.

Утверждение 6. Если в олигополии (1)–(3) с двумя агентами с реакцией по Штакельбергу и произвольным числом агентов с реакцией по Курно, начиная с некоторого момента времени t_0, *ведущий агент выбирает шаги в диапазоне* $\left(\underline{\gamma}_s;1\right]$, *а ведомый агент – в диапазоне* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right]$, *то матрицы перехода погрешностей будут положительно определены,* $\left\|B_s^{t+1}\right\|<1 \wedge \left\|B_c^{t+1}\right\|<1$, *и процесс (4)–(6) сходится. Для ведущих агентов* $\underline{\gamma}_s$ *определяется как меньший корень квадратного уравнения* $\frac{1+2n}{(1+n)^2}-\frac{(1+2n)n^2\gamma^2}{(1+n)^4}-(1-\gamma)^2=0$, *и, в частности, если* $n=4$, *то* $\underline{\gamma}_s=0,44$, *если* $n=5$, *то* $\underline{\gamma}_s=0,5$. *Для ведомых агентов по [31], если* $n=4$, *то* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right]=[0,136;1]$, *если* $n=5$, *то* $\left[\underline{\gamma}_c;\overline{\gamma}_c\right]=[0,334;1)$.

Доказательство. Для ведущих (первых двух) агентов на основании леммы 3 правую границу $\overline{\gamma}_s$ диапазона следует взять равной единице. При этом $f_s(\overline{\gamma}_s,\overline{\gamma}_s)=f_s(1,1)<1$. Также по лемме 3 $f_s\left(\underline{\gamma}_s,\underline{\gamma}_s\right)<1$, если $\underline{\gamma}_s\neq 0$. По (17) при $\beta_1^{t+1}=0$, $\beta_2^{t+1}=1$ и $\overline{\gamma}_s=1$ имеем, что $\mu_1^{t+1}=\underline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}$, $\eta_1^{t+1}=\left(\underline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}\right)^2$, $\mu_2^{t+1}=\overline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}$, $\eta_2^{t+1}=\left(\overline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}\right)^2=1$, $f_{11}^{t+1}=2\underline{\gamma}_s-\left(\underline{\gamma}_s\right)^2-\left(\frac{n}{1+n}\right)^2$, $f_{22}^{t+1}=1-\left(\underline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}\right)^2$, $f_{12}^{t+1}=f_{21}^{t+1}=\underline{\gamma}_s\frac{n}{1+n}-\left(\underline{\gamma}_s\right)^2\frac{n}{1+n}$. Определитель полученной матрицы и ее первого главного минора положительны, если $\underline{\gamma}_s$ определяется как меньший корень квадратного уравнения

$\frac{1+2n}{(1+n)^2}-\frac{(1+2n)n^2\gamma^2}{(1+n)^4}-(1-\gamma)^2=0,$ В частности, если $n=4,$ то $\underline{\gamma}_s=0,44,$ если $n=5,$ то $\underline{\gamma}_s=0,5.$ Тогда $f_s(\underline{\gamma}_s,1)<1$ и $f_s(1,\underline{\gamma}_s)=f_s(\underline{\gamma}_s,1)<1.$ По (12) при $\gamma_1^{t+1},\gamma_2^{t+1}\in(\underline{\gamma}_s;1]$ будет $f_s(\gamma_1^{t+1},\gamma_2^{t+1})<1$ и $\left\|B_s^{t+1}\right\|<1.$ Процесс сходится.

Утверждение доказано.

Пример. Пусть на рынке четыре агента: первые два – ведущие, другие два – ведомые.

Вначале для ведущих агентов рассмотрим классический диапазон шагов $[\underline{\gamma}_s;\overline{\gamma}_s]=[0;1].$ По (17) $\mu_1^{t+1}=0,8\beta_1^{t+1},$ $\mu_2^{t+1}=0,8\beta_2^{t+1},$ $\eta_1^{t+1}=0,64\beta_1^{t+1},$ $\eta_2^{t+1}=0,64\beta_2^{t+1},$ $f_{11}^{t+1}=\beta_1^{t+1}-0,64\beta_2^{t+1},$ $f_{22}^{t+1}=\beta_2^{t+1}-0,64\beta_1^{t+1},$ $f_{12}^{t+1}=f_{21}^{t+1}=0.$ Определители главных миноров матрицы с элементами f_{ij}^{t+1} положительны, если $\beta_1^{t+1}-0,64\beta_2^{t+1}>0,$ и, по симметрии, $\beta_2^{t+1}-0,64\beta_1^{t+1}>0.$ В частности, это так, когда $\beta_1^{t+1}=\beta_2^{t+1}=1,$ т.е. каждый ведущий агент выбирает максимальный шаг, считая его наилучшим ответом на ожидаемые действия конкурентов. Когда ведущие агенты действуют разнонаправлено в выборе шагов, то указанные неравенства могут не выполняться и вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя известно, что процесс сходится $\forall\beta_1^{t+1},\beta_2^{t+1}\in(0;1].$ Например, если $\beta_1^{t+1}=1,$ $\beta_2^{t+1}=0,1,$ то второе неравенство не выполняется.

Изменим нижнюю границу диапазона шагов. Пусть $[\underline{\gamma}_s;\overline{\gamma}_s]=[0,5;1].$ Имеем по (17), что: $\mu_1^{t+1}=0,4+0,4\beta_1^{t+1},$ $\mu_2^{t+1}=0,4+0,4\beta_2^{t+1},$ $\eta_1^{t+1}=0,16+0,48\beta_1^{t+1},$ $\eta_2^{t+1}=0,16+0,48\beta_2^{t+1},$ $f_{11}^{t+1}=0,59+0,25\beta_1^{t+1}-0,48\beta_2^{t+1},$ $f_{22}^{t+1}=0,59-$ $-0,48\beta_1^{t+1}+0,25\beta_2^{t+1},$ $f_{12}^{t+1}=f_{21}^{t+1}=0,4-0,2\beta_1^{t+1}-0,2\beta_2^{t+1}.$ Определитель первого главного минора матрицы (17) положителен $\forall\ \beta_1^{t+1},\beta_2^{t+1}\in[0;1].$ Определитель второго главного минора матрицы (16) также положителен $\forall\ \beta_1^{t+1},\beta_2^{t+1}\in[0;1],$ поскольку выражение $f_{11}^{t+1}f_{22}^{t+1}-f_{12}^{t+1}f_{21}^{t+1}$ после преобразований сводится к выражению

$$0,1881+0,0243(\beta_1^{t+1}+\beta_2^{t+1})-0,16(\beta_1^{t+1}+\beta_2^{t+1})^2+0,5329\beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1},$$

которое больше нуля. По утверждению 4 условия сходимости процесса выполняются. А по утверждению 6 нижняя граница диапазона, гарантирующего сходимость по норме процесса, может быть уменьшена.

В завершении статьи предложим метод формирования максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов коллективного поведения в линейной модели олигополии (1)–(3) с произвольным числом агентов, действующих по Курно и Штакельбергу, который был использован при доказательстве утверждений 5 и 6. Суть метода состоит в следующем:

п. 1. Определяются для всех моментов времени t единая для ведущих и единая для ведомых агентов правые границы $\overline{\gamma}_s$ и $\overline{\gamma}_c$, соответственно, диапазонов выбора параметров $\gamma_i^{t+1}\ (i \in N)$. По лемме 3 единая граница для ведущих агентов определяется из условия $\overline{\gamma}_s = \min\left\{\frac{2(1+n)}{1+nn_s}; 1\right\}$, для ведомых агентов – из условия $\overline{\gamma}_c = \min\left\{\frac{4}{1+n_c}; 1\right\}$.

Так для ведущих агентов при $n_s = 1, 2$ имеем максимально возможную границу $\overline{\gamma}_s = 1$, при $n_s > 2$ правая граница не может быть максимальной, в частности, при $n_s = 3$ и $n = 5$ имеем $\overline{\gamma}_s = 0,75$.

Для ведомых агентов при $n_c = 2$ имеем $\overline{\gamma}_c = 1$, при $n_c = 3$ – $\overline{\gamma}_c = 1$ (*примечание*: здесь сама граница не включается в диапазон), $n_c = 4$ – $\overline{\gamma}_c = 0,8$, $n_c = 5$ – $\overline{\gamma}_c = 2/3$ и т.д.

Значение $\overline{\gamma}_s$ определяет в диапазоне $[0; 1]$ максимальное значение параметра, для которого положительно определена квадратичная форма (14) $f_s(\gamma^{t+1})$, если $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$. Также $\overline{\gamma}_c$ определяет в диапазоне $[0; 1]$ максимальное значение параметра, для которого положительно определена квадратичная форма (16) $f_c(\gamma^{t+1})$, если $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$.

Тогда, если $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$ и $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$, то $f(\lambda^{t+1}) < 1$ для каждого набора действительных чисел $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, такого что $\sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 + \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 = 1$.

п. 2. Определяются для всех моментов времени t единая для ведущих и единая для ведомых агентов левые границы $\underline{\gamma}_s$ и $\underline{\gamma}_c$, соответственно, диапазонов выбора параметров γ_i^{t+1} $(i \in N)$. Для этого решаются $(n_s - 1)$ задач на положительную определенность матриц для ведущих агентов и $(n_c - 1)$ задач на положительную определенность матриц для ведомых агентов. Суть этих задач состоит в следующем.

Задача 1 для случая, когда один ведущий агент и один ведомый агент выбирают нижнюю границу, а остальные – верхнюю границу диапазона.

Задача 1 по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первый агент выбирает нижнюю границу. По (17) для набора параметров $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_2^{t+1} = \gamma_3^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$, положив $\beta_1^{t+1} = 0$ и $\beta_2^{t+1} = \beta_3^{t+1} = \ldots = \beta_{n_s}^{t+1} = 1$, определяем элементы матрицы. Пусть $\underline{\gamma}_{s(1)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена, а f_s – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(1)}$.

Задача 1 по ведомым агентам. Пусть, для определенности, $(n_s + 1)$-й агент выбирает нижнюю границу. По (18) для набора параметров $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$, положив $\beta_{n_s+1}^{t+1} = 0$ и $\beta_{n_s+2}^{t+1} = \beta_{n_s+3}^{t+1} = \ldots = \beta_n^{t+1} = 1$, определяем элементы матрицы. Пусть $\underline{\gamma}_{c(1)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Тогда при $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(1)}$ положительно определена квадратичная форма f_c, соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(1)}, \gamma_2^{t+1} = \gamma_3^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$, $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(1)}, \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$ и $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$ имеем по (13) $f < 1 - f_s - f_c < 1$.

Такой же вывод имеет место, когда любой один агент выбирает нижнюю границу, а другие – верхнюю границу диапазона.

Задача 2 для случая, когда два ведущих и два ведомых агента выбирают нижнюю границу, а остальные – верхнюю границу диапазона.

Задача 2 по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первые два агента выбирают нижнюю границу. По (17) для набора параметров $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_3^{t+1} = \gamma_4^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$, положив $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 0$ и $\beta_3^{t+1} = \beta_4^{t+1} = \ldots = \beta_{n_s}^{t+1} = 1$, определяем элементы матрицы. Пусть $\underline{\gamma}_{s(2)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена, а f_s – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(2)}$.

Задача 2 по ведомым агентам. Пусть, для определенности, (n_s+1)-й и (n_s+2)-й агенты выбирают нижнюю границу. По (17) для набора параметров $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \gamma_{n_s+4}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$, определяем элементы матрицы, положив $\beta_{n_s+1}^{t+1} = \beta_{n_s+2}^{t+1} = 0$ и $\beta_{n_s+3}^{t+1} = \beta_{n_s+4}^{t+1} = \ldots = \beta_n^{t+1} = 1,$. Пусть $\underline{\gamma}_{c(2)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Тогда при $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(2)}$ положительно определена квадратичная форма f_c, соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора параметров $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(2)}, \gamma_3^{t+1} = \gamma_4^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \overline{\gamma}_s$, $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(2)}$, $\gamma_{n_s+3}^{t+1} = \gamma_{n_s+4}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \overline{\gamma}_c$ и $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$ имеем по (13) $f < 1 - f_s - f_c < 1$.

Такой же вывод имеет место, когда любые два агента выбирают нижнюю границу, остальные – верхнюю границу диапазона.

Подобным образом определяются $\underline{\gamma}_{s(3)}, \underline{\gamma}_{s(4)}, \ldots, \underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$ и $\underline{\gamma}_{c(3)}, \underline{\gamma}_{c(4)}, \ldots, \underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$. Рассмотрим задачи определения последних параметров в этих списках.

Задача (n_s-1) по ведущим и задача (n_c-1) по ведомым агентам, когда (n_s-1) ведущих и (n_c-1) ведомых агентов выбирают нижнюю границу, а один ведущий и один ведомый – верхнюю границу диапазона.

Задача (n_s-1) по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первые (n_s-1) агентов выбирают нижнюю границу, а n_s-й агент – верхнюю границу. По (17) для набора параметров $\gamma_1^{t+1}=\gamma_2^{t+1}=\ldots=\gamma_{n_s-1}^{t+1}=\underline{\gamma}, \lambda_{n_s}^{t+1}=\overline{\gamma}_s$ определяем элементы матрицы, положив $\beta_1^{t+1}=\beta_2^{t+1}=\ldots=\beta_{n_s-1}^{t+1}=0$ и $\beta_{n_s}^{t+1}=1.$ Пусть $\underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена, а f_s – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при $\gamma_1^{t+1}=\gamma_2^{t+1}=\ldots=\gamma_{n_s-1}^{t+1}=\underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$.

Задача (n_c-1) по ведомым агентам. Пусть, для определенности, первые (n_c-1) агентов выбирают нижнюю границу, а n-й агент – верхнюю границу. По (18) для набора параметров $\gamma_{n_s+1}^{t+1}=\gamma_{n_s+2}^{t+1}=\ldots=\gamma_{n-1}^{t+1}=\underline{\gamma}, \gamma_n^{t+1}=\overline{\gamma}_c$ определяем элементы матрицы, положив $\beta_{n_s+1}^{t+1}=\beta_{n_s+2}^{t+1}=\ldots=\beta_{n-1}^{t+1}=0$ и $\beta_n^{t+1}=1$. Пусть $\underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$ – минимальное значение параметра $\underline{\gamma}$, при котором матрица положительно определена. Тогда при $\gamma_{n_s+1}^{t+1}=\gamma_{n_s+2}^{t+1}=\ldots=\gamma_{n-1}^{t+1}=\underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$ положительно определена квадратичная форма f_c, соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора параметров $\gamma_1^{t+1}=\gamma_2^{t+1}=\ldots=\gamma_{n_s-1}^{t+1}=$ $=\underline{\gamma}_{s(n_s-1)}, \gamma_{n_s}^{t+1}=\overline{\gamma}_s$, $\gamma_{n_s+1}^{t+1}=\gamma_{n_s+2}^{t+1}=\ldots=\gamma_{n-1}^{t+1}=\underline{\gamma}_{c(n_c-1)}, \gamma_n^{t+1}=\overline{\gamma}_c$ и $\sum_{i\in N}(\varepsilon_i)^2=1$ имеем по (13) $f<1-f_s-f_c<1$.

Такой же вывод имеет место, когда любые $(n_s - 1)$ ведущих агентов и любые $(n_c - 1)$ ведомых агентов выбирают нижнюю границу, а оставшиеся агенты – верхнюю границу диапазона.

п. 3. В случае, когда все агенты выбирают нижнюю границу $\underline{\gamma}$ в своих диапазонах, матрицы с элементами (16) и (17) и соответствующие им квадратичные формы положительно определены, если $\underline{\gamma} \neq 0$. В этом легко убедиться повторяя доказательство леммы 3 для нижней границы. Тогда $f < 1$ для набора параметров $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \ldots = \gamma_{n_s}^{t+1} = = \gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \ldots = \gamma_n^{t+1} = \underline{\gamma}$ при условии, что ноль не входит в единый диапазон.

п. 4. Единая нижняя граница диапазонов определяется для ведущих агентов из условия $\underline{\gamma}_s = \max\limits_i \left\{ \underline{\gamma}_{s(i)}; i = \overline{1, (n_s - 1)} \right\}$, для ведомых агентов из условия $\underline{\gamma}_c = \max\limits_i \left\{ \underline{\gamma}_{c(i)}; i = \overline{1, (n_c - 1)} \right\}$.

На основании неравенства (12) в утверждении 2 имеем, что для диапазонов $\left[\underline{\gamma}_s; \overline{\gamma}_s \right]$ и $\left[\underline{\gamma}_c; \overline{\gamma}_c \right]$, параметров $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$ $\left(\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1, i \in N \right)$, а также векторов вида $\gamma^{t+1} = (\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_s + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_s, \ldots, \alpha_{n_s}^{t+1} \underline{\gamma}_s + \beta_{n_s}^{t+1} \overline{\gamma}_s, \alpha_{n_s+1}^{t+1} \underline{\gamma}_c + \beta_{n_s+1}^{t+1} \overline{\gamma}_c, \ldots, \alpha_n^{t+1} \underline{\gamma}_c + $ $+ \beta_n^{t+1} \overline{\gamma}_c)$ выполняется неравенство $f(\gamma^{t+1}) < 1$. Тогда по (8), (11) $\left\| B^{t+1}(\gamma^{t+1}) \right\| < 1$ и процесс (4)–(6) сходится.

6. Заключение. Настоящее аналитическое исследование посвящено проблеме выявления условий сходимости динамики коллективного поведения к равновесию Нэша на конкурентных рынках с произвольным числом агентов, действующих по Курно или Штакельбергу, для случая линейных функций затрат и спроса. Основное внимание уделяется поиску ограничений на диапазоны допустимых откликов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость динамики. Особенность исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от t-го к $(t+1)$-му моменту времени.

Для любого числа лидеров и ведомых агентов на рынке поставлены и решены две основные задачи: проверка выполнимости критерия сходимости динамики по норме для заданного диапазона шагов; нахождение границ максимальных диапазонов шагов агентов, гарантирующих сходимость динамики коллективного поведения к равновесию Нэша.

В рамках решения указанных задач показано, что невыполнение критерия по норме (если норма матрицы перехода погрешностей больше или равна единице) особенно проявляет себя при разнонаправленном выборе, когда одни агенты выбирают «большие» шаги движения к своим текущим целям, другие, наоборот, – «малые» шаги, а также усиливается с ростом числа агентов на рынке. Установлены общие для любого числа агентов условия на диапазоны сходимости динамик.

Предложен метод построения максимальных диапазонов сходимости по норме динамики. Показано, что максимальные диапазоны не зависят от параметров рынка и агентов, но зависят от числа агентов на рынке. Метод позволяет, фиксировав правую границу, находить нижнюю границу диапазона сходимости.

Представлены результаты решения указанных задач для частных случаев олигополии, которые являются наиболее широко распространенными на практике. В частности, для рынков с небольшим числом агентов по предложенному методу рассчитаны максимальные диапазоны шагов.

Показано также, что динамика (10), (5), (6), в которой в каждый момент времени выполнены условия конкурентоспособности агентов, будет сходиться, если сходится по норме базовый процесс (4)–(6).

Результаты исследования могут иметь теоретическое и прикладное значение для понимания, оперативного реагирования и регулирования коллективного поведения на современных конкурентных рынках. Для более глубокого изучения коллективного поведения особенно важным представляется развитие экспериментальных исследований, учитывающих меняющиеся ситуации по экономическим ограничениям и нелинейность связей, поиск рациональных решений и общих закономерностей на основе анализа результатов вычислительных экспериментов.

Литература

1. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth // London: Hafner. 1960. 235 p.
2. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium / Transl. into English by Basin D., Urch L. & Hill. R. // New York, Springer. 2011. 134 p.
3. Zewde A.B., Kassa S.M. Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints // Computational Management Science. 2021. vol. 18(4). pp. 455–475.

4. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 320. pp. 240–250.
5. Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 6. pp. 1051–1072.
6. Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81 no. 9. pp. 1659–1678.
7. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders // Artificial Intelligence. 2021. vol. 300. DOI: 10.1016/j.artint.2021.103549.
8. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives // RAIRO – Operations Research. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
9. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // Информатика и автоматизация. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
10. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information // Reliability Engineering and System Safety. 2020. vol. 195. DOI: 10.1016/j.ress.2019.106695.
11. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
12. Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий // Экономика и математические методы. 2022. № 4. С. 113–122.
13. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models // Leiden: CRC Press. 2014. 298 p.
14. Nash J. Non-Cooperative Games // Annals of Mathematics. 1951. no. 54. pp. 286–295.
15. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. // Princeton: Princeton University Press. 1995. 744 p.
16. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games // Proceedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10). 2010. pp. 461–473.
17. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers // Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
18. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 393(3). DOI: 10.1016/j.amc.2020.125823.
19. Korgin N.A., Korepanov V.O. Nash Bargaining Solution as Negotiation Concept for Resource Allocation Problem: Analysis of Experimental Data // Contributions to Game Theory and Management. 2020. no. 13. pp. 207–217.
20. Fedyanin D.H. An Example of Reflexive Analysis of a Game in Normal Form / Ed. by Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. // Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhäuser, Cham. 2019. pp. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-030-23699-1_1.
21. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения // М.: Наука. 1977. 248 с.

22. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами: М. ИПУ РАН. 2020. № 85. С. 206–237.
23. Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН. 2011. 127 с.
24. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.
25. Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents' // Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 389–406.
26. Askar S.S., Elettrebybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
27. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Applied Mathematics and Computation. 2019. vol. 362. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.049.124535.
28. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
29. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 294. pp. 253–263.
30. Al-Khedhairi A. Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2020. vol. 21. pp. 339–359.
31. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 367–388.
32. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы // М.: Наука. 1989. 432 с.
33. Белицкий Г.Р., Любич Ю.И. Нормы матриц и их приложения // Киев: Наукова думка. 1984. 158 с.

Алгазин Геннадий Иванович — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, Алтайский государственный университет. Область научных интересов: математическое моделирование социально-экономических процессов, теория игр, исследование операций, математическая концепция системного компромисса, информационное управление. Число научных публикаций — 180. algaz46@yandex.ru; проспект Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: +7(385)229-81-51.

Алгазина Дарья Геннадьевна — канд. техн. наук, доцент кафедры, кафедра цифровых технологий и бизнес-аналитики, Алтайский государственный университет. Область научных интересов: моделирование конкурентных рынков, управление в организационных системах, цифровые технологии франчайзинга. Число научных публикаций — 40. darya.algazina@mail.ru; проспект Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: +7(385)229-65-47.

DOI 10.15622/ia.22.3.5

G. ALGAZIN, D. ALGAZINA

CONVERGENCE IN NORM OF COLLECTIVE BEHAVIOR DYNAMICS IN THE REFLEXIVE MODEL OF OLIGOPOLY WITH LEADERS

Algazin G., Algazina D. **Convergence in Norm of Collective Behavior Dynamics in the Reflexive Model of Oligopoly with Leaders.**

Abstract. A model of oligopoly with an arbitrary number of rational agents that are reflexive according to Cournot or Stackelberg, under the conditions of incomplete information for the classical case of linear functions of costs and demand is considered. The problem of achieving equilibrium based on mathematical modeling agents' decision-making processes is investigated. Works in this direction are relevant due to the importance of understanding the processes in real markets and the convergence of theoretical models with them. In the framework of a dynamic model of reflexive collective behavior, each agent at each moment adjusts its output, making a step in the direction of output maximizing its profit under the expected choice of competitors. The permissible step value is set by the range. This article sets and solves the problem of finding the ranges of permissible steps of agents, which are formulated as conditions that guarantee the convergence of dynamics to equilibrium. The novelty of the study is determined by the use of the norm of the error transition matrix from the t-th to (t+1)-moment of time as a criterion of the dynamics convergence. It is shown that the dynamics converge if the norm is less than unity, starting at some point in time, and the failure to fulfill this criterion especially manifests itself in multidirectional choice, when some agents choose "big" steps towards their current goals, while others, on the contrary, choose "small" steps. Failure to meet the criterion also increases as the market grows. The general conditions for the ranges of convergence of dynamics for an arbitrary number of agents are established, and a method for constructing the maximum such ranges is proposed, which also constitutes the novelty of the study. The results of solving the above problems for particular cases of oligopoly, which are the most widespread in practice, are presented.

Keywords: oligopoly, incomplete awareness, collective behavior, reflexion, matrix norm, process errors, convergence ranges.

References

1. Cournot A. Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth. London: Hafner, 1960. 235 p.
2. Stackelberg H. Market Structure and Equilibrium / Transl. into English by Basin D., Urch L. & Hill. R. New York, Springer, 2011. 134 p.
3. Zewde A.B., Kassa S.M. Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints. Computational Management Science. 2021. vol. 18(4). pp. 455–475.
4. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games. Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 320. pp. 240–250.
5. Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 6. pp. 1051–1072.
6. Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 9. pp. 1659–1678.

7. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders. Artificial Intelligence. 2021. vol. 300. DOI: 10.1016/j.artint.2021.103549.
8. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives. RAIRO – Operations Research. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
9. Algazin G.I., Algazina D.G. [Modeling the dynamics of collective behavior in a reflexive game with an arbitrary number of leaders]. Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and automation. 2022. vol. 21. no. 2. pp. 339–375. (In Russ.).
10. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information. Reliability Engineering and System Safety. 2020. vol. 195. DOI: 10.1016/j.ress.2019.106695.
11. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
12. Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. [The influence of the agents' personal qualities on the exogenous formation of Stackelberg leadership in a collective action model]. Ekonomika i matematicheskiye metody – Economics and mathematical methods. 2022. vol. 58. no. 4. pp. 113–122. (In Russ.).
13. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models. Leiden: CRC Press, 2014. 298 p.
14. Nash J. Non-Cooperative Games. Annals of Mathematics. 1951. no. 54. pp. 286–295.
15. The Handbook of Experimental Economics. Princeton: Princeton University Press, 1995. 744 p.
16. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games. Proceedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10). 2010. pp. 461–473.
17. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers. Applied Mathematics and Computation. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
18. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information. Applied Mathematics and Computation. 2021. vol. 393(3). DOI: 10.1016/j.amc.2020.125823.
19. Korgin N.A., Korepanov V.O. Nash Bargaining Solution as Negotiation Concept for Resource Allocation Problem: Analysis of Experimental Data. Contributions to Game Theory and Management. 2020. no. 13. pp. 207–217.
20. Fedyanin D.H. An Example of Reflexive Analysis of a Game in Normal Form. Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications. Birkhäuser, Cham, 2019. pp. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-030-23699-1_1.
21. Opoitsev V.I. Ravnovesiye i ustoychivost' v modelyakh kollektivnogo povedeniya [Equilibrium and Stability in Models of Collective Behavior]. Moscow: Nauka, 1977. 248 p. (In Russ.).
22. Novikov D.A. [Dynamics Models of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making]. Upravleniye bol'shimi sistemami: Sb. nauch. tr. – Large-Scale Systems Control: Collected papers. Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2020. no. 85. pp. 206–237. (In Russ.).
23. Korepanov V.O. Modeli refleksivnogo gruppovogo povedeniya i upravleniya [Models of reflexive group behavior and management]. Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2011. 127 p. (In Russ.).
24. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty. Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.

25. Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents’. Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 389–406.
26. Askar S.S., Elettrebybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games. Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
27. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality. Applied Mathematics and Computation. 2019. vol. 362. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.049.124535.
28. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers. Discrete Dynamics in Nature and Society. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
29. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization. Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 294. pp. 253–263.
30. Al-Khedhairi A. Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences. International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2020. vol. 21. pp. 339–359.
31. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models. Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 367–388.
32. Samarskiy A.A., Gulin A.V. Chislennyye metody [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1989. 432 p. (In Russ.).
33. Belitskiy G.R., Lyubich Yu.I. Normy matrits i ikh prilozheniya [Norms of matrices and their applications]. Kyiv: Naukova dumka, 1984. 158 p. (In Russ.).

Algazin Gennady — Ph.D., Dr.Sci., Professor of the department, Department of theoretical cybernetics and applied mathematics, Altai State University. Research interests: mathematical modeling of socio-economic processes, game theory, operations research, the mathematical concept of systemic compromise, informational control. The number of publications — 180. algaz46@yandex.ru; 61, Lenin Av., 656049, Barnaul, Russia; office phone: +7(385)229-81-51.

Algazina Daria — Ph.D., Associate professor of the department, Department of digital technologies and business analytics, Altai State University. Research interests: modeling of competitive markets, organizational control, digital technologies of franchising. The number of publications — 40. darya.algazina@mail.ru; 61, Lenin Av., 656049, Barnaul, Russia; office phone: +7(385)229-65-47.