УДК 519.6

А. А. Макаров

МАТРИЦЫ РЕКОНСТРУКЦИИ И ДЕКОМПОЗИЦИИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СПЛАЙНОВ

Макаров А. А. **Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов.**

Аннотация. В данной работе для непрерывных сплайнов первого порядка на неравномерной сетке найдены калибровочные соотношения, дающие представление координатных сплайнов на исходной сетке с помощью линейной комбинации такого же рода сплайнов на измельченной (плотной) сетке, и калибровочные соотношения, дающие представление координатных сплайнов на укрупненной (разреженной) сетке с помощью линейной комбинации такого же рода сплайнов на исходной сетке. Получены матрицы уточняющей и разрежающей реконструкции на интервале и на отрезке для пространств сплайнов первого порядка, ассоциированных с бесконечной и с конечной неравномерными сетками соответственно. Построена система линейных функционалов, биортогональная системе координатных сплайнов. Получены матрицы уточняющей и разрежающей декомпозиции на интервале и на отрезке для пространств сплайнов первого порядка, ассоциированных с бесконечной и с конечной неравномерными сетками соответственно.

Ключевые слова: сплайн, вэйвлет, вейвлет, всплеск, матрица реконструкции, матрица декомпозиции, уточняющие схемы.

Makarov A. A. **The reconstruction and decomposition matrixes for linear splines.**

Abstract. The aim of the paper is construction of calibration relations in the case of class of coordinate non-polynomial splines connected with refinement of grids. An embedding of spline spaces is established for arbitrary refinement of grids. The reconstruction matrixes in the case of a grid on an open interval and a grid on a segment are constructed. The system of biorthogonal linear functionals to splines is constructed. The decomposition matrixes in the case of a grid on an open interval and a grid on a segment are constructed.

Keywords: spline, wavelet, spline wavelet decomposition, reconstruction matrix, decomposition matrix, subdivision scheme.

1. Введение. Сплайны и вэйвлеты (всплески) нашли широкое применение в теории информации. Вэйвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия или уточнения) больших потоков информации (см. [1]). В теории сплайнов наиболее важными являются интерполяционные и аппроксимационные свойства, свойства гладкости и устойчивости решения интерполяционных и аппроксимационных задач; важно также минимизировать вычислительную сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета). Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности измельчающихся или укрупняющихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то вычислительная сложность оказывается приемлемой.

Важной задачей при построении сплайн-вэйвлетного разложения является разработка способа проектирования исходного пространства сплайнов на вложенное пространство сплайнов. Выбор этого способа приводит к матрицам декомпозиции/реконструкции (подробнее см. [2–4]), применяемым для вэйвлетного разложения потоков числовой информации.

Цель данной работы — построить сплайны лагранжева типа первого порядка, доказать вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся неравномерных сеток, построить простую реализацию системы функционалов, биортогональную системе сплайнов, получить матрицы реконструкции и декомпозиции в случаях неравномерной бесконечной (на открытом интервале) и конечной (на отрезке) сеток.

2. Предварительные обозначения. Пусть $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{Z}_+ \stackrel{\text{def}}{=} \{j \mid j \geqslant 0,\ j \in \mathbb{Z}\}$, $\mathbb{R}^1$ — множество вещественных чисел. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$. Векторное (линейное) пространство $(m+1)$-мерных вектор-столбцов обозначим через $\mathbb{R}^{m+1}$, причем векторы в нем будем отождествлять с одностолбцовыми матрицами и применять к ним обычные матричные операции; в частности, для двух векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m+1}$ выражение $\mathbf{a}^T\mathbf{b}$ представляет собой евклидово скалярное произведение этих векторов. Компоненты векторов обозначаются квадратными скобками и нумеруются цифрами $0, 1, \ldots, m$; например, $\mathbf{a} = ([\mathbf{a}]_0, [\mathbf{a}]_1, \ldots, [\mathbf{a}]_m)^T$. Квадратная матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^{m+1}$ (в указанном только что порядке), обозначается символом $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$, а выражение $\det(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ обозначает ее определитель. Упорядоченное множество $\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ векторов $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m+1}$ будем называть *цепочкой векторов*. Цепочка $\mathbf{A}$ называется *полной цепочкой векторов*, если $\det(\mathbf{a}_{j-m}, \mathbf{a}_{j-m+1}, \ldots, \mathbf{a}_j) \neq 0 \quad \forall j \in \mathbb{Z}$. Множество всех функций непрерывных на интервале (α, β) обозначим через $C(\alpha, \beta)$; для любого числа $S \in \mathbb{Z}_+$ введем обозначение $C^S(\alpha,\beta) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u^{(i)} \in C(\alpha,\beta)\ \forall\, i = 0,1,2,\dots,S\}$, полагая $C^0(\alpha,\beta) = C(\alpha,\beta)$. Если компоненты вектор-функции $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{m+1}$ непрерывно дифференцируемы S раз на интервале (α,β), то будем писать $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$. Аналогичные обозначения $C^S[a,b]$ и $\mathbf{C}^S[a,b]$ будем использовать для соответствующих пространств на отрезке $[a,b]$.

3. Пространство минимальных сплайнов. На интервале $(\alpha,\beta) \subset \mathbb{R}^1$ рассмотрим сетку $X \stackrel{\text{def}}{=} \{x_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$,

$$X:\ \ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots, \tag{1}$$

где $\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to-\infty} x_j$, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{j\to+\infty} x_j$ (случаи $\alpha = -\infty, \beta = +\infty$ не исключаются).

Введем обозначения $M \stackrel{\text{def}}{=} \cup_{j\in\mathbb{Z}}(x_j,x_{j+1})$, $S_j \stackrel{\text{def}}{=} [x_j,x_{j+m+1}]$, $J_k \stackrel{\text{def}}{=} \{k-m,k-m+1,\dots,k\}$, где $k,j \in \mathbb{Z}$.

При $K_0 \geqslant 1$, $K_0 \in \mathbb{R}^1$ обозначим через $\mathcal{X}(K_0,\alpha,\beta)$ класс сеток вида (1) со свойством *локальной квазиравномерности* (подробнее о таких сетках см. [5])

$$K_0^{-1} \leqslant \frac{x_{j+1}-x_j}{x_j-x_{j-1}} \leqslant K_0 \quad \forall j \in \mathbb{Z},$$

и положим $h_X \stackrel{\text{def}}{=} \sup\limits_{j\in\mathbb{Z}} (x_{j+1}-x_j)$.

Пусть $\mathbb{X}(M)$ – линейное пространство вещественнозначных функций, заданных на множестве M. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi}$: $(\alpha,\beta) \mapsto \mathbb{R}^{m+1}$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$.

Если цепочка векторов $\{\mathbf{a}_j\}$ полная, то из условий

$$\begin{aligned} \sum_{j'\in J_k} \mathbf{a}_{j'}\,\omega_{j'}(t) \equiv{}& \ \boldsymbol{\varphi}(t) \quad \forall\, t \in (x_k,x_{k+1}),\ \forall\, k \in \mathbb{Z},\\ \omega_j(t) \equiv{}& \ 0 \qquad\ \ \forall\, t \notin S_j \cap M. \end{aligned} \tag{2}$$

однозначно определяются функции $\omega_j(t)$, $t \in M$, $j \in \mathbb{Z}$. Ясно, что $\operatorname{supp}\omega_j(t) \subset S_j$.

По формулам Крамера из системы линейных алгебраических уравнений (2) находим

$$\omega_j(t) = \frac{\det\Big(\{\mathbf{a}_{j'}\}_{j'\in J_k, j'\neq j} \ \|\ {}'^j\, \boldsymbol{\varphi}(t)\Big)}{\det\Big(\mathbf{a}_{k-m}, \mathbf{a}_{k-m+1,\dots,}\mathbf{a}_k\Big)} \qquad \forall\, t \in (x_k,x_{k+1}),\ \ \forall\, j \in J_k, \tag{3}$$

где символьная запись $\| \ \|'^j$ означает, что определитель в числителе получается из определителя в знаменателе заменой столбца $\mathbf{a}_j$ на столбец $\boldsymbol{\varphi}(t)$ (с сохранением прежнего порядка следования столбцов).

Линейная оболочка функций $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ называется *пространством минимальных* $(\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$*-сплайнов* m *порядка* на сетке X и обозначается через

$$\mathbb{S}(X,\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j \quad \forall\, c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Условия (2) называются *аппроксимационными соотношениями*, вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ называется *порождающей* для $(\mathbf{A},\boldsymbol{\varphi})$-сплайнов.

В дальнейшем для вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{C}^S(\alpha,\beta)$ положим

$$\boldsymbol{\varphi}_k \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}(x_k), \qquad \boldsymbol{\varphi}_k^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}^{(i)}(x_k), \quad i=0,1,\ldots,S, \quad k\in\mathbb{Z}.$$

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{\Pi}(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1})\in\mathbb{R}^{m+1}$, определяемую тождеством

$$\mathbf{\Pi}^T(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1})\,\mathbf{z} \equiv \det\bigl(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1},\mathbf{z}\bigr) \tag{4}$$

для всех $\mathbf{z},\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1}\in\mathbb{R}^{m+1}$. Вектор-функцию $\mathbf{\Pi}(\mathbf{z}_0,\mathbf{z}_1,\ldots,\mathbf{z}_{m-1})$ называют (подробнее см. [6]) m*-местным векторным произведением* в пространстве $\mathbb{R}^{m+1}$ и обозначают через $\mathbf{z}_0\times\mathbf{z}_1\times\ldots\times\mathbf{z}_{m-1}$.

При $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{C}^{m-1}(\alpha,\beta)$ рассмотрим векторы, определяемые формулой

$$\mathbf{d}_j \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_j\times\boldsymbol{\varphi}'_j\times\ldots\times\boldsymbol{\varphi}_j^{(m-1)}. \tag{5}$$

Пусть $\boldsymbol{\varphi}\in\mathbf{C}^m(\alpha,\beta)$. Введем следующее обозначение для вронскиана

$$W(t) \stackrel{\text{def}}{=} \det\Bigl(\boldsymbol{\varphi}(t),\boldsymbol{\varphi}'(t),\ldots,\boldsymbol{\varphi}^{(m-1)}(t),\boldsymbol{\varphi}^{(m)}(t)\Bigr).$$

Определим цепочку векторов $\mathbf{A}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^*\}$ формулой

$$\mathbf{a}_j^* \stackrel{\text{def}}{=} -\mathbf{d}_{j+1}\times\mathbf{d}_{j+2}\times\ldots\times\mathbf{d}_{j+m}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^m(\alpha, \beta)$. *Если выполнено условие*

$$|W(t)| \geqslant c = const > 0 \qquad \forall\, t \in (\alpha, \beta), \tag{7}$$

и сетка $X \in \mathcal{X}(K_0, \alpha, \beta)$ *для некоторого* $K_0 \geqslant 1$, *то при достаточно малом* h_X *пространство* $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ *лежит в пространстве* $C^{m-1}(\alpha, \beta)$.

Доказательство см. в работе [7]. □

Следствие 1. *В условиях теоремы 1 цепочка векторов* $\{\mathbf{d}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *является полной, при этом справедливы соотношения*

$$\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^* \neq 0, \qquad \mathbf{d}_{j+m+1}^T \mathbf{a}_j^* \neq 0.$$

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством минимальных* $B_{\boldsymbol{\varphi}}$*-сплайнов* m *порядка* на сетке X. Сами сплайны будем называть *минимальными сплайнами максимальной гладкости.*

Пусть $m = 1$. Рассмотрим вектор-функцию $\boldsymbol{\varphi} : (\alpha, \beta) \mapsto \mathbb{R}^2$ с компонентами из $\mathbb{X}(M)$. Формулы (4), (5), (6) для нахождения векторов $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ немного видоизменяются, ввиду того, что в m-местном векторном произведении $m = 1$. Рассмотрим векторы $\mathbf{d}_j \in \mathbb{R}^2$, задаваемые тождеством $\mathbf{d}_j^T \mathbf{x} \equiv \det(\boldsymbol{\varphi}_j, \mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, $j \in \mathbb{Z}$, и определим векторы $\mathbf{a}_j^* \in \mathbb{R}^2$ формулой $\mathbf{a}_j^* \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$. Представим векторы $\mathbf{a}_j^*$ и $\mathbf{d}_j$ в покомпонентном виде

$$\mathbf{a}_j^* = ([\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_0, [\boldsymbol{\varphi}_{j+1}]_1)^T, \ \mathbf{d}_j = (-[\boldsymbol{\varphi}_j]_1, [\boldsymbol{\varphi}_j]_0)^T.$$

Если $\boldsymbol{\varphi} \in \mathbf{C}^1(\alpha, \beta)$ и выполнено условие (7), то $\omega_j \in C(\alpha, \beta)$ и справедливы формулы

$$\omega_j(t) = \begin{cases} \dfrac{\mathbf{d}_j^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_j^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при} \quad t \in [x_j, x_{j+1}), \\[2ex] \dfrac{\mathbf{d}_{j+2}^T \boldsymbol{\varphi}(t)}{\mathbf{d}_{j+2}^T \mathbf{a}_j^*} & \text{при} \quad t \in [x_{j+1}, x_{j+2}). \end{cases} \tag{8}$$

Теорема 2. *Пусть* $[\boldsymbol{\varphi}(t)]_0 \equiv 1 \; \forall\, t \in (\alpha, \beta)$. *Если цепочку векторов* $\mathbf{A}^N \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_j^N\}$ *определить формулой* $\mathbf{a}_j^N \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{\varphi}_{j+1}$, *то справедливо тождество*

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \omega_j(t) \equiv 1 \quad \forall\, t \in (\alpha, \beta).$$

Доказательство равенства получается рассмотрением аппроксимационных соотношений (2) с вектором $\mathbf{a}_j^N$ в покомпонентном виде. $\square$

Пространство $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^N, \boldsymbol{\varphi})$ называется *пространством нормализованных $B_{\boldsymbol{\varphi}}$-сплайнов первого порядка* на сетке X.

Следствие 2. *При $\boldsymbol{\varphi}(t) = (1, t)^T$ функции $\omega_j(t)$ совпадают с известными полиномиальными B-сплайнами первой степени, т. е. с одномерными функциями Куранта.*

Рассмотрим конечномерные пространства сплайнов. Введем обозначения

$$a \stackrel{\text{def}}{=} x_0, \quad b \stackrel{\text{def}}{=} x_n, \quad J_{1,n} \stackrel{\text{def}}{=} \{-1, 0, \ldots, n-1, n\}.$$

Из бесконечной сетки X выделим конечную сетку $X_n, n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$,

$$X_n : x_{-1} < a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b < x_{n+1},$$

из полной бесконечной цепочки $\mathbf{A}^* \in \mathbb{A}$ выделим конечную цепочку $\mathbf{A}_n^*$,

$$\mathbf{A}_n^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{a}_{-1}^*, \ldots, \mathbf{a}_n^*\}.$$

Для измеримого (по Лебегу) множества $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^1$ обозначим через $\operatorname{mes}(\mathcal{M})$ его лебегову меру.

Пусть система $\{g_j\}$ состоит из функций $g_j(t)$, заданных почти везде на интервале (α, β), и $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$. Система функций $\{g_j \mid \operatorname{mes}(\operatorname{supp} g_j \cap (a, b)) > 0\}$ называется *сужением* системы $\{g_j\}$ на отрезок $[a, b]$.

Сузим все функции пространства $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ на множество $[a, b]$. Совокупность этих сужений представляет собой конечномерное линейное пространство

$$\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi}) \stackrel{\text{def}}{=} \{u \mid u = \sum_{j \in J_{1,n-1}} c_j \, \omega_j \quad \forall \, c_j \in \mathbb{R}^1\}.$$

Очевидно, что

$$\mathbb{S}(X_n, \mathbf{A}_n^*, \boldsymbol{\varphi}) \subset C[a, b].$$

Теорема 3. *Функция* $u_n(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j\in J_{1,n-1}} c_j\,\omega_j(t),\ t\in[a,b]$ *является следом функции* $u(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j\in\mathbb{Z}} c_j\,\omega_j(t),\ t\in(\alpha,\beta)$ *на отрезке* $[a,b]$, *лежит в пространстве* $\mathbb{S}(X_n,\mathbf{A}_n^*,\boldsymbol{\varphi})$ *и полностью определяется набором узлов* $\{x_j\}_{j\in J_{1,n+1}}$, *набором векторов* $\{\boldsymbol{\varphi}_j\}_{j\in J_{1,n+1}}$, *и набором коэффициентов* $\{c_j\}_{j\in J_{1,n-1}}$.

Доказательство следует непосредственно из определений пространств $\mathbb{S}(X,\mathbf{A}^*,\boldsymbol{\varphi})$ и $\mathbb{S}(X_n,\mathbf{A}_n^*,\boldsymbol{\varphi})$. □

Следствие 3. *Сужения функций* ω_j *образуют линейно независимую систему на отрезке* $[a,b]$, *причем* $\dim\,\mathbb{S}(X_n,\mathbf{A}_n^*,\boldsymbol{\varphi}) = n+1$.

4. Калибровочные соотношения. Из исходной сетки X для фиксированного $k\in\mathbb{Z}$ удалим один узел x_{k+1}, и на полученной таким образом *укрупненной (разреженной) сетке* $\widetilde{X}$ рассмотрим сплайны $\widetilde{\omega}_j(t),\ j\in\mathbb{Z}$.

Пусть $\xi \stackrel{\text{def}}{=} x_{k+1}$, а $\widetilde{x}_j$ – узлы вновь полученной сетки $\widetilde{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\widetilde{x}_j \mid j\in\mathbb{Z}\}$:

$$\widetilde{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при}\ \ j\leqslant k,\\ x_{j+1} & \text{при}\ \ j\geqslant k+1. \end{cases} \tag{9}$$

Условимся ставить волну сверху над обозначениями всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\widetilde{X}$. Функции $\widetilde{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (8), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\widetilde{x}_j,\ j\in\mathbb{Z}$.

Нетрудно видеть, что

$$\mathbf{d}_j = \widetilde{\mathbf{d}}_j \quad \text{при}\ \ j\leqslant k, \qquad \mathbf{d}_j = \widetilde{\mathbf{d}}_{j-1} \quad \text{при}\ \ j\geqslant k+2, \tag{10}$$

$$\mathbf{a}_j^* = \widetilde{\mathbf{a}}_j^* \quad \text{при}\ \ j\leqslant k-1, \qquad \mathbf{a}_j^* = \widetilde{\mathbf{a}}_{j-1}^* \quad \text{при}\ \ j\geqslant k+1. \tag{11}$$

Очевидно, что для $t\in(\alpha,\beta)$ верны тождества

$$\begin{array}{ll} \widetilde{\omega}_j(t)\equiv\omega_j(t) & \text{при}\ j\leqslant k-2,\\ \widetilde{\omega}_j(t)\equiv\omega_{j+1}(t) & \text{при}\ j\geqslant k+1. \end{array} \tag{12}$$

Ниже будет показано, что формулы (12) можно дополнить следующими представлениями функций $\widetilde{\omega}_{k-1}$ и $\widetilde{\omega}_k$ через функции ω_j:

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) \equiv \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k-1}\omega_{k-1}(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\omega_k(t), \tag{13}$$

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\omega_k(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k+1}\omega_{k+1}(t), \qquad (14)$$

где $\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} \in \mathbb{R}^1$. Тождества (12)–(14) называются *калибровочными соотношениями*.

Теорема 4. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{\omega}_{k-1}(t) \equiv \omega_{k-1}(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\omega_k(t) \qquad t \in (\alpha, \beta), \qquad (15)$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_k^* - \mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k+1}^*\frac{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T\mathbf{a}_{k+1}^*}\right)/\mathbf{d}_{k-1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательно представление функции $\widetilde{\omega}_{k-1}(t)$ на промежутках $(\widetilde{x}_{k-1}, \widetilde{x}_k)$, $(\widetilde{x}_k, \xi)$, $(\xi, \widetilde{x}_{k+1})$.

1. Записывая аппроксимационные соотношения (2) при $t \in (\widetilde{x}_{k-1}, \widetilde{x}_k) = (x_{k-1}, x_k)$ для функций $\omega_j(t)$ и $\widetilde{\omega}_{j'}(t)$ (на сетках X и $\widetilde{X}$ соответственно), находим

$$\mathbf{a}_{k-2}^*\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}^*\,\omega_{k-1}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t),$$

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^*\,\widetilde{\omega}_{k-2}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t) \equiv \boldsymbol{\varphi}(t).$$

Отсюда $\forall\, t \in (x_{k-1}, x_k)$ получаем тождество

$$\mathbf{a}_{k-2}^*\,\omega_{k-2}(t) + \mathbf{a}_{k-1}^*\,\omega_{k-1}(t) \equiv \widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^*\,\widetilde{\omega}_{k-2}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t).$$

Обе части полученного тождества умножим слева на вектор–строку $\mathbf{d}_{k-1}^T$ и примем во внимание равенства

$$\mathbf{d}_{k-1}^T = \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T, \quad \mathbf{a}_{k-1}^* = \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*,$$

а также соотношения

$$\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-2}^* = \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-2}^* = 0.$$

В результате получим тождество

$$\mathbf{d}_{k-1}^T\mathbf{a}_{k-1}^*\omega_{k-1}(t) \equiv \widetilde{\mathbf{d}}_{k-1}^T\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*\widetilde{\omega}_{k-1}(t),$$

фактически совпадающее с тождеством (15) на рассматриваемом промежутке, ибо на нем $\omega_k(t) \equiv 0$.

2. Из аппроксимационных соотношений при $t \in (\widetilde{x}_k, \xi) = (x_k, x_{k+1})$ находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_k\,\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t). \qquad (16)$$

Умножая тождество (16) слева на вектор-строку $\mathbf{d}^T_k = \widetilde{\mathbf{d}}^T_k$, учитывая равенства $\mathbf{d}^T_k\mathbf{a}^*_{k-1} = \widetilde{\mathbf{d}}^T_k\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1} = 0$, получаем тождество

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \frac{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_k}{\widetilde{\mathbf{d}}^T_k\,\widetilde{\mathbf{a}}^*_k}\,\omega_k(t). \qquad (17)$$

Теперь, умножая тождество (16) слева на вектор–строку $\mathbf{d}^T_{k-1} = \widetilde{\mathbf{d}}^T_{k-1}$, используя тождество (17), находим

$$\widetilde{\mathbf{d}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{d}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^*_k\,\frac{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_k}{\widetilde{\mathbf{d}}^T_k\,\widetilde{\mathbf{a}}^*_k}\,\omega_k(t) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_{k-1}\,\omega_{k-1}(t) + \mathbf{d}^T_{k-1}\mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t),$$

откуда, перенося второе слагаемое левой части последнего тождества в правую часть, используя равенства $\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1} = \mathbf{a}^*_{k-1}$, $\widetilde{\mathbf{a}}^*_k = \mathbf{a}^*_{k+1}$, приходим к доказываемому тождеству (15).

3. При $t \in (\xi, \widetilde{x}_{k+1}) = (x_{k+1}, x_{k+2})$ из аппроксимационных соотношений имеем

$$\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}^*_k\,\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \mathbf{a}^*_k\,\omega_k(t) + \mathbf{a}^*_{k+1}\,\omega_{k+1}(t). \qquad (18)$$

Умножая тождество (18) слева на вектор-строку $\mathbf{d}^T_k = \widetilde{\mathbf{d}}^T_k$, учитывая равенства $\widetilde{\mathbf{a}}^*_k = \mathbf{a}^*_{k+1}$, $\widetilde{\mathbf{d}}^T_k\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1} = 0$, получаем тождество

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \frac{\mathbf{d}^T_k\mathbf{a}^*_k}{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_{k+1}}\,\omega_k(t) + \omega_{k+1}(t). \qquad (19)$$

Снова, умножая тождество (18) слева на вектор–строку $\mathbf{d}^T_{k-1}$, используя тождество (19), выводим

$$\widetilde{\mathbf{d}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^*_{k-1}\,\widetilde{\omega}_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{d}}^T_{k-1}\widetilde{\mathbf{a}}^*_k\left(\frac{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_k}{\mathbf{d}^T_k\,\mathbf{a}^*_{k+1}}\,\omega_k(t) + \omega_{k+1}(t)\right) \equiv$$

$$\equiv \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* \, \omega_k(t) + \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^* \, \omega_{k+1}(t),$$

откуда получаем тождество (15), ибо на рассматриваемом промежутке $\omega_{k-1}(t) \equiv 0$. Итак, тождество (15) доказано.

Тождество (15) установлено для всех рассматриваемых промежутков; учитывая, что функции $\widetilde{\omega}_{k-1}$ лежат в пространстве $C(\alpha, \beta)$, приходим к выводу, что соотношение (15) справедливо на интервале (α, β). Теорема доказана. $\square$

Теорема 5. *Справедливо тождество*

$$\widetilde{\omega}_k(t) \equiv \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*} \, \omega_k(t) + \omega_{k+1}(t) \qquad t \in (\alpha, \beta). \tag{20}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательно представление функции $\widetilde{\omega}_k(t)$ на промежутках $(\widetilde{x}_k, \xi)$, $(\xi, \widetilde{x}_{k+1})$, $(\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2})$.

1. Из аппроксимационных соотношений (2) при $t \in (\widetilde{x}_k, \xi) = (x_k, x_{k+1})$ находим

$$\widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^* \, \widetilde{\omega}_{k-1}(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_k^* \, \widetilde{\omega}_k(t) \equiv \mathbf{a}_{k-1}^* \, \omega_{k-1}(t) + \mathbf{a}_k^* \, \omega_k(t),$$

откуда, умножая слева на вектор–строку $\mathbf{d}_k^T = \widetilde{\mathbf{d}}_k^T$ и используя равенства $\widetilde{\mathbf{a}}_k^* = \mathbf{a}_{k+1}^*$ и $\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k-1}^* = \widetilde{\mathbf{d}}_k^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^* = 0$, приходим к доказываемому тождеству (20), ибо на рассматриваемом промежутке $\omega_{k+1}(t) \equiv 0$.

2. При $t \in (\xi, \widetilde{x}_{k+1}) = (x_{k+1}, x_{k+2})$ справедливость доказываемого тождества установлена ранее (см. формулу (19)).

3. Теперь рассмотрим случай $t \in (\widetilde{x}_{k+1}, \widetilde{x}_{k+2}) = (x_{k+2}, x_{k+3})$; из аппроксимационных соотношений получаем

$$\widetilde{\mathbf{a}}_k^* \, \widetilde{\omega}_k(t) + \widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}^* \, \widetilde{\omega}_{k+1}(t) \equiv \mathbf{a}_{k+1}^* \, \omega_{k+1}(t) + \mathbf{a}_{k+2}^* \, \omega_{k+2}(t). \tag{21}$$

Из равенств $\widetilde{\mathbf{a}}_{k+1}^* = \mathbf{a}_{k+2}^*$, $\widetilde{\omega}_{k+1}(t) \equiv \omega_{k+2}(t)$, вытекающих из свойств (11) и (12) соответственно, видно, что последнее слагаемое левой части тождества (21) и последнее слагаемое его правой части совпадают. Таким образом, умножая соотношение (21) на вектор-строку $\mathbf{d}_k^T = \widetilde{\mathbf{d}}_k^T$ и учитывая равенство $\widetilde{\mathbf{a}}_k^* = \mathbf{a}_{k+1}^*$, приходим к доказываемому тождеству (20), ибо на рассматриваемом промежутке $\omega_k(t) \equiv 0$.

Принимая во внимание то, что функции $\widetilde{\omega}_k$ лежат в пространстве $C(\alpha, \beta)$, видим, что теорема полностью доказана. $\square$

Теорема 6. *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\widetilde{\omega}_j(t) \equiv \begin{cases} \omega_j(t) & \textit{при } j \leqslant k-2, \\ \omega_{k-1}(t) + \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \omega_k(t) & \textit{при } j = k-1, \\ \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \omega_k(t) + \omega_{k+1}(t) & \textit{при } j = k, \\ \omega_{j+1}(t) & \textit{при } j \geqslant k+1, \end{cases} \tag{22}$$

где

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_k^* - \mathbf{d}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k+1}^* \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*} \right) / \mathbf{d}_{k-1}^T \widetilde{\mathbf{a}}_{k-1}^*, \tag{23}$$

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_k^*}{\mathbf{d}_k^T \mathbf{a}_{k+1}^*}. \tag{24}$$

Доказательство непосредственно вытекает из установленных ранее формул (12), (15), (20). Другое доказательство, привлекающее биортогональные системы функционалов, имеется в работе [8]. □

Рассмотрим случай, когда исходная сетка X дополняется новым узлом $\overline{\xi}$, и на полученной таким образом *измельченной сетке* $\overline{X}$ строятся сплайны $\overline{\omega}_j(t)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Пусть $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$, а $\overline{x}_j$ – узлы вновь полученной сетки $\overline{X} \stackrel{\text{def}}{=} \{\overline{x}_j \mid j \in \mathbb{Z}\}$:

$$\overline{x}_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} x_j & \text{при } \; j \leqslant k, \\ \overline{\xi} & \text{при } \; j = k+1, \\ x_{j-1} & \text{при } \; j \geqslant k+2. \end{cases} \tag{25}$$

Будем надчеркивать обозначения всех ранее введенных объектов, определяемых новой сеткой $\overline{X}$. Функции $\overline{\omega}_j(t)$ можно отыскать по формуле (8), заменив узлы исходной сетки x_j на узлы $\overline{x}_j$, $j \in \mathbb{Z}$.

Теорема 7. *Для $j, k \in \mathbb{Z}$ и $t \in (\alpha, \beta)$ справедливы калибровочные соотношения*

$$\omega_j(t) \equiv \begin{cases} \overline{\omega}_j(t) & \textit{при } j \leqslant k-2, \\ \overline{\omega}_{k-1}(t) + \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k}\, \overline{\omega}_k(t) & \textit{при } j = k-1, \\ \overline{\mathfrak{p}}_{k,k}\, \overline{\omega}_k(t) + \overline{\omega}_{k+1}(t) & \textit{при } j = k, \\ \overline{\omega}_{j+1}(t) & \textit{при } j \geqslant k+1, \end{cases} \tag{26}$$

где

$$\overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} = \left(\overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_k^* - \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^* \frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_k^*}{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*} \right) / \overline{\mathbf{d}}_{k-1}^T \mathbf{a}_{k-1}^*, \tag{27}$$

$$\overline{\mathfrak{p}}_{k,k} = \frac{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_k^*}{\overline{\mathbf{d}}_k^T \overline{\mathbf{a}}_{k+1}^*}. \tag{28}$$

Доказательство приведено в работе [9]. □

5. Матрицы реконструкции на интервале (α, β)**.** Дадим матричный вариант формулировки теоремы 6. Введем бесконечномерные вектор-столбцы, компонентами которых являются функции $\omega_j(t)$ и $\widetilde{\omega}_j(t), j \in \mathbb{Z}$:

$$\boldsymbol{\omega}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \omega_{-2}(t), \omega_{-1}(t), \omega_0(t), \omega_1(t), \omega_2(t), \ldots)^T,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \widetilde{\omega}_{-2}(t), \widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \widetilde{\omega}_1(t), \widetilde{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Теорема 8. *Справедливо равенство*

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}\, \boldsymbol{\omega}(t) \;\Leftrightarrow\; \widetilde{\omega}_i(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j}\, \omega_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{29}$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}$ — бесконечная матрица вида $\widetilde{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$, элементы которой задаются равенствами

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{при } i \leqslant k-2, \ \forall j, \\ \delta_{k-1,j} & \text{при } i = k-1, j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \text{при } i = k, j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \text{при } i \geqslant k+1, \ \forall j, \end{cases}$$

а также формулами (23)–(24).

Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}$ называется *матрицей укрупняющей (разрежающей) реконструкции* на интервале (α, β).

Замечание 1. *Матрицу $\widetilde{\mathfrak{P}}$ можно представить в виде*

$$\widetilde{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ {\scriptstyle k-3} \\ {\scriptstyle k-2} \\ {\scriptstyle k-1} \\ {\scriptstyle k} \\ {\scriptstyle k+1} \\ {\scriptstyle k+2} \\ {\scriptstyle k+3} \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \scriptstyle\ldots & \scriptstyle k-3 & \scriptstyle k-2 & \scriptstyle k-1 & \scriptstyle k & \scriptstyle k+1 & \scriptstyle k+2 & \scriptstyle k+3 & \scriptstyle\ldots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix} \end{array}.$$

Введем бесконечномерный вектор-столбец, компонентами которого являются функции $\overline{\boldsymbol{\omega}}_j(t), j \in \mathbb{Z}$:

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\ldots, \overline{\omega}_{-2}(t), \overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \overline{\omega}_1(t), \overline{\omega}_2(t), \ldots)^T.$$

Дадим матричный вариант формулировки теоремы 7.

Теорема 9. *Справедливо равенство*

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \overline{\mathfrak{P}}\,\overline{\boldsymbol{\omega}}(t) \;\Leftrightarrow\; \omega_i(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \overline{\mathfrak{p}}_{i,j}\,\overline{\omega}_j(t) \quad \forall\, i \in \mathbb{Z}, \tag{30}$$

где $\overline{\mathfrak{P}}$ — бесконечная матрица вида $\overline{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\mathfrak{p}}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, элементы которой задаются равенствами

$$\overline{\mathfrak{p}}_{i,j} = \begin{cases} \delta_{i,j} & \text{\textit{при}}\;\; i \leqslant k-2,\ \forall j, \\ \delta_{k-1,j} & \text{\textit{при}}\;\; i = k-1, j \neq k, \\ \delta_{k+1,j} & \text{\textit{при}}\;\; i = k, j \neq k, \\ \delta_{i,j-1} & \text{\textit{при}}\;\; i \geqslant k+1,\ \forall j, \end{cases}$$

а также формулами (27)–(28).

Матрица $\overline{\mathfrak{P}}$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) реконструкции* на интервале (α, β).

Замечание 2. *Матрицу* $\overline{\mathfrak{P}}$ *можно представить в виде*

$$\overline{\mathfrak{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{array}{c} \\ \\ k-3 \\ k-2 \\ k-1 \\ k \\ k+1 \\ k+2 \\ k+3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} \dots & k-3 & k-2 & k-1 & k & k+1 & k+2 & k+3 & \dots \end{array} \\ \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \end{array}.$$

6. Матрицы реконструкции на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим калибровочные соотношения и соответствующие матрицы реконструкции в конечномерном случае, используя введенные ранее сужения всех функций на отрезок $[a, b]$.

Предполагая, что $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, удалим узел x_{k+1} из сетки X_n; в результате получим укрупненную сетку

$$\widetilde{X}_n : \quad \widetilde{x}_{-1} < a = \widetilde{x}_0 < \widetilde{x}_1 < \dots < \widetilde{x}_{n-1} = b < \widetilde{x}_n,$$

где узлы $\widetilde{x}_i$, $i = -1, \dots, n$, по-прежнему определяются формулами (9). Для $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ добавим узел $\overline{\xi} \in (x_k, x_{k+1})$ к сетке X_n; в результате получим измельченную сетку

$$\overline{X}_n : \quad \overline{x}_{-1} < a = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \dots < \overline{x}_{n+1} = b < \overline{x}_{n+2},$$

где узлы $\overline{x}_i$, $i = -1, \dots, n+2$, по-прежнему определяются формулами (25).

Введем конечномерные вектор-функции

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\omega_{-1}(t), \omega_0(t), \dots, \omega_{n-1}(t))^T,$$

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{\omega}_{-1}(t), \widetilde{\omega}_0(t), \dots, \widetilde{\omega}_{n-2}(t))^T,$$

$$\overline{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} (\overline{\omega}_{-1}(t), \overline{\omega}_0(t), \dots, \overline{\omega}_{n}(t))^T.$$

Ввиду равенства (29) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k \in \{0, 1, \dots, n-2\}$, $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}_{(n)}(t) = \widetilde{\mathfrak{P}}_n \, \boldsymbol{\omega}_{(n)}(t),$$

где $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ – прямоугольная числовая матрица размеров $n \times (n+1)$:

$$
\widetilde{\mathfrak{P}}_n \stackrel{\text{def}}{=}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cccccccccc} {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle \dots} & {\scriptstyle k-3} & {\scriptstyle k-2} & {\scriptstyle k-1} & {\scriptstyle k} & {\scriptstyle k+1} & {\scriptstyle k+2} & {\scriptstyle \dots} & {\scriptstyle n-1} \end{array} \\
\begin{array}{c} {\scriptstyle -1} \\ {\scriptstyle \dots} \\ {\scriptstyle k-4} \\ {\scriptstyle k-3} \\ {\scriptstyle k-2} \\ {\scriptstyle k-1} \\ {\scriptstyle k} \\ {\scriptstyle k+1} \\ {\scriptstyle k+2} \\ {\scriptstyle \dots} \\ {\scriptstyle n-2} \end{array} &
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \widetilde{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Матрица $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей укрупняющей (разрежающей) реконструкции* на отрезке $[a, b]$.

Ввиду равенства (30) в конечномерном случае калибровочные соотношения для $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, $t \in [a, b]$ могут быть записаны в виде

$$\boldsymbol{\omega}_{(n)}(t) = \overline{\mathfrak{P}}_n \, \overline{\omega}_{(n)}(t),$$

где $\overline{\mathfrak{P}}_n$ – прямоугольная числовая матрица размеров $(n+1) \times (n+2)$:

$$
\overline{\mathfrak{P}}_n \stackrel{\text{def}}{=}
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} {\scriptstyle -1} & {\scriptstyle \dots} & {\scriptstyle k-2} & {\scriptstyle k-1} & {\scriptstyle k} & {\scriptstyle k+1} & {\scriptstyle k+2} & {\scriptstyle \dots} & {\scriptstyle n} \end{array} \\
\begin{array}{c} {\scriptstyle -1} \\ {\scriptstyle \dots} \\ {\scriptstyle k-4} \\ {\scriptstyle k-3} \\ {\scriptstyle k-2} \\ {\scriptstyle k-1} \\ {\scriptstyle k} \\ {\scriptstyle k+1} \\ {\scriptstyle k+2} \\ {\scriptstyle \dots} \\ {\scriptstyle n-1} \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccc}
1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 1 & \overline{\mathfrak{p}}_{k-1,k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & \overline{\mathfrak{p}}_{k,k} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Матрица $\overline{\mathfrak{P}}_n$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) реконструкции* на отрезке $[a, b]$.

7. Биортогональная система функционалов и матрицы декомпозиции. Рассмотрим некоторое линейное пространство $\mathfrak{U}$ над полем вещественных чисел и сопряженное ему пространство $\mathfrak{U}^*$ линейных функционалов f над пространством $\mathfrak{U}$. Значение функционала f на элементе $u \in \mathfrak{U}$ обозначим через $\langle f, u \rangle$. Система функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна* системе функций $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, если $\langle f_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}$ $\forall j, j' \in \mathbb{Z}$, где $\delta_{j,j'}$ – символ Кронекера.

Рассмотрим линейные функционалы $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$, заданные на пространстве $C(\alpha, \beta)$ формулой

$$\langle f_j, u \rangle \stackrel{\text{def}}{=} u(x_{j+1}), \quad u \in C(\alpha, \beta),\, j \in \mathbb{Z}. \tag{31}$$

Результат действия функционала f_j на функцию u определяется значением этой функции в точке x_{j+1}; эту точку будем называть *носителем функционала* f_j и писать $\mathrm{supp} f_j = x_{j+1}$.

Теорема 10. *Система линейных функционалов* $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна системе функций* $\{\omega_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$, *т. е.*

$$\langle f_j, \omega_{j'} \rangle = \delta_{j,j'}, \quad \forall j, j' \in \mathbb{Z}. \tag{32}$$

Доказательство. Поскольку при $j \leqslant j' - 1$ и при $j \geqslant j' + 1$ точка x_{j+1} не является внутренней точкой носителя непрерывной функции $\omega_{j'}$, то сама функция в этой точке равна нулю, поэтому функционал (31) на такой функции обращается в нуль. Следовательно для доказательства (32) достаточно рассмотреть случай $j' = j$. При $u = \omega_j$ согласно (31) и (8) имеем $\langle f_j, \omega_j \rangle = \omega_j(x_{j+1}) = 1$. Теорема доказана. □

Рассмотрим интерполяционную задачу

$$u(x_{j+1}) = v_j, \quad u \in \mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \tag{33}$$

где $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ – заданная последовательность чисел (бесконечная в обе стороны).

Теорема 11. *В пространстве* $\mathbb{S}(X, \mathbf{A}^*, \boldsymbol{\varphi})$ *существует единственное решение задачи (33), и это решение дается формулой*

$$u(t) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} v_j\, \omega_j(t). \tag{34}$$

Доказательство вытекает из теоремы 10. □

Замечание 3. *При каждом фиксированном* $t \in (\alpha, \beta)$ *в сумме (34) имеется не более двух ненулевых слагаемых.*

Рассмотрим систему функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ биортогональную системе $\{\widetilde{\omega}_{j'}\}_{j' \in \mathbb{Z}}$. Вычислим значения функционала $\widetilde{f}_j$ на функциях $\omega_{j'}(t)$. Пусть далее

$$\mathfrak{q}_{j,j'} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'} \rangle \quad \forall\, j, j' \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 12. *Для* $j, j', k \in \mathbb{Z}$ *справедливы равенства*

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \begin{cases} \delta_{j,j'} & \text{\textit{при}} \;\; j' \leqslant k-1, \\ 0 & \text{\textit{при}} \;\; j' = k, \\ \delta_{j,j'-1} & \text{\textit{при}} \;\; j' \geqslant k+1. \end{cases} \tag{35}$$

Доказательство. Благодаря соотношениям (12) и (32) для $j' \leqslant k-2, \forall j$ выполняются равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_{j'} \rangle = \delta_{j,j'},$$

а для $j' \geqslant k+2, \forall j$ верны равенства

$$\mathfrak{q}_{j,j'} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{j'} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_{j'-1} \rangle = \delta_{j,j'-1}.$$

Пусть $j' = k$. Ввиду того, что $\operatorname{supp} \omega_k = [x_k, x_{k+2}] = [\widetilde{x}_k, \widetilde{x}_{k+1}]$ получаем

$$\mathfrak{q}_{j,k} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_k \rangle = \omega_k(\widetilde{x}_{j+1}) = 0. \tag{36}$$

Пусть $j' = k-1$. Используя соотношения (22), (32) и (36) имеем

$$\mathfrak{q}_{j,k-1} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{k-1} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_{k-1} \rangle - \mathfrak{p}_{k-1,k} \langle \widetilde{f}_j, \omega_k \rangle = \delta_{j,k-1}.$$

Пусть $j' = k+1$. Используя соотношения (26), (32) и (36) имеем

$$\mathfrak{q}_{j,k+1} = \langle \widetilde{f}_j, \omega_{k+1} \rangle = \langle \widetilde{f}_j, \widetilde{\omega}_k \rangle - \mathfrak{p}_{k,k} \langle \widetilde{f}_j, \omega_k \rangle = \delta_{j,k}.$$

Теорема доказана. □

Вычислим значения функционала f_j на функциях $\overline{\omega}_{j'}(t)$. Аналогично теореме 12 доказывается [9], что

$$\langle f_j, \overline{\omega}_{j'} \rangle = \mathfrak{q}_{j,j'}, \;\; j, j' \in \mathbb{Z},$$

где $\mathfrak{q}_{j,j'}$ определяются формулой (35).

Замечание 4. *Пусть система функционалов* $\{\overline{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ *биортогональна системе* $\{\overline{\omega}_{j'}\}_{j'\in\mathbb{Z}}$. *Тогда для всех* $j, j' \in \mathbb{Z}$ *выполняются равенства*

$$\widetilde{\mathfrak{p}}_{j,j'} = \langle f_{j'}, \widetilde{\omega}_j\rangle, \quad \overline{\mathfrak{p}}_{j,j'} = \langle \overline{f}_{j'}, \omega_j\rangle.$$

Далее рассмотрим матрицу $\mathfrak{Q} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j})_{i,j\in\mathbb{Z}}$, элементы которой задаются формулами (35). Матрица $\mathfrak{Q}$ называется *матрицей декомпозиции* на интервале (α, β).

Теорема 13. *Матрица* $\mathfrak{Q}$ *является левой обратной к матрицам* $\widetilde{\mathfrak{P}}^T$ *и* $\overline{\mathfrak{P}}^T$.

Доказательство. Транспонируя соотношение (29), получаем равенство вектор-строк

$$\widetilde{\boldsymbol{\omega}}^T(t) = \boldsymbol{\omega}^T(t)\widetilde{\mathfrak{P}}^T. \qquad (37)$$

Умножая это равенство на вектор-столбец $\widetilde{\mathbf{f}} \stackrel{\text{def}}{=} (\widetilde{f}_j)_{j\in\mathbb{Z}}$, ввиду свойства биортогональности (32) слева получаем единичную матрицу I, а справа появляется матрица $\mathfrak{Q}$ (см. формулы (35)). Итак, из (37) находим $I = \mathfrak{Q}\widetilde{\mathfrak{P}}^T$. Транспонируя соотношение (30), получаем равенство вектор-строк

$$\boldsymbol{\omega}^T(t) = \overline{\boldsymbol{\omega}}^T(t)\overline{\mathfrak{P}}^T.$$

Умножая это равенство на вектор-столбец $\mathbf{f} \stackrel{\text{def}}{=} (f_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ находим $I = \mathfrak{Q}\overline{\mathfrak{P}}^T$. Теорема доказана. □

Рассмотрим представление матрицы декомпозиции на отрезке $[a, b]$. Выделим из множества функционалов $\{f_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+1$ функционалов, из множества функционалов $\{\widetilde{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из n функционалов, из множества функционалов $\{\overline{f}_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ конечный набор из $n+2$ функционалов.

Теорема 14. *Для систем функционалов* $\{f_j\}_{j\in J_{1,n-1}}$, $\{\widetilde{f}_i\}_{i\in J_{1,n-2}}$, $\{\overline{f}_k\}_{k\in J_{1,n}}$ *справедливы равенства*

$$\langle f_j, \omega_{j'}\rangle = \delta_{j,j'}, \quad j, j' \in J_{1,n-1},$$

$$\langle \widetilde{f}_i, \widetilde{\omega}_{i'}\rangle = \delta_{i,i'}, \quad i, i' \in J_{1,n-2},$$

$$\langle \overline{f}_k, \overline{\omega}_{k'}\rangle = \delta_{k,k'}, \quad k, k' \in J_{1,n},$$

причем $\operatorname{supp} f_j \subset [a, b]$, $\operatorname{supp} \widetilde{f}_i \subset [a, b]$, $\operatorname{supp} \overline{f}_k \subset [a, b]$.

Доказательство следует из формулы (32). $\square$

Прямоугольная матрица $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j}), i \in J_{1,n-2}, j \in J_{1,n-1}$, размеров $n \times (n+1)$ называется *матрицей укрупняющей (разрежающей) декомпозиции* на отрезке $[a,b]$, прямоугольная матрица $\overline{\mathfrak{Q}}_n \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathfrak{q}_{i,j}), i \in J_{1,n-1}, j \in J_{1,n}$, размеров $(n+1) \times (n+2)$ называется *матрицей измельчающей (уточняющей) декомпозиции* на отрезке $[a,b]$.

Теорема 15. *Для матриц $\widetilde{\mathfrak{P}}_n$ и $\widetilde{\mathfrak{Q}}_n$, $\overline{\mathfrak{P}}_n$ и $\overline{\mathfrak{Q}}_n$ справедливы соотношения*

$$\widetilde{\mathfrak{Q}}_n \widetilde{\mathfrak{P}}_n^T = I_n,$$

$$\overline{\mathfrak{Q}}_n \overline{\mathfrak{P}}_n^T = I_{n+1},$$

где I_n, I_{n+1} — единичные квадратные матрицы порядка n и $n+1$ соответственно.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 13, проведенному в конечномерном случае. $\square$

Литература

1. *Малла С.* Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. Я. М. Жилейкина. М.: Мир, 2005. 671 с.

2. *Макаров А. А.* Матрицы реконструкции и калибровочные соотношения для минимальных сплайнов // Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011. С. 39–52. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 178 (2011), no. 6, 605—621.

3. *Макаров А. А.* Кусочно-непрерывные сплайн-вэйвлеты на неравномерной сетке // Труды СПИИРАН. 2010. Вып. 14. С. 103—131.

4. *Демьянович Ю. К., Косогоров О. М.* О вычислении матриц декомпозиции в сплайн-вэйвлетном разложении // Методы вычислений. Вып. 23. Сб. / Под ред. В. М. Рябова. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. С. 71–97.

5. *Демьянович Ю. К.* Локальная аппроксимация на многообразии и минимальные сплайны. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 1994. 356 с.

6. *Спивак М.* Математический анализ на многообразиях. Лань, СПб., 2005. 160 с.

7. *Макаров А. А.* О построении сплайнов максимальной гладкости // Проблемы матем. анализа. Вып. 60. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2011. С. 25–38. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 178 (2011), no. 6, 589—604.

8. *Демьянович Ю. К.* Минимальные сплайны лагранжева типа // Проблемы матем. анализа. Вып. 50. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Изд-во Т. Рожковская, 2010. С. 21–64. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 170 (2010), no. 4, 444—495.

9. *Макаров А. А.* О вэйвлетном разложении пространств сплайнов первого порядка // Проблемы матем. анализа. Вып. 38. Межвуз. сб. / Под ред. Н. Н. Уральцевой. – Новосибирск: Т. Рожковская, 2008. С. 47–60. *English transl.:* J. Math. Sci., New York 156 (2009), no. 4, 617—631.

Макаров Антон Александрович — к.ф.-м.н.; ассистент кафедры параллельных алгоритмов математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: вычислительная математика, аппроксимация, интерполяция, сплайны, вэйвлеты, всплески, математические основы цифровой обработки сигналов, сжатие данных, параллельные алгоритмы, компьютерная геометрия. Число научных публикаций — 35. Antony.Makarov@gmail.com; СПбГУ, Университетский пр. д. 28, Петродворец, г. Санкт-Петербург, 198504, РФ.

Anton A. Makarov — PhD in Computer Science, Teaching assistant of Parallel Algorithms Department, St.-Petersburg State University. Research area: computational mathematics, approximation, interpolation, splines, wavelets, digital signal processing, data compression, parallel algorithms, computer aided geometric design. Number of publications — 35. Antony.Makarov@gmail.com; St.-Petersburg State University, Universitetsky pr., 28, Petrodvorets, St. Petersburg, 198504, Russia.

Поддержка исследований. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке КНВШ Правительства Санкт-Петербурга.

Рекомендовано ТиМПИ СПИИРАН, зав. лаб. Тулупьев А.Л., д.ф.-м.н., доцент.

Статья поступила в редакцию 12.05.2011.

РЕФЕРАТ

Макаров А. А. **Матрицы реконструкции и декомпозиции для линейных сплайнов**

Сплайны и вэйвлеты (всплески) нашли широкое применение в теории информации. Вэйвлетные разложения связаны с составлением эффективных алгоритмов обработки (сжатия или уточнения) больших потоков информации. В теории сплайнов наиболее важными являются интерполяционные и аппроксимационные свойства, свойства гладкости и устойчивости решения интерполяционных и аппроксимационных задач; важно также минимизировать вычислительную сложность (объем используемых ресурсов вычислительной системы: памяти, каналов передачи результатов, времени счета). Если удается установить вложенность пространств сплайнов на последовательности измельчающихся или укрупняющихся сеток и представить цепочку вложенных пространств в виде прямой суммы вэйвлетных пространств, а также реализовать базисные функции с минимальной длиной носителя, то вычислительная сложность оказывается приемлемой.

Важной задачей при построении сплайн-вэйвлетного разложения является разработка способа проектирования исходного пространства сплайнов на вложенное пространство сплайнов. Выбор этого способа приводит к матрицам декомпозиции/реконструкции, применяемым для вэйвлетного разложения потоков числовой информации.

Цель данной работы — построить сплайны лагранжева типа первого порядка, доказать вложенность пространств сплайнов на последовательности укрупняющихся/измельчающихся неравномерных сеток, построить простую реализацию системы функционалов, биортогональную системе сплайнов, получить матрицы реконструкции и декомпозиции в случаях неравномерной бесконечной (на открытом интервале) и конечной (на отрезке) сеток.

SUMMARY

Makarov A. A. **The reconstruction and decomposition matrixes for linear splines.**

Splines and wavelets are widely used in information theory. Wavelet decompositions are connected with constructing effective algorithms for processing (compression) large digital information flows. If $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}^1$ and a grid is uniform, one can apply the powerful tools of harmonic analysis (in the space of functions $L^2(\mathbb{R}^1)$ and in the space of sequences l^2), lifting scheme or wavelet scheme. For digital information flows with rapidly varying characteristics it is reasonable to use a nonuniform grid adapted to the flow under processing. This allows us to improve an approximation of functions without difficult calculations. The situation where a grid is nonuniform and (α, β) does not coincide with the real axis, has not been studied well since methods of harmonic analysis are not easily applicable in this case.

The goal of this paper is to construct continuous spline of Lagrange type, to construct calibration relations in the case of class of coordinate non-polynomial splines connected with refinement of grids, to prove embedding of spaces of spline spaces for arbitrary refinement of grids, to construct the reconstruction matrixes in the case of a grid on an open interval and a grid on a segment, to provide a simple realization of the system of functionals biorthogonal to the coordinate splines, to construct the decomposition matrixes in the case of a grid on an open interval and a grid on a segment. Finite dimensionality of mentioned spaces allows one to get spline wavelet decomposition for segment $[a, b]$ with restriction discussed functions from interval (α, β) to $[a, b]$, where $[a, b] \subset (\alpha, \beta)$.

Note that obtained splines are not polynomial generalizations of B-splines. The splines include as a special case trigonometric, hyperbolic, and exponential splines.