УДК 004.8

Н.А. Вальтман, А.Л. Тулупьев

НАПРАВЛЕННЫЙ ЦИКЛ БАЙЕСОВСКОЙ СЕТИ ДОВЕРИЯ С МНОГОЗНАЧНЫМИ СЛУЧАЙНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Вальтман Н.А., Тулупьев А.Л. **Направленный цикл байесовской сети доверия с многозначными случайными элементами.**

Аннотация. В работе осуществлено обобщение известного преобразования направленного цикла в БСД со случайными бинарными элементами в узлах в цепь фрагментов знаний алгебраической байесовской сети на более общий математический объект — случайные многозначные элементы в узлах исходного цикла. В предположении, что случайные многозначные элементы представлены в виде конъюнкций случайных бинарных элементов, обобщенное преобразование состоит из тех же шагов, что и его исходный вариант: на основе тензоров условных вероятностей формируется стохастическая матрица; последовательно вычисляется произведение стохастических матриц, которое само по себе тоже будет стохастической матрицей; вычисляется собственный вектор последней матрицы, соответствующий собственному числу 1, причем из возможных собственных векторов выбирается стохастический; выбранный вектор представляет собой маргинальное распределение означиваний одного из узлов цикла — на его основе вычисляются маргинальные распределения вероятностей означиваний других узлов и маргинальные распределения совместных вероятностей означиваний пар соседних узлов; на основе набора совместных вероятностей формируется цикл фрагментов знаний АБС, наконец, последний цикл преобразуется в цепь фрагментов знаний АБС.

Ключевые слова: байесовская сеть, направленный цикл, случайный элемент.

Valtman N.A., Tulupyev A.L. **A Bayesian belief network directed cycle with multinomial random variables.**

Abstract. The paper generalizes the transformation of a directed cycle in Bayesian belief networks (BBN) with binary random variables into a knowledge patterns chain in algebraical Bayesian networks (ABN) for the case of multivariate random variables. Under the assumption that multivariate random variables are represented with binary random variables conjuncts, the generalized transformation consists of the same steps as the original one. First, we form stochastic matrices that correspond to conditional probability tensors in the cycle nodes. Then we calculate the product of the matrices and find out the stochastic eigen-vector of the product result. The eigen-vector represents the probabilistic distribution of cycle node random variable assignments. Later on, this distribution is used in calculations of joint distributions for random variables assignments in couples of neighboring nodes. Finally, an ABN knowledge patterns cycle is constructed with the set of latter joint distributions, and then an ABN knowledge pattern chain is constructed with the latter cycle. The method for the chain reconciliation is known.

Keywords: directed cycle, Bayesian network, random variable.

1. Введение. Преобразование циклов в байесовских сетях доверия (БСД) [12,14,16,17,19] в семантически эквивалентные структуры из теории алгебраических байесовских сетей (АБС) открывает возможность их дальнейшей обработки, в том числе позволяет сформулировать задачу проверки непротиворечивости исходного цикла и решить её уже известными методами. В [7, 8, 12, 14] рассмотрены способы проверки непротиворечивости данных алгебраических байесовских сетей и отдельных фрагментов знаний. Поэтому сведение направленных циклов в байесовских сетях доверия к циклам фрагментов знаний и цепям фрагментов знаний — частным случаям алгебраических байесовских сетей — позволит предложить подход к автоматизации поставленной выше задачи. Обработка направленных циклов оценивается как важная и актуальная задача [18].

Цель данной работы заключается в анализе направленных циклов байесовской сети доверия с многозначными случайными элементами на основе обобщения матрично-векторных уравнений, которые были предложены ранее для работы с направленными циклами с бинарными случайными элементами [10].

В [9, 10, 12, 14] изначально полагается, что направленный цикл в байесовской сети доверия является в первую очередь направленным графом, причем этот граф состоит из узлов, в которых расположено по одному литералу, и ребер, соединяющих узлы так, что все они входят в один направленный цикл. Кроме того, каждому узлу приписаны тензоры условных вероятностей. Речь идет о вероятностях литерала принять то или иное означивание в зависимости от означивания литерала в узле-родителе. Пример направленного БСД-цикла с бинарными (булевскими) случайными элементами представлен на рис. 1. Пример такого цикла с многозначными случайными элементами приведен на рис. 2.

Литералы, стоящие в узлах цикла с случайными бинарными элементами, обозначим $\tilde{x}_i$ ($\tilde{x}_i$ может принимать значения x_i и $\bar{x}_i$), где

$$i \in 0(1)(k-1),$$

а k — число узлов в цикле.

2. Ранее полученные результаты. Для байесовских сетей доверия с бинарными случайными элементами (т.е. сетей, где литералы принимают только два значения) был получен алгоритм

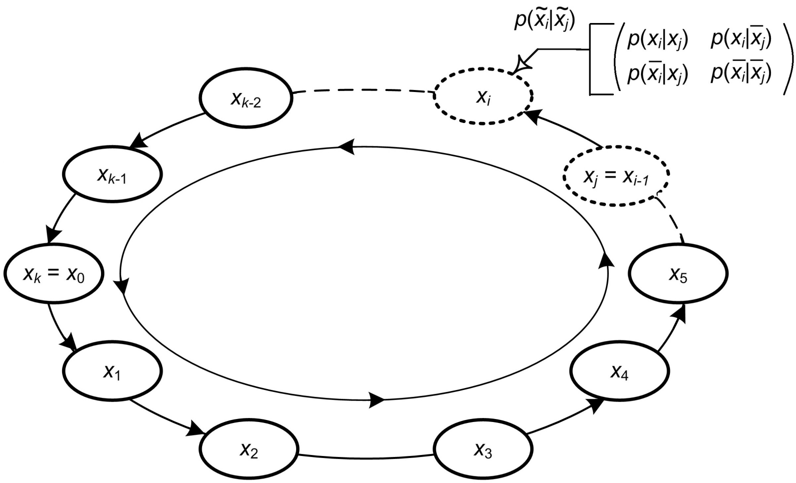

Рис. 1: Пример направленного цикла в БСД с бинарными случайными элементами.

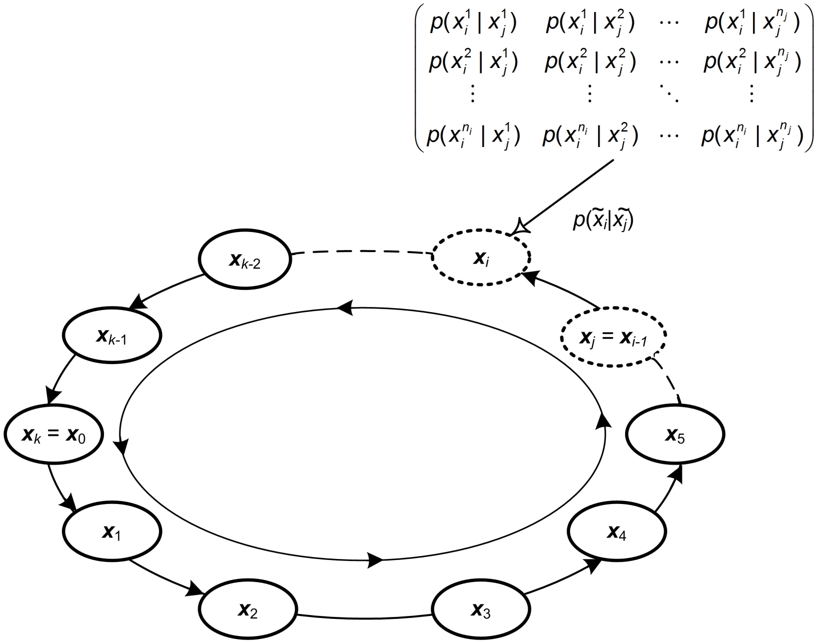

Рис. 2: Пример направленного цикла в БСД с многозначными случайными элементами.

оценки непротиворечивости направленного цикла на основе векторно-матричных соотношений. Более подробно можно ознакомиться с ним в монографиях и статьях [1–6,9–14,20]. Представим основные результаты.

Тензор условных вероятностей, стоящий в узле x_i, имеет вид $p(\tilde{x}_i|\tilde{x}_j)$, где индекс j предшествует i в цикле байесовской сети. Как правило, $j = i - 1$, но для $i = 0$ предшествующим индексом будет $j = k - 1$. Для удобства будем считать $i = k$ и $i = 0$, где k — количество узлов цикла, одним и тем же значением индекса, что влечет, например, совпадение $x_0 = x_k$. Более того, поскольку цикл замыкается, удобно рассматривать индексы (номера) узлов, которые больше k; будем считать, что они ссылаются на тот узел, «исходный» номер которого совпадает с остатком от целого деления такого индекса на число k.

Тензор условных вероятностей $p(\tilde{x}_i|\tilde{x}_j)$ состоит из четырех величин: $p(x_i|x_j)$ и $p(\bar{x}_i|x_j)$, $p(x_i|\bar{x}_j)$ и $p(\bar{x}_i|\bar{x}_j)$. Набор указанных четырех значений однозначно определяется всего двумя величинами $p(x_i|x_j)$ и $p(x_i|\bar{x}_j)$.

Для использования в дальнейшем определим величины r_i как разность условных вероятностей

$$r_i = p(x_i|x_j) - p(x_i|\bar{x}_j).$$

Теперь можно перейти к самому методу. Все матрицы, используемые в нём, являются стохастическими. Этот термин заимствован из теории марковских цепей [15] и в данном случае означает, что сумма элементов в каждом столбце равна 1, а все элементы — неотрицательны.

Пусть

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_0 &= \begin{pmatrix} \pi \\ 1-\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p(x_0) \\ 1-p(x_0) \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\pi}_i &= \begin{pmatrix} p(x_i) \\ 1-p(x_i) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{W}_j &= \begin{pmatrix} p(x_i|x_j) & p(x_i|\bar{x}_j) \\ p(\bar{x}_i|x_j) & p(\bar{x}_i|\bar{x}_j) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} p(x_i|x_j) & p(x_i|\bar{x}_j) \\ 1-p(x_i|x_j) & 1-p(x_i|\bar{x}_j) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Матрица $\mathbf{W}$ получена как произведение матриц $\mathbf{W}_j$:

$$\mathbf{W} \ = \mathbf{W}_{k-1} \times \mathbf{W}_{k-2} \times \cdots \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_0.$$

Главным результатом является равенство

$$(\mathbf{W} - \mathbf{E})\,\boldsymbol{\pi}_0 \quad = \quad \mathbf{0}. \tag{1}$$

Зная вероятность положительного означивания хотя бы одного элемента цикла, можно вычислить вероятность его отрицания и соответственно вектор $\boldsymbol{\pi}$. Пусть известно $p(x_i)$, тогда $p(\bar{x}_i) = 1 - p(x_i)$, а соответственно вектор $\boldsymbol{\pi}_i = \begin{pmatrix} p(x_i) \\ 1 - p(x_i) \end{pmatrix}$.

При известном $\boldsymbol{\pi}_0$

$$\boldsymbol{\pi}_j \ = \mathbf{W}_{j-1} \times \mathbf{W}_{j-2} \times \cdots \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_0 \times \boldsymbol{\pi}_0.$$

Таким образом, из равенства (1) видно, что $\boldsymbol{\pi}_0$ является собственным вектором матрицы $\mathbf{W}$, соответствующим собственному числу 1 [15]. Из этого равенства с условиями $\boldsymbol{\pi}_0 \geq \mathbf{0}$ и $\boldsymbol{\pi}_0$ — стохастический вектор можно однозначно найти $\boldsymbol{\pi}_0$, кроме случаев, когда матрица $\mathbf{W}$ равна $\mathbf{E}$. Это возможно, только когда для $\forall k$ либо $\mathbf{W}_k \ = \mathbf{E}$, либо $\mathbf{W}_k \ = \bar{\mathbf{E}}$, где

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

при этом $\mathbf{W}_k \ = \bar{\mathbf{E}}$ встречается чётное число раз.

3. Обобщение результатов. В работах [1–6, 9–14, 20] уже рассматривался метод сведения циклов в бинарных байесовских сетях доверия к алгебраическим байесовским сетям. Сейчас мы рассмотрим случай многозначных случайных элементов в БСД. Предполагаем, не умаляя общности, что число означиваний каждой переменной в БСД равно 2^n. Каждый литерал $\mathbf{x}_i$ может принимать означивания из множества $V_i = \{x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^{2^{n_i}}\}$. Таким образом, литералы $\mathbf{x}_i$ принимают 2^{n_i} возможных значений из множества V_i и вместо них можно рассматривать означивания идеала конъюнктов бинарных переменных $\{y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in}\}$. Число означиваний из множества V_i совпадает с числом означиваний $\tilde{Y}$, поэтому позже вместо $\mathbf{x}_i$ будем использовать множество означиваний квантов $\tilde{Y}$. Для этого представим два бинарных отношения: одно из множества значения переменной x_i в числа от 1 до 2^{n_i}, второе из множества чисел от 1 до 2^{n_i} во множество квантов переменных $\{y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in_i}\}$. В первом случае это просто любое перенумерование возможных значений. Во втором случае используется алгоритм перенумерования квантов, представленный в монографиях $[7, 12, 14]$. Он заключается в следующем: каждому элементу сначала сопоставляется число в двоичной системе счисления по принципу: если элемент y_j входит в квант с пололжительным означиванием, тогда на j-ом месте стоит 1, в ином случае — 0, после это число переводится в десятичное. Указанный подход позволяет установить биективное соответствие между означиванием случайного многозначного элемента $\hat{\mathbf{x}}_i$ и означиванием случайной бинарной последовательности Y_i. В свою очередь, ниже это позволит сопоставить двум смежным узлам $\hat{\mathbf{x}}_i$ и $\hat{\mathbf{x}}_j$ (Y_i и Y_j) исходного БСД-цикла фрагмент знаний АБС, образованный над Y_iY_j.

Сначала рассмотрим случай, когда в узлах цикла стоят случайные многозначные элементы вида $\hat{\mathbf{x}}_i$.

В случае байесовской сети доверия с многозначными случайными элементами её однозначно определяет следующий набор векторов и матриц

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_0 &= \begin{pmatrix} p(x_0 = x_0^1) \\ p(x_0 = x_0^2) \\ \vdots \\ p(x_0 = x_0^{n_0}) \end{pmatrix}, \\
\boldsymbol{\pi}_i &= \begin{pmatrix} p(x_i = x_i^1) \\ p(x_i = x_i^2) \\ \vdots \\ p(x_i = x_i^{n_i}) \end{pmatrix}, \\
\mathbf{W}_j &= \begin{pmatrix} p(x_i^1|x_j^1) & p(x_i^1|x_j^2) & \ldots & p(x_i^1|x_j^{n_j}) \\ p(x_i^2|x_j^1) & p(x_i^2|x_j^2) & \ldots & p(x_i^2|x_j^{n_j}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(x_i^{n_i}|x_j^1) & p(x_i^1|x_j^2) & \ldots & p(x_i^{n_i}|x_j^{n_j}) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Таким образом, как и раньше при известных распределениях вероятностей $\boldsymbol{\pi}_0$ хотя бы одного узла можно вычислить вероятности для остальных вершин цикла:

$$\boldsymbol{\pi}_j = \mathbf{W}_{j-1} \times \mathbf{W}_{j-2} \times \dots \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_0 \times \boldsymbol{\pi}_0.$$

Для проверки корректности необходимо убедиться в законности умножения матриц и в правильном результате. Матрица $\mathbf{W}_i$ обозначает переход от вероятностей $\boldsymbol{\pi}_i$ к $\boldsymbol{\pi}_{i+1}$, причём её размерность равна $n_i \times n_{i+1}$. Соответственно матричное умножение корректно и в результате даёт то, что требуется. Заметим, что при известном вероятностном распределении для какого-нибудь узла становятся известны вероятности не только всех остальных узлов, но и совместные распределения пар соседних слуайных многозначных элементов. Для этого можно воспользоваться определением условной вероятности

$$p(x_j^r x_i^s) = p(x_i^s | x_j^r) p(x_j^r),$$

где x_j^r и x_i^s пробегают множества означиваний случайных многозначных элементов $\mathbf{x}_j$ и $\mathbf{x}_i$ соответственно.

При известном $\boldsymbol{\pi}_0$ по формуле можно получить все $\boldsymbol{\pi}_i$. Таким образом становятся известны все $p(\bar{\mathbf{x}}_i = x_i^s)$, где $s \in [1, n_i]$, а n_i — число означиваний x_i. Все условные вероятности известны и являются элементами $\mathbf{W}$. Обозначим $\mathbf{P}_j$ диагональную матрицу с вероятностями $p(x_j = x_j^l)$ на диагонали:

$$\begin{pmatrix} p(x_j^1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p(x_j^2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & p(x_j^{n_j}) \end{pmatrix}.$$

Вероятность всех возможных означиваний пар соседних (в цепи) случайных многозначных элементов может быть получена как

$$\left(p(x_j^r x_i^s)\right)_{s,r} = \mathbf{W}_j \times \mathbf{P}_j.$$

Теперь для нахождения вероятностей осталось решить систему линейных уравнений

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{W} \times \boldsymbol{\pi}_0,$$

где $\mathbf{W} = \mathbf{W}_{j-1} \times \mathbf{W}_{j-2} \times \dots \times \mathbf{W}_1 \times \mathbf{W}_0$. Эта система имеет единственное решение при стохастической матрице $\mathbf{W} \neq \mathbf{E}$. Поскольку все матрицы $\mathbf{W}_i$ являются стохастическими, то и матрица $\mathbf{W}$ стохастическая [15]. В случае, когда выполняется условие $\mathbf{W} = \mathbf{E}$, решением является любой стохастический вектор.

Поскольку теория байесовских сетей доверия не предпологает работу с направленными циклами, такие циклы предложено преобразовывать в семантически эквивалентные объекты из теории алгебраических байесовских сетей. Пример приведён на рис. 3, где Y_i — фрагменты знаний.

Известно, как преобразовать цикл в байесовской сети доверия с бинарными случайными элементами в цикл фрагментов знаний алгебраической байесовской сети, а последний цикл — в цепь фрагментов знаний алгебраической байесовской сети [10]. Аналогичное преобразование хочется осуществить в отношении БСД-цикла с многозначными случайными элементами в узлах. Однако с произвольными случайными многозначными элементами работать неудобно. Предпложим, что в узлах направлнного цикла байесовской сети доверия стоят случайные бинарные последовательности (конъюнкции случайных бинарных элементов) (см. рис. 3), тогда

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \begin{pmatrix} p(Y_0 = \bar{y}_{0n_0} \dots \bar{y}_{02}\bar{y}_{01}) \\ \vdots \\ p(Y_0 = y_{0n_0} \dots \bar{y}_{02}y_{01}) \\ p(Y_0 = y_{0n_0} \dots y_{02}\bar{y}_{01}) \\ p(Y_0 = y_{0n_0} \dots y_{02}y_{01}) \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\pi}_i = \begin{pmatrix} p(Y_i = \bar{y}_{in_0} \dots \bar{y}_{i2}\bar{y}_{i1}) \\ \vdots \\ p(Y_i = y_{in_0} \dots \bar{y}_{i2}y_{i1}) \\ p(Y_i = y_{in_0} \dots y_{i2}\bar{y}_{i1}) \\ p(Y_i = y_{in_0} \dots y_{i2}y_{i1}) \end{pmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{W}_i$ представлена на рис. 3. Все уравнения вида $\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{W}\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\pi}_i = \mathbf{W}_j\boldsymbol{\pi}_j$ и другие сохраняют свою справедливость. Таким образом, нам, в частности, будут известны все вероятности вида $p(\widetilde{Y}_i\widetilde{Y}_j)$. Это в свою очередь означает, что мы сможем БСД-цикл, построенный над $\hat{Y}_i$, преобразовать в цикл фрагментов знаний АБС, построенный над Y_iY_j. Способы проверки непротиворечивости последнего цикла изложены в [10].

Изложим детали предложенного подхода. Переходя от БСД к

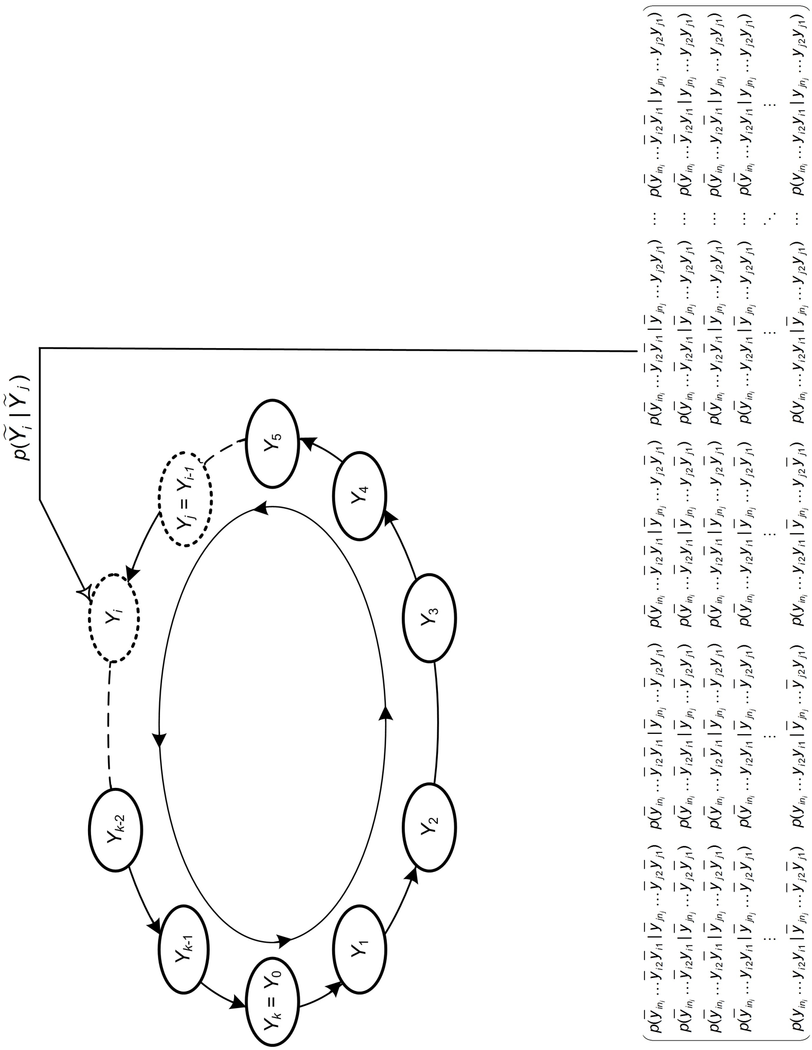

Рис. 3: Пример направленного цикла в АБС.

алгебраическим байесовским сетям, можно пересчитать векторы $\boldsymbol{\pi}_i = \left(p(\tilde{Y}_i)\right)_{\tilde{Y}_i}$. Затем можно воспользоваться определением условной вероятности: $p(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_j) = p(\tilde{Y}_i|\tilde{Y}_j)p(\tilde{Y}_j)$, где $p(\tilde{Y}_i|\tilde{Y}_j)$ — известно, $p(\tilde{Y}_0)$ — получается из решения вышеуказанного уравнения, а все следующие $p(\tilde{Y}_j)$ вычисляются итеративно. Тензорам совместных вероятностей $p(\tilde{Y}_i\tilde{Y}_j)$ сопоставим фрагмент знаний алгебраической байесовской сети, образованный над атомами из Y_iY_j. Получим цикл фрагментов знаний алгебраической байесовской сети. Его можно преобразовать в цепь фрагментов знаний алгебраической байесовской сети известными методами [10]. Цепь фрагментов знаний можно проверить на непротиворечивость.

4. Заключение. В работе обобщено известное преобразование направленного цикла в БСД со случайными бинарными элементами в узлах в цепь фрагментов знаний алгебраической байесовской сети для более общеих математических объектов — случайных многозначных элементов в узлах исходного цикла.

Предположено, что случайные многозначные элементы представлены в виде конъюнкций случайных бинарных элементов, в этом случае обобщенное преобразование состоит из тех же шагов, что и его исходный вариант:

- на основе тензоров условных вероятностей формируется стохастическая матрица;
- последовательно вычисляется произведение стохастических матриц, которое само по себе тоже будет стохастической матрицей;
- вычисляется собственный вектор последней матрицы, соответствующий собственному числу 1, причем из возможных собственных векторов выбирается стохастический;
- выбранный вектор представляет собой маргинальное распределение означиваний одного из узлов цикла — на его основе вычисляются маргинальные распределения вероятностей означиваний других узлов и маргинальные распределения совместных вероятностей означиваний пар соседних узлов;
- на основе набора совместных вероятностей формируется цикл фрагментов знаний АБС;

- последний цикл преобразуется в цепь фрагментов знаний АБС.

Цепь фрагментов знаний АБС уже может быть обработана известными алгоритмами как ациклическая АБС, в том числе может быть установлена непротиворечивость этой цепи, а значит, и исходного БСД-цикла со случайными многозначными элементами в узлах.

Литература

1. *Николенко С.И., Сироткин А.В., Тулупьев А.Л.* Направленный цикл и его влияние на соседние узлы в байесовских сетях доверия. Сборник трудов всероссийской научной конференции «Нечеткие системы и мягкие вычислени» Тверь, 2006. С. 150–166.

2. *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Простейшие циклы в байесовских сетях доверия: распределение вероятностей и возможность его непротиворечивого задания // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2, т. 1. СПб.: Наука, 2004. С. 119–126.

3. *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Разворот рёбер как метод работы с направленными циклами в байесовских сетях // Научная сессия МИФИ-2005. Сборник научных трудов (в 15 томах). Том 3. Интеллектуальные системы и технологии. М., 2004. С. 176–178.

4. *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Циклы обратной связи узлов с одним предшественником в байесовских сетях доверия // IX Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика–2004 (РИ–2004)», Санкт-Петербург, 22–24 июня 2004 г.: Материалы конференции. СПб., 2005. С. 65–66.

5. *Николенко С.И., Тулупьев А.Л.* Учёт направленных циклов в байесовских сетях доверия: семантика и вопросы сложности // Сб. научных трудов III международного научно-практического семинара «Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллект». М.: Физматлит, 2005. С. 376–382.

6. *Тулупьев А.Л.* Непротиворечивость семантического образа направленного цикла в байесовской сети доверия // X Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика-2006 (РИ-2006)»: Труды. СПб., 2007. С. 125–131.

7. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: глобальный логико-вероятностный вывод в деревьях смежности: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 40 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).

8. *Тулупьев А.Л.* Алгебраические байесовские сети: локальный логико-вероятностный вывод: Учеб. пособие. СПб.: СПбГУ; ООО Издательство «Анатолия», 2007. 80 с. (Сер. Элементы мягких вычислений).

9. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети доверия: непротиворечивость направленного циклического паттерна // Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям. Сборник докладов. 2007. Т. 1. СПб.: Изд-во СПбГЭТУ «ЛЭТИ», 2007. С. 212–215.

10. *Тулупьев А.Л.* Байесовские сети: логико-вероятностный вывод в циклах. СПб.: Изд-во С.-Петербургского ун-та, 2008. 140 с. (Элементы мягких вычислений.)

11. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И.* Распределение вероятностей в изолированных циклах байесовских сетей доверия // IX Санкт-Петербургская международная конференция «Региональная информатика-2004 (РИ-2004)», Санкт-Петербург, 22–24 июня 2004 г.: Труды. СПб., 2005. С. 85–89.

12. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Байесовские сети: логико-вероятностный подход. СПб.: Наука, 2006. 607 с.

13. *Тулупьев А.Л., Николенко С.И., Сироткин А.В.* Циклы в байесовских сетях: вероятностная семантика и отношения с соседними узлами. Труды СПИИРАН. Вып. 3., т. 1. СПб. «Наука», 2006. С. 240–263.

14. *Тулупьев А.Л., Сироткин А.В., Николенко С.И.* Байесовские сети доверия: логико-вероятностный вывод в ациклических направленных графах. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 400 с.

15. *Ширяев А.Н.* Вероятность: Учебн. Пос. для вузов. 2-е изд. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 640 с.

16. *Cowell R.G., Dawid A.P., Lauritzen S.L., Spiegelhalter D.J.* Probabilistic Networks and Expert Systems.NY.:Springer-Verlag, 1999.

17. *Jensen F.V.* Bayesian Networks and Decision Graphs. NY.: Springer-Verlag, 2001. 268 p.

18. *Heckerman D., Chickering D., Meek C., Rounthwaite R., Kadie C.* Dependency Networks for Inference, Collaborative Filtering, and Data Visualization // Journal of Machine Learning Research. 2000. є1. P. 49–75. Also appears as Technical Report MSR-TR-00-16, Microsoft Research, February, 2000.

19. *Pearl J.*Probabilistic Reasoning in Intelligent Systems: Networks of Plausible Inference. NY: Morgan Kaufman Publ., 1991. 552 p.

20. *Tulupyev A.L., Nikolenko S.I.* Directed Cycles in Bayesian Belief Networks: Probabilistic Semantics and Consistency Checking Complexity // Advances in Artificial Intelligence. Lecture Notes in Artificial Intelligence (LNAI)-3789, Springer, 2005. P. 214–223.

Вальтман Наталия Александровна — младший научный сотрудник лаборатории теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН. Область научных интересов: вероятностно-графические модели, данные с неопределенностью, автоматическое обучение. Число научных публикаций — 1. NatashkaVl@gmail.com; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450. Научный руководитель — д-р физ.-мат. наук, доцент А.Л. Тулупьев.

Valtman Nataliya Alexandrona — junior researcher, Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS.Research interests: probabilistic-logic models, data uncertainty, machine learning. The number of publications — 1. NatashkaVl@gmail.com; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450. Scientific advisor — PhD in Computer Science, Dr. of Sc. A.L. Tulupyev.

Тулупьев Александр Львович — д.ф.-м.н., доцент; заведующий лабораторией теоретических и междисциплинарных проблем информатики СПИИРАН, доцент кафедры информатики математико-механического факультета С.-Петербургского государственного университета (СПбГУ). Область научных интересов: представление и обработка данных и знаний с неопределенностью, применение методов математики и информатики в социокультурных исследованиях, применение методов биостатистики и математического моделирования в эпидемиологии, технология разработки программных комплексов с СУБД. Число научных публикаций — 220. ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, г. Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Tulupyev Alexander Lvovich — PhD in Computer Science, Dr. of Sc.. Associate Professor; Head of Theoretical and Interdisciplinary Computer Science Laboratory, SPIIRAS, Associate Professor of Computer Science Department, SPbSU. Research area: uncertain data and knowledge representation and processing, mathematics and computer science applications in socio-cultural studies, biostatistics, simulation, and mathematical modeling applications in epidemiology, data intensive software systems development technology. Number of publications — 220.

ALT@iias.spb.su, www.tulupyev.spb.ru; SPIIRAS, 14-th line V.O., 39, St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект **№09-01-00861-а** «Методология построения интеллектуальных систем поддержки принятия решений на основе баз фрагментов знаний с вероятностной неопределенностью».

Рекомендовано лабораторией ТиМПИ, зав. лаб. Тулупьев А.Л.

Статья поступила в редакцию 01.12.2010.

РЕФЕРАТ

Вальтман Н.А., Тулупьев А.Л. **Направленный цикл байесовской сети доверия с многозначными случайными элементами.**

Байесовские сети доверия (БСД) — одна из вероятностных графических моделей, теория которых интенсивно развивается на стыке искусственного интеллекта, математической статистики и информатики. Согласно классическому определению БСД — это ациклический направленный граф с тензорами условных вероятностей в узлах. В качестве вероятностной семантики сети сопоставляется распределение вероятностей, которое задается произведением всех тензоров условных вероятностей (а в вырожденном случае — и маргинальных), стоящих в узлах графа.

В работах по основам теории байесовских сетей подчеркивается, что направленные циклы (БСД-циклы) исключаются из рассмотрения. (Заметим, что ненаправленные циклы допустимы, но их обработка требует дополнительных усилий: сети с таким циклами требуется сначала преобразовать в соответствующие деревья сочленений, а затем обрабатывать последние с помощью особых алгоритмов.) Вместе с тем, эксперты при построении сетей допускают формирование направленных циклов. В связи с этим возникает потребность в изучении этих объектов с точки зрения их непротиворечивости, семантики и возможности обработать, чтобы использовать их для тех же целей, что и БСД без направленных циклов.

Указанные вопросы были глубоко изучены в отношении изолированных БСД-циклов с бинарными случайными элементами в узлах. Установлено, что направленные циклы кардинальным образом меняют вероятностную семантику сети: она может оказаться противоречивой или представлять собой семейство распределений вероятности. Для обработки направленного БСД-цикла приходится привлекать родственную теорию — теорию алгебраических байесовских сетей. Цикл с бинарными случайными элементами в узлах с сохранением своей вероятностной семантики сначала преобразуется в цикл фрагментов знаний АБС, а последний цикл в цепь фрагментов знаний АБС. Способы работы с цепью фрагментов знаний АБС (как и вообще с ациклической АБС) хорошо изучены.

В работе осуществлено обобщение известного преобразования направленного цикла в БСД со случайными бинарными элементами в узлах в цепь фрагментов знаний алгебраической байесовской сети на более общий случай случайных многозначных элементов в узлах исходного цикла.

В предположении, что случайные многозначные элементы представлены в виде конъюнкций случайных бинарных элементов, обобщенное преобразование состоит из тех же шагов, что и его исходный вариант.

Цепь фрагментов знаний АБС уже может быть обработана известными алгоритмами как ациклическая АБС, в том числе может быть установлена непротиворечивость этой цепи, а значит и исходного БСД-цикла со случайными многозначными элементами в узлах.

SUMMARY

Valtman N.A., Tulupyev A.L. **A Bayesian belief network directed cycle with multinomial random variables.**

Bayesian belief networks (BBN) are one of the probabilistic graphical models. Their theory is being rapidly developed within the scope of artificial intelligence, mathematical statistics, and computer science. According to a classical definition of BBN, a BBN is a directed acyclic graph with conditional probability tensors in the nodes. The probabilistic semantics of a network is a single probabilistic distribution which are equal to the product of conditional (an marginal in certain cases) probability tensors in the network nodes.

The directed cycles (BBN-cycles) are forbidden in the theory of BBN. (We outline that undirected cycles are allowed, however a BBN with such a cycle or cycles requires a special processing.) Nevertheless this restrictions, an expert can introduce a cycle into the structure of a BBN. This makes a reason for careful study of the directed cycles from the viewpoint of their consistency, semantics, and processing procedures. It should help to find an application for BBN cycles in the same areas as for the traditional BBN.

The consistency, semantics, and processing procedures have been thoroughly investigated in case of binary random variables in directed cycle nodes. As a contrast to a usual BBN, a directed cycle can have a very specific probabilistic semantics: an empty family of distributions, or a distribution, or a infinite family of distributions can correspond to the cycle. In order to process a BBN-cycle with binary random variables in nodes, a similar theory of algebraic Bayesian networks has been involved. A directed cycle can be transformed to a cycle of ABN knowledge patterns. This transformation keeps the probabilistic semantics of the original cycle unchanged. Then, the latter cycle can be transformed to a chain of ABN knowledge patterns. Again, the semantics remains unchanged. The method for the processing of a chain of ABN knowledge patterns is known and has been studied well enough.