ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ НЕРАЗЛОЖИМЫХ П-СЕТЕЙ С ИНВЕРСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

Павлов А.Н.

УДК 519.711.72

Павлов А.Н. **Исследование простейших неразложимых П-сетей с инверсными элементами.**

Аннотация. В данной статье проведен анализ показателей структурной надежности на основе логико-вероятностного и нечетко-возможностного подходов для простейших неразложимых П-сетей с инверсными элементами.

Ключевые слова: монотонные и немонотонные структуры, П-сеть, показатель структурной надежности.

Pavlov A.N. **Study of the simplest indecomposable P- networks with the inverse elements.**

Abstract. The article is devoted to indexes analysis of structural reliability based on the logical-probabilistic and fuzzy-possibilistic approaches for the simplest indecomposable P-networks with the inverse elements.

Keywords: monotone and nonmonotone structures, P-networks, index of structural reliability.

Среди задач анализа структурной динамики сложных технических систем (СТС) особое место занимают задачи структурного анализа систем, которые, как правило, сводятся к построению соответствующих структурных функций путем ортогонализации функций алгебры логики (ФАЛ) и замещением логических аргументов в ФАЛ вероятностями их истинности, логических операций соответствующими арифметическими. В работах [2–4] исследование надежности, живучести, безопасности систем осуществлялось с применением монотонных ФАЛ. Тем не менее, в практике исследования СТС встречаются случаи, когда логическая функция, описывающая сценарий реконфигурации структуры СТС, является немонотонной.

В работе [1] рассмотрены два типа немонотонных ФАЛ.

К первому типу относят ФАЛ, которые в сокращенной дизъюнктивно-нормальной форме (ДНФ) представимы в следующем виде:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (\bigvee_{k \in M} Z_k) \vee (\bigvee_{k \in L} Z_k),$$

где $\bigvee_{k \in M} Z_k$ — конъюнкции, содержащие $\overline{x}_i$; $\bigvee_{k \in L} Z_k$ — конъюнкции, не содержащие $\overline{x}_i$ и x_i.

Ко второму типу относятся ФАЛ, которые в сокращенной ДНФ представимы в следующем виде:

$$f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n) = (\bigvee_{k\in M} Z_k) \vee (\bigvee_{k\in N} Z_k) \vee (\bigvee_{k\in L} Z_k),$$

где $\bigvee_{k\in M} Z_k$ — конъюнкции, содержащие $\overline{x}_i$; $\bigvee_{k\in N} Z_k$ — конъюнкции, содержащие x_i; $\bigvee_{k\in L} Z_k$ — конъюнкции, не содержащие $\overline{x}_i$ и x_i.

Немонотонные логические функции первого типа можно привести к монотонным путем замены инверсных переменных следующим образом:

$$y_i = \overline{x}_i.$$

При этом $P(y_i) = 1 - P(x_i)$.

Для простых структур (П-сетей, Н-сетей) [5, 6], которые можно описать монотонными ФАЛ, введено понятие генома структуры, представляющего собой вектор, компонентами которого являются коэффициенты полинома отказа структуры, составленной из однородных элементов. Геном структуры хранит в себе различные свойства структурного построения СТС и позволяет вычислить интегральные оценки отказа (надежности) СТС для случая однородной структуры (структура состоит из однородных элементов) по формуле

$$F_{\text{однор}}(\vec{\chi}) = (\chi_1, \chi_2,\ ...,\chi_n)\cdot(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ ...,\frac{1}{n+1})^T,$$

для случая неоднородной структуры — по формуле

$$F_{\text{неоднор}}(\vec{\chi}) = (\chi_1, \chi_2,\ ...,\chi_n)\cdot(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ ...,\frac{1}{2^n})^T,$$

где $\vec{\chi} = (\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n)$ — геном структуры.

Во многих случаях основная проблема при оценке надежности, безопасности СТС связана с получением объективных статистических данных о безотказности элементов, статистическая информация о которых принципиально не может быть достаточной для стандартной обработки (ввиду малого объема выборки). В этом случае построить сценарий реконфигурации СТС и соответствующую ему ФАЛ можно, однако оценить вероятность реализации того или иного негативного события нельзя. В таком случае было бы полезно использовать меру возможности того или иного события, которая ориентирована на исследование недоопределенных стохастических объектов [7]. Тогда в условиях нечетко-возможностного описания структуры СТС [5] геном структуры позволяет определить возможность отказа (надежной работы) системы для однородной структуры по формуле

$$F_{\text{однорвоз}}(\vec{\chi}) = 1 - \mu_*,$$

где μ_* — решение уравнения

$$(\chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \cdot (\mu_*, \mu_*^2, ..., \mu_*^n)^T = 1 - \mu_*.$$

Если в структуру (П-сеть, Н-сеть) ввести элементы, описываемые немонотонными ФАЛ (например, $\bar{x}_i$ — инверсный элемент), то в целом такая структура будет представлена немонотонной ФАЛ первого типа. Проведем исследования простейших неразложимых П-сетей Γ_2^p, Γ_2^s в случаях наличия и отсутствия элементов с немонотонной ФАЛ (рис. 1). Полином отказа для структуры Γ_2^p без инверсного элемента (рис. 1, *а*) имеет полином отказа

$$T_1(q_1, q_2) = q_1 q_2,$$

с инверсным элементом — полином отказа

$$T_2(q_1, q_2) = q_2 - q_1 q_2.$$

Полином отказа для структуры Γ_2^s (рис. 1, *б*) соответственно имеет вид

$$T_3(q_1, q_2) = q_1 + q_2 - q_1 q_2 \text{ и } T_4(q_1, q_2) = 1 - q_1 + q_1 q_2.$$

Под однородностью монотонных структур будем подразумевать одинаковую вероятность или возможность отказа всех элементов $q_1 = q_2 = q$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Для структур с инверсными элементами под однородностью структуры понимаем $q_1 = 1 - q$, $q_2 = q$, $\mu_1 = 1 - \mu$, $\mu_2 = \mu$. Для однородных структур соответствующие полиномы отказа приведены на рис. 1.

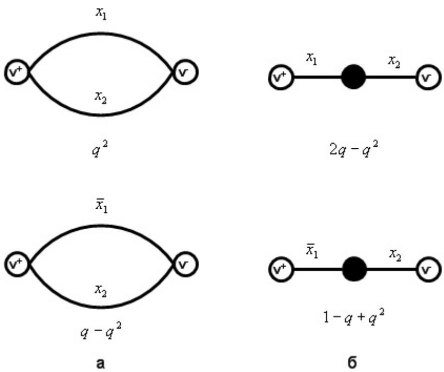

Рис. 1. Простейшие П-сети.

Для немонотонных структур в полиноме отказа (надежности) появляется свободный член, равный 1. В связи с этим геном структуры будем определять через вектор

$$\vec{\chi} = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, ..., \chi_n),$$

причем $\chi_0 \in \{0, 1\}$. Тогда геномы приведенных структур (рис. 1) имеют вид

$$\vec{\chi}_1 = (0, 0, 1), \ \vec{\chi}_2 = (0, 1, -1),$$

$$\vec{\chi}_3 = (0, 2, -1), \ \vec{\chi}_4 = (1, -1, 1).$$

Произведем вычисление интегральных показателей отказа рассматриваемых структур:

$$F_{\text{однор}}(\vec{\chi}_1) = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \cdot (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n+1})^T = 0.333,$$

$$F_{\text{однор}}(\vec{\chi}_2) = 0.167, \ F_{\text{однор}}(\vec{\chi}_3) = 0.667, \ F_{\text{однор}}(\vec{\chi}_4) = 0.833,$$

$$F_{\text{неоднор}}(\vec{\chi}_1) = (\chi_0, \chi_1, \chi_2, ..., \chi_n) \cdot (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, ..., \frac{1}{2^n})^T = 0.25,$$

$$F_{\text{неоднор}}(\vec{\chi}_2) = 0.25, \ F_{\text{неоднор}}(\vec{\chi}_3) = 0.75, \ F_{\text{неоднор}}(\vec{\chi}_4) = 0.75.$$

Полиномы отказа (надежности) монотонных структур представляют собой монотонные функции $T(0) = 0, \ T(1) = 1$. Для немонотонных структур (рис. 1) полином отказа (надежности) является немонотонной функцией, в этом случае $T_2(0) = 0, \ T_2(1) = 0$ (см. рис. 1, *а*), а $T_4(0) = 1, \ T_4(1) = 1$ (см. рис. 1, *б*).

Вычисление возможности отказа однородной структуры осуществляется по формуле нечеткого интеграла по мере возможности [5]:

$$F_{\text{однор. воз}} = \int_{[0,1]} T(\mu) \circ G = \sup_{\alpha \in [0,1]} \min\{\alpha, G(H_\alpha)\},$$

где $H_\alpha = \{\mu \in [0,1] : T(\mu) \geq \alpha\}$.

Для монотонных однородных структур в качестве меры возможности предлагается использовать выражение

$$G(H_\alpha) = \max_{T(\mu) \geq \alpha} \{1 - \mu\}.$$

Тогда интегральный показатель возможности отказа определяется следующим образом:

$$F_{\text{однор. воз}}(\vec{\chi}) = 1 - \mu_*,$$

где μ_* — решение уравнения

$$(\chi_0,\ \chi_1,\ \chi_2,\ ...,\chi_n)\cdot(1,\ \mu_*,\ \mu_*^{\ 2},\ ...,\ \mu_*^{\ n})^T = 1-\mu_* .$$

Графическая интерпретация нахождения интегрального показателя возможности отказа представлена на рис. 2.

Для немонотонных однородных структур (рис. 2) в качестве меры возможности предлагается использовать выражение

$$G(H_\alpha) = \max_{D \subseteq H_\alpha} |D|,$$

где $|D|$ — мера Лебега.

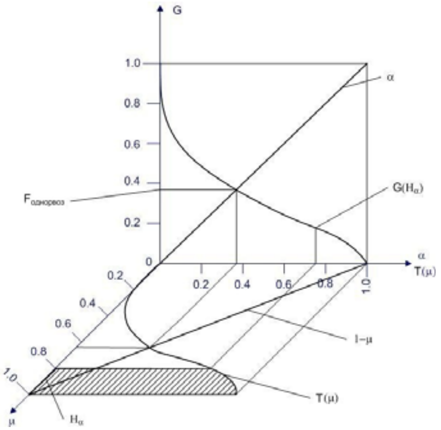

Рис. 2. Графическая интерпретация нахождения интегрального показателя возможности отказа (надежности) монотонных однородных структур.

Графическая интерпретация нахождения интегрального показателя возможности отказа в данном случае представлена на рис. 3.

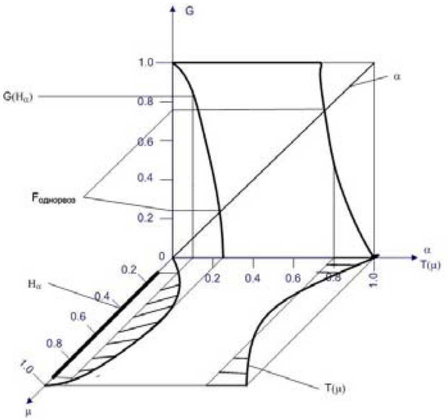

Рис. 3. Графическая интерпретация нахождения интегрального показателя возможности отказа (надежности) немонотонных однородных структур.

Интегральные показатели возможности отказа для однородных структур, приведенных на рис. 1, имеют следующие значения:

$$F_{\text{однор. воз}}(\vec{\chi}_1) = 0.382\,,\ F_{\text{однор. воз}}(\vec{\chi}_2) = 0.236\,,$$

$$F_{\text{однор. воз}}(\vec{\chi}_3) = 0.618\,,\ F_{\text{однор. воз}}(\vec{\chi}_4) = 0.764\,.$$

Произведем расчет интегральных показателей возможности отказа для неоднородных структур (см. рис. 1).

Воспользуемся следующей формулой

$$F_{\text{неод. воз}}(T_j(\mu_1,\mu_2)) = \iint\limits_{[0,1]} (T_j(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2\,.$$

Расчет для первой структуры:

$$F_{\text{неод. воз}}(T_1(\mu_1,\mu_2)) = \iint\limits_{[0,1]} (T_1(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} (\int\limits_{[0,1]} T_1(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 = 0.382;$$

$$\int\limits_{[0,1]} T_1(\mu_1,\mu_2)\circ G_1 = 1-\mu_1^* = \frac{\mu_2}{1+\mu_2}\quad,\ \text{так как}\ \mu_1^*\mu_2 = 1-\mu_1^*;$$

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{\mu_2}{1+\mu_2}\circ G_2 = 1-\mu_2^* = 0.382\ ,\ \text{так как}\ \frac{\mu_2^*}{1+\mu_2^*} = 1-\mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = 0.618\,.$$

Расчет для второй структуры:

$$F_{\text{неод. воз}}(T_2(\mu_1,\mu_2)) = \iint\limits_{[0,1]} (T_2(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} (\int\limits_{[0,1]} T_2(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 = 0.382;$$

$$\int\limits_{[0,1]} T_2(\mu_1,\mu_2)\circ G_1 = \mu_1^* = \frac{\mu_2}{1+\mu_2}\text{, так как } \mu_2 - \mu_1^*\mu_2 = \mu_1^*;$$

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{\mu_2}{1+\mu_2}\circ G_2 = 1-\mu_2^* = 0.382\text{, так как } \frac{\mu_2^*}{1+\mu_2^*} = 1-\mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = 0.618.$$

Расчет для третьей структуры:

$$F_{\text{неод. воз}}(T_3(\mu_1,\mu_2)) = \iint\limits_{[0,1]} (T_3(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} (\int\limits_{[0,1]} T_3(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 = 0.618;$$

$$\int\limits_{[0,1]} T_3(\mu_1,\mu_2)\circ G_1 = 1-\mu_1^* = \frac{1}{2-\mu_2}\text{, так как } \mu_1^* + \mu_2 - \mu_1^*\mu_2 = 1-\mu_1^*;$$

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{1}{2-\mu_2}\circ G_2 = 1-\mu_2^* = 0.618\text{, так как } \frac{1}{2-\mu_2^*} = 1-\mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = 0.382.$$

Расчет для четвертой структуры:

$$F_{\text{неод. воз}}(T_4(\mu_1,\mu_2)) = \iint\limits_{[0,1]} (T_4(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 =$$

$$= \int\limits_{[0,1]} (\int\limits_{[0,1]} T_4(\mu_1,\mu_2)\circ G_1)\circ G_2 = 0.618;$$

$$\int\limits_{[0,1]} T_4(\mu_1,\mu_2)\circ G_1 = \mu_1^* = \frac{1}{2-\mu_2}\text{, так как } 1-\mu_1^* + \mu_1^*\mu_2 = \mu_1^*;$$

$$\int\limits_{[0,1]} \frac{1}{2-\mu_2}\circ G_2 = 1-\mu_2^* = 0.618\text{, так как } \frac{1}{2-\mu_2^*} = 1-\mu_2^* \Rightarrow \mu_2^* = 0.382.$$

Результаты проведенных вычислений для однородных и неоднородных монотонных (немонотонных) структур (см. рис. 1) сведены в таблицу.

Результаты вычислений

Номер структуры	Вероятностная оценка		Возможностная оценка	
	Однородная	Неоднородная	Однородная	Неоднородная
1	0.333	0.25	0.382	0.382

2	0.167	0.25	0.236	0.382
3	0.667	0.75	0.618	0.618
4	0.833	0.75	0.764	0.618

Заключение. После проведения исследований простейших неразложимых П-сетей можно сделать следующие выводы.

1. Используемые в работах [2–4] вероятностные интегральные оценки для структур с неоднородными элементами не чувствительны при введении в структуру инверсных элементов, описываемых немонотонными ФАЛ.
2. Предложенные оценки вероятностные однородные и возможностные однородные (неоднородные), ~~с одной стороны,~~ реагируют на введение инверсных элементов, а также показывают диапазон изменения интегральных показателей отказа структуры.

Исследования, выполненные по данной тематике, проводились при финансовой поддержке РФФИ (гранты 07–07–00169а, 08–08–00403а, 09–07–00066а, 08–08–00346а), Отделения нанотехнологий и информационных технологий РАН (проект №О–2.3/03)

Литература

1. *Горопашная А.В.* Методы анализа безопасности сложных технических систем // Автореф. … канд. физ.-мат. наук. СПб, 2009.
2. *Рябинин И.А., Черкесов Г.Н.* Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. М.: Радио и связь, 1981. 264 с.
3. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность сложных систем. СПб.: Политехника, 2000. 248 с.
4. *Рябинин И.А.* Надежность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб.ун-та, 2007. 276 с.
5. *Павлов А.Н.* Нечетко-возможностный подход к анализу и оцениванию безопасности сложных организационно-технических систем// Материалы XI Междунар. конф. «Региональная информатика-2008 (РИ-2008)», Санкт-Петербург, 22–24 октября 2008 г. С. 48–49.
6. *Павлов А.Н.* Исследование генома двухполюсной сетевой структуры // Тр. IX Междунар. науч. школы МА БР-2009 «Моделирование и анализ безопасности и риска в сложных системах», Санкт-Петербург, 7–11 июля 2009 г. СПб., 2009. С. 429–434.
7. *Пытьев Ю. П.* Возможность как альтернатива вероятности. Математические и эмпирические основы, применение. М.: Физматлит, 2007. 464 с.

Павлов Александр Николаевич — канд. техн. наук, доцент; старший научный сотрудник лаборатории информационных технологий в системном анализе и моделировании Учреждения Российской академии наук Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Специалист в области системного анализа и принятия решений в условиях существенной неопределенности. Область научных интересов:

разработка научных основ теории управления структурной динамикой сложных организационно-технических систем. Число научных публикаций — более 70. pavlov62@list.ru; СПИИРАН, 14-я линия В.О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; р.т. +7(812)328-0103, факс +7(812)328-4450.

Pavlov Alexander Nikolaevich — Ph.D., associate professor; senior researcher, Laboratory for Information Technologies in Systems Analysis and Modeling, St. Petersburg Institute for Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Specialist in the field of systems analysis and operations research by conditions of substantial uncertainty. Research interests: development of research fundamentals for the control theory by structural dynamics of complex organizational-technical systems. The number of publications — more than 70. pavlov62@list.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-0103, fax +7(812)328-4450.

РЕФЕРАТ

Павлов А.Н. **Исследование простейших неразложимых П-сетей с инверсными элементами.**

Анализ структурной надежности сложных технических систем (СТС) осуществляется с использованием структурных функций, построенных путем ортогонализации функций алгебры логики (ФАЛ) и замещением логических аргументов в ФАЛ вероятностями их истинности, логических операций соответствующими арифметическими. ФАЛ может носить как монотонный, так и немонотонный характер. Немонотонные ФАЛ могут быть двух типов.

К первому типу относят ФАЛ, у которых есть конъюнкции в сокращенной дизъюнктивно-нормальной форме (ДНФ), содержащие хотя бы один инверсный элемент, при этом прямой элемент для инверсного в ДНФ не встречается.

Ко второму типу относятся ФАЛ, у которых в сокращенной ДНФ встречаются конъюнкции, содержащие инверсные элементы, содержащие прямые элементы.

Для монотонных структур ранее введено понятие генома структуры, представляющего собой вектор, компонентами которого являются коэффициенты полинома отказа структуры, составленной из однородных элементов. Геном структуры хранит в себе различные свойства структурного построения СТС и позволяет вычислить интегральные вероятностные и возможностные оценки отказа (надежности) СТС как для случая однородной структуры (структура состоит из однородных элементов), так и для случая неоднородной структуры.

Если в структуру ввести инверсные элементы, то в целом такая структура будет представлена немонотонной ФАЛ первого типа. Для немонотонных структур введено понятие генома структуры и определены интегральные вероятностные и возможностные оценки отказа (надежности) однородных и неоднородных СТС.

Приводятся результаты исследования простейших неразложимых параллельно-последовательных сетевых структур (П-сетей) в случаях наличия и отсутствия инверсных элементов.

Так вероятностные интегральные оценки для структур с неоднородными элементами не чувствительны на введение в структуру инверсных элементов. Предложенные вероятностные оценки однородных структур и возможностные оценки однородных (неоднородных) структур реагируют на наличие в структуре инверсных элементов, а также показывают диапазон изменения интегральных показателей отказа (надежности) структуры СТС.

SUMMARY

Pavlov A.N. **Study of the simplest indecomposable P- networks with the inverse elements.**

Analysis of the structural reliability of complex technical systems (STS) is performed using structural functions, built by orthogonalization functions of the algebra of logic (FAL) and the substitution of logical arguments in the FAL probabilities of their truth, logical operations corresponding arithmetic. FAL can be both monotonic and nonmonotonic. Nonmonotone FAL can be of two types. The first type includes FAL, which have a conjunction in join-reduced normal form (DNF), containing at least one inverse elements, with a direct entry for the inversion in DNF is not found.

The second type consists FAL, which have an abbreviated DNF conjunctions containing inverted elements, ballot papers straight elements.

For monotone structures previously the concept of genome structure has been introduced, which is a vector whose components are the coefficients of the polynomial-out structure, consisting of homogeneous elements. The genome structure keeps in his various properties of the structural construction of the STS and allows us to calculate the integral possibilistic and probabilistic assessment of failure (reliability) for the case of STS as a homogeneous structure (structure consists of homogeneous elements) as well as in the case of heterogeneous structure.

If the structure to introduce inverse elements, in general, this structure will be presented nonmonotonic FAL first type. For nonmonotone patterns the concept of genome structure has been introduced and the integral possibilistic and probabilistic assessment of failure (reliability) of homogeneous and heterogeneous STS have been determined.

The results of investigation of the simplest indecomposable-parallel networks (P-networks) in cases of presence and absence of inverse elements are given.

So the probability integral estimates for structures with inhomogeneous elements are not sensitive to the introduction of the structure in-versnyh elements. The proposed probabilistic assessment of homogeneous structures and possibilistic assessments homogeneous (heterogeneous) structures react to the presence in the structure of inverse elements, and also show the range of variation of integrated indicators of failure (reliability), the structure of STS.