

В.Н. ЯКИМОВ
**ПЕРИОДОГРАММНАЯ ОЦЕНКА СПЕКТРАЛЬНОЙ
ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ НА ОСНОВЕ БИНАРНО-
ЗНАКОВОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО КВАНТОВАНИЯ
СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОКОННЫХ ФУНКЦИЙ**

Якимов В.Н. Периодограммная оценка спектральной плотности мощности на основе бинарно-знакового стохастического квантования сигналов с использованием оконных функций.

Аннотация. Спектральный анализ сигналов используется как один из основных методов исследования систем и объектов различной физической природы. В условиях статистической неопределенности сигналы подвергаются случайным изменениям и зашумлениям. Анализ таких сигналов приводит к необходимости оценивания спектральной плотности мощности (СПМ). На практике для её оценивания широко используется периодограммный метод. Основу цифровых алгоритмов, реализующих этот метод, составляет дискретное преобразование Фурье. В этих алгоритмах операции цифрового умножения являются массовыми операциями. Применение оконных функций ведет к увеличению числа этих операций. Операции умножения относятся к наиболее трудоемким операциям. Они являются доминирующим фактором при определении вычислительных возможностей алгоритма и определяют его мультипликативную сложность.

В статье рассматривается задача снижения мультипликативной сложности вычисления периодограммной оценки СПМ с применением оконных функций. Задача решается на основе использования бинарно-знакового стохастического квантования для преобразования сигнала в цифровую форму. Такое двухуровневое квантование сигналов осуществляется без систематической погрешности. На основе теории дискретно-событийного моделирования, результат бинарно-знакового стохастического квантования во времени рассматривается как хронологическая последовательность существенных событий, определяемых сменой его значений. Использование дискретно-событийной модели для результата бинарно-знакового стохастического квантования обеспечило аналитическое вычисление операций интегрирования при переходе от аналоговой формы периодограммной оценки СПМ к математическим процедурам ее вычисления в дискретном виде. Эти процедуры стали основой для разработки цифрового алгоритма. Основными вычислительными операциями алгоритма являются арифметические операции сложения и вычитания. Уменьшение количества операций умножения снижает общую вычислительную трудоемкость оценивания СПМ. С целью исследования работы алгоритма были проведены численные эксперименты. Они осуществлялись на основе имитационного моделирования дискретно-событийной процедуры бинарно-знакового стохастического квантования. В качестве примера приведены результаты вычисления оценок СПМ с применением ряда наиболее известных оконных функций. Полученные результаты свидетельствуют, что использование разработанного алгоритма позволяет вычислять периодограммные оценки СПМ с высокой точностью и частотным разрешением в условиях присутствия аддитивного белого шума при низком отношении сигнал/шум. Практическая реализация алгоритма осуществлена в виде функционально самостоятельного программного модуля. Данный модуль может использоваться как отдельный компонент в составе комплексного метрологически значимого программного обеспечения для оперативного анализа частотного состава сложных сигналов.

Ключевые слова: спектральная плотность мощности, периодограммная оценка, бинарное стохастическое квантование, оконная функция, отсчет времени

1. Введение. Во многих случаях спектральный анализ сигналов рассматривается как основной метод проведения прикладных и экспериментальных исследований в самых разных областях современной науки и техники. Анализ частотного состава сигналов позволяет получить достоверную информацию о скрытых периодичностях, повторяющихся процессах, рабочем состоянии функциональных элементов технических систем и объектов различной физической природы. В частности это касается акустики, гидролокации, вибродиагностики, радиочастотной идентификации и др.

Математическую основу спектрального анализа составляет разложение непрерывного сигнала на составляющие его частотные компоненты в системе базисных гармонических функций на некотором диапазоне частот. Такое разложение предоставляет возможность исследовать частотные характеристики сигнала в пределах заданного диапазона частот. В условиях априорной статистической неопределенности, когда имеет место влияние неконтролируемых возмущающих факторов, параметры сигналов подвергаются случайным изменениям и зашумлению. При наличии данных обстоятельств динамика поведения сигналов не может быть точно предсказана во времени, и их обработка требует применения статистических подходов, направленных на получение оценок средних значений частотно-временных характеристик. При этом мощность наблюдаемого сигнала может быть представлена как непрерывная функция частоты. Анализ частотного состава таких сигналов приводит к необходимости оценивания спектральной плотности мощности (СПМ). Данный вид оценки частотного спектра позволяет получить представление о средней мощности сигнала и ее распределении по частотам в пределах полосы частот, имеющей практический интерес для исследователей [1].

На практике для оценивания СПМ широко используется периодограммный метод. Вычисление периодограммной оценки СПМ представляет собой классический подход к спектральному анализу. Он позволяет оценить непрерывный частотный спектр и идентифицировать наличие гармонических составляющих в составе сложного многокомпонентного сигнала по одной его реализации при допущении, что этот сигнал удовлетворяет условиям стационарности и эргодичности во времени [2, 3].

Согласно периодограммному методу, оценка СПМ осуществляется на конечном интервале времени на основе финитного преобразования Фурье центрированной, т.е. со средним значением равным нулю, реализации исследуемого сигнала. При этом с целью улучшения оценок СПМ применяется обработка сигналов с использованием

временных весовых функций, именуемых оконными функциями. Такая операция получила название оконного взвешивания. Выполнение операции оконного взвешивания направлено на уменьшение эффекта искажения и размывания оценок спектральных составляющих, обусловленного появлением боковых лепестков относительно основных частотных компонент из-за ограниченности времени анализа сигнала. С учетом оконных функций финитное преобразование Фурье вычисляется следующим образом [4]:

$$F_x(j2\pi f, T) = \int_0^T w(t) \overset{\circ}{x}(t) \exp(-j2\pi ft) dt, \quad (1)$$

где $\overset{\circ}{x}(t)$ – центрированная реализация исследуемого сигнала $X(t)$; $w(t)$ – оконная функция; T – длительность сегмента реализации сигнала, подвергаемого спектральному анализу.

Отметим, что для сигнала, имеющего постоянную составляющую, его центрированная реализация всегда может быть получена путем предварительной фильтрации и удаления среднего значения.

Статистическое усреднение по времени квадрата модуля финитного преобразования Фурье (1) обеспечивает получение периодограммной оценки СПМ следующего вида:

$$\hat{S}_{xx}(f) = \frac{1}{TW} |F_x(j2\pi f, T)|^2. \quad (2)$$

В (2) нормирующий множитель W характеризует среднюю мощность оконной функции и предназначен для корректировки спектральной оценки. Он устраняет эффект влияния мощности оконной функции на смещение в оценке СПМ вследствие выполнения операции взвешивания сигнала и равен:

$$W = \frac{1}{T} \int_0^T w^2(t) dt. \quad (3)$$

В настоящее время предпочтение отдается спектральному анализу сигналов в дискретном виде. Этому способствовали преимущества цифровой обработки сигналов. Во-первых, современный уровень разви-

тия средств вычислительной техники и программной инженерии позволяет создавать высокотехнологичные аппаратно-программные системы, реализующие сложные в вычислительном отношении алгоритмы обработки сигналов. Во-вторых, цифровая обработка сигналов может эффективно обеспечить воспроизводимость, повторяемость и точность выполнения вычислительных процессов.

Поскольку цифровой спектральный анализ по своей сути является методом цифровой обработки сигналов, то конкретная реализация периодограммного метода оценивания СПМ в виде цифрового алгоритма зависит от используемого подхода к первичному преобразованию и представлению исследуемого сигнала в цифровой форме. Важным является также и то, каким образом осуществляется переход от аналоговых операций к дискретным процедурам обработки числовых отсчетов сигнала, так как это во многом определяет вычислительные свойства цифрового алгоритма.

Используемые на практике цифровые алгоритмы для вычисления периодограммной оценки СПМ традиционно разработаны на основе математического аппарата дискретного преобразования Фурье, предполагающего равномерную дискретизацию по времени анализируемого сигнала [1-3, 5]. При этом операция интегрирования при переходе к вычислениям в дискретном виде реализуется численным методом, основанном на понятии «интегральных сумм» [6, 7]. Полученные таким образом цифровые алгоритмы оценивания СПМ требуют выполнения значительного объема вычисленных операций. Одной из массовых арифметических операций в таких алгоритмах является операция цифрового умножения. К увеличению числа операций цифрового умножения приводит и применение оконных функций. Это объясняется тем, что необходимо выполнять процедуру взвешивания отсчетов анализируемого сигнала с отсчетами оконной функции в дискретном виде. Как известно, операции цифрового умножения являются наиболее трудоемкими вычислительными операциями. Они являются доминирующим фактором при определении времени выполнения алгоритма. Вычислительную сложность алгоритмов в зависимости от числа операций умножений называют мультипликативной сложностью. При выборе цифрового алгоритма практический интерес во многом представляет именно его мультипликативная сложность [8]. Использование алгоритмов, требующих многократного выполнения операций цифрового умножения, может привести к существенным временным затратам. Следствием этого является снижение оперативности вычисления оценок СПМ.

Повышение вычислительной эффективности цифровой обработки сигналов является активной областью современных исследований. На

практике решение этой проблемы обычно осуществляется четырьмя основными способами [9-13]. Во-первых, применяется прямой технологический способ увеличения скорости выполнения программной обработки данных, который заключается в повышении общей производительности технических средств, осуществляющих вычислительные процессы. Естественно, с увеличением компьютерной мощности скорость обработки числовых данных увеличивается. Однако при этом менее трудоемкие в вычислительном отношении алгоритмы обеспечат более высокую эффективность цифровой обработки данных. Во-вторых, разработчики вычислительных алгоритмов осуществляют специальную предварительную подготовку исходных данных в виде комбинационных схем и упорядоченных алгебраических структур. Здесь разработчикам алгоритмов приходится дополнительно решать задачи, связанные с минимизацией, декомпозицией, структурной оптимизацией множеств данных и другие. В-третьих, ускорение вычислительного процесса происходит путем поэтапного рефакторинга, приводящего к улучшению и упрощению структурной организации программного кода при строгом соблюдении условия сохранения его функционального назначения. В-четвертых, применяются различные методы для выполнения высокоуровневой и низкоуровневой оптимизации программного кода. В частности, отдельные модули или критические секции программного кода разрабатывают на ассемблере, что обеспечивает быстрый доступ к системным компонентам в составе вычислительных устройств и обмен данными между ними. Однако оптимизация программного кода (особенно это касается метрологически значимых модулей) может привести к ограничению его функционального назначения, а в некоторых случаях даже ограничить область возможного применения.

По большому счету ни один из перечисленных способов не позволяет кардинально решить проблему повышения эффективности вычислительных операций при цифровой обработке сигналов. Это можно объяснить тем, что вычислительные процедуры, прежде всего, будут определяться математической моделью решения задачи в дискретном виде. Именно математическая модель будет определять организационную структуру вычислительного алгоритма, подготовку и формат данных, подлежащих цифровой обработке, а также логику и порядок дискретных операций в процессе их обработки.

Из вышесказанного следует, что разработка на основе периодограммного метода математического обеспечения и синтез советуемого ему алгоритмического обеспечения, практическая реализация которого приводила бы к экономии вычислительных затрат и упрощению цифровых процедур обработки сигналов в процессе

оценки СПМ, является актуальной задачей. При этом решение данной задачи должно обеспечивать получение оценок СПМ с необходимой точностью и частотным разрешением.

2. Разработка математического обеспечения для периодограммной оценки СПМ на основе бинарно-знакового стохастического квантования сигнала. Процедуру представления непрерывных сигналов в дискретном виде разработчики цифровых алгоритмов традиционно рассматривают как самостоятельное действие, которое предопределено уже самой постановкой задачи перехода к обработке сигналов в числовом виде. При этом не учитывается тот факт, что такое преобразование может оказать существенное влияние на сложность разрабатываемого математического обеспечения и организацию алгоритма выполнения вычислительных процедур. Как правило, априори принимается тот факт, что подготовка к цифровой обработке массивов числовых данных осуществляется с использованием классического аналого-цифрового преобразования, когда осуществляются относительно взаимно независимые процедуры дискретизации сигнала с равномерным шагом по времени и многоуровневое квантование дискретных отсчетов. Основное требование, предъявляемое к такому аналого-цифровому преобразованию, заключается в обеспечении заданной точности и стабильности числового кодирования дискретных значений сигнала во всем динамическом диапазоне его изменения. Однако, в случае низкого разрешения по уровню, погрешность квантования будет сильно зависеть от частотно-временных свойств сигнала, что в конечном итоге проявится в виде искажения результата формирования его числовых отсчетов. При этом шум квантования может стать доминирующим над другими источниками шумов [14, 15].

В рабочих условиях проведения спектрального анализа (особенно это касается ситуаций с высокой степенью неопределенности) возникновение любых факторов, приводящих к искажению результата квантования, может стать причиной уменьшения динамического диапазона преобразования, что неизбежно приведет к увеличению неопределенности числовых значений отсчетов.

Как правило, на практике точность оцифровки сигнала обеспечивается за счет увеличения числа уровней квантования. Следствием этого является увеличение разрядности цифровых отсчетов сигнала. Такой подход приводит к тому, что в процессе выполнения обработки с использованием дискретного преобразования Фурье полученных таким образом числовых отсчетов увеличиваются затраты времени на вычисление оценок СПМ, что объясняется необходимостью выполнения операций многоуровневого цифрового умножения. В результате снижается оперативность цифрового

спектрального анализа. Отсюда следует, что представление непрерывного сигнала в дискретном виде следует рассматривать как первичный этап его обработки в ходе проведения цифрового спектрального анализа. При этом следует учитывать, что выбор способа такого представления и его математическая модель во многом определяют структурную композицию алгоритма последующей обработки получаемых данных и вычислительную эффективность его выполнения [16].

С целью улучшения вычислительных характеристик цифровых алгоритмов для представления сигналов в цифровой код используют подходы, основанные на их бинарном (двоичном) квантовании по уровню [17-25]. При этом наибольшая эффективность бинарного квантования может быть достигнута за счет рандомизации (искусственного зашумления) процедуры аналого-цифрового преобразования. С учетом теории статистического оценивания основу такого подхода составляет целенаправленное добавление к анализируемому сигналу однородного с ним искусственно сгенерированного вспомогательного случайного сигнала с известным законом распределения, рандомизирующего процесс квантования [26]. В этом случае статистические характеристики результата аналого-цифрового преобразования будут определяться вероятностными свойствами рандомизирующего сигнала. Принимая во внимание данное обстоятельство, для преобразования сигнала в цифровой код будем использовать бинарно-знаковое стохастическое квантование [27-30]. Результат такого квантования может быть представлен двумя значениями:

$$z(t) = \begin{cases} -1, & \overset{o}{x}(t) + \xi(t) < 0; \\ +1, & \overset{o}{x}(t) + \xi(t) \geq 0; \end{cases} \quad (4)$$

где $\xi(t)$ – вспомогательный рандомизирующий случайный сигнал.

С математической точки зрения данный вид бинарно-знакового стохастического квантования является достаточно простой процедурой. Его техническая реализация также не представляет особых трудностей по сравнению с многоуровневым квантованием. При этом оно обеспечивает выполнение двухуровневого грубого квантования непрерывных сигналов без систематической погрешности [27-29]. Формально в результате такого квантования получаем непрерывный двухуровневый сигнал со значениями -1 и $+1$.

В (4) вспомогательный случайный сигнал $\xi(t)$, выполняющий функцию рандомизации, фактически является стохастическим порогом

квантования. Этот сигнал, будучи однородным с анализируемым сигналом, имеет симметричную равномерную плотность распределения в пределах от $-\xi_{\max}$ до $+\xi_{\max}$, где $\xi_{\max} \geq |x(t)|_{\max}$. Здесь $|x(t)|_{\max}$ представляет собой максимально возможное по абсолютной величине значение, которое с высокой степенью вероятности, близкой к единице, может принять подвергаемая квантованию центрированная реализация сигнала на ограниченном интервале времени анализа.

В результате перехода к бинарно-знаковому стохастическому квантованию оценку СПМ будем искать в следующем виде:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} \left| \int_0^T w(t)z(t) \exp(-j2\pi ft) dt \right|^2. \quad (5)$$

В (5) для интегрального преобразования введем обозначение:

$$A_{ZZ}(j2\pi f) = \int_0^T w(t)z(t) \exp(-j2\pi ft) dt. \quad (6)$$

Тогда получаем:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} |A_{ZZ}(j2\pi f)|^2. \quad (7)$$

В (6) одним из сомножителей подынтегрального выражения является экспоненциальная функция с комплексным показателем. Используя формулу Эйлера, которая связывает комплексную экспоненту с тригонометрическими функциями, представим $A_{ZZ}(j2\pi f)$ как сумму действительной и мнимой частей:

$$A_{ZZ}(j2\pi f) = \operatorname{Re} [A_{ZZ}(j2\pi f)] - j \operatorname{Im} [A_{ZZ}(j2\pi f)], \quad (8)$$

где

$$\operatorname{Re} [A_{ZZ}(j2\pi f)] = \int_0^T z(t)w(t) \cos 2\pi f t dt, \quad (9)$$

$$\operatorname{Im} [A_{ZZ}(j2\pi f)] = \int_0^T z(t)w(t) \sin 2\pi f t dt. \quad (10)$$

Принимая во внимание (8), оценка СПМ будет равна:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} \left(\operatorname{Re}^2 [A_{ZZ}(j2\pi f)] + \operatorname{Im}^2 [A_{ZZ}(j2\pi f)] \right). \quad (11)$$

Согласно тригонометрическим формулам приведения будет справедливо равенство:

$$\sin 2\pi ft = \cos(2\pi ft - \pi/2). \quad (12)$$

С учетом (12) для (9) и (10) получаем обобщенное выражение:

$$B_{ZZ}(f, \varphi_0) = \int_0^T w(t)z(t)\cos(2\pi ft - \varphi_0)dt. \quad (13)$$

В (13) $\varphi_0 = 0$ или $\varphi_0 = \pi/2$. В соответствии с этим имеем:

$$\operatorname{Re} [A_{ZZ}(j2\pi f)] = B_{ZZ}(f, \varphi_0 = 0), \quad (14)$$

$$\operatorname{Im} [A_{ZZ}(j2\pi f)] = B_{ZZ}(f, \varphi_0 = \pi/2). \quad (15)$$

С учетом (14) и (15) для (11) получаем:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} \left(B_{ZZ}^2(f, \varphi_0 = 0) + B_{ZZ}^2(f, \varphi_0 = \pi/2) \right). \quad (16)$$

Введем в рассмотрение функцию:

$$h(t, f, \varphi_0) = w(t)\cos(2\pi ft - \varphi_0). \quad (17)$$

Тогда (13) примет вид:

$$B_{ZZ}(f, \varphi_0) = \int_0^T z(t)h(t, f, \varphi_0)dt. \quad (18)$$

Как было отмечено выше, для бинарно-знакового стохастического квантования (4) имеем результат $z(t)$, который можно интерпрети-

ровать во времени как непрерывный двухуровневый сигнал со значениями -1 и $+1$. Смена этих значений во времени происходит последовательно, и исключена вероятность одновременного наступления моментов времени такой смены. Принимая это во внимание и основываясь на теории дискретно-событийного моделирования, процесс смены значений $z(t)$ во времени можно рассматривать как хронологическую последовательность существенных событий в ходе выполнения процедуры квантования. При этом интервалы между двумя последовательными такими событиями можно интерпретировать как время ожидания [31-35]. Исходя из этого, получена математическая модель для дискретно-временного представления $z(t)$ [29, 30]. В соответствии с этой моделью, если известно значение $z(t_0)$, где $t_0 = 0$ начальный момент времени квантования, то для представления $z(t)$ в цифровом виде в пределах интервала времени анализа $0 \leq t \leq T$ достаточно знать множество отсчетов времени $\{t_i^z : 1 \leq i \leq I-1\}$, в которые происходит смена его значений на этом интервале. При этом $t_0^z = t_0 = 0$ и $t_I^z = T$.

В (18) интервал интегрирования с пределами от нуля до T представим в виде множества подынтервалов с границами t_i^z и t_{i+1}^z . В пределах каждого из них имеем $z(t) = -1$ или $z(t) = +1$. С учетом этого интеграл в (18) по переменной t запишем как сумму интегралов:

$$B_{ZZ}(f, \varphi_0) = z(t_0) \sum_{i=0}^{I-1} (-1)^i \int_{t_i^z}^{t_{i+1}^z} h(t, f, \varphi_0) dt. \quad (19)$$

Примем во внимание теорему о непрерывности монотонной функции. Если две функции являются непрерывными и определены на одном и том же интервале, то непрерывной будет и функция, представляющая собой произведение этих функций на этом интервале. В свою очередь, если две функции интегрируемы на некотором интервале, то их произведение также интегрируемо [36]. В соответствии с этим из (17) следует, что для оконной функции $w(t)$, которая является непрерывной и интегрируемой на интервале времени $0 \leq t \leq T$, функция $h(t, f, \varphi_0)$ также будет непрерывной и интегрируемой функцией времени на этом же интервале. Отсюда следует, что существует такая непрерывная во времени функция $H(t, f, \varphi_0)$, которая является первообразной для функции $h(t, f, \varphi_0)$, и

для которой на интервале времени $0 \leq t \leq T$ выполняется условие дифференцируемости по переменной времени. Это означает, что такая функция $H(t, f, \varphi_0)$ имеет в любой точке интервала $0 \leq t \leq T$ производную по t , и при этом будет справедливо равенство [36]:

$$dH(t, f, \varphi_0) = h(t, f, \varphi_0) dt. \quad (20)$$

С учетом (20) после интегрирования по t будем иметь:

$$B_{ZZ}(f, \varphi_0) = z(t_0) \sum_{i=0}^I (-1)^{i+1} \lambda_i H(t_i^z, f, \varphi_0), \quad (21)$$

где $\lambda_i = 1$ для $i = 0$ и $i = I$; если $i \in [1, I-1]$, то $\lambda_i = 2$.

Отметим, что $z^2(t_0) = 1$. Исходя из этого, получаем:

$$B_{ZZ}^2(f, \varphi_0) = D_{ZZ}^2(f, \varphi_0), \quad (22)$$

$$D_{ZZ}(f, \varphi_0) = C(f, \varphi_0) + G(f, \varphi_0), \quad (23)$$

$$C(f, \varphi_0) = H(0, f, \varphi_0) + (-1)^I H(T, f, \varphi_0), \quad (24)$$

$$G(f, \varphi_0) = 2 \sum_{i=1}^{I-1} (-1)^i H(t_i^z, f, \varphi_0), \quad (25)$$

Соотношения (22)-(25) свидетельствуют, что нет необходимости знать даже одно начальное значение $z(t_0)$ результата бинарно-знакового стохастического квантования. Достаточно знать только множество отсчетов времени $\{t_i^z : 1 \leq i \leq I-1\}$, в которые происходит смена его значений на интервале времени анализа $0 \leq t \leq T$.

Примем во внимание (22). Тогда оценка СПМ (16) будет равна:

$$\hat{S}_{XX}(f) = \frac{\xi_{\max}^2}{TW} \left(D_{ZZ}^2(f, \varphi_0 = 0) + D_{ZZ}^2(f, \varphi_0 = \pi/2) \right). \quad (26)$$

Соотношение (26) с учетом промежуточных вычислений величин $C(f, \varphi_0)$, $G(f, \varphi_0)$ и $D_{ZZ}(f, \varphi_0)$ для $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$, определенных

соотношениями (23)-(25), обеспечивает вычисление с разрешением по частоте $\Delta f = 1/T$ оценок СПМ на частотах $f_k = k\Delta f$.

На практике для вычисления оценок СПМ с использованием соотношений (23)-(26) необходимо иметь численные значения отсчетов времени $\{t_i^z : 1 \leq i \leq I-1\}$. Получить численные оценки этих отсчетов можно на основе классического метода измерения длительности временных интервалов. Согласно этому методу, для получения оценки числового значения интервала времени с заданной точностью используются тактовые импульсы с образцовой частотой следования f_0 . Тогда $t_i^z = \eta_i^z \Delta t$, где $\Delta t = 1/f_0$. В соответствии с этим будем иметь множество отсчетов $\{\eta_i^z : 1 \leq i \leq I-1\}$, представляющих собой возрастающую последовательность целых чисел. Для t_0 и T соответственно будем иметь $\eta_0 = \eta_0^z = 0$ и $T = N\Delta t$. При этом $N = \eta_I^z$, $\Delta f = 1/N\Delta t$ и $f_k = k/N\Delta t$. В результате такого целочисленного представления отсчетов времени для (23)-(26) получаем:

$$\hat{S}_{XX}(f_k) = \xi_{\max}^2 \frac{\Delta f}{W} \left(D_{ZZ}^2(f_k, \varphi_0 = 0) + D_{ZZ}^2(f_k, \varphi_0 = \pi/2) \right), \quad (27)$$

$$D_{ZZ}(f_k, \varphi_0) = C(f_k, \varphi_0) + G(f_k, \varphi_0), \quad (28)$$

$$C(f_k, \varphi_0) = H(0, f_k, \varphi_0) + (-1)^I H(N, f_k, \varphi_0), \quad (29)$$

$$G(f_k, \varphi_0) = 2 \sum_{i=1}^{I-1} (-1)^i H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0). \quad (30)$$

Соотношения (27)-(30) определяют в математической форме структурную организацию и последовательность выполнения вычислительных процедур для получения оценок $\hat{S}_{XX}(f_k)$ в цифровом виде. Отметим, что вычисление оценок СПМ осуществляется на дискретных частотах $f_k = k\Delta f$ с максимально возможным частотным разрешением $\Delta f = 1/N\Delta t$, что определяется длительностью анализируемой реализации сигнала. Из (28)-(30) также следует, что основу математических

процедур вычисления оценок $\hat{S}_{XX}(f_k)$ составляют логические операции, определяющие организацию выполнения последовательности действий, и простые арифметические операции сложения и вычитания, которые должны выполняться в ходе обработки дискретных значений $H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0)$, где $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$.

3. Примеры функций $H(t, f, \varphi_0)$ для наиболее известных и применяемых классических оконных функций. В процессе проведения спектрального анализа необходимо понимать, что ни одна из оконных функций не является лучшей по всем своим свойствам. В каждом конкретном случае ее следует выбирать, учитывая требования пользователя и условия проведения спектрального анализа. В [37-39] подробно рассмотрены свойства и представлен сравнительный анализ оконных функций с точки зрения их частотных и метрологических характеристик. В данном разделе в качестве примера и для лучшего понимания организации вычислительных процедур приведены функции $H(t, f, \varphi_0)$ для ряда наиболее известных и применяемых на практике при спектральном анализе классических оконных функций. Здесь также для этих функций приведены дискретные по времени и частоте функции $H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0)$ и их значения $H(0, f_k, \varphi_0)$ и $H(N, f_k, \varphi_0)$ для $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$.

1) Естественное (прямоугольное) окно:

$$w(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (31)$$

$$H(t, f, \varphi_0) = \frac{\sin(2\pi ft - \varphi_0)}{2\pi f};$$

$$H(t, f, \varphi_0 = 0) = \frac{\sin 2\pi ft}{2\pi f}; \quad H(t, f, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{\cos 2\pi ft}{2\pi f};$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = 0) = \frac{1}{2\pi k \Delta f} \sin \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z;$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = 0) = 0; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = 0) = 0;$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi k \Delta f} \cos \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z;$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi k \Delta f}; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi k \Delta f}.$$

2) Треугольное (Барлетта) окно:

$$w(t) = \begin{cases} 1 - \frac{|t|}{T}, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (32)$$

$$H(t, f, \varphi_0) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\sin(2\pi f t - \varphi_0)}{2\pi f} - \frac{1}{T} \frac{\cos(2\pi f t - \varphi_0)}{(2\pi f)^2};$$

$$H(t, f, \varphi_0 = 0) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\sin 2\pi f t}{2\pi f} - \frac{1}{T} \frac{\cos 2\pi f t}{(2\pi f)^2};$$

$$H(t, f, \varphi_0 = \pi/2) = -\left(1 - \frac{t}{T}\right) \frac{\cos 2\pi f t}{2\pi f} - \frac{1}{T} \frac{\sin 2\pi f t}{(2\pi f)^2};$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = 0) = \frac{1}{2\pi k \Delta f} \left(\left(1 - \frac{\eta_i^z}{N}\right) \sin \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z - \frac{1}{2\pi k} \cos \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = 0) = -\frac{1}{(2\pi k)^2 \Delta f}; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = 0) = -\frac{1}{(2\pi k)^2 \Delta f};$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi k \Delta f} \left(\left(1 - \frac{\eta_i^z}{N}\right) \cos \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z + \frac{1}{2\pi k} \sin \frac{2\pi k}{N} \eta_i^z \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi k \Delta f}; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = 0.$$

3) Косинусное окно:

$$w(t) = \begin{cases} \cos \frac{\pi t}{2T}, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (33)$$

$$H(t, f, \varphi_0) = \frac{\sin(0,5\pi(4f - \Delta f)t - \varphi_0)}{\pi(4f - \Delta f)} + \frac{\sin(0,5\pi(4f + \Delta f)t - \varphi_0)}{\pi(4f + \Delta f)};$$

$$H(t, f, \varphi_0 = 0) = \frac{\sin 0,5\pi(4f - \Delta f)t}{\pi(4f - \Delta f)} + \frac{\sin 0,5\pi(4f + \Delta f)t}{\pi(4f + \Delta f)};$$

$$H(t, f, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{\cos 0,5\pi(4f - \Delta f)t}{\pi(4f - \Delta f)} - \frac{\cos 0,5\pi(4f + \Delta f)t}{\pi(4f + \Delta f)};$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = 0) = \frac{1}{\pi\Delta f} \left(\frac{\sin \frac{\pi(4k-1)}{2N} \eta_i^z}{4k-1} + \frac{\sin \frac{\pi(4k+1)}{2N} \eta_i^z}{4k+1} \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = 0) = 0; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = 0) = -\frac{1}{\pi\Delta f} \frac{2}{16k^2 - 1};$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{\pi\Delta f} \left(\frac{\cos \frac{\pi(4k-1)}{2N} \eta_i^z}{4k-1} + \frac{\cos \frac{\pi(4k+1)}{2N} \eta_i^z}{4k+1} \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{\pi\Delta f} \frac{8k}{16k^2 - 1}; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = 0.$$

4) Окна Хана, Хэмминга, Блэкмана и Наттолла. Обобщенная математическая форма оконных функций этого семейства определяется в виде суммы косинусов:

$$w(t) = \begin{cases} a_0 + \sum_{n=1}^M a_n \cos \frac{n\pi t}{T}, & |t| \leq T; \\ 0, & |t| > T. \end{cases} \quad (34)$$

$$H(t, f, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{\sin(\pi(2f - n\Delta f)t - \varphi_0)}{2f - n\Delta f} + \frac{\sin(\pi(2f + n\Delta f)t - \varphi_0)}{2f + n\Delta f} \right);$$

$$H(t, f, \varphi_0 = 0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{\sin \pi(2f - n\Delta f)t}{2f - n\Delta f} + \frac{\sin \pi(2f + n\Delta f)t}{2f + n\Delta f} \right);$$

$$H(t, f, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{\cos \pi(2f - n\Delta f)t}{2f - n\Delta f} + \frac{\cos \pi(2f + n\Delta f)t}{2f + n\Delta f} \right);$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = 0) = \frac{1}{2\pi\Delta f} \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{\sin \pi \frac{2k-n}{N} \eta_i^z}{2k-n} + \frac{\sin \pi \frac{2k+n}{N} \eta_i^z}{2k+n} \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = 0) = 0; \quad H(N, f_k, \varphi_0 = 0) = 0;$$

$$H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{1}{2\pi\Delta f} \sum_{n=0}^M a_n \left(\frac{\cos \pi \frac{2k-n}{N} \eta_i^z}{2k-n} + \frac{\cos \pi \frac{2k+n}{N} \eta_i^z}{2k+n} \right);$$

$$H(0, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{2k}{\pi\Delta f} \sum_{n=0}^M \frac{a_n}{4k^2 - n^2};$$

$$H(N, f_k, \varphi_0 = \pi/2) = -\frac{2k}{\pi\Delta f} \sum_{n=0}^M (-1)^n \frac{a_n}{4k^2 - n^2}.$$

Значения коэффициентов a_n для окон Хана, Хэмминга, Блэкмана и Наттолла представлены в таблице 1.

Таблица 1. Значения коэффициентов a_n для окон Хана, Хэмминга, Блэкмана и Наттолла

Окно	M	a_0	a_1	a_2	a_3
Хана	1	0,5	0,5	-	-
Хэмминга	1	0,54	0,46	-	-
Блэкмана	2	0,42	0,5	0,08	-
Наттолла	3	0,355768	0,487396	0,144232	0,012604

4. Постановка и результаты численных экспериментов. Соотношения (27)-(30) положены в основу разработки алгоритмического обеспечения для вычисления периодограммной оценки СПМ в дискретном виде. На рисунке 1 представлена упрощенная схема алгоритма, определяющего последовательность выполнения основных действий, реализующих эти соотношения.

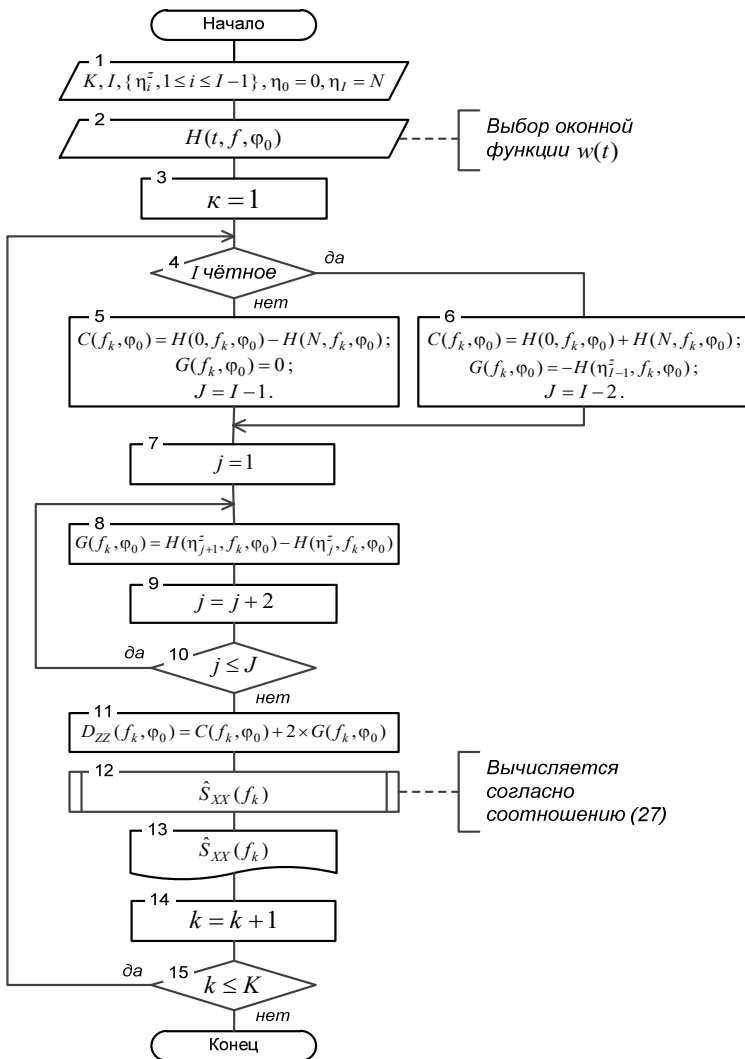


Рис. 1. Краткая запись схемы алгоритма вычисления оценок СПМ

Практическая реализация данного алгоритма предполагает, что вычисление отсчетов $H(\eta_i^z, f_k, \varphi_0)$ для $\varphi_0 = 0$ и $\varphi_0 = \pi/2$ осуществляется в параллельном режиме. Здесь также предполагается, что исходные данные, соответствующие применяемой оконной функции, задаются при выборе ее вида (блок 2 на схеме алгоритма).

В процессе решения поставленной задачи важным этапом стала программная реализация разработанного математического и алгоритмического обеспечения, а также постановка и проведение численных экспериментов с использованием данного программного обеспечения с целью исследования потенциальных возможностей полученных решений по вычислению периодограммной оценки СПМ. В соответствии с этим был разработан специализированный программный модуль. Проектирование этого модуля было осуществлено с ориентацией на его использование в составе интегрированного метрологически значимого прикладного программного обеспечения систем, предназначенных для комплексного анализа сложных сигналов [40, 41].

Численные эксперименты по исследованию функциональных возможностей модуля и характеристик оценок СПМ, вычисляемых с его использованием, проводились с применением наборов тестовых моделей с заданной частотной структурой спектра, которые имитировали реализации сложных сигналов. Преобразование таких моделей в числовой код отсчетов $\{\eta_i^z : 1 \leq i \leq I - 1\}$ осуществлялось на основе имитационного моделирования дискретно-событийной процедуры бинарно-знакового стохастического квантования.

Тестовая модель, используемая для имитации централизованной реализации многокомпонентного сложного сигнала, состояла из заданного числа статистически независимых гармонических компонент и имела нулевую постоянную составляющую. В процессе эксперимента имитировалась ситуация, когда такая модель целенаправленно подвергалась искажению аддитивным шумовым сигналом $e(t)$. С этой целью использовался белый шум, имеющий нулевое среднее значение и дисперсию σ_e^2 . Значения частот гармонических компонент задавались в пределах от нуля до 0,5. Они интерпретировались как нормированные частоты $f_k^H = f_k / 2F_{\max}$ относительно верхней граничной частоты F_{\max} диапазона вычисления оценки СПМ. Такой подход к заданию частот позволил формализовать процесс исследования потенциальных возможностей разработанного математического и алгоритмического обеспечения по оценке частотных спектров для моделей сигнала с раз-

личными параметрами гармонических компонент в единой нормированной полосе частот. Задание значений амплитуд A_k^H гармонических компонент осуществлялось в диапазоне от нуля до единицы. Они также интерпретировались как нормированные. Что касается начальных фаз φ_k гармонических компонент, то они имели значения от $-\pi$ до $+\pi$. Для их задания использовался генератор случайных чисел с равномерным законом распределения.

Тестовая стратегия численных экспериментов была направлена на экспертную оценку и детальное исследование способностей алгоритма, связанных с идентификацией и частотным разрешением гармонических компонент. В соответствии с этим численные эксперименты осуществлялись с использованием различных комбинаций тестовых наборов моделей. В общем случае одна часть гармонических компонент в составе модели имела амплитуды, дающие резкие пики в спектре, а другая часть была с малыми амплитудами. Такой состав гармонических компонент использовался для оценки способности обнаруживать присутствие слабых спектральных составляющих при доминировании в спектре сильных составляющих на фоне широкополосного шума. С помощью данной модели также было удобно исследовать способность алгоритма различать гармонические составляющие, частоты которых в спектре близки между собой, и тем самым оценивать его разрешающую способность по частоте. В частности, такая модель реализации сигнала содержала двенадцать гармонических компонент, параметры которых представлены в таблице 2.

Таблица 2. Параметры гармонических компонент

k	A_k^H	f_k^H	A_k^2 / A_{\max}^2 , дБ
1	0,15	0,12	-16,48
2	0,3	0,15	-10,46
3	0,5	0,20	-6,02
4	0,75	0,22	-2,50
5	1,0	0,24	0
6	0,55	0,25	-5,19
7	0,3	0,26	-10,46
8	0,25	0,30	-12,04
9	0,15	0,33	-16,48
10	0,35	0,4	-9,12
11	0,9	0,41	-0,92
12	0,5	4,3	-6,02

При этом аддитивный шумовой сигнал имел дисперсию $\sigma_e^2 = 1$. Фрагмент реализации этой модели представлен на рисунке 2. Нормированные оценки СПМ для рассматриваемой модели реализации сигнала представлены на рисунках 3-8. Они получены с применением естественного, треугольного и косинусного окон, а также окон Ханна, Хэмминга и Блэкмана.

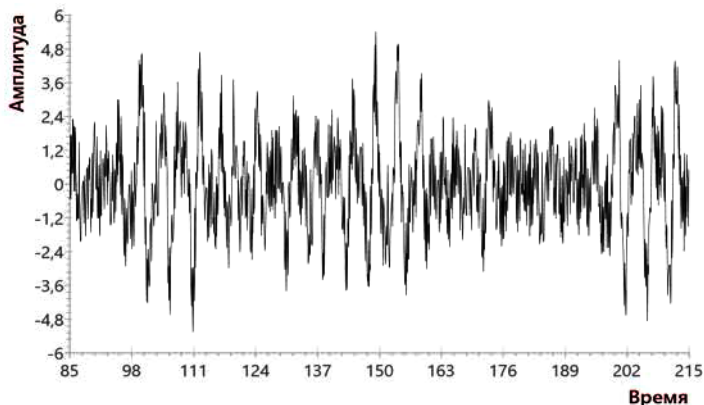


Рис. 2. Фрагмент реализации модели зашумленного многокомпонентного сигнала

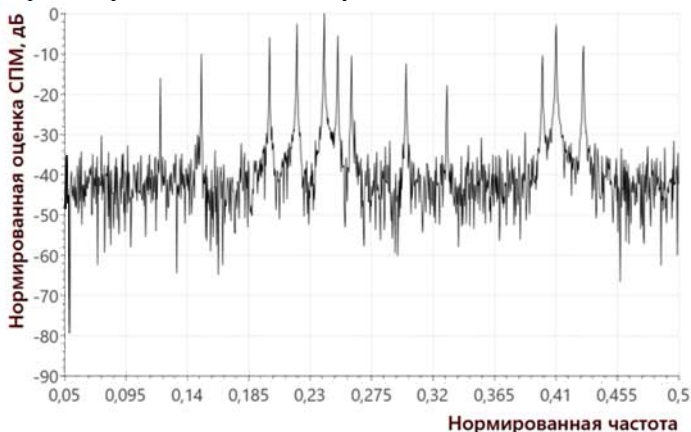


Рис. 3. Нормированная оценка СПМ. Естественное окно

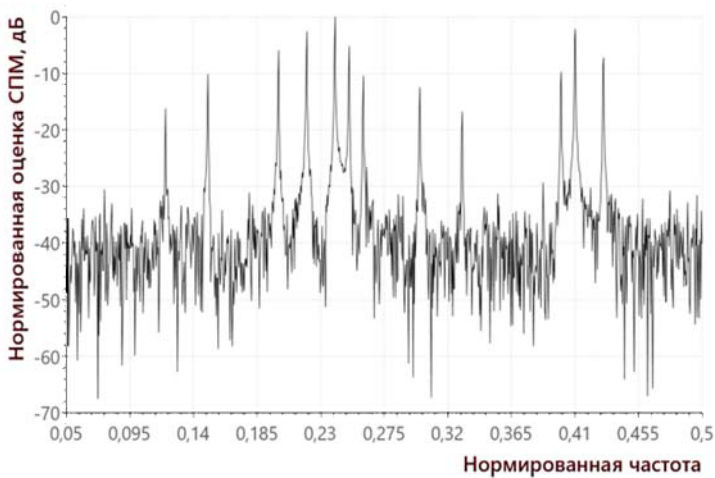


Рис. 4. Нормированная оценка СПМ. Треугольное окно

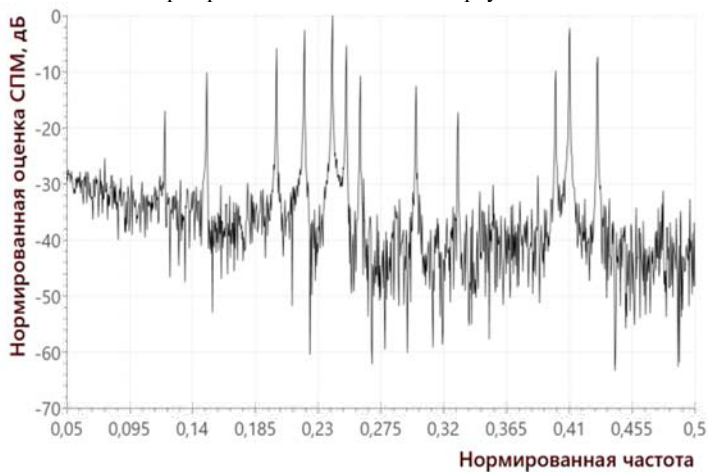


Рис. 5. Нормированная оценка СПМ. Косинусное окно

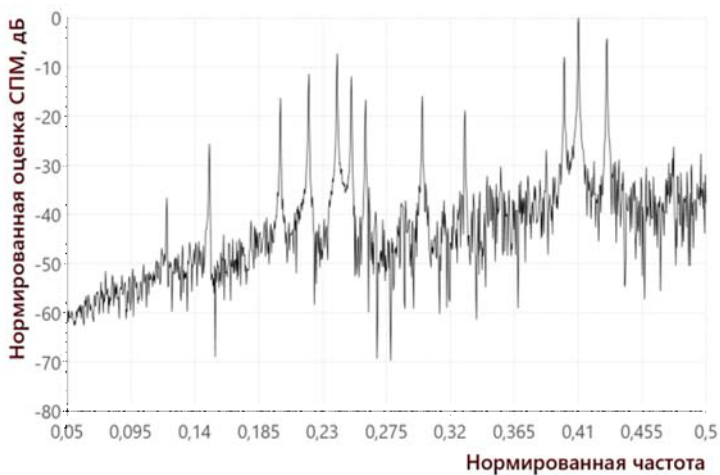


Рис. 6. Нормированная оценка СПМ. Окно Ханна

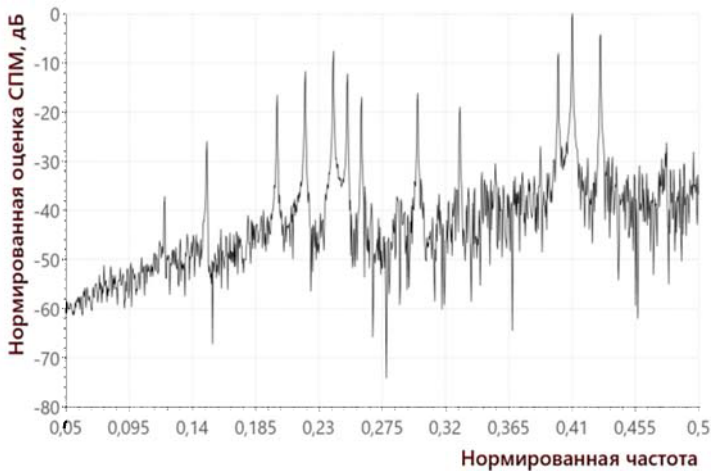


Рис. 7. Нормированная оценка СПМ. Окно Хэмминга

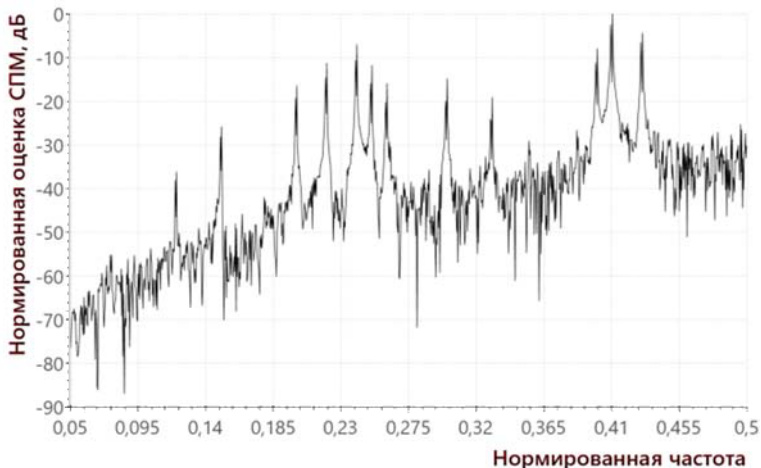


Рис. 8. Нормированная оценка СПМ. Окно Блэкмана

Разрешение спектральных компонент, с которым они вычислены, составляет 0,0005 единиц нормированной частоты. На графиках хорошо видно, что алгоритм обеспечил уверенное распознавание всех двенадцати гармонических компонент модели. Распределение спектральных линий по частоте соответствует данным, представленным в таблице 2. Эффект взаимного маскирования спектральных линий отсутствует. Они четко различимы в пределах всего частотного диапазона. Ложные спектральные линии на графиках отсутствуют. Спектральная оценка аддитивного шума не превышает -30 дБ.

Экспериментальные исследования свидетельствуют о хорошей разрешающей способности по частоте разработанного алгоритма, а также о том, что он обеспечивает вычисление статистически устойчивых спектральных оценок к внешнему шумовому воздействию. Однако нетрудно видеть, что оконные функции дают несколько различающиеся результаты вычисления оценок СПМ. Надо понимать и учитывать, что выбор конкретной оконной функции представляет собой принятие взаимно приемлемого компромиссного решения, связанного с обеспечением требуемого разрешения по частоте и точности определения пикового уровня спектральных компонент. Отдавая предпочтение той или иной оконной функции, необходимо следовать рекомендациям по ее использованию в зависимости от области проводимых исследований и частотного состава (низкочастотный или высокочастотный) анализируемого сигнала. Это означает, что необходимо следовать определенной

стратегии выбора и применения оконных функций в процессе обработки сигнала при спектральном анализе [42-46].

5. Заключение. В статье рассмотрена поэтапная разработка математического и алгоритмического обеспечения, повышающего эффективность вычисления дискретной периодограммной оценки СПМ с применением оконных функций. Основой такой разработки послужило бинарно-знаковое стохастическое квантование для преобразования сигнала в цифровой код. Получены математические соотношения, не требующие в своей основе выполнения большого числа операций умножения, что ведет к снижению мультипликативной сложности процедур оценивания СПМ. Данные математические соотношения послужили основой для разработки вычислительного алгоритма получения периодограммной оценки СПМ. Принципиально важной особенностью этого алгоритма является то, что основными операциями определяемых им процедур являются арифметические операции сложения и вычитания, а также операции логической обработки дискретных значений функций $H(t, f, \varphi_0)$. Особое значение для повышения эффективности вычислительных процедур имеет и то, что в процессе спектрального анализа функции $H(t, f, \varphi_0)$ являются известными. Вид этих функций определяется исключительно видом оконных функций. Согласно полученному математическому решению, они представляют собой первообразные функции для интегрального косинус-преобразования оконных функций и вычисляются аналитически. Множество таких функций может быть сформировано предварительно с учетом набора применяемых оконных функций и оформлено в виде специальных коллекций или динамических библиотек прикладных подпрограмм. Аналитическое вычисление интегральных операторов позволило исключить свойственную классическим цифровым алгоритмам периодограммной оценки СПМ погрешность, вызванную переходом от операций интегрирования к дискретным операциям суммирования. Результаты проведенных численных экспериментов дали основание подтверждения того, что разработанный подход позволяет с высокой точностью и частотным разрешением получать периодограммные оценки СПМ в условиях присутствия аддитивного шумового сигнала при низком отношении сигнал/шум. Программная реализация вычислительного алгоритма выполнена в виде программного модуля, который может найти применение как составной компонент интегрированного метрологически значимого программного обеспечения многофункциональных систем для оперативного частотно-временного анализа сложных многокомпонентных сигналов.

Литература

1. *Alessio S.M.* Digital Signal Processing and Spectral Analysis for Scientists: Concepts and Applications // Springer. 2016. 900 p.
2. *Marple Jr.S.L.* Digital Spectral Analysis with Applications: Second edition // Dover Publications Inc. 2019. 432 p.
3. *Oppenheim A.V., Schaffer R.W.* Discrete-Time Signal Processing: Third edition // Pearson Higher Education. 2010. 1108 p.
4. *Bendat J.S., Piersol A.G.* Random Data: Analysis and Measurement Procedures. Fourth edition // Wiley. 2010. 621 p.
5. *Percival D.B., Walden A.T.* Spectral Analysis for Univariate Time Series // Cambridge University Press. 2020. 692 p.
6. *Фухтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления.. 8-изд. // М.: Физматлит. 2003. Т. 2. 864 с.
7. *Oberguggenberger M., Ostermann A.* Analysis for Computer Scientists Foundations, Methods and Algorithms // Springer. 2018. 378 p.
8. *Ульянов М.В.* Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ // М.: Физматлит. 2008. 304 с.
9. *Kleinberg J., Tardos E.* Algorithm Design // Pearson. 2006. 838 p.
10. *Blahut R.E.* Fast Algorithms for Signal Processing // Cambridge University Press. 2010. 453 p.
11. *Britanak V., Rao K.R.* Cosine-/Sine-Modulated Filter Banks: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations // Springer. 2018. 645 p.
12. *Madisetti V.K.* The Digital Signal Processing Handbook, Second edition: Digital Signal Processing Fundamentals // CRC Press, Taylor and Francis Group. 2010. 904 p.
13. *Stepanov A.A. Rose D.E.* From Mathematics to Generic Programming // Addison-Wesley Professional. 2015. 292 p.
14. *Kester W.* (Editor). Analog-Digital Conversion // Analog Devices. 2004. 1138 p.
15. *Pelgrom M.* Analog-to-Digital Conversion // Springer. 2017. 548 p.
16. *Bhattacharyya S.S., Deprettere E.F., Leupers R., Takala J.* Handbook of Signal Processing Systems // Springer. 2019. 1200 p.
17. *Papadopoulos H.C., Wornell G.W., Oppenheim A.V.* Sequential Signal Encoding From Noisy Measurements Using Quantizers with Dynamic Bias Control // IEEE Transactions on information theory. 2001. vol. 47. no. 3. pp. 978–1002.
18. *Fang J., Shen Y., Yang L., Li H.* Adaptive One-Bit Quantization for Compressed Sensing // Signal Processing. 2016. vol. 125. pp. 145–155.
19. *Isla J., Celga F.* The Use of Binary Quantization for the Acquisition of Low SNR Ultrasonic Signals: a Study of the Input Dynamic Range // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2016. vol. 63. no. 9. pp. 1474–1482.
20. *Isla J., Celga F.* Simultaneous Transmission and Reception on All Elements of an Array: Binary Code Excitation // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 2019. vol. 475. no. 2225. pp. 1–23.
21. *Zhai Q., Wang Y.* Noise Effect on Signal Quantization in an Array of Binary Quantizers // Signal Processing. 2018. vol. 152. pp. 265–272.
22. *Diao J.-D., Guo J., Sun C.-Y.* Event-Triggered Identification of Fir Systems with Binary-Valued Output Observations // Automatica. 2018. vol. 98. pp. 95–102.
23. *Wang G., Zhu J., Xu Z.* Asymptotically Optimal One-bit Quantizer Design for Weak-Signal Detection in Generalized Gaussian Noise and Lossy Binary Communication Channel // Signal Processing. 2019. vol. 154. pp. 207–216.
24. *Wang G. et al.* Signal Amplitude Estimation and Detection From Unlabeled Binary Quantized Samples // IEEE Transactions on Signal Processing. 2018. vol. 66. no. 16. pp. 4291–4303.

25. Guo J., Wang L.Y., Yin G. Zhao Y., Zhang J.F. Identification of Wiener Systems with Quantized Inputs and Binary-Valued Output Observations // *Automatica*. 2017. vol. 78. pp. 280–286.
26. Горбунов Ю.Н., Куликов Г.В., Шнак А.В. Радиолокация: стохастический подход / Под ред. Ю.Н.Горбунова // М.: Горячая линия-Телеком. 2016. 520 с.
27. Мирский Г.Я. Характеристики стохастической взаимосвязи и их измерения // М.: Энергоиздат. 1982. 320 с.
28. Max J. Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques. Tome 1: Principes generaux et methodes classiques // Masson, Paris. 1996. 354 p.
29. Якимов В.Н. Цифровой комплексный статистический анализ на основе знакового представления случайных процессов // Известия самарского научного центра РАН. 2016. Т. 18. №4(7). С. 1346–1353.
30. Yakimov V.N. Direct Spectral Power Density Estimation from a Discrete-Time Representation of Stochastic Analog Quantization for an Analog Random Process // *Measurement Techniques*. 2009. vol. 52. no. 3. pp. 223–230.
31. Law A.M. Simulation Modeling and Analysis: Fifth edition // McGraw-Hill Education. 2015. 804 p.
32. Zeigler B.P., Muzy A., Kofman E. Theory of Modeling and Simulation Discrete Event and Iterative System Computational Foundations // Academic Press. 2019. 667 p.
33. Hu X., Wu P. A Data Assimilation Framework for Discrete Event Simulations // *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 2019. vol. 29. no. 3. pp. 17:1–17:26.
34. Robinson S. Conceptual modelling for simulation: Progress and grand challenges // *Journal of Simulation*. 2020. vol. 14. no. 1. pp. 1–20.
35. Blas M. J., Gonnet S. Computer-aided design for building multipurpose routing processes in discrete event simulation models // *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2021. vol. 24. no. 1. pp. 22–34.
36. Фиктенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1. 8-изд. // М.: Физматлит. 2003. 680 с.
37. Harris F.J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis With the Discrete Fourier Transform // *Proceedings of the IEEE*. 1978. vol. 66. no. 1. pp. 51–83.
38. Prabhu K.M.M. Window Functions and Their Applications in Signal Processing // CRC Press, Taylor and Francis Group. 2014. 382 p.
39. Дворкович В.П., Дворкович А.В. Оконные функции для гармонического анализа сигналов. Изд. 2-е. // М.: Техносфера. 2016. 208 с.
40. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V. Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals // *Proceedings of IEEE XXI International Conference on Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP)*. 2019. pp. 698–701.
41. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes // *Instruments and Experimental Techniques*. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
42. Mohindru P., Khanna R., Bhatia S.S. Spectral Analysis of Generalized Triangular and Welch Window Functions using Fractional Fourier Transform // *Automatika: Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*. 2016. vol. 57. no. 1. pp. 221–229.
43. Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D. A Family of Optimal Window Functions for Spectral Analysis with the Spectrum Sidelobe Falloff Rate Multiple of 12 dB per Octave // *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2020. vol. 65. no. 5. pp. 502–515.
44. Rahman M.S., Sugiura Y., Shimamura T. Utilization of Windowing Effect and Accumulated Autocorrelation Function and Power Spectrum for Pitch Detection in Noisy Environments // *IEEE Transactions on Electrical and Electronic Engineering*. 2020. vol. 15. no. 11. pp. 1681–1690.

45. *Smith W.H.F.* Spectral Windows for Satellite Radar Altimeters // *Advances in Space Research*. 2018. vol. 62. no. 6. pp. 1576–1588.
46. *Mirri D., Iuculano G., Traverso P.A., Pasin G.* Performance Evaluation Of Cascaded Rectangular Windows in Spectral Analysis // *Measurement*. 2004. vol. 36. no. 1. pp. 37–52.

Якимов Владимир Николаевич — д-р техн. наук, профессор кафедры автоматизации и управления технологическими процессами института автоматки и информационных технологий, Самарский государственный технический университет (СамГТУ). Область научных интересов: методы и средства статистических измерений, диагностика технического состояния и испытания систем, цифровая обработка сигналов, корреляционный и спектральный анализ сигналов, математическое и имитационное моделирование. Число научных публикаций — 280. yvnr@hotmail.com; ул. Молодогвардейская, 244, 443100, Самара, Россия; р.т. +7(846) 279-0354.

Поддержка исследований. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-08-00228-а).

V. YAKIMOV

PERIODOGRAM ESTIMATING THE SPECTRAL POWER DENSITY BASED UPON SIGNALS' BINARY-SIGN STOCHASTIC QUANTIZATION USING WINDOW FUNCTIONS

Yakimov V. Periodogram Estimating the Spectral Power Density Based upon Signals' Binary-Sign Stochastic Quantization Using Window Functions.

Abstract. Spectral analysis of signals is used as one of the main methods for studying systems and objects of various physical natures. Under conditions of a priori statistical uncertainty, the signals are subject to random changes and noise. Spectral analysis of such signals involves the estimation of the power spectral density (PSD). One of the classical methods for estimating PSD is the periodogram method. The algorithms that implement this method in digital form are based on the discrete Fourier transform. Digital multiplication operations are mass operations in these algorithms. The use of window functions leads to an increase in the number of these operations. Multiplication operations are among the most time consuming operations. They are the dominant factor in determining the computational capabilities of an algorithm and determine its multiplicative complexity.

The paper deals with the problem of reducing the multiplicative complexity of calculating the periodogram estimate of the PSD using window functions. The problem is solved based on the use of binary-sign stochastic quantization for converting a signal into digital form. This two-level signal quantization is carried out without systematic error. Based on the theory of discrete-event modeling, the result of a binary-sign stochastic quantization in time is considered as a chronological sequence of significant events determined by the change in its values. The use of a discrete-event model for the result of binary-sign stochastic quantization provided an analytical calculation of integration operations during the transition from the analog form of the periodogram estimation of the SPM to the mathematical procedures for calculating it in discrete form. These procedures became the basis for the development of a digital algorithm. The main computational operations of the algorithm are addition and subtraction arithmetic operations. Reducing the number of multiplication operations decreases the overall computational complexity of the PSD estimation. Numerical experiments were carried out to study the algorithm operation. They were carried out on the basis of simulation modeling of the discrete-event procedure of binary-sign stochastic quantization. The results of calculating the PSD estimates are presented using a number of the most famous window functions as an example. The results obtained indicate that the use of the developed algorithm allows calculating periodogram estimates of PSD with high accuracy and frequency resolution in the presence of additive white noise at a low signal-to-noise ratio. The practical implementation of the algorithm is carried out in the form of a functionally independent software module. This module can be used as a part of complex metrologically significant software for operational analysis of the frequency composition of complex signals.

Keywords: Power Spectral Density, Periodogram Estimate, Binary Stochastic Quantization, Window Function, Timing

Yakimov Vladimir — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of Automation and Control of Technological Processes, Samara State Technical University. Research interests: methods and means of statistical measurements, diagnostics of technical condition and testing of systems, digital signal processing, correlation and spectral analysis of signals, mathematical and simulation modeling. The number of publications — 280. yvnr@hotmail.com; 244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100, Russia; office phone: +7(846) 279-0354.

Acknowledgements. This research is supported by RFBR (grant 19-08-00228-a).

References

1. Alessio S.M. *Digital Signal Processing and Spectral Analysis for Scientists: Concepts and Applications*. Springer. 2016. 900 p.
2. Marple Jr.S.L. *Digital Spectral Analysis with Applications: Second edition*. Dover Publications Inc. 2019. 432 p.
3. Oppenheim A.V., Schaffer R.W. *Discrete-Time Signal Processing: Third edition*. Pearson Higher Education. 2010. 1108 p.
4. Bendat J.S., Piersol A.G. *Random Data: Analysis and Measurement Procedures*. Fourth edition. Wiley. 2010. 621 p.
5. Percival D.B., Walden A.T. *Spectral Analysis for Univariate Time Series*. Cambridge University Press. 2020. 692 p.
6. Fichtenholz G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit. 2003. Issue 2. 864 p. (In Russ.).
7. Oberuggenberger M., Ostermann A. *Analysis for Computer Scientists Foundations, Methods and Algorithms*. Springer. 2018. 378 p.
8. Ul'janov M.V. *Resursno-jeffektivnye komp'yuternye algoritmy. Razrabotka i analiz* [Resource-efficient computer algorithms. Development and analysis]. Moscow: Fizmatlit. 2008. 304 p. (In Russ.).
9. Kleinberg J., Tardos E. *Algorithm Design*. Pearson. 2006. 838 p.
10. Blahut R.E. *Fast Algorithms for Signal Processing*. Cambridge University Press. 2010. 453 p.
11. Britanak V., Rao K.R. *Cosine-/Sine-Modulated Filter Banks: General Properties, Fast Algorithms and Integer Approximations*. Springer. 2018. 645 p.
12. Madisetti V.K. *The Digital Signal Processing Handbook, Second edition: Digital Signal Processing Fundamentals*. CRC Press, Taylor and Francis Group. 2010. 904 p.
13. Stepanov A.A., Rose D.E. *From Mathematics to Generic Programming*. Addison-Wesley Professional. 2015. 292 p. 310.
14. Kester W. *Analog-Digital Conversion*. Analog Devices. 2004. 1138 p.
15. Pelgrom M. *Analog-to-Digital Conversion*. Springer. 2017. 548 p.
16. Bhattacharyya S.S., Deprettere E.F., Leupers R., Takala J. *Handbook of Signal Processing Systems*. Springer. 2019. 1200 p.
17. Papadopoulos H.C., Wornell G.W., Oppenheim A.V. *Sequential Signal Encoding From Noisy Measurements Using Quantizers with Dynamic Bias Control*. *IEEE Transactions on information theory*. 2001. vol. 47. no. 3. pp. 978–1002.
18. Fang J., Shen Y., Yang L., Li H. *Adaptive One-Bit Quantization for Compressed Sensing*. *Signal Processing*. 2016. vol. 125. pp. 145–155.
19. Isla J., Celga F. *The Use of Binary Quantization for the Acquisition of Low SNR Ultrasonic Signals: a Study of the Input Dynamic Range*. *IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control*. 2016. vol. 63. no. 9. pp. 1474–1482.
20. Isla J., Celga F. *Simultaneous Transmission and Reception on All Elements of an Array: Binary Code Excitation*. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2019. vol. 475. no. 2225. pp. 1–23.
21. Zhai Q., Wang Y. *Noise Effect on Signal Quantization in an Array of Binary Quantizers*. *Signal Processing*. 2018. vol. 152. pp. 265–272.
22. Diao J.-D., Guo J., Sun C.-Y. *Event-Triggered Identification of Fir Systems with Binary-Valued Output Observations*. *Automatica*. 2018. vol. 98. pp. 95–102.
23. Wang G., Zhu J., Xu Z. *Asymptotically Optimal One-bit Quantizer Design for Weak-Signal Detection in Generalized Gaussian Noise and Lossy Binary Communication Channel*. *Signal Processing*. 2019. vol. 154. pp. 207–216.
24. Wang G. et al. *Signal Amplitude Estimation and Detection From Unlabeled Binary Quantized Samples*. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2018. vol. 66. no. 16. pp. 4291–4303.
25. Guo J. et al. *Identification of Wiener Systems with Quantized Inputs and Binary-Valued Output Observations*. *Automatica*. 2017. vol. 78. pp. 280–286.
26. Gorbunov Yu.N. Kulikov G.V., Shpak A.V. *Radiolokacija: stohasticheskij podhod* [Radar: a stochastic approach]. Moscow: Gorjachaja Linija-Telekom. 2016. 520 p. (In Russ.).

27. Mirskii G.Ya. *Harakteristiki stohasticheskoy vzaimosvjazi i ih izmerenija* [Characteristics of stochastic interconnections and their measurement]. Moscow: Energoizdat. 1982. 320 p.
28. Max J. *Methodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques*. Tome 1: Principes generaux et methodes classiques. Masson, Paris. 1996.354 p.
29. Yakimov V.N. [Digital complex statistical analysis based on the sign-function representation of random processes]. *Izvestija samarskogo nauchnogo centra Rossijskoj akademii nauk – Izvestia of Samara scientific center of the Russian academy of sciences*. 2016. vol. 18. no. 4(7). pp. 1346–1353. (In Russ.).
30. Yakimov V.N. Direct Spectral Power Density Estimation from a Discrete-Time Representation of Stochastic Analog Quantization for an Analog Random Process. *Measurement Techniques*. 2009. vol. 52. no. 3. pp. 223–230.
31. Law A.M. *Simulation Modeling and Analysis: Fifth edition*. McGraw-Hill Education. 2015. 804 p.
32. Zeigler B.P., Muzy A., Kofman E. *Theory of Modeling and Simulation Discrete Event and Iterative System Computational Foundations*. Academic Press. 2019. 667 p.
33. Hu X., Wu P. A Data Assimilation Framework for Discrete Event Simulations. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*. 2019. vol. 29. no. 3. pp. 17:1–17:26.
34. Robinson S. Conceptual modelling for simulation: Progress and grand challenges. *Journal of Simulation*. 2020. vol. 14. no. 1. pp. 1–20.
35. Blas M. J., Gonnet S. Computer-aided design for building multipurpose routing processes in discrete event simulation models. *Engineering Science and Technology, an International Journal*. 2021. vol. 24. no. 1. pp. 22–34.
36. Fichtenholz G.M. *Kurs differentsialnogo i integralnogo ischisleniya* [Course of differential and integral calculus]. Moscow: Fizmatlit. 2003. vol. 1. 680 p. (In Russ.).
37. Harris F.J. On the Use of Windows for Harmonic Analysis With the Discrete Fourier Transform. *Proceedings of the IEEE*. 1978. vol. 66. no. 1. pp. 51–83.
38. Prabhu K.M.M. *Window Functions and Their Applications in Signal Processing*. CRC Press, Taylor and Francis Group. 2014. 382 p.
39. Dvorkovich V.P., Dvorkovich A.V. *Okonnye funkcii dlya garmonicheskogo analiza signalov* [Windows functions for harmonic analysis of signals]. Ed. 2nd. Moscow: Tekhnosfera. 2016. 208 p. (In Russ.).
40. Yakimov V.N., Zaberzhinskij B.E., Mashkov A.V., Bukanova Yu.V. Multi-threaded Approach to Software High-speed Algorithms for Spectral Analysis of Multi-component Signals. Proceedings of IEEE XXI International Conference on Complex Systems: Control and Modeling Problems (CSCMP). 2019. pp. 698–701.
41. Yakimov V.N., Gorbachev O.V. Firmware of the Amplitude Spectrum Evaluating System for Multicomponent Processes. *Instruments and Experimental Techniques*. 2013. vol. 56. no. 5. pp. 540–545.
42. Mohindru P., Khanna R., Bhatia S.S. Spectral Analysis of Generalized Triangular and Welch Window Functions using Fractional Fourier Transform. *Automatika: Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*. 2016. vol. 57. no. 1. pp. 221–229.
43. Zaytsev G.V., Khzmalyan A.D. A Family of Optimal Window Functions for Spectral Analysis with the Spectrum Sidelobe Falloff Rate Multiple of 12 dB per Octave. *Journal of Communications Technology and Electronics*. 2020. vol. 65. no. 5. pp. 502–515.
44. Rahman M.S., Sugiura Y., Shimamura T. Utilization of Windowing Effect and Accumulated Autocorrelation Function and Power Spectrum for Pitch Detection in Noisy Environments. *IEEJ Transactions on Electrical and Electronic Engineering*. 2020. vol. 15. no. 11. pp. 1681–1690.
45. Smith W.H.F. Spectral Windows for Satellite Radar Altimeters. *Advances in Space Research*. 2018. vol. 62. no. 6. pp. 1576–1588.
46. Mirri D., Iuculano G., Traverso P.A., Pasin G. Performance Evaluation Of Cascaded Rectangular Windows in Spectral Analysis. *Measurement*. 2004.vol. 36. no.1. pp.37–52.