МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ В ЗАДАЧАХ ВАРИАЦИОННОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

МИРОНОВ В.И., МИРОНОВ Ю.В.

УДК 629.191

Миронов В.И, Миронов Ю.В. **Метод наименьших квадратов в задачах идентификации параметров моделей нелинейных динамических систем.**

Аннотация. Рассматривается применение вариационного подхода для решения задач статистического оценивания параметров моделей нелинейных динамических систем по критерию наименьших квадратов с использованием дискретных и дискретно-непрерывных измерений. Обсуждаются вопросы регуляризации оценок.

Ключевые слова: статистическое оценивание, идентификация, нелинейные динамические системы, критерий наименьших квадратов, регуляризация.

Mironov V.I., Mironov Y.V. **Method of the least squares in problems of identification of parametres of models of nonlinear dynamic systems.**

Abstract. One considers the application of the variation approach for the decision of problems of statistical estimation of parametres of models of nonlinear dynamic systems by criterion of the least squares with use of discrete and is discrete-continuous measurements. One discusses questions of regularization of marks appreciation.

Keywords: statistical estimation, identification, nonlinear dynamic systems, criterion of the least squares, regularization.

1. Введение. Изучение и оптимизация реальных объектов и процессов с помощью математических методов начинаются с построения их моделей. Когда структура исследуемого объекта выявлена и определен класс моделей, пригодных для его описания, обычно возникает необходимость в определении некоторых неизвестных параметров модели выбранного класса, что составляет задачу параметрической идентификации. Точные значения или приемлемые оценки неизвестных параметров обычно находят в результате обработки входных и выходных сигналов системы на этапе идентифицирующего эксперимента.

В настоящее время идентификация стала обязательным элементом и достаточно сложной стадией решения актуальных прикладных задач. При идентификации создаются адекватные модели, необходимые для практического использования математических методов и сложных наукоемких технологий. Поэтому разработка и совершенствование методов и алгоритмов идентификации имеют важное значение и для фундаментальной науки, и для инженерной практики.

Понятиям, методам и алгоритмам идентификации посвящена обширная литература [1–18 и др.]. Количество таких работ устойчиво растет, а область практического использования предлагаемых алго-

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ритмов постоянно расширяется. Особенно важное место они занимают на всех этапах создания, экспериментальной отработки и эксплуатации объектов ракетно-космической, авиационной, корабельной техники, а также других сложных автоматических и автоматизированных систем, комплексов различного назначения и видовой принадлежности. Наиболее сложные задачи оценивания приходится, в частности, решать при навигационно-баллистическом обеспечении полетов космических аппаратов (КА), при разработке автономных систем управления полетом, в ходе летных испытаний и др.

Для решения данного круга задач часто применяется известный метод наименьших квадратов (МНК). Этот метод также находит широкое применение при обработке количественных результатов естественно-научных опытов, технических данных, астрономических и геодезических наблюдений и измерений.

Распространенность МНК во многом обусловлена тем, что при решении задач оценивания данным методом не требуется знания статистических характеристик ошибок измерений, которые во многих случаях неизвестны или известны с низкой точностью.

Технология применения МНК для решения различных прикладных задач применительно к динамическим системам широко освещена в отечественной и зарубежной литературе. Она предусматривает составление критерия оптимальности, формирование нормальной системы уравнений и получение оптимальной оценки путем ее решения. По смыслу они представляют собой необходимые условия оптимальности, характерные для прямых методов оптимизации.

Вместе с тем МНК может быть реализован на основе использования условий оптимальности оценок вариационного типа. Особый интерес представляет рассмотрение задач идентификации динамических систем, поведение которых описывается непрерывными системами дифференциальных уравнений, а измерения проводятся в дискретные моменты времени. Именно к этому классу относятся многие прикладные задачи.

Некоторые вопросы обоснования и разработки соответствующей вариационной технологии рассматривались в работе авторов [7] применительно к оцениванию параметров состояния нелинейных динамических систем.

Данная статья посвящена вопросам вариационной идентификации параметров модели нелинейной динамической системы по критерию наименьших квадратов. При этом определяются и конкретизируются необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

применительно к моделям дискретных и дискретно-непрерывных измерений. Кроме того, рассматриваются вопросы регуляризации решений.

2. Постановка задачи. Рассмотрим следующую задачу идентификации l-мерного вектора $\bar{c}$ параметров модели нелинейной динамической системы по результатам измерений, проводимых в N точках t_i, заданных на интервале измерений $\tau = T - t_0$.

Задача 1. Пусть динамика объекта описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\bar{x}} = \bar{\phi}(\bar{x}, \bar{c}, t), \quad \bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \quad t \in [t_0, T], \tag{1}$$

где $\bar{x}$ — n-мерный вектор фазового состояния системы.

Исходное состояние динамической системы $\bar{x}_0$ полагаем заданным.

Измерениям подвергается m-мерный вектор

$$\bar{\psi}(t) = \bar{\psi}[\bar{x}(t, \bar{c})].$$

Измеренное значение вектора $\bar{\psi}$ в момент t_i обозначим, как $\bar{y}(t_i) = \bar{y}_i$ и представим модель измерений в виде

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{c})] + \bar{\delta}_i, \quad i = \overline{1, N}, \quad t_i \in [t_0, T]. \tag{2}$$

Здесь $\bar{\delta}_i$ — m-мерный вектор случайных ошибок измерений.

Требуется найти такую оценку вектора $\bar{c}$, которая обеспечивает минимальное значение функционала:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \left\{ \bar{y}(t_i), \ \bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{c})] \right\}, \tag{3}$$

где

$$\rho_i = \{\bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{c})]\}^T W_i \{\bar{y}(t_i) - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{c})]\}, \quad i = \overline{1, N}, \tag{4}$$

W_i — симметрические матрицы весовых коэффициентов.

Функции $\bar{\phi}(\bar{x}, \bar{c}, t)$ и $\bar{\psi}[\bar{x}(t_i, \bar{c})]$ будем считать однозначными, ограниченными, непрерывными и дифференцируемыми по всем своим аргументам во всей области их определения.

Предполагается выполнение известных условий наблюдаемости.

3. Вариационные условия оптимальности оценок. Для решения поставленной задачи представим функционал (3) в эквивалентной интегральной форме. Для этого введем функцию

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\rho\{\bar{y}(t),\ \bar{\psi}[\bar{x}(t)]\} = \{\bar{y}(t) - \bar{\psi}[\bar{x}(t)]\}^T W(t)\{\bar{y}(t) - \bar{\psi}[\bar{x}(t)]\}, \tag{5}$$

где $\bar{y}(t)$ и $W(t)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые функции, принимающие в моменты t_i соответственно значения $\bar{y}_i$ и W_i (например, полиномы Лагранжа).

Тогда функционал (3) принимает вид

$$I = \int_{t_0}^{T} \rho\left\{\bar{y}(t),\ \bar{\psi}[\bar{x}(t)]\right\} \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i)dt, \tag{6}$$

где $\delta(t - t_i)$ — импульсная дельта-функция.

Далее расширим пространство состояний путем введения дополнительного вектора $\bar{x}_1(t) = \bar{c}$ и системы

$$\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{\varphi}_{x_1}(\bar{x}_1, t) \equiv 0; \tag{7}$$

$$\bar{x}_1(t_0) = \bar{c}.$$

Тогда задача 1 преобразуется в задачу 2 для расширенного k-мерного вектора состояний $\bar{z}(t) = [\bar{x}(t), \bar{x}_1(t)]^T$, $k = n + l$.

Задача 2. Дано:

$$\dot{\bar{z}} = \bar{\phi}_z(\bar{z},\ t), \quad \bar{\phi}_z = [\bar{\phi},\ \bar{\phi}_{x_1}]^T, \tag{8}$$

$$\bar{y}(t_i) = \bar{\psi}_i[\bar{z}(t_i)] + \bar{\delta}_i,$$

$$I = \int_{t_0}^{T} \rho\left\{\bar{y}(t), \bar{\psi}[\bar{z}(t)]\right\} \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i)dt.$$

Требуется найти оптимальную оценку вектора $\bar{z}_0$ при заданном исходном состоянии системы $\bar{x}_0$, что эквивалентно идентификации вектора параметров модели динамики $\bar{c}$.

Получим необходимые условия оптимальности $\bar{z}_0$. Поскольку оптимальному значению $\bar{z}_0$ соответствует и оптимальная траектория $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$, то и условия оптимальности этой траектории можно рассматривать в качестве условий оптимальности $\bar{z}_0$. Для определения таких условий, следуя известной процедуре вариационного исчисления, введем функцию

$$H(\bar{z},\ \bar{\lambda},\ t) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \phi_{z_j}(\bar{z},\ t) + \rho\left[\bar{y}(t),\ \bar{\psi}(\bar{z},\ t)\right] \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i), \tag{9}$$

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

и составим расширенный функционал

$$I^{*} = \int_{t_0}^{T} \left[-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) \frac{\partial z_j}{\partial t} + H \right] dt \,. \tag{10}$$

Рассмотрим далее первую вариацию этого функционала

$$\delta I^{*} = \int_{t_0}^{T} \left[-\sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t) \delta(\frac{\partial z_j}{\partial t}) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial z_j} \delta z_j \right] dt \,. \tag{11}$$

После интегрирования по частям это выражение принимает следующий вид

$$\begin{gathered} \delta I^{*} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(t_0) \delta z_j(t_0) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(T) \delta z_j(T) + \\ + \int_{t_0}^{T} - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{\partial \lambda_j}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial z_j} \right) \delta z_j \, dt. \end{gathered} \tag{12}$$

Необходимые условия оптимальности оценки вектора $\bar{z}_0$ определяются из условия равенства нулю первой вариации функционала

$$\delta I^{*} = 0 \,. \tag{13}$$

Поэтому из (12) и (13) получаем следующие необходимые условия оптимальности траектории $\bar{z}(\bar{z}_0, t)$ в виде известных уравнений Эйлера

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial z_j}, \quad j = 1(1)k \,. \tag{14}$$

С целью определения граничных условий для сопряженных переменных введем следующие обозначения:

$$\bar{\lambda} = (\lambda_{z_1}, \lambda_{z_2}, \ldots, \lambda_{z_n})^T \,,$$

$$\bar{\mu} = (\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots, \lambda_{n+l})^T \,.$$

Это позволяет представить вектор $\bar{\lambda}_z$ в следующем виде

$$\bar{\lambda}_z = (\bar{\lambda}, \bar{\mu})^T \,.$$

Из анализа зависимостей (12) и (13) получаем следующие граничные условия для оптимальных значений сопряженных переменных:

$$\bar{\lambda}(T) = 0 \,, \qquad \bar{\mu}(t_0) = 0 \,, \qquad \bar{\mu}(T) = 0 \,. \tag{15}$$

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Эти условия вместе с уравнениями движения (1) и известными начальными условиями движения $\bar{x}_0$ образуют систему уравнений, решение которой относительно неизвестного значения $\bar{z}_0$ и определяет как оптимальную оценку вектора параметров модели $\bar{c}$, так и порождаемую ей траекторию $\bar{z}(\bar{z}_0,\ t)$.

Сформулируем данный результат в обозначениях исходной задачи 1 в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Оптимальная оценка вектора $\bar{c}$ и соответствующая ей оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\phi}(\bar{x},\ \bar{c},\ t), \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda} + \dfrac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} [\bar{y},\ \bar{\psi}(\bar{x}),\ t] \sum_{i=1}^{N} \delta(t - t_i), \\ \dot{\bar{\mu}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^T}{\partial \bar{c}} (\bar{x},\ \bar{c},\ t)\, \bar{\lambda}, \end{cases} \tag{16}$$

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \qquad \bar{\lambda}(T) = 0, \qquad \bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0.$$

Отметим особенность интегрирования сопряженной системы, которая определяется наличием в правых частях дифференциальных уравнений импульсных Δ-функций. Это вызывает в моменты t_i скачкообразное изменение соответствующих сопряженных переменных на значение производной от критериальной функции ρ по вектору состояния динамического процесса

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \Delta\bar{\lambda}(t_i); \tag{17}$$

где

$$\Delta\bar{\lambda}(t_i) = \frac{\partial \rho}{\partial \bar{x}} \{\bar{y}_i,\ \bar{\psi}[\bar{x}(t_i)]\}; \qquad i = \overline{1,\ N}. \tag{18}$$

С учетом скачков сопряженных переменных теорему 1 можно переформулировать в следующем эквивалентном виде.

Теорема 2. Оптимальная оценка вектора $\bar{x}_0$ и соответствующая ей оптимальная траектория доставляют решение краевой задаче для следующей системы дифференциальных уравнений

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$
\begin{cases}
\dot{\bar{x}} = \bar{\phi}(\bar{x},\ \bar{c},\ t), \\
\dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda}, \\
\dot{\bar{\mu}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{c}} (\bar{x},\ \bar{c},\ t) \bar{\lambda},
\end{cases} \tag{19}
$$

при граничных и промежуточных условиях

$$
\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0, \qquad \bar{\lambda}(T) = 0, \qquad \bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0,
$$

$$
\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T [\bar{x}(t_i),\ \bar{c}]}{\partial \bar{x}_i} W_i \left\{ \bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\ \bar{c}] \right\}, \quad i = \overline{1,\ N}.
$$

Согласно этим условиям для получения оптимальной оценки вектора $\bar{c}$ необходимо решить относительно значений $\bar{c}$ и $\bar{\lambda}_0$ следующую систему двух векторных краевых уравнений

$$
\bar{\lambda}(\bar{\lambda}_0,\ \bar{c},\ T) = 0;
$$

$$
\bar{\mu}(\bar{\lambda}_0,\ \bar{c},\ T) = 0,
$$

заданных неявно на процедурах интегрирования системы (19). Для этого можно применить известные численные методы поиска корней нелинейных уравнений, например, метод Ньютона, его модификации и другие.

При наличии непрерывных или дискретно-непрерывных измерений в приведенные выше вариационные условия оптимальности оценок вносятся соответствующие изменения.

Так, например, если помимо дискретных измерений (2) проводятся и непрерывные измерения согласно модели

$$
\bar{y}_1(t) = \bar{\psi}_1[\bar{x}(t)] + \bar{\delta}_1(t),
$$

где $\bar{\delta}_1(t)$ — вектор ошибок измерений, и если относительный вес этих измерений задается весовой матрицей $W(t)$, то краевая задача комплексного оценивания принимает вид:

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\phi}(\bar{x},\ \bar{c},\ t), \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{x}}\bar{\lambda} + \dfrac{\partial \bar{\psi}_1^T}{\partial \bar{x}} W(t)\left\{\bar{y}_1(t) - \bar{\psi}_1[\bar{x}(t)]\right\}, \\ \dot{\bar{\mu}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{c}}(\bar{x},\ \bar{c},\ t)\,\bar{\lambda}, \end{cases} \tag{20}$$

при граничных и промежуточных условиях

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0\,, \qquad \bar{\lambda}(T) = 0\,, \qquad \bar{\mu}(t_0) = \bar{\mu}(T) = 0\,,$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T[\bar{x}(t_i),\ \bar{c}]}{\partial \bar{x}_i} W_i\left\{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i),\ \bar{c}]\right\}, \quad i = \overline{1,\ N}\,.$$

4. Регуляризация оптимальных статистических оценок. Как известно, многие задачи статистического оценивания могут быть отнесены к некорректным обратным задачам. Мощным средством решения таких задач является метод регуляризации, созданный А. Н. Тихоновым и развитый во многих работах.

В случае некорректности (плохой обусловленности) исходной задачи 1 в соответствии с методом регуляризации [15] в качестве ее приближенного решения следует принять такое значение вектора $\bar{c}$, на котором сглаживающий функционал

$$I_\alpha = I(\bar{c}) + \alpha\, F(\bar{c}) \tag{21}$$

принимает экстремальное значение.

Выбор стабилизирующего функционала (стабилизатора) $F(\bar{c})$ определяется характером решаемой задачи и обычно основан на априорной информации об искомых параметрах $\bar{c}$. Параметр регуляризации $\alpha, (\alpha > 0)$ также должен быть определенным образом согласован и с априорными данными о $\bar{c}$, и с характеристиками ошибок измерений.

Очевидно, что необходимые условия оптимальности оценок вариационного типа применительно к функционалу I_α (21) могут быть получены по аналогии с предыдущим, либо на основе использования условий теоремы 2.

Действительно, применение функционала (21) эквивалентно добавлению в функционале (3) слагаемого

$$\rho_0(\bar{c}) = \alpha\, F(\bar{c})\,.$$

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Тогда по теореме 2 в системе условий (19) появляется дополнительное граничное условие

$$\bar{\mu}(t_0^+) = \bar{\mu}(t_0^-) - \frac{\partial \rho_0(\bar{c})}{\partial \bar{c}} .$$

Так как, согласно (19), $\bar{\mu}(t_0^-) = 0$, то при регуляризации оптимальных оценок сопряженная система должна интегрироваться при начальном условии

$$\bar{\mu}(t_0) = -\frac{\partial \rho_0(\bar{c})}{\partial \bar{c}} = -\alpha \frac{\partial F(\bar{c})}{\partial \bar{c}} .$$

Соответствующий результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 3. Регуляризированная оценка вектора $\bar{c}$ в задаче 1 и порождаемая ей регуляризированная траектория доставляют решение двухточечной краевой задаче для канонической системы

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{\phi}(\bar{x},\ \bar{c},\ t), \\ \dot{\bar{\lambda}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{x}} \bar{\lambda}, \\ \dot{\bar{\mu}} = -\dfrac{\partial \bar{\phi}^{\,T}}{\partial \bar{c}} (\bar{x},\ \bar{c},\ t)\, \bar{\lambda}, \end{cases}$$

при граничных и промежуточных условиях

$$\bar{x}(t_0) = \bar{x}_0 , \qquad \bar{\lambda}(T) = 0 , \qquad \bar{\mu}(t_0) = -\alpha \frac{\partial F(\bar{c})}{\partial \bar{c}} , \qquad \bar{\mu}(T) = 0 ,$$

$$\bar{\lambda}(t_i^+) = \bar{\lambda}(t_i^-) + \frac{\partial \bar{\psi}^T [\bar{x}(t_i), \bar{c}]}{\partial \bar{x}_i} W_i \{\bar{y}_i - \bar{\psi}[\bar{x}(t_i), \bar{c}]\}, \quad i = \overline{1,\ N} .$$

При решении задач навигационного оценивания обычно для стабилизирующего функционала принимается выражение вида

$$\alpha\, F(\bar{c}) = (\bar{c}_0 - \bar{c})^T C\, (\bar{c}_0 - \bar{c}) .$$

где $\bar{c}_0$ — заданный опорный вектор, близкий к истинному значению $\bar{c}$; C — некоторая симметрическая положительно определенная матрица.

В этом случае для определения начального значения сопряженного вектора $\bar{\mu}(t_0)$ в условиях теоремы 3 получаем расчетное соотношение

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\bar{\mu}(t_0) = C(\bar{c}_0 - \bar{c}) .$$

Утверждения теоремы 3 можно конкретизировать для типовых задач, связанных с определением регуляризованных оценок при различных структурах стабилизатора $F(\bar{c})$.

5. Заключение. Подводя итог изложенному выше, необходимо отметить, что предлагаемые методические средства могут быть использованы при разработке и модернизации алгоритмов оптимальной идентификации параметров моделей нелинейных динамических процессов и систем различного целевого назначения. Кроме того, они могут применяться для планирования идентифицирующих экспериментов

Литература

1. *Брандин Н. К., Разоренов Г. Н.* Определение траекторий КА. М.: Машиностроение, 1978. 216 с.
2. *Гроп Д.* Методы идентификации систем. М.: Мир, 1979. 302 с.
3. Космические траекторные измерения / Под ред. П. А. Агаджанова, В. Е. Дулевича, А. А. Коростелева. М.: Советское радио, 1969. 504 с.
4. *Ли Р.* Оптимальные оценки, определение характеристик и управления. М.: Наука, 1966. 176 с.
5. *Линник Ю. В.* Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: Физматгиз, 1958. 350 с.
6. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя. М.: Наука, 1991. 432 с.
7. *Миронов В. И, Миронов Ю. В.* Вариационное оценивание состояния нелинейной динамической системы по критерию наименьших квадратов // Тр. СПИИРАН. 2008. Вып. 7. С. 222–229.
8. *Мудров В. И., Кушко В. П.* Методы обработки измерений. М.: Советское радио, 1976. 190 с.
9. *Репин В. Г., Тартаковский Г. П.* Статистический синтез при априорной неопределенности и адаптация информационных систем. М.: Советское радио, 1977. 432 с.
10. *Сейдж Э., Мелс Дж.* Идентификация систем управления. М.: Наука, 1974. 248 с.
11. Современные методы идентификации систем. / Под ред. П. Эйкхоффа. М.: Мир, 1983. 400 с.
12. Статистические методы обработки результатов наблюдений / Под ред. Р. М. Юсупова. М.: Изд. МО СССР, 1984. 563 с.
13. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 288 с.
14. *Ципкин Я. З.* Информационная теория идентификации. М.: Наука, 1995. 336 с.
15. *Эльясберг П. Е.* Определение движения по результатам измерений. М.: Наука, 1976. 416 с.
16. *Юсупов Р. М.* Элементы теории идентификации технических объектов. М.: Изд. МО СССР, 1974. 250 с.
17. *Юсупов Р. М. Розенвассер Е. Н.* Чувствительность систем управления. М.: Наука, 1981. 440 с.

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Миронов Вячеслав Иванович — д-р техн. наук, проф.; ведущий науч. сотр., лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: фундаментальные и прикладные исследования проблем комплексного моделирования, теории оптимального наблюдения и управления динамическими процессами, вычислительной математики, баллистики космических полетов, статистического анализа характеристик сложных технических систем. Число научных публикаций — 250. Адрес: vi-mironov@yandex.ru;СПИИРАН, 14-я линия В. О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; раб. тел. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Mironov Vyacheslav Ivanovich — doctor of technical science, professor, laboratory of information tehnology in the system analysis and modeling, St Petersburg Institute of Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: fundamental and applied researches of problems of complex modelling, the theory of optimum supervision and management of dynamic processes, calculus mathematics, ballistics of space flights, the statistical analysis of characteristics of difficult technical systems. The number of publications —250. vi-mironov@yandex.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Миронов Юрий Вячеславович — д-р техн. наук, доцент; старший научный сотрудник, лаборатория информационных технологий в системном анализе и моделировании, Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН (СПИИРАН). Область научных интересов: фундаментальные и прикладные исследования проблем комплексного моделирования, теории оптимального наблюдения и управления динамическими процессами, вычислительной математики, баллистики космических полетов, статистического анализа характеристик сложных технических систем. Число научных публикаций — 80. Адрес: mironuv@yandex.ru; СПИИРАН, 14-я линия В. О., д. 39, Санкт-Петербург, 199178, РФ; раб. тел. +7(812)328-3337, факс +7(812)328-4450.

Mironov Yuri Vyacheslavovich — doctor of technical science, the senior scientific employee, laboratory of information tehnology in the system analysis and modeling, St Petersburg Institute of Informatics and Automation of the Russian Academy of Sciences (SPIIRAS). Research interests: fundamental and applied researches of problems of complex modelling, the theory of optimum supervision and management of dynamic processes, calculus mathematics, ballistics of space flights, the statistical analysis of characteristics of difficult technical systems. The number of publications — 80. Address: vi-mironov@yandex.ru; SPIIRAS, 39, 14th Line V. O., St. Petersburg, 199178, Russia; office phone +7(812)328-3337, fax +7(812)328-4450.

Поддержка исследований. В публикации представлены результаты исследований, поддержанные грантом РФФИ №09-08-00259, рук. В. И. Миронов.

Рекомендовано СПИИРАН, директор Юсупов Р. М., чл.-корр. РАН.
Статья поступила в редакцию 24.06.2009.

Труды СПИИРАН. 2009. Вып. 9. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2009. Issue 9. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru