ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ИНТЕРВАЛЬНЫХ СИСТЕМ

С. П. Соколова, Е. А. Кузьмина

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

<sokolova_sv@mail.ru>

УДК 681.5

Соколова С. П., Кузьмина Е. А. **Динамические свойства интервальных систем** // Труды СПИИРАН. Вып. 7. — СПб.: Наука, 2008.

Аннотация. *В статье получена внутренняя оценка допустимого множества решений интервальной системы линейных уравнений для решения задач параметрической идентификации и исследования свойства управляемости на основе распознающего функционала.* — Библ. 9 назв.

UDC 681.5

Sokolova S. P., Kuzmina E. A. **Dynamic Properties of Interval Systems** // SPIIRAS Proceedings. Issue 7. — SPb.: Nauka, 2008.

Abstract. *This article discusses an internal estimation of the tolerable solution set for interval system of linear equations to the parametric identification problem and to the controllability analysis. The tolerable solution set for interval system of linear equations is based on recognizing functional.* — Bibl. 9 items.

1. Введение

Как известно [6], интервальная неопределенность — это состояние неполного знания о величине, когда известна лишь ее принадлежность некоторому интервалу. Как правило, задачи исследования подобных объектов являются NP-полными, что приводит к необходимости использования дополнительных оценок множеств решений.

Статья структурирована следующим образом. В первой части представлены понятия, необходимые в ходе дальнейших рассуждений. Затем формализуются задачи параметрической идентификации и исследования управляемости. Решение данных задач сводится к получению внутренней оценки множеств решений интервальных систем линейных уравнений (ИСЛАУ) на основе SVD-анализа. Результаты по сингулярному разложению интервальной матрицы были получены в работах [1–5].

2. Постановка задачи параметрической идентификации

Далее будут использованы следующие обозначения [6]. Интервальные величины выделяются жирным шрифтом, все обозначения представляются в соответствии с международным соглашением [7]. Интервал $[a,b]$ определяется следующим выражением: $[a,b]:=\left\{x\in IR \middle| a\le x\le b\right\}$. Интервальный вектор представляет собой упорядоченный кортеж из интервалов. Если S — непустое ограниченное множество в R^n, то его интервальной оболочкой $\square S$ называется наименьший по включению интервальный вектор, содержащий S:

$\square S = \bigcap \left\{ \boldsymbol{x} \in IR^n \,|\, \boldsymbol{x} \supseteq S \right\}$. Геометрическими образами интервальных векторов являются прямоугольные параллелепипеды в пространстве R^n со сторонами, параллельными координатным осям, и называемые брусами [6]. Интервальная матрица — это прямоугольная таблица, составленная из интервалов IR.

Пусть объект управления представляется следующим соотношением:

$$\boldsymbol{y}(k) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{P}^T(k)\theta, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{p}_i(k) = [\underline{\boldsymbol{p}}_i(k), \overline{\boldsymbol{p}}_i(k)] \in IR$ — последовательность интервальных входных воздействий объекта и модели, $i = \overline{1,n}$; $\boldsymbol{y}_i(k) = [\underline{\boldsymbol{y}}_i(k), \overline{\boldsymbol{y}}_i(k)] \in IR$ — последовательность интервальных выходных величин объекта; θ_i — множество настраиваемых параметров.

Математическая модель объекта управления представляется соотношением

$$\hat{\boldsymbol{y}}(k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_i \boldsymbol{p}(k) = \boldsymbol{P}^T(k)\hat{\theta}, \tag{2}$$

где $\hat{\boldsymbol{y}}(k) = [\underline{\hat{\boldsymbol{y}}}(k), \overline{\hat{\boldsymbol{y}}}(k)] \in IR$ — последовательность интервальных выходных величин модели; $\hat{\theta}_i$ — оценки неизвестных параметров, $i = \overline{1,n}$; $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \ldots, \hat{\theta}_n)$ — вектор оценок неизвестных параметров; $\hat{\theta} \in C_\theta$; C_θ — множество допустимых значений параметров.

Решение задачи параметрической идентификации заключается в определении некоторого множества Ξ всевозможных значений векторов оценок параметров $\hat{\theta}$, доставляющих минимум функции невязки $e^2(t) = (y(k) - P^T(k)\hat{\theta})^2$, $\forall y(k) \in \boldsymbol{y}(k)$ и $\forall P(k) \in \boldsymbol{P}(k)$. При этом функция потерь представляется в виде: $J(\hat{\theta}) = \{e^T e \,|\, e \in \boldsymbol{e}\} = \{(y - X\hat{\theta})^T (y - X\hat{\theta}) \,|\, (\forall X \in \boldsymbol{X})(\forall y \in \boldsymbol{y})\}$. Искомое множество Ξ определится как множество всевозможных значений векторов оценок параметров $\hat{\theta}$, доставляющих минимум функции потерь вида: $\Xi = \left\{ \hat{\theta} \in R^n \;\left(\; (\exists \varepsilon \in \boldsymbol{\varepsilon}) \left(\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} \left(\varepsilon^T \varepsilon \right) = 0 \right) \right) \right\}$. Используя компоненты сингулярного разложения интервальной матрицы $\boldsymbol{P}$ [2], получим следующее выражение:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{USV}^T, \boldsymbol{y}) = \left\{ \begin{matrix} \hat{\theta} \in R^n \;|(\forall U \in \boldsymbol{U})(\forall S \in \boldsymbol{S})(\forall V \in \boldsymbol{V})(\exists y \in \boldsymbol{y}) \\ (USV^T \hat{\theta} = y) \end{matrix} \right\}.$$

Множество, стоящее в правой части этого соотношения, является допустимым множеством решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений $\boldsymbol{USV}^T\hat{\theta} = \boldsymbol{y}$, которое представим следующим образом:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{USV}^T, \boldsymbol{y}) = \left\{ \begin{matrix} \hat{\theta} \in R^n \;\; \big| (\forall U \in \boldsymbol{U})(\forall S \in \boldsymbol{S})(\forall V \in \boldsymbol{V})(\exists y \in \boldsymbol{y}) \\ (\sum_{i=1}^{r} s_{ii} U_i V_i^T \hat{\theta} = y) \end{matrix} \right\}. \tag{3}$$

Тогда в качестве искомого интервального вектора оценок параметров $\hat{\theta}$ можно принять внутреннюю интервальную оценку этого множества, поскольку справедлива следующая цепочка включений: $\Xi_{tol}(\boldsymbol{USV}^T, \boldsymbol{y}) \subseteq \hat{\theta}$. В четвертом разделе получена внутренняя оценка допустимого множества решений (3) с использованием SVD-анализа.

3. Условие управляемости для интервальных систем

Решение задач синтеза управляющих воздействий для интервальных объектов тесно связано с понятием полной управляемости. Ниже приведен критерий интервальной управляемости на основе использования грамиана управляемости и SVD-анализа. Пусть математическая модель управляемого интервального объекта в пространстве состояний имеет вид:

$$\dot{x}(t) = \boldsymbol{A}x(t) + \boldsymbol{B}u(t), \tag{4}$$

где $\boldsymbol{A} \in IR^{n\times n}$ — интервальная матрица размерности $(n \times n)$, $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_{ij})_{n\times n}$; $\boldsymbol{B} \in IR^{n\times m}$ — интервальная матрица управления $(n \times m)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b}_{ij})_{n\times m}$. Запись математической модели в виде (4) следует понимать как семейство точечных моделей вида:

$$S = \left\{ x(t) \in R^{n\times n} \left((\forall A \in \boldsymbol{A})(\forall B \in \boldsymbol{B}) \left(\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \right) \right) \right\},$$

образованных варьированием параметров A, B в пределах соответствующих интервалов $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$.

Определение [8]. Интервальный объект управления (4) является полностью управляемым, если для $\forall A \in \boldsymbol{A}$ и $\forall B \in \boldsymbol{B}$ существует управление $u(t)$, переводящее (4) из любого заданного начального состояния $x(t_0)$ в любое заданное состояние $x(t_1)$ за конечное время $t_1 - t_0 < \infty$. Пара интервальных матриц

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$ полностью управляема тогда и только тогда, когда полностью управляема любая пара матриц (A,B) при $\forall A\in\boldsymbol{A}$ и $\forall B\in\boldsymbol{B}$.

Как известно, необходимым и достаточным условием полной управляемости объекта $\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)$ является равенство ранга грамиана управляемости

$$W(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^T\left(e^{A(t_1-\tau)}\right)^T d\tau=\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}\,d\tau \tag{5}$$

размерности вектора состояния $rank\,W\left(t_0,t_1\right)=n$. Грамиан (5) удовлетворяет следующему дифференциальному матричному уравнению:

$$\begin{gathered}\dot{W}(t_0,t)=AW(t_0,t)+W(t_0,t)A^T+BB^T,\\ W(t_0,t_0)=0.\end{gathered} \tag{6}$$

В случае, когда существует решение алгебраического линейного матричного уравнения

$$AV+VA^T+BB^T=0, \tag{7}$$

решение дифференциального уравнения (6) можно представить в явном виде:

$$W(t_0,t)=V_y-e^{A(t-t_0)}V_y e^{A^T(t-t_0)},$$

где V_y является решением линейного алгебраического матричного уравнения (6). В случае если матрица A асимптотически устойчива, то существует

$$\lim_{t\to\infty} W(t_0,t)=W_y, \tag{8}$$

который равен $\lim\limits_{t\to\infty} W(t_0,t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(V_y-e^{A(t-t_0)}V_y e^{A^T(t-t_0)}\right)=V_y$.

Таким образом, для случая асимптотически устойчивой матрицы $\boldsymbol{A}$ свойство управляемости объекта (4) на полубесконечном интервале времени $\left[t_0;\infty\right)$ имеет место тогда и только тогда, когда решение V_y линейного алгебраического матричного уравнения (7) будет невырожденным, т. е. $rank\,V_y=n$.

Пусть интервальная матрица $\boldsymbol{A}$ является асимптотически устойчивой. Для рассматриваемого случая допустимое множество имеет вид:

$$\Xi_{tol}\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right)=\left\{V_y\in R^{n\times n}\,\middle|\,(\forall A\in\boldsymbol{A})(\exists B\in\boldsymbol{B})\left(AV_y+V_yA^T+BB^T=0\right)\right\}, \tag{9}$$

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

для следующего интервального матричного уравнения:

$$\boldsymbol{A}V_y + V_y\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^T = 0. \qquad (10)$$

Полная управляемость интервального объекта (4) на промежутке времени $[t_0;\infty)$ будет иметь место, если $rank\,\boldsymbol{V}_y = n$, $\boldsymbol{V}_y \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$. Представим интервальную матрицу $\boldsymbol{V}_y$ следующим образом: $\boldsymbol{V}_y = col(\boldsymbol{V}_{y1}^T, \boldsymbol{V}_{y2}^T, \ldots, \boldsymbol{V}_{yn}^T)$, где $\boldsymbol{V}_{yi}$, $i = \overline{1,n}$ — i-я строка матрицы $\boldsymbol{V}_y$, представляющая собой i-ю блочную компоненту вектора $\boldsymbol{V}_y = col(\boldsymbol{V}_{y1}^T, \boldsymbol{V}_{y2}^T, \ldots, \boldsymbol{V}_{yn}^T)$, являющуюся внутренней интервальной оценкой допустимого множества решений:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}) = \{\ v_y \in R^{n^2} \,|(\forall W \in \boldsymbol{W})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Wv_y = b)\} \qquad (11)$$

следующей интервальной системы линейных алгебраических уравнений: $\boldsymbol{W}v_y = \boldsymbol{b}$, где $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{A}^T \otimes E + E \otimes \boldsymbol{A}^T$, $\boldsymbol{W} \in IR^{n^2 \times n^2}$. Как видно из соотношения (11), задача исследования свойства управляемости сведена к получению внутренней оценки допустимого множества (11).

4. Оценивание множества решений ИСЛАУ на основе распознающего функционала

Как было показано выше, решение задачи параметрической идентификации и исследование управляемости свелись к получению внутренней оценки множества решений интервальной системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$\boldsymbol{W}x = \boldsymbol{b}. \qquad (12)$$

Для решения поставленных задач необходимо определить внутреннюю оценку допустимого множества решений, определяемого, согласно [6], как множество $\Xi_{tol}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{b})$, образованное всеми такими векторами $x \in R^n$, что произведение $\boldsymbol{W}x$ попадает в $\boldsymbol{b}$ для любого $W \in \boldsymbol{W}$:

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}) := \Xi_{tol} := \left\{x \in R^n \,|(\forall W \in \boldsymbol{W})(\exists b \in \boldsymbol{b})(Wx = b)\right\} \text{ или} \qquad (13)$$

$$\Xi_{tol}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}) := \left\{x \in R^n \,|(\forall W \in \boldsymbol{W})(Wx = b)\right\}. \qquad (14)$$

Для этого воспользуемся распознающим функционалом [6]:

$$Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}) = \min_{1\le i\le m}\left\{rad\ \boldsymbol{b}_i - \left| mid\ \boldsymbol{b}_i - \sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{w}_{ij}x_j \right|\right\},\ Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}):\ R^n \to R. \qquad (15)$$

Тогда принадлежность $x \in \Xi_{tol}(\boldsymbol{W},\boldsymbol{B})$ равносильна $Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{b}) \ge 0$, т. е. допустимое множество решений интервальной линейной системы $\boldsymbol{W}x = \boldsymbol{b}$ есть множество уровня $\left\{x \in R^n; Tol(x) \ge 0\right\}$.

В выражении (15) воспользуемся сингулярным разложением интервальной матрицы, которую представим через компоненты этого разложения [1–5] и получим следующее выражение:

$$Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{B}) = \min\left\{\begin{array}{l}\min\limits_{1\le i\le r}\left\{rad\,\boldsymbol{b}_i - \left| mid\,\boldsymbol{b}_i - \sum\limits_{j=1}^{n}(\sum\limits_{k=1}^{r}\boldsymbol{u}_{ik}\boldsymbol{s}_{kk}\boldsymbol{v}_{jk})x_j \right|\right\}, \\ \min\limits_{r\le l\le m}\left\{rad\,\boldsymbol{y}_l - \left|mid\,\boldsymbol{y}_l\right|\right\}\end{array}\right\}. \qquad (16)$$

Распознающий функционал (16) обладает следующими свойствами:

1. Функционал $Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{B})$ вогнутый.
2. Функционал $Tol(x;\boldsymbol{W},\boldsymbol{B})$ достигает конечного максимума на всем R^n.

Для нахождения внутренней оценки допустимого множества ИСЛАУ был использован следующий вычислительный алгоритм:

Шаг 1. Исследование разрешимости задачи (необходимо доказать, что искомое множество непустое).

Шаг 2. Нахождение точки внутри допустимого множества решения.

Шаг 3. Построение бруса решений (при помощи одного из существующих алгоритмов [6]).

5. Заключение

В статье решение задач параметрической идентификации и исследования свойства управляемости интервального объекта сведено к получению внутренней интервальной оценки допустимого множества решений ИСЛАУ на основе распознающего функционала и SVD-анализа.

Литература

1. *Sokolova S. P., Kuzmina E. A., Sokolova L. A.* Analysis and management of a credit risk // Proceedings of the XVIth International Conference On Systems Science. Wroclaw, 2007. P. 375–382.
2. *Соколова С. П., Кузьмина Е. А., Тохтабаев А. Г.* Вычислительная процедура для технического анализа фондового рынка. I // Труды СПИИРАН. СПб.: Наука, 2007. Вып. 4, т. 1. С. 171–183.
3. *Кузьмина Е. А.* Вычислительная процедура оценивания кредитного риска при интервальной неопределенности // Материалы X международной конференции «Региональная информатика-2006». СПб.: СПОИСУ, 2006. С. 150–151.

4. *Кузьмина Е. А.* Градиентный алгоритм сингулярного разложения многомерной интервальной матрицы // Сб. докл. научн. сессии ГУАП. СПб.: СПбГУАП, 2007. С. 148–151.
5. *Соколова С. П., Кузьмина Е. А.* Интеллектуальный анализ данных. Методические указания к выполнению лабораторных работ №1–6. СПб.: СПбГУАП, 2008. 70 с.
6. *Шарый С. П.* Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: ИВТ СО РАН, 2007. 733 с.
7. *Kearfott R. Baker, Nakao Mitsuhiro T., Neumaier Arnold, Rump Siegfried M.* Standardized notation in interval analysis. 2002.
8. *Ивлев Р.* Построение и исследование свойств многомерных систем управления интервально-заданными объектами: Автореф. дис. … канд. техн. наук. Алматы, 1999.
9. *Воскобойников Ю. Е.* Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации. Монография. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2006. 160 с.