ИССЛЕДОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

Н. А. Гришина, В. В. Колбин

Санкт-Петербургский государственный университет

СПбГУ, Университетская наб., д.7–9, Санкт-Петербург, 199034

<http://www.spbu.ru>

УДК 519.855

Гришина Н. А., Колбин В. В. **Исследование инвестиционных проектов с помощью метода лексикографической оптимизации** // Труды СПИИРАН. Вып. 7. — СПб.: Наука, 2008.

Аннотация. *Проблема принятия эффективных управленческих решений в условиях рисков занимает одно из центральных мест в современной теории и практике финансов. В данной работе рассмотрен сценарный подход к оценке эффективности инвестиционного проекта. Предложен лексикографический метод оценки эффективности развития инвестиционного проекта. Данный метод позволяет сравнивать сценарии развития инвестиционного проекта с учетом важности принимаемого решения.* — Библ. 2 назв.

UDC 519.855

Grishina N. A., Kolbin V. V. **Research of investment projects by means of a method of lexicographic optimization** // SPIIRAS Proceedings. Issue 7. — SPb.: Nauka, 2008.

Abstract. *The problem of appraisal of effective decisions in risks conditions occupies one of the central places in the modern finance theory. There is a scenario approach to efficiency of investment projects appraisal described in this article. The lexicographic method of appraisal of efficiency of investment project development allows to compare scenarios of development of the investment project taking into account importance of the making decision.* — Bibl. 2 item.

1. Введение

Целью работы является ознакомление со сценарным подходом к оценке эффективности инвестиционного проекта. Под эффективностью инвестиционного проекта понимается показатель, отражающий соответствие проекта целям и интересам его участников. Смысл оценки эффективности любого инвестиционного проекта состоит в получении ответа на простой вопрос: «Оправдают ли будущие выгоды сегодняшние затраты?».

Лексикографическая оптимизация позволяет найти предпочтения на множестве всех сценариев и этапов реализации инвестиционного проекта с учетом их важности, принимая во внимание объемы ресурсов и технологическую зависимость.

2. Постановка задачи

Рассмотрим дерево сценариев (вариантов) развития инвестиционного проекта.

В вертикальном сечении получаем различные сценарии развития инвестиционного проекта, а в горизонтальном — сценарии, завершившиеся к одному моменту времени.

На каждом уровне мы имеем разные значения по важности: каждый следующий уровень менее важен, чем предыдущий. Чем ниже уровень, тем большую важность имеет принимаемое нами решение. Принятие неправильного решения на начальных этапах развития инвестиционного проекта может привести к неблагоприятному развитию событий в будущем. Таким образом, чем больше объемы ресурсов мы вкладываем, тем большую ответственность в будущем мы несем за принятое нами решение.

Оцениваем каждую вершину с точки зрения различных затрат — материальных, трудовых, финансовых, временных, технологических и т.д. и результатов, ставим в соответствие каждой вершине некоторую характеризующую ее функцию. На каждом этапе сравниваем значение этих функций в вершинах, получаем преимущественно значение и переходим на следующий этап.

3. Лексикографическое упорядочение

Будем говорить, что в пространстве R^{l+k} введено лексикографическое упорядочение $R^{l+k}, \geq^L$, и фиксировать это записью: $y \geq^L y'$, если для любой пары элементов y и y' из R^{l+k} для всех $1 \leq \mu \leq l$ и $1 \leq \nu \leq k$, таких что $y_{\mu\nu} > y'_{\mu\nu}$ или $y_{\mu\nu} < y'_{\mu\nu}$, существует $\tau \leq \mu$, такое что $y_{\tau\nu} \geq y'_{\tau\nu}$.

Рассмотрим детерминированную задачу линейного программирования:

$$L = c * x \to \max \tag{1}$$

$$S = \{x : Ax \leq b, \quad x \geq 0\}. \tag{2}$$

Будем понимать под ситуацией набор из параметров условий и составляющих решения задачи. Свяжем с каждой ситуацией $w = (A,b,c,x)$ элемент u из $(R^{l+k+1}, \geq^L)$

$u(x) = \{u_{\mu\nu}, u_{l+1,\nu}\}$, где μ — номер уровня дерева $(1 \leq \mu \leq l)$, ν — номер сценария дерева $(1 \leq \nu \leq k)$, $u_{\mu\nu}(x) = \varphi_{\mu\nu}(x)$ — характеристическая функция множества $S_{\mu\nu}$, $\varphi_{\mu\nu}(x) = \begin{cases} 1, & x \in S_{\mu\nu}; \\ 0, & x \notin S_{\mu\nu} \end{cases}$, а $u_{l+1,\nu}(x) = cx = L$.

Будем говорить, что ситуация w не менее предпочтительна, чем w', если $u(w) \geq^L u(w')$. Если набор (A,b,c) детерминирован, задача линейного программирования (1), (2) эквивалентна задаче лексикографической оптимизации следующего вида:

$$L^* = L.\max_{R^{l+k+1}} \{u(x) \mid \quad x \in Q\}, \tag{3}$$

где $L.\max\limits_{R^{l+k+1}}$ — символ лексикографической максимизации в $(R^{l+k+1}, \geq^L)$, а $Q = \{x : x \geq 0\}$.

Будем говорить, что линейная стохастическая модель относится к классу L_T, если существуют целые числа $k, l \geq 1$ и измеримое отображение $u(w)$ множества ситуаций

$w = (A, b, c, x)$ в лексикографически упорядоченное множество, принадлежащее $(R^{l+k}, \geq^L)$. Отображение u вводит упорядочение на множестве ситуаций W.

4. Лексикографическое упорядочение стохастической модели

Рассмотрим матричный показатель качества ситуации $u(w)$ как случайную функцию $u(x)$. Пусть каждый элемент $T_{\mu\nu}(x)$ матрицы $T(x) \in (R^{l+k}, \geq^L)$ представляет собой среднюю в некотором смысле (некоторую статистическую характеристику) случайной величины $u_{\mu\nu}(x)$, обусловленную случайной реализацией ω, т.е. $x = x(\omega)$, где $\omega \in \Omega$. Пусть число реализаций ω конечно.

Будем относить к классу L_T стохастические экстремальные задачи, для которых имеет смысл упорядочение по принципу: x не менее предпочтителен, чем x', если $T(x) \geq^L T(x')$.

Задача стохастического программирования класса L_T может быть сформулирована как следующая задача лексикографической оптимизации:

$$L^* = L.\sup\{T(x) \mid x \in Q\}. \tag{4}$$

Множество решений Q^* этой задачи — это множество $x^* \in Q^*$, для которых $T(x^*) \geq^L T(x)$ для любого $x \in Q$. Введем следующее обозначение: $Q^* = \sup^{-1}\{T(x) \mid x \in Q\}$.

5. Основная теорема лексикографической оптимизации

Теорема 1: Множество Q^* решений задачи класса L_T, если оно не пусто, определяется рекуррентной процедурой:

$Q_{0\nu} = Q$

$Q_{\mu\nu} = \sup^{-1}\{T_{\mu\nu}(x) \mid x \in Q_{\mu-1,\nu}\} \quad \mu = 1,\dots,l$

$Q^* = Q_{l\nu}$.

Доказательство: При $l = 1$ утверждение теоремы тривиально. По определению $Q^* = \sup^{-1}\{T_{l\nu}(x) \mid x \in Q_{0\nu}\} \equiv Q_{l\nu}$. Предположим, что утверждение справедливо для размерности $(l-1) * k$ и пусть решению $x \in Q$ приводится в соответствие матричный показатель качества $T(x) \in (R^{l+k}, \geq^L)$. По условию $Q^* = \sup^{-1}\{T(x) \mid x \in Q\}$ непусто.

Запишем матрицу T(x) в виде $T(x) = \{\widetilde{T}(x), T_{l\nu}(x)\}$, где $\widetilde{T}(x)$ — матрица размерности $(l-1) * k$, составленная из первых $(l-1)$ строк $T(x)$. Легко видеть, что множество $\widetilde{Q} = \sup^{-1}\{\widetilde{T}(x) \mid x \in Q_{l-1,\nu}\}$ непусто. В противном случае каждому $x \in Q$ можно было бы привести в соответствие $y \in Q$, такой что

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$\widetilde{T}(y) \geq^L \widetilde{T}(x)$, и, следовательно, $\{\widetilde{T}(y), T_{l\nu'}(y)\} \geq^L \{\widetilde{T}(x), T_{l\nu}(x)\}$, т.е. $T(y) \geq^L T(x)$ и множество Q^* было бы пусто. Итак, $\widetilde{Q} = Q_{l-1,\nu}$ непусто.

По предположению:

$Q_{0\nu} = Q, \quad Q_{\mu\nu} = \sup^{-1}\{T_{\mu\nu}(x) \mid x \in Q_{\mu-1,\nu}\} \quad \mu = 1,\ldots,l$.

Обозначим $Q_{l\nu} = \sup^{-1}\{T_{l\nu}(x) \mid x \in Q_{l-1,\nu}\}$. Докажем, что $Q^* = Q_{l\nu}$. Для этого необходимо проверить два включения: $Q^* \subset Q_{l\nu}$ и $Q_{l\nu} \subset Q^*$.

1^0. $Q^* \subset Q_{l\nu}$.

Действительно, пусть, наоборот, существует $y \in Q^*, \quad y \notin Q_{l\nu'}$.

При этом возможны два случая:

a) $y \notin Q_{l-1,\nu'}$. Поскольку $Q_{l-1,\nu'}$ непусто, существует $x \notin Q_{l-1,\nu}$, такой что $\widetilde{T}(x) \geq^L \widetilde{T}(y)$ и $\{\widetilde{T}(x), T_{l\nu}(x)\} \geq^L \{\widetilde{T}(y), T_{l\nu'}(y)\}$, т.е. $T(x) \geq^L T(y)$.

Это значит, что $y \notin Q^*$. Мы пришли к противоречию.

b) $y \in Q_{l-1,\nu'}$ и существует $x \in Q_{l-1,\nu}$, такой что $T_{l\nu}(x) \geq^L T_{l\nu'}(y)$ (т.е. $y \notin Q_{l\nu'}$.) Поскольку $\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(y)$, то при этом $\{\widetilde{T}(x), \widetilde{T}_{l\nu}(x)\} \geq^L \{\widetilde{T}(y), \widetilde{T}_{l\nu'}(y)\}$ и $y \notin Q^*$, что противоречит допущению.

2^0. $Q_{l\nu} \subset Q^*$.

Пусть, наоборот, существует $y \in Q_{l\nu'}, \quad y \notin Q^*$. Поскольку по условию Q^* непусто, то существует $x \in Q^*$, такой что $\widetilde{T}(x) \geq^L \widetilde{T}(y)$, или, что то же самое, $\{\widetilde{T}(x), \widetilde{T}_{l\nu}(x)\} \geq^L \{\widetilde{T}(y), \widetilde{T}_{l\nu'}(y)\}$. При этом могут встретиться две возможности:

a) $\widetilde{T}(x) \geq^L \widetilde{T}(y)$ и $y \notin Q_{l-1,\nu'}$.

Тогда тем более $y \notin Q_{l\nu'}$, что противоречит допущению.

b) $\widetilde{T}(x) = \widetilde{T}(y)$ и $T_{l\nu}(x) \geq^L T_{l\nu'}(y)$.

Но $y \notin Q_{l,\nu'}$ и $T_{l\nu}(x) \geq^L T_{l\nu'}(y)$, значит, мы снова пришли к противоречию.

Теорема полностью доказана.

Данная теорема позволяет определить лексикографическую оптимизацию как последовательное решение системы экстремальных задач со скалярными целевыми функциями.

6. Новый подход к лексикографической оптимизации

Рассмотрим следующую задачу лексикографической оптимизации:

$$\phi(x) \to L.\min, \quad x \in Q, \tag{5}$$

где $\phi(x) = \{\phi_{\mu\nu}(x)\}$ — матричная функция.

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Введем в рассмотрение следующую функцию:

$$U(x,y)=\sum_{\mu=1}^{l}\alpha_\mu sign(\phi_{\mu\nu}(x)-\phi_{\mu\nu'}(y)),\ l\le\nu,\quad \nu'\le k,\quad \nu'\ge\nu .$$

Здесь предполагается, что $\{\alpha_\mu\}$ — произвольные наборы чисел, для которых:

$$\alpha_l\ge 0,\qquad \alpha_\mu>\sum_{i=\mu+1}^{l}\alpha_i .$$

Заметим, что $U(x,y)=-U(y,x)$.

Замечание

$$sign\alpha=\begin{cases}-1, & \alpha<0;\\ 1 & \alpha\ge 0.\end{cases}$$

Справедливо следующее утверждение:

Теорема 2: Для того чтобы точка $x^*\in Q$ была решением задачи (5), т.е. в вершине x^* дерева сценариев достигался лексикографический минимум, необходимо и достаточно, чтобы $U(x,x^*)\ge 0\quad \forall x\in Q$.

Доказательство:

Необходимость.

Пусть x^* — решение задачи (5). Это значит, что для произвольного $x\in Q$ имеет место неравенство: $\phi_{11}(x)\ge\phi_{12}(x^*)$. Если неравенство строгое, то из определения $U(x,y)$ следует, что $U(x,x^*)\ge 0$. Если же $\phi_{11}(x)=\phi_{12}(x^*)$, то, поскольку x^* — решение задачи лексикографической оптимизации, имеет место неравенство: $\phi_{21}(x)\ge\phi_{22}(x^*)$. Если неравенство строгое, то по определению $U(x,x^*)$ имеем $U(x,x^*)\ge 0$. Если же $\phi_{21}(x)=\phi_{22}(x^*)$, то $\phi_{31}(x)\ge\phi_{32}(x^*)$. Продолжая аналогичные рассуждения, приходим к выводу, что либо $\phi_{\mu\nu}(x)=\phi_{\mu\nu'}(x^*),\quad 1\le\mu\le l$, либо найдется такой номер μ, что $\phi_{i\nu}(x)=\phi_{i\nu'}(x^*)$ при $i\le\mu$ и $\phi_{\mu\nu}(x)\ge\phi_{\mu\nu'}(x^*)$. В том и другом случае $U(x,x^*)\ge 0$. В силу того что x — произвольная точка множества Q, необходимость утверждения теоремы доказана.

Достаточность.

Пусть $U(x,x^*)\ge 0\quad \forall x\in Q$. Покажем, что в этом случае в вершине x^* дерева сценариев достигается лексикографический минимум матричной функции $\phi(x)$ на множестве Q.

В силу допущения из определения функции $U(x,y)$ следует, что $\phi_{11}(x)\ge\phi_{12}(x^*)\quad \forall x\in Q$.

Пусть множество $W_1=\{x\mid x\in Q, x\ne x^*,\phi_{11}(x)=\phi_{12}(x^*)\}$.

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Если W_1 пусто, то x^* — решение задачи (5). Иначе рассмотрим множество $W_2 = \{x \mid x \in W_1, x \neq x^*, \phi_{51}(x) = \phi_{22}(x^*)\}$. Если W_2 пусто, то x^* определяет лексикографический минимум $\phi(x)$. В противном случае введем аналогичным образом множество W_3 и т.д. Пусть s — максимальный номер непустого множества W_μ, $1 \le \mu \le l$. Если $s \le l$, то x^* — решение задачи (5). Если же $s = l$, то $W_1 \cup x^*$ — множество всех решений задачи лексикографической оптимизации (5). Теорема полностью доказана.

Следствие

Пусть x^* — решение задачи (5). Тогда $U(x, x^*) = 0 \Leftrightarrow x \in U$ также является лексикографическим минимумом (5).

Литература

1. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления неполной информации. — М.: Советское радио, 1974. — 400 с.
2. *Колбин В.В., Суворова М.А*. Элементы теории оптимизации. — СПб: НИИХ СПбГУ, 2002. — 73 с.