МОДЕЛИ И МЕТОДЫ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ АЛЬТЕРНАТИВ

А.В.Тимофеев [1], Д.П.Димитриченко [2]

[1]Учреждение Российской академии наук Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
[2]НИИ прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН
[1]СПИИРАН, 14-я линия ВО, д.39, Санкт-Петербург, 199178;
[2] НИИ ПМА, ул. Шортанова, 89-А, Нальчик, 360000.
[1]<tav@iias.spb.su>,[2]<niipma333@mail.ru>

УДК 519.716.325
Тимофеев А.В., Димитриченко Д.П. **Модели и методы многокритериальной оптимизации альтернатив** // Труды СПИИРАН. Вып. 7. – СПб.: Наука, 2008.
Аннотация. Рассматриваются модель и метод построения множества недоминируемых (наилучших в рассматриваемом множестве) альтернатив, основанные на построении логической функции по базе данных альтернатив, или объектов, принадлежащих к произвольной предметной области. Проводится сравнение моделей и методов с нечеткими моделями и методами оптимизации с целью выявления наиболее эффективной многокритериальной оценки исследуемых альтернатив или объектов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по многокритериальному оцениванию и оптимизации топологических структур компьютерных сетей. – Библ. 10 назв.

UDC 519.716.325
Timofeev A.V., Dimitrichenko D.P. **Models and methods for multi-criteria optimization of alternatives** // SPIIRAS Proceedings. Issue 7. – SPb.: Nauka, 2008.
Abstract. The paper deals with a model and method for building of set of undominizing (the best in described set) alternatives based on building of logic function by of alternatives or object belonging to arbitrary subject area. Comparison of suggested models and methods with fuzzy models and methods of optimization to find the most effective multi-criteria evaluation of investigated objects is conducted. Results for calculation experiments on multi-criteria evaluation and optimization of topologic structures are shown. – Bibl. 10 items.

1. Введение

В настоящей работе проводится сопоставление метода построения множества недоминируемых (наилучших на рассматриваемом множестве) альтернатив и метода построения логической функции по базе данных, содержащей информацию об альтернативах или объектах, вообще говоря, произвольной природы [1–10]. Сравнение указанных методов производится с целью выявления наиболее эффективной многокритериальной оценки исследуемых объектов (альтернатив).

В рамках данной статьи рассматривается множество объектов, принадлежащих к произвольной предметной области, а термины "альтернатива" и "объект" используются как синонимы, обозначающие одно и то же понятие в терминологии соответствующих теорий [1–5].

Исследуемые альтернативы, или объекты, характеризуются конечным числом признаков (критериев), причём их происхождение может быть произвольным. Определим оценочную функцию альтернатив в виде отображения

$$f_i : X \to \mathbf{R}, i = 1, 2,..m . \tag{1}$$

Функция (1) формализует оценку объектов (альтернатив) по некоторому признаку (критерию). Назовем эту функцию функцией полезности. Для конечного числа признаков n получим систему из m функций.

2. Модель поиска наилучших альтернатив по конечному набору признаков при нечеткой исходной информации

Введем необходимые определения и обозначения. Пусть дано некоторое множество X, понимаемое в обычном теоретико-множественном смысле. Тогда нечетким множеством C в X называется совокупность пар вида

$$(x, \mu_C(x)),\ x \in X,\ \mu_C : X \to [0,1]. \tag{2}$$

Функцию $\mu_C(x)$ будем называть функцией принадлежности к нечеткому множеству C. Значение $\mu_C(x)$ этой функции характеризует степень принадлежности конкретного элемента x к нечеткому множеству C.

Над нечеткими множествами определены операции объединения, пересечения, разности, декартова произведения и др. [1], которые образованы при помощи операций *max, min* и вычитания описанным ниже образом.

Объединением двух нечетких множеств A и B с функциями принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$ соответственно называется нечеткое множество C с функцией принадлежности $\mu_C(x)$ следующего вида:

$$\mu_C(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ где } x \in X. \tag{3}$$

Пересечением двух нечетких множеств A и B называется нечеткое множество C с функцией принадлежности вида:

$$\mu_C(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \text{ где } x \in X. \tag{4}$$

Вычитанием из нечеткого множества A нечеткого множества B называется нечеткое множество C с функцией принадлежности следующего вида:

$$\mu_C(x) = \begin{cases} \mu_A(x) - \mu_B(x), \text{если } \mu_A(x) > \mu_B(x) \\ 0, \text{в противном случае} \end{cases},\ x \in X. \tag{5}$$

Нечетким отношением R на множестве X называется нечеткое подмножество декартова произведения $X \times X$, характеризующееся функцией принадлежности вида

$$\mu_R(x) : X \times X \to [0,1]. \tag{6}$$

Значение $\mu_R(x, y)$ этой функции принимается как некоторая мера или степень выполнения отношения xRy.

Для осуществления рационального выбора на множестве альтернатив X нечеткое рефлексивное отношение предпочтения R задается как результат попарного сравнения этих альтернатив. Например, отношение "не хуже" xRy означает, что альтернатива x не хуже альтернативы y со степенью справедливости $\mu_R(x, y)$.

Нечеткое отношение предпочтения (НОП) R на множестве альтернатив X в свою очередь определяет следующие три нечеткие отношения: отношение строгого предпочтения R_c, отношение эквивалентности R_e и отношение безразличия R_u.

Нечетким отношением строгого предпочтения на множестве альтернатив X называется отношение

$$R_c = R \setminus R^{-1}. \tag{7}$$

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Если $\mu_{R_C}(x,y)>0$, то будем говорить, что альтернатива x доминирует (улучшает) альтернативу y, а альтернатива y улучшается альтернативой x с положительной степенью. Иными словами, альтернатива x строго лучше альтернативы y. Иначе говоря, альтернатива y не улучшается альтернативой x, где $x, y \in X$.

Нечетким множеством недоминируемых (НД) альтернатив на множестве X с заданным на нем НОП R называется множество $X_{нд}$ с функцией принадлежности вида

$$\mu_{R_{нд}}(x)=1-\max_{y\in X}\mu_{R_c}(y,x)\ ,\ x\in X. \quad (8)$$

Значение $\mu_{R_{нд}}(x)$ представляет собой степень, с которой альтернатива x не доминируется ни одной из альтернатив y множества X.

Множеством четко недоминируемых альтернатив $X_{чнд}$ называется подмножество $X_{нд}$, для элементов которого выполнено следующее равенство:

$$\mu_{R_{нд}}(y)=1\ ,\ y\in X_{нд}. \quad (9)$$

Нечетким отношением R_e эквивалентности на множестве X называется нечеткое отношение, определяемое функцией принадлежности вида

$$\mu_{R_1}(x,y)=\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)),\ x,y\in X. \quad (10)$$

Нечетким отношением безразличия на множестве X называется отношение R_u, определяемое функцией принадлежности вида

$$\mu_{R_u}(x,y)=\max(1-\max(\mu_R(x,y),\mu_R(y,x)),\min(\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))), \quad (11)$$
$$x,y\in X.$$

Иными словами, отношение R_u – это объединение несравнимых между собой и равных между собой пар альтернатив.

Нечеткое отношение R на множестве X называется линейным, если этим отношением или обратным к нему отношением связаны любые две альтернативы данного множества.

Нечеткое отношение R на множестве X не является линейным тогда и только тогда, когда найдутся такие альтернативы $x, y \in X$, что выполнены сразу оба равенства

$$\mu_R(x,y)=0,\ \mu_R(y,x)=0. \quad (12)$$

Отношение R на множестве X называется сильнолинейным, если для любых пар альтернатив $x, y \in X$ выполнено соотношение вида

$$\max(\mu_R(x,y),\mu_R(y,x))=1. \quad (13)$$

В рамках аппарата нечетких множеств [1] задача поиска оптимальной альтернативы, или объекта, по конечному числу признаков ставится следующим образом.

Пусть задано множество исследуемых объектов X и определены функции (1) как оценки объектов (альтернатив) по каждому из критериев.

Требуется найти множество объектов (альтернатив), оптимальных по максимально возможному количеству из n критериев (признаков).

При этом если специально не вводятся коэффициенты относительной важности критериев, то считается, что все критерии равнозначны и важность любого из n критериев равна n^{-1}.

Результатом решения задачи поиска является получение нечеткого множества объектов (множество недоминируемых альтернатив) и их интегральных оценок.

Каждая из этих оценок показывает, насколько объект x не улучшаем (оптимален) по отношению к другим объектам. Иными словами, всякое улучшение какого-либо объекта по некоторому критерию приводит к его ухудшению хотя бы по одному из оставшихся $n-1$ критериев.

3. Моделирование и многокритериальная оптимизация альтернатив с помощью переменно-значных логик

Другим эффективным методом моделирования свойств объектов в слабо формализуемых областях знаний является метод описания объектов при помощи переменно-значных логических предикатов [2,3].

Этот подход позволяет не только воспроизвести результаты, полученные при помощи аппарата нечетких множеств, но и обобщить представленную выше постановку задачи на задачи распознавания образов, диагностики состояний и т.п., так как значение логической переменной можно понимать не только как взаимно однозначное отображение значений функции полезности, но и как описание альтернатив или состояний объектов, вообще говоря, не связанное с понятием степени полезности.

Такая интерпретация значений логических предикатов позволяет рассматривать значение логической функции как описание совокупности автоматных состояний системы, включающих рассматриваемое множество альтернатив, или объектов. Например, цвета: «синий», «зеленый» и «красный» в рамках такого подхода будут выражать лишь состояние, в котором находится объект по характеристике «цвет». При этом не утверждается, что «красный» самый лучший цвет, а «синий» или «зеленый» являются самыми худшими.

Таким образом, предлагаемая логическая модель описания альтернатив, или объектов, в терминах переменно-значных предикатов является более универсальной, чем нечеткая модель. Значение соответствующей логической функции при конечной интерпретации является автоматом, характеризующим наиболее подходящие (близкие к запрошенной совокупности состояний) объекты.

С другой стороны, формализовать совокупность состояний рассматриваемых объектов по каждому из n критериев-предикатов намного проще, чем оценить (например, при помощи эксперта), какое из указанных состояний является наилучшим, а какое – наихудшим.

После этих замечаний можно перейти к решению задачи описания объектов при помощи переменно-значных предикатов и поиска среди них оптимальных в рамках интерпретации соответствующей прикладной проблемы.

Пусть W – множество рассматриваемых объектов или альтернатив, а $x_1, x_2, .., x_n$ – предикаты значности k_i каждый, характеризующие свойства (признаки) объектов.

Пусть оценка объекта по каждому из n критериев (признаков) сопоставлена с некоторым значением логической переменной соответствующей значности. Тогда всю совокупность рассматриваемых объектов можно охарактеризо-

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

вать наборами из n логических переменных, при помощи которых описываются содержащиеся в базе данных объекты.

Основой для построения системы логических функций, описывающих множество из m рассматриваемых объектов, служит база данных (БД), представленная табл. 1:

Табл. 1.

$x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n$	W
$x_1(w_1) \quad x_2(w_1) \dots x_n(w_1)$	w_1
$x_1(w_2) \quad x_2(w_2) \dots x_n(w_2)$	w_2
....	...
$x_1(w_m)\ x_2(w_m) \dots x_n(w_m)$	w_m

В этой таблице каждый соответствующий признак $x_i(w_j)$ в общем случае кодируется предикатом k_i-значности, $k_i \ge 2$, $i = 1,...,n, j = 1,...,m$. Табл. 1 будем называть обучающей базой данных (БД) или обучающей выборкой (ОВ).

Логическая функция, построенная по такой ОВ, способом, предложенным в [2–3], будет иметь следующий вид:

$$f(x) = \bigwedge_{j=1}^{m} (\bigwedge_{i=1}^{n} x_i(w_j) \to w_j) = \bigwedge_{j=1}^{m} (\bigvee_{i=1}^{n} \overline{x_i(w_j)} \vee w_j). \qquad (14)$$

Указанный вид функции следует из известного логического тождества: $a \to b = \bar{a} \vee b$, где a — конъюнкция характеристик (признаков), определяющих объект, а b — предикат, равный единице, когда w_j становится равным соответствующему определяемому объекту.

Введем необходимые определения.

Определение 1. Предикаты $x_i(w_j)$, обладающие значностью k_i, $k_i \ge 2$, называются переменно-значными.,

Определение 2. Функция $f(x)$ вида (14), построенная на основе переменно-значных предикатов называется переменно-значной логической функцией.

Определение 3. Логическим рангом дизъюнкта называется число входящих в этот дизъюнкт логических переменных [4].

Определение 4. Продукционным рангом дизъюнкта называется количество объектных предикатов, входящих в этот дизъюнкт.

Определение 5. Классом называется дизъюнкт, являющийся конъюнкцией одной и более логических переменных (логический ранг которого больше либо равен единице) и продукционным рангом, отличным от нуля.

Определение 6. Дизъюнкт, логический ранг которого равен нулю, а продукционный ранг равен m, т.е. числу всех, содержащихся в исходной БД объектов, называется объектным.

Отметим, что во всякой логической функции вида (14), построенной по исходной БД, это будет единственный дизъюнкт, представляющий собой конъюнкцию всех, содержащихся в БД объектов.

Определение 7. Два класса называются равными, если они характеризуют совпадающие множества объектов.

Определение 8. Если множество предикатов объектов первого класса целиком содержится во множестве предикатов объектов второго класса, то говорят, что второй класс строго больше первого класса или, иначе говоря, что первый класс строго меньше второго.

Из данных определений следует, например, что продукционный ранг любого из дизъюнктов, характеризующих свободные знания, равен нулю, а общим свойством дизъюнктов, характеризующих объекты по одному или нескольким свойствам (признакам), является одновременное неравенство нулю обоих из выше определенных рангов. Логический ранг объектного дизъюнкта, равен нулю, а его продукционный ранг равен m, т.е. общему числу объектов, содержащихся в БД.

В дальнейшем будем исходить из следующих очевидных соображений:

1. Каждый объект характеризуется единственным набором из n логических значений-предикатов $x_i, i = 1,2...n$, с соответствующими значностями $k_1, k_2, ..., k_n$

2. Множество описываемых объектов конечно.

3. Логическая функция в силу свойства полноты описывает все содержащиеся в БД объекты.

4. Сравнительный анализ нечетких и переменно-значных логических моделей

Практический интерес представляет вопрос о соотношении результатов, полученных при применении методов нечетких множеств и логического моделирования в терминах переменно-значных предикатов при оптимизации поиска в условиях:

1. Одного критерия (однокритериальная оптимизация);

2. Нескольких критериев (многокритериальная оптимизация).

Рассмотрим простейший случай, когда объект (альтернатива) $x \in X$ характеризуется единственным признаком.

Теорема 1. Пусть X – конечное множество альтернатив, причем $|X| = m$. Пусть f_1 строго возрастающая функция полезности (оценки альтернативы) $x_0 \in X$. Тогда $x_o \in X$ является четко недоминируемой (ЧНД-) альтернативой тогда и только тогда, когда в логической функции, построенной по k-значной базе данных при $k \geq n$ альтернативе x_0 соответствует аксиома, содержащая наибольшее значение логической переменной среди существующих аксиом.

Доказательство необходимости проведем методом математической индукции. Пусть множество X содержит всего две альтернативы x_1 и x_2, т.е. $m = 2$. Поскольку по условию теоремы $f_1(x)$ – строго возрастающая функция полезности, то $f_1(x_2) > f_1(x_1)$. При этом справедливы следующие матрицы значений отношений нестрогого R и строгого R_c предпочтений, определяемые значениями функций принадлежности μ_R и μ_{R_C} соответственно.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

Согласно приведенной выше формуле для вычисления функции принадлежности множества недоминируемых альтернатив $\mu_{R_{нд}} = (0,1)$, т.е. x_2 – ЧНД-альтернатива.

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Теперь построим логическую функцию f, соответствующую базе данных, определяющей альтернативы (объекты) из множества X согласно значениям функции полезности. Схематически база данных будет иметь следующий вид:

$$A^0 \to x_1$$
$$A^1 \to x_2 , \tag{16}$$

где A^i – k-значная логическая переменная. $i = (0, 1)$

Соответствующая этой базе данных логическая функция f будет иметь следующий вид:

$$f = (A^0 \to x_1) \wedge (A^1 \to x_2) = A^{k-1} \vee ... \vee A^0 \wedge x_1 \vee A^1 \wedge x_2 \vee x_1 \wedge x_2 . \tag{17}$$

Эта функция вычислена для случая, когда $k > n$. Заметим, что свободные дизъюнкты в логической функции f будут отсутствовать при условии, когда $n = k$.

Пусть данное утверждение теоремы 1 верно для некоторого $m > 2$. Покажем, что оно верно и для $m+1$. Поскольку функция полезности f_1 строго возрастающая, то для $m+1$ альтернатив матрицы значений функций принадлежности отношений нестрогого R и строгого R_c предпочтений будут иметь соответственно следующий (аналогичный приведенным в (15)) вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & ... & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Функция принадлежности множества значений недоминируемых альтернатив имеет вид

$$\mu_{R_{\text{нд}}} = (0,0,...,1) . \tag{19}$$

Отсюда, согласно определению, получаем, что x_{m+1} – ЧНД-альтернатива.

Дополним базу данных сведениями об альтернативе x_{m+1}, для чего домножим содержащую данные о m альтернативах логическую функцию f на данные об альтернативе x_{m+1}:

$$f \wedge (A^m \to x_{m+1}) = A^{k-1} \vee ... \vee A^0 \wedge x_1 \vee A^1 \wedge x_2 \vee ... \vee A^m \wedge x_{m+1} \vee x_{m+1} \wedge x_2 \wedge ... \wedge x_{m+1} . \tag{20}$$

Отсюда видно, что в построенной по базе данных логической функции f (20) всякой ЧНД-альтернативе соответствует аксиома, содержащая наибольшее среди существующих аксиом значение логической переменной.

Докажем теперь достаточность. Поскольку значность логической функции f не меньше числа альтернатив, то, считая значением функции полезности f значение, соответствующее логической переменной, присутствующей в каждой из аксиом, получим строго возрастающую функцию полезности f на множестве альтернатив X. Построив матрицы функций принадлежности отношений R и R_c и вычислив функцию принадлежности множества недоминируемых альтернатив, легко убедиться, что ЧНД-альтернативой будет альтернатива с наибольшим значением функции полезности. Таким образом, теорема 1 доказана.

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Следствие 1.1. Значение логической переменной в каждой из аксиом функции f численно совпадает с максимальным количеством альтернатив, которые доминирует (улучшает) данная альтернатива.

Действительно, последовательно исключая из множества X ЧНД-альтернативы x_{m-i}, $i = 0,...,m-2$, и опираясь на каждом шаге на теорему 1, установим взаимно-однозначное соответствие между альтернативами и аксиомами логической функции f. Очевидно, что результатом конечного шага таких исключений при $i = m-2$ будет аксиома $A^0 \wedge x_1$, которая не доминирует ни одну из альтернатив множества X. В случае, когда $k > m$ для доказательства достаточно внести в базу данных отсутствующие фиктивные альтернативы, чтобы установить взаимно-однозначное соответствие между альтернативами и аксиомами.

Замечание 1.1. Очевидно, что если все значения, принимаемые функцией полезности f на множестве альтернатив X различны, то достаточно перенумеровать альтернативы, чтобы получить строго возрастающую функцию полезности.

Поскольку в общем случае ЧНД-альтернатив на множестве X может быть несколько, то целесообразно рассмотреть и этот практически важный случай.

Теорема 2. Пусть X – конечное множество альтернатив, $f_i(x), i = 1,2...,m$, состоит из неубывающих на X функций полезности. Пусть $X_{\text{чнд}}$ – множество четко недоминируемых альтернатив, т.е. $|X_{\text{чнд}}| = m$, $m > 1$. Тогда всякая альтернатива $x_0 \in X$ является ЧНД-альтернативой тогда и только тогда, когда она содержится в дизъюнкте класса с наибольшим значением логической переменной среди существующих классов функции, построенной по соответствующей базе данных, причем количество объектов в этом дизъюнкте в точности равно m.

Доказательство. Докажем необходимость. Для простоты положим $|X_{ЧНД}| = 2$; x_{n-1}, x_n – ЧНД-альтернативы, $n > m$. Тогда по свойству ЧНД-альтернатив, вытекающему из формулы функции принадлежности множества недоминируемых альтернатив, получим, что для любой альтернативы $y \in X$ выполнятся следующие равенства:

$$\mu_{R_C}(y, x_{n-1}) = 0, \quad \mu_{R_C}(y, x_n) = 0. \qquad (21)$$

Эти соотношения показывают, что ни одна ЧНД-альтернатива не может доминироваться ни какой альтернативой из множества X. А в силу линейности отношения R, которая вытекает из линейности отношения $n \geq m$ или из способа задания отношения "не хуже" как отношения, построенного на основе сравнения значений функции полезности $f_i(x)$, получаем следующее:

$$\mu_R(x_{n-1}, x_n) = \mu_R(x_n, x_{n-1}) = 1. \qquad (22)$$

По определению отношение эквивалентности имеет вид

$$\mu_{R_e}(x_{n-1}, x_n) = \mu_{R_e}(x_n, x_{n-1}), \qquad (23)$$

Отсюда следует, что полученные ЧНД-альтернативы x_{n-1} и x_n являются эквивалентными. Поэтому справедливо соотношение

$$f_i(x_{n-1}) = f_i(x_n) = \max_{x \in X} f_i(x). \qquad (24)$$

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Рассмотрим теперь эти альтернативы в соответствующей базе данных. Согласно правилам логического преобразования:

$$(A^{n-2} \to x_{n-1}) \wedge (A^{n-2} \to x_n) = A^{n-2} \to (x_{n-1} \wedge x_n)\,. \qquad (25)$$

Положим $x_{n-1} \wedge x_n = \bar{x}$ и принимаем во внимание, что $f_i(\bar{x}) = \max\limits_{x \in X} f_i(x)$, воспользуемся утверждением теоремы 1, согласно которой ЧНД-альтернативе $\bar{x}$ соответствует аксиома с наибольшим значением переменной A среди существующих аксиом. Из того, что $\bar{x} = x_{n-1} \wedge x_n$, приходим к выводу, что в построенной по базе данных альтернатив логическая функция в аксиоме с наибольшим значением логической переменной A (среди существующих аксиом) содержит конъюнкцию всех ЧНД-альтернатив.

Для доказательства достаточности необходимо для каждой из альтернатив в качестве значения функции полезности $f_i(x)$ взять значение логической переменной, присутствующей в каждом из дизъюнктов логической функции. Построив соответствующие матрицы отношений R *и* R_c, удостоверяемся, что всякий объект, содержащийся в классе с наибольшим значением логической переменной среди существующих классов, является ЧНД-альтернативой, поскольку конъюнкция альтернатив свидетельствует о равенстве между ними значений функции полезности.

Таким образом, теорема 2 доказана.

Следствие 2.1. Пусть $f_i(x)$ – неубывающая функция полезности, тогда всякому подмножеству альтернатив $\bar{X}$, для элементов которого значения $f_i(\bar{x})$ равны между собой, соответствует дизъюнкт, включающий конъюнкцию всех таких альтернатив $\bar{x}$, содержащихся в $\bar{X}$.

Для доказательства достаточно, последовательно исключая из множества X ЧНД-альтернативы, установить взаимно однозначное соответствие между подмножествами альтернатив $\bar{X}$ и дизъюнктами соответствующей логической функции.

Замечание 2.1. Отметим, что требование неубывания функции полезности на множестве альтернатив охватывает практически все множество функций, используемых для оценки альтернатив по некоторому признаку.

В случае конечного числа признаков (критериев) $n > 1$, взаимно однозначного соответствия между недоминируемыми альтернативами и дизъюнктами логической функции нет. Это следует из способа представления базы данных как логической функции, являющейся конъюнкцией импликаций, в каждой из которых из конъюнкции характеристик объекта следует сам объект (альтернатива), а также из способа задания операции отрицания как дизъюнкции всех значений логической переменной, кроме отрицаемого [2]. С учетом того очевидного факта, что уже при наличии хотя бы двух признаков для установления линейного отношения упорядоченности $\geq$ и для выявления наиболее предпочтительных на множестве X альтернатив, требуется ввести специальную метрику (или, по крайней мере, линейную свертку) со специально вводимыми коэффициентами относительной важности признаков, как это делается для поиска недоминируемых альтернатив в случае n критериев [1]. При этом возможна скрытая потеря информации об объектах (альтернативах).

В логической функции объекты разбиты на классы по каждому из признаков. Это, с одной стороны (в рамках отдельно взятого признака), позволяет

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

воспользоваться теоремами 1 и 2, а с другой стороны (в случае запроса), позволяет найти всю совокупность объектов с учетом разбиения на классы, совпадающих с запрошенными характеристиками хотя бы по одному из признаков.

Последнее свойство делает метод построения логической функции по базе данных более предпочтительным по сравнению с методом нечетких отношений.

Для вычисления полученной на основе базы данных логической функции будем исходить из следующих соображений, вытекающих из свойств конечнозначных логик [7]:

1. K-значная логическая переменная может находиться только в одной i-й фазе, где $i = 1, 2, ..., k$.

2. Конъюнкция двух K-значных логических переменных, находящихся в разных фазах, равна логическому нулю, а в случае совпадения фаз – логической единице.

3. Все анализируемые объекты характеризуются N существенными параметрами (отсюда следует, что построенная по базе данных переменно-значная логическая функция в качестве аргумента использует входной N-мерный вектор, каждый компонент которого равен текущему значению L-й логической переменной, $L = \{1,..,N\}$.

При вычислении логической функции к каждому из составляющих ее дизъюнктов, который является либо переменной, либо конъюнкцией логических переменных, приписывается конъюнкция содержащихся в дизъюнкте логических переменных, взятых из входного вектора параметров.

Полученная (после соответствующих преобразований) логическая функция в общем случае будет иметь тот же вид, который был описан выше. При этом интерпретация некоторых групп дизъюнктов будет следующей:

1. Наличие в вычисленной логической функции дизъюнктов, относящихся к свободным данным свидетельствует о том, что в базе данных отсутствуют объекты с заданным значением соответствующих параметров.

2. Дизъюнкт-аксиома свидетельствует о том, что в базе данных существует единственный объект, у которого текущее значение рассматриваемого параметра соответствует значению, заданному во входном векторе.

3. Наличие в вычисленной функции классов обозначает, что в базе данных присутствуют несколько объектов, в которых значение соответствующего параметра равно значению, задаваемому во входном векторе.

4. Дизъюнкт, являющийся несобственным подклассом множества классов объектов, находящихся в базе данных, говорит о том, что игнорирование свойств объектов делает их равнозначными, т.е. всегда есть возможность сделать выбор: «любой из объектов, находящихся в базе знаний».

5. Логический анализ и многокритериальная оптимизация компьютерных сетей

Развитие современных информационных и телекоммуникационных технологий приводит к необходимости адекватной (с точки зрения приложений) многокритериальной оптимизации компьютерных сетей (КС) различного масштаба и назначения (локальные и региональные вычислительные сети, глобальные телекоммуникационные сети и т.п.) [8, 9].

Компьютерная сеть традиционно описывается неориентированным графом без петель и кратных ребер, узлам которого соответствуют сетевые компьютеры, а ребрам – каналы связи. При сравнительном анализе и многокрите-

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

риальной оценке КС важную роль играет их топологическая структура, т.е. топология узлов и каналов связи, и критерии (признаки), отражающие наиболее важные аспекты функционирования КС.

Наиболее существенными критериями (признаками) эффективности КС являются

– надежность;
– стоимость;
– пропускная способность.

Базовыми топологиями КС будем называть совокупность следующих пяти типовых топологий:

– полноячеистая топология;
– кольцевая топология;
– топология «звезда»;
– линейная топология;
– смешанная топология.

Задача состоит в нахождении оптимальной топологической структуры с учетом описанных выше критериев (признаков).

Многокритериальный анализ любых сложных объектов (в данном случае сетевых топологических структур) является трудно формализуемой задачей. Связано это с тем, что критерии, как указывалось выше, оказывают на анализируемый объект различное (чаще всего противоположное) влияние. Например, увеличение надежности КС приводит к появлению избыточных связей, требует более качественного оборудования и т.д. Стремление к удешевлению сети приводит к упрощению ее структуры и, как следствие, ведет к снижению надежности.

Наиболее успешным подходом при решении задачи поиска оптимального объекта (или группы таких объектов) с учетом нескольких критериев являются модернизированные логические алгоритмы, использующие переменно-значные предикаты.

Логические модели и алгоритмы хорошо зарекомендовали себя при решении различных задач [2,3,5–9]. Это связано с тем, что они делают возможным логический анализ исходной предметной области и позволяют оптимизировать поиск.

Основной целью при решении рассматриваемой задачи является моделирование минимальной и полной систем аксиом. Использование такой минимизированной базы данных позволяет провести автоматизированное разбиение характеризуемых объектов на классы и их качественный анализ. Вследствие этого возможен сокращенный вывод по заданному запросу с автоматической минимизацией, т.е. удалением избыточной информации, и логический поиск по оптимизированной базе данных.

Предлагаемый подход в сравнении с другими методами дает более продуктивную возможность для автоматизированного решения поставленной задачи многокритериальной оптимизации сетевых топологических структур КС.

Возможность получения оптимального решения по заданному запросу особенно важна для проектировщика (или лица, принимающего решение), так как она уже на стадии проектирования позволяет учесть особенности будущего функционирования КС.

Обозначим критерии надежности, стоимости и пропускной способности КС буквами A, B, C соответственно, а анализируемые топологии «полноячеистую», «звезду», «кольцо», «линейную», «смешанную» буквами

Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 7. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2008. Issue 7. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

F – "Full", S – "Star", R – "Ring", L – "Line", M – "Mix".

Как было показано в [5], наиболее целесообразным является подход, учитывающий плотности значений оценочных функций. При этом интервал [0,1] для каждого из критериев разбивается на интервалы переменной длины в соответствии с расстояниями между значениями оценок. Такое разбиение порождает для трех критериев логические переменные различных значностей, а именно: для A – 4, для B – 3, для C – 5.

Соответствующая база данных приведена в табл. 2.

Табл. 2

Топология	Надежность (0-3)	Стоимость (0-2)	Пропускная способность (0-4)
Полноячеистая	3	0	4
Звезда	2	1	1
Кольцо	0	1	0
Линейная	1	2	2
Смешанная	2	1	3

Отбор топологии КС может быть осуществлен при помощи анализа частот присутствия искомого идентификатора (сетевая топологическая структура) в вычисленной логической функции.

В данном случае имеем следующие соотношения: "*S, M, S, R, M, M*". Отметим, что дизъюнкт четвертой группы прикладного значения не имеет и поэтому при анализе значения функции не учитывается.

Соотношение частот будет следующим:

R =1/6, S = 2/6, $M = 3/6$.

Таким образом, при заданных условиях приходим к следующим выводам:

– наиболее предпочтительной является "смешанная топология";

– менее предпочтительна топология "звезда";

– "кольцевая топология" является наименее предпочтительной.

В процессе решения задач многокритериальной оптимизации альтернатив были программно реализованы алгоритм вычисления вышеописанных оценочных функций по заданным критериям (признакам), а также алгоритм построения и оптимизации логической функции, основой для построения которой является исходная база данных.

В рассматриваемом примере эта база данных содержит исследуемые топологические структуры КС и их анализируемые характеристики (критерии). Вычислительные эксперименты проводились при следующих предположениях: для всех сравниваемых топологий КС число узлов $N = 6$, а каналы связи имеют одинаковую пропускную способность и совпадают по длине. В результате были получены оценки, представленные в табл. 3.

Табл. 3

Топология	Надежность	Стоимость	Проп. способность
Полноячеистая	1.0000	0.3333	1.0000
Звезда	0.2429	0.8333	0.5000
Кольцо	0.0000	0.8333	0.4567
Линейная	0.0667	1.0000	0.5800
Смешанная	0.2000	0.8333	0.7222

Заключение

Предложенные переменно-значные логические модели и методы многокритериальной оптимизации альтернатив имеют ряд преимуществ по сравнению с нечеткими моделями и методами. Они позволяют сделать теоретически обоснованные выводы и сформулировать рекомендации при сравнительном анализе и многокритериальной оптимизации альтернатив или объектов произвольной природы, в том числе КС.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ–08-08-12183-офи и Программы № 15 (GRID) Президиума РАН.

Литература

1. *Орловский С.А.* Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981. – 208 с.
2. *Лютикова Л.А., Тимофеев А.В., Сгурев В.В., Йоцов В.И.* Развитие и применение многозначных логик и сетевых потоков в интеллектуальных системах // Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. С. 114–126.
3. *Лютикова Л.А.* Моделирование и минимизация баз знаний в терминах многозначной логики предикатов. Препринт. Нальчик. 2006.
4. *Горбатов В.А.* Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Наука. Физматлит, 2000. – 554 с.
5. *Димитриченко Д.П.* О взаимосвязи нечетких отношений и логических структур, построенных для оптимизации процедур поиска. // Материалы Международного Российско-Азербайджанского симпозиума «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики» и VI Школы молодых ученных «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики». Нальчик – Эльбрус, 2008. С. 204–205.
6. *Димитриченко Д.П.* О взаимосвязи нечетких отношений и логических структур, построенных для оптимизации процедур поиска. Доклады АМАН т. 10, №1. Нальчик. 2008. С 101–105.
7. *Димитриченко Д.П.* К вопросу об интерпретации дизъюнктов переменно-значных логических функций, построенных по базе знаний сетевых топологических структур // Вестник ВГТУ. 2008. Т. 4. № 4. С. 81–85.
8. *Сырцев А.В., Тимофеев А.В.* Модели и методы маршрутизации потоков данных в телекоммуникационных системах с изменяющейся динамикой. М.: Новые технологии, 2006. 85 с.
9. *Тимофеев А.В.* Мульти-агентные системы управления региональными телекоммуникационными сетями – Материалы междунар. конфер. «Моделирование устойчивого регионального развития (МУРР–2007)», Нальчик: Изд. КБНЦ РАН, 2007. С. 45–50.
10. *Охтилев М.Ю., Соколов Б.В., Юсупов Р.М.* Интеллектуальные технологии мониторинга и управления структурной динамикой сложных технических объектов. – М.: Наука, 2006. – 410 с.