

# Определения понятия «множество»: существующие подходы и предложения.

А. К. Моисеев

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО. д.39, Санкт-Петербург, 199178

[<sokol@iiias.spb.su>](mailto:sokol@iiias.spb.su)

---

УДК 510.2

Моисеев А. К. **Определения понятия «множество»: существующие подходы и предложения** // Труды СПИИРАН. Вып. 6. — СПб.: Наука, 2008.

**Аннотация.** В работе приведены результаты информационного поиска определения для термина и понятия «множество». Предложено определение, исключающее ненужную синонимичность, устраняющее антиномию «пустого» множества и полностью соответствующее Канторовскому понятию множества. —Библ. 97 назв.

UDK 510.2

Moiseev A .K. **Definition of set concept. Set: theory and relations: existing approaches and statements** // SPIIRAS Proceedings. Issue 6. — SPb.: Nauka. 2008.

**Abstract.** The article is devoted to results of informational search of definition for term and concept "set". Definition, excluding unnecessary synonym and completely corresponding to Cantor's concept of set, is suggested. —Bibl. 97 items.

---

Теория множеств, основания которой были заложены работами Г. Кантора, Б. Больцано, Р. Дедекинда в конце XIX и в начале XX веков, в настоящее время глубоко проникла во все области науки: математику, механику, физику, кибернетику, теорию управления и т.д.

Огромное влияние теории множеств на развитие математики последнего столетия является общепризнанным фактом [3]. Поэтому естественно, что идеи теории множеств (ТМ) занимают достаточно большое место и в преподавании математики в университетах и педагогических вузах.

Идеи ТМ давно заняли прочное место в современном построении математического анализа, а также таких дисциплин, как теория динамических систем, теория вероятностей, не говоря уже о собственно функциональном анализе, значение которого в общей системе математики нашего времени непрерывно возрастает.

По ТМ публикуется много работ, она постоянно развивается. Достаточно отметить появление таких объектов, как случайные множества [53], нечеткие множества [41], многомерные множества [26] и т.д.

Современное значение ТМ отмечено многими известными учеными, мнения которых приведены в книге Н. Я. Виленкина [18]:

- «Теория множеств глубоко проникла во многие области математики и оказала на них огромное влияние; особо выдающуюся роль она играет в исследованиях, связанных с логическим и философским обоснованием математики» (Р. Курант).
- «Элементами множеств могут быть самые разнообразные предметы: буквы, атомы, числа, функции, точки, углы и так далее. Отсюда с самого начала ясна чрезвычайная широта теории множеств и её приложимость к очень многим областям знания: математике, механике, физике» (Н. Н. Лузин).

- «Сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника — Теории множеств» (Н. Бурбаки).

Как известно, основой любой науки является разработанная терминология (термины, понятия, определения). В соответствии с требованиями научной терминологии [46], каждый термин должен иметь свое понятие и определение. Уместно вспомнить, что под *термином* понимается слово или словосочетание, призванное точно обозначить понятие и его соотношение с другими понятиями в пределах специальной сферы. Термины служат специализирующими, ограничительными обозначениями характерных для этой сферы предметов, явлений, их свойств и отношений.

Понятие — это форма мышления, отражающая существенные свойства, связи и отношения предметов и явлений в их противоречии и развитии; мысль (или система мыслей) обобщающая, выделяющая предметы некоторого класса по определенным общим и со специфическими для них признакам. Понятия суть «не более, как сокращения, в которых мы охватываем, сообразно общим их свойствам, множество различных чувственно воспринимаемых вещей» [50].

Определение — это указание или объяснение значения (смысла) термина и объема (содержания) выражаемого данным термином понятия; этот *термин* (понятие) называется определяемым, а совокупность действий (слов), осуществляющих его определение, — определяющим.

В теории множеств основным термином и понятием является «множество», введенное Г. Кантором. Он сформулировал понятие «множество» в следующем виде: «Множество есть многое, мыслимое нами как единое» [51, 52, 71, 72].

Это понятие по мере развития теории претерпело значительные изменения. В начальный период теории множеств, во времена так называемой «наивной» ТМ, пользовались интуитивным понятием множества, т.е. слово «множество» имело такое же и столь неопределенное значение, как и в обыденном языке.

Но такое положение долго не продержалось. Интуитивное понимание множества оказалось в некоторых случаях порочным и привело к появлению антиномий, появившихся на определенной стадии развития этой науки. Как отмечено в работе К. Куратовского и А. Мостовского [44], причиной их появления была возникающая в сложных случаях неясность интуиции, связанной с понятием множества. В полемике, развернувшейся вокруг антиномий, было выяснено, что разные математики вкладывают в понятие множества существенно различный смысл. Поэтому построение ТМ исключительно на интуитивной основе оказалось невозможным [44].

Итак, основным препятствием для построения ТМ на интуитивной основе оказалось отсутствие определения для термина и понятия множества.

Монография [44] была издана в 1970 г. Представляло интерес развитие данного вопроса за время, прошедшее с момента ее издания.

В процессе информационного поиска были рассмотрены работы по:

- теории множеств, теории функций действительного переменного, топологии [2–5, 15, 18, 22, 31, 41, 42, 44, 48, 53, 56, 61–63, 66, 68, 71, 78, 82, 83, 85];
- математике [6–9, 11, 14, 16, 17, 20 23, 26, 27, 30, 32–39, 43, 47, 55, 57, 58, 64, 65, 72–74, 76, 77, 79, 84, 86, 87, 88];
- управлению, системам, кибернетике [25, 28, 29, 45, 60, 70];

- справочники, словари, энциклопедии по математике [13, 19, 40, 49, 50–52, 54] и общего характера [1, 10, 12, 59, 67, 69, 75, 80, 81].

Анализ информации, содержащейся в вышеприведенном перечне изданий, показал, что определение множества до настоящего времени не разработано. Проведенный выборочный поиск по изданиям XXI века показал то же самое. Такому положению, по нашему мнению, в значительной степени способствовали мнения ряда известных ученых. Приведем некоторые из них.

1. Множество возникает путем объединения отдельных предметов (вещей) в одно целое. Оно есть множественность, мыслимая как единство. Если бы эти или подобные им высказывания выставлялись в качестве определений, то можно было бы вполне основательно возразить, что они определяют то же самое при помощи того же самого, тёмное при помощи ещё более тёмного.  
Однако мы можем их толковать просто как указания на некоторый первоначально всем свойственный акт мышления, который, быть может, и нельзя, а может быть, и не нужно разлагать на другие, более простые акты [85].
2. Понятие множества является столь первоначальным, что затруднительно, по крайней мере на сегодняшний день, определить его при помощи более простых понятий. Мы не станем искать определение слова «множество». Можно разумеется было бы сказать, что множество есть собрание, коллекция, класс, система, семейство, комплекс, ансамбль и т.д. Но такая замена одного слова другим никогда не может объяснить идею множества тому, кто раньше не приобрел её как-нибудь образом [88].
3. В ряде работ отмечается, что разработать определение для понятия «множество» очень затруднительно и даже невозможно, поскольку само понятие множества является общим, широким и в других не содержится [18, 21, 32, 48, 50, 72, 83, 88].
4. Определения множества не существует. Понятие вводится аксиоматически и не может быть определено через какие-либо элементарные понятия [49, 89, 94 и др.].

Такое положение привело к тому, что в качестве определения для термина и понятия множества используются следующие синонимы:

- 1) «совокупность» [2–4, 9, 16, 18, 19, 32, 41, 43, 48–52, 56, 60, 64, 72];
- 2) «класс» [9, 17, 18, 36, 40, 43, 48, 50, 72 и др.];
- 3) «собрание» [6, 18, 50–52, 56, 71, 83];
- 4) «коллекция» [18, 48, 50, 56, 88];
- 5) «объединение» [13, 25, 49, 54];
- 6) «семейство» [16, 18, 48, 88];
- 7) «набор» [16, 51, 52];
- 8) «система» [18, 48, 88];
- 9) «ансамбль» [18, 48];
- 10) «область» [70, 88];
- 11) «стая» [9, 71];
- 12) «компания» [71];
- 13) «комплекс» [88];
- 14) «кортеж» [88];
- 15) «терм» [15];
- 16) «функция» [20].

Как можно видеть, вместо четкого однозначного определения понятия «множество» в литературе используется большое количество разнообразных синонимов. Если учесть, что каждый термин–синоним, используемый в качестве определения понятия множества, имеет свое понятие и определение, то сопоставление того или иного термина (из приведенного списка) может увести нас довольно далеко от истины.

Рассмотрим в качестве примера наиболее характерные, часто используемые синонимы: «совокупность» и «система» (см. стр. 248).

Наиболее часто множество определяется с использованием термина «совокупность».

В некоторых словарях и энциклопедиях совокупность (сама!) определяется через понятие множества. В результате получается тафтология. Кроме того, употребление этого термина-синонима представляется недопустимым в силу следующих причин:

- противоречия понятию множества введенного Г. Кантором: совокупность интуитивно предполагает связность, тогда как элементы множества по определению должны быть различными друг от друга, т.е. отдельными, не связанными между собой;
- совокупление — теснейшая связь в живой природе, притом не «мыслимая», а фактически существующая.

Кроме того, здесь уместно отметить, что понятием совокупности во многих случаях пользовался академик В. А. Буняковский в своей книге «Основания математической теории вероятностей» [14] (первая изданная в 1846 году в России монография по теории вероятностей) для обозначения связности событий, совместного их появления и т.д.

Так, на стр. 25 [14] читаем: «Об наивероятнейшем сложном событии, составленном из кратного совокупления двух простых».

Множество — система. Известно, что система имеет свои понятия и определение, причем не одно (например, [59]).

Система:

- определенный порядок в расположении и связи чего-нибудь в действиях;
- форма организации чего-нибудь;
- нечто целое, представляющее собой единство закономерно расположенных и находящихся во взаимной связи частей и др.

Не будем далее утомлять читателя разбором и оценкой остальных синонимов, ограничившись этими примерами.

Подведем некоторые итоги проведенному исследовательскому поиску определения для термина «множество»:

- определения множества не существует (не разработано до настоящего времени);
- вместо определения множества используются многочисленные синонимы, имеющие свои понятия и определения;
- существует устоявшееся положение о невозможности разработки такого определения и невозможности построения ТМ на интуитивной основе.

Возникает вопрос: что же, действительно нельзя разработать определение для термина и понятия «множество»? Можно показать, что это не совсем так. В философии существует категория «количество». Её использование позволяет рассматривать множество с любым количеством элементов: от 0 до  $\infty$ .

С учетом всего вышеизложенного можно предложить следующее определение для термина и понятия «множество»:

*Множеством называется любое количество отдельных различных объектов (элементов), рассматриваемых совместно в соответствии с некоторым заданным признаком (свойством).*

Предлагаемое определение, на наш взгляд, обладает следующими достоинствами:

1. Краткостью, строгостью и точным соответствием термину и понятию множества (в канторовском смысле);
2. Интуитивно понятно и доступно для всеобщего понимания;
3. Соответствует требованиям научно-технической терминологии;
4. Устраняет совершенно ненужную синонимию, затушевывающую основной смысл термина;
5. Интуитивно предполагает возможность измеримости (любое количество, т.е. введение меры);
6. Устраняет антиномию пустого множества;
7. Может служить предпосылкой для построения теории множеств на интуитивной основе.

В качестве заключения можно привести высказывания Б. В. Гнеденко:

- «Научные понятия, а также содержание науки изменяются от поколения к поколению и несут в себе черты той эпохи, в которой они появились» [24. С. 24].
- «Укажем еще один источник новых проблем в математике — это критический пересмотр её исходных положений, её основных понятий, а также представлений о полноте и строгости доказательств.

Очевидно, что в связи с прогрессом науки такого рода пересмотры совершенно необходимы как для сохранения единства математики, так и для приведения в соответствие с накопленными знаниями логического фундамента математики. Обычно такой пересмотр раскрепощает науку и придает ей новые возможности для быстрого развития» [24. С. 39].

#### Литература

1. *Александрова З. Е.* Словарь синонимов русского языка. М.: Сов. энцикл., 1969.
2. *Александров П. С. и Колмогоров А. Н.* Введение в теорию функций действительного переменного, М.: ГТТИ, 1933.
3. *Александров П. С.* Введение в общую теорию множеств и функций. ОГИЗ: ГИТТЛ, 1948.
4. *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1977.
5. *Александров П. С.* Введение в теорию групп. М.: Наука, 1980.
6. *Андронов И. К.* Арифметика натуральных чисел. М.: Учпедгиз, 1954.
7. *Андронов И. К.* Математика действительных и комплексных чисел. М.: Просвещение, 1975.
8. *Бирхгоф Г.* Теория структур. М.: ИЛ, 1952.
9. *Бирхгоф Г, Барти Т.* Современная прикладная алгебра, М.: Мир, 1976.
10. Большая советская энциклопедия. 3-е изд. М.: Советская энциклопедия, 1976.
11. *Болтянский В. Г, Ефремович В. А.* Наглядная топология. М.: Наука, 1982.
12. Большой энциклопедический словарь. Политехнический. М.: Большая российская энциклопедия, 1998.
13. *Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Лейпциг: «Тойбер»; М.: Наука, 1981.
14. *Буняковский В. Я.* Основания математической теории вероятностей. СПб.: Типография Императорской Академии Наукъ, 1846.
15. *Бурбаки Н.* Теория множеств. М.: Мир, 1965.
16. *Валуцэ И. И.* Отображения. Алгебраические аспекты теории. Кишинев: Штиинца, 1976.
17. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. М.: Наука, 1976.

18. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М.: Наука, 1965.
19. *Воднев В. Г., Наумович А. Ф.* Математический словарь высшей школы. М.: НПИ, 1989.
20. *Воробьев О. Ю., Валендик Э. Н.* Вероятностное множественное моделирование. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1978.
21. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ. М.: Наука, 1967.
22. *Вулих Б. З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. М.: Наука, 1973.
23. *Гельвих П. А.* Курс теории вероятностей. М.: Издание Артиллерийской ордена Ленина академии Красной армии им.Дзержинского, 1941.
24. *Гнеденко Б. В.* Математика и научное познание. М.: Знание, 1983.
25. *Горбатов В. А.* Теория частично упорядоченных систем. М.: Сов.радио, 1976.
26. *Горdevский Д. З., Лейбин А. С.* Популярное введение в многомерную геометрию. Харьков: Изд-во Харьков. гос. Ун-та, 1964.
27. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. Изд-во М.: ИЛ, 1956.
28. *Заде Л. А, Дезоер Ч.* Теория линейных систем. М.: Наука, 1970.
29. *Заде Л. А.* Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня. М.: Знание, 1974.
30. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. I. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1969.
31. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
32. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
33. *Карлин С.* Основы теории случайных процессов. М.: Мир, 1971.
34. *Кендалл М., Моран П.* Геометрические вероятности. М.: Наука, 1972.
35. *Кильдишев Г. С., Аболенцев Ю. Н.* Многомерные группировки. М.: Статистика, 1978.
36. Классификация и кластер. М.: Мир, 1980.
37. *Климов Г. П.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Из-во МГУ, 1988.
38. *Кокс Д., Хинкли Д.* Теоретическая статистика. М.: Мир, 1978.
39. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. 2-е изд. М.: Наука, 1974.
40. *Корн Г. и Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1968.
41. *Кофман А.* Введение в теорию нечетких множеств. М.: Радио и связь, 1982.
42. *Коэн П.* Теория множеств и континуум–гипотеза. М.: Мир, 1969.
43. *Курант Р. и Роббинс Г.* Что такое математика? М.: Просвещение, 1967.
44. *Куратовский К., Мостовский А.* Теория множеств. М.: Мир, 1970.
45. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М.: Наука, 1972.
46. *Лотте Д. С.* Основы построения научно-технической терминологии. М.: Из-во АН СССР, 1961.
47. *Лозе М.* Теория вероятностей. М.: ИЛ, 1962.
48. *Лузин Н. Н.* Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1948.
49. *Мантуров О. В., Солнцев Ю. К., Соркин Ю. И., Федин М. Г.* Толковый словарь математических терминов: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1965.
50. *Маркс К., Энгельс Ф.* Сочинения. 2 изд. Т. 20. С. 550. М.: Полит.лит-ра, 1961.
51. Математика, её содержание, методы и значение. Т. III. М.: Изд-во АН СССР, 1956.
52. Математическая энциклопедия. Т. III. М.: Сов.энцикл., 1982.
53. Математический энциклопедический словарь. М.: «Советская энциклопедия», 1988.
54. *Матерон Ж.* Случайные множества и интегральная геометрия. М.: Мир, 1978.
55. *Микиша А. М., Орлов В. Б.* Толковый математический словарь: Основные термины. М.: Русский язык, 1988.
56. *Мышкис А. Д.* Лекции по высшей математике. М.: Наука, 1969.
57. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.
58. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969.
59. *Некрасов П. А.* Новая основания учения о вероятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ. Ч. 1. М.: Университетская типография, Страстной бульваръ, 1901.
60. *Ожегов С. И.* Словарь русского языка. М.: Русский язык, 1982.
61. Основы кибернетики. Математические основы кибернетики. М.: Высшая школа, 1974.
62. *Оган Ю. С.* Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. М.: Просвещение, 1965.
63. *Пархоменко А. С.* Что такое линия. М.: ГИТТЛ, 1954.
64. *Понтрягин Л. С.* Основы комбинаторной топологии. М.: Наука, 1976.
65. *Постон Тим и Стюарт Изн.* Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980.
66. *Сантало Л.* Интегральная геометрия и геометрические вероятности. М.: Наука, 1983.
67. *Серпинский В.* О теории множеств. М.: Просвещение, 1966.

68. Словарь синонимов русского языка. Т. I и Т. II. Л.: Наука, 1970.
69. *Слупецкий Е., Борковский Л.* Элементы математической логики и теория множеств. М.: Прогресс, 1965.
70. Советский энциклопедический словарь. М.: Сов.энцикл., 1986.
71. Справочник по теории автоматического управления. М.: Наука, 1987.
72. . *Столл Роберт Р.* Множества. Логика. Аксиоматические теории. М.: Просвещение, 1968.
73. *Столяр А. А., Лельчук М. П.* Математика. Минск: Высшая школа, 1975.
74. *Тарский А.* Введение в логику и методологию дедуктивных наук. М.: ИЛ, 1948.
75. *Тёрнер Д.* Вероятность, статистика и исследование операций. М.: Статистика, 1972.
76. Толковый словарь русского языка конца XX века. Языковые изменения. СПб: Фолио-Пресс, 1998.
77. *Тутубалин В. Н.* Теория вероятностей. М.: Из-во МГУ, 1972.
78. *Улам С.* Нерешенные математические задачи. М.: Наука, 1964.
79. *Урысон П. С.* Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1 и 2. М.; Л.: ГИТТЛ, 1951.
80. *Феликс Л.* Элементарная математика в современном изложении. М.: Просвещение, 1967.
81. Философский энциклопедический словарь. М.: Сов.энцикл., 1983.
82. Философский словарь. М.: Полит.лит-ра, 1986.
83. *Френкель А., Бар-Хиллел И.* Основания теории множеств. М.: Мир, 1966.
84. *Фролов Н. А.* Теория функций действительного переменного. М.: Учпедгиз, 1953.
85. *Хадвигер Г.* Лекции об объеме, площади поверхности и изопериметрии. М.: Наука, 1966.
86. *Хаусдорф Ф.* Теория множеств. М.; Л.: ГТТЛ, 1937.
87. *Хеннекен П. Л., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые её приложения. М.: Наука, 1974.
88. *Шатихин Л. Г.* Структурные матрицы и их применение для исследования систем. М.: Машиностроение, 1974.
89. *Шиханович Ю. А.* Введение в современную математику. Начальные понятия. М.: Наука, 1965.
90. Высшая математика для экономических специальностей. Ч. 1 - 2. 2-е изд./ Под ред. Н. Ш. Кремера. М.: Высшее образование, 2007.
91. *Григулецкий В. Г., Яценко З. В.* Высшая математика для экономистов. Ростов–на–Дону: Феникс, 2004.
92. *Гусак А. А.* Высшая математика. Учебник для студентов вузов. В 2-х томах. 5-е изд. Минск: Тетра системс, 2004.
93. *Гусак А. А., Бричкова Е. А.* Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач. 6-е изд. Минск: Тетра системс, 2007.
94. *Ильин В. А., Куркина А. В.* Высшая математика. 2-е изд. М.: Из-во МГУ, 2007.
95. *Кастрица О. А.* Высшая математика для экономистов. Учебник. Минск: ООО Новое знание, 2006.
96. *Письменный Дмитрий.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. М.: Высшее образование, Айрис Пресс, 2006.
97. *Редькин Н. П.* Дискретная математика. Курс лекций для студентов-механиков. Изд. 2-е, стереотипное. М.: Краснодар, 2006.