ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫРОЖДЕННОГО УПРАВЛЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ МЕТОДОМ ОГИБАЮЩИХ

В. П. Иванов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН

СПИИРАН, 14-я линия ВО, д. 39, Санкт-Петербург, 199178

УДК 681.3

Иванов В. П. **Оптимизация вырожденного управления динамическими системами методом огибающих** // Труды СПИИРАН. Вып. 3, т. 2 — СПб: СПИИРАН, 2006.

Аннотация. *В статье изложен метод огибающих и его приложение к оптимизации вырожденного управления динамическими системами.* — Библ. 5 назв.

Ivanov V. P. **Dynamic Systems Singular Control Optimization with the Envelop Method** // SPIIRAS Proceedings. Issue 3, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2006.

Abstract. *We describe the envelop method applied to dynamic systems singular control optimization.* — Bibl. 5 items.

1. Постановка задачи

Рассмотрим динамическую систему вида

$$\begin{aligned} &\frac{dx_j}{dt} = f_j(x) + B_j(x)u_j, \qquad j = 1, \dots, m, \\ &\frac{dx_i}{dt} = f_i(x), \qquad\qquad\quad i = m+1, \dots n, \end{aligned} \tag{1}$$

где: t — действительная переменная; $t \in \Im(t)$; $\Im(t)$ — открытое множество вещественной оси t, $\Im(t) = (-\infty, \dots, +\infty)$; $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ — вектор состояния действительного n — мерного пространства $R^n(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in R^n(\mathbf{x})$; $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, $\mathbf{B} = (B_1, \dots, B_m)$ — заданные вектор-функции; $\mathbf{f} \in C_1$, $\mathbf{B} \in C_1$; $B_j \neq 0$, $j = 1, \dots, m$; $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ — m-мерный вектор управления, $\mathbf{u} \in U$, U — заданное множество допустимых управлений; $m < n$.

Задан терминальный функционал:

$$J = F[x_i(T), \quad i = m+1, \dots, n], \tag{2}$$

определенный на решениях уравнений (1). F — некоторая функция, $F \in C_1$, $T \in \Im(t)$.

В момент $t = T$ могут быть заданы дополнительные условия вида

$$h_i = h_i[\mathbf{x}(T)], \quad i = 1, \dots, n, \tag{3}$$

которые могут быть включены в функционал (2) через дополнительные множители Лагранжа.

Отметим, что поскольку система уравнений (1) автономная, то множество $\Im(t)$ допустимо сузить до отрезка $[t_0, T]$, где t_0 — начальное значение аргумента t, $t_0 \in \Im(t)$.

Значения $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ полагаются известными.

Сформулируем задачу оптимального управления следующим образом: среди всех допустимых на отрезке $[t_0, T]$ управлений $\mathbf{u} \in U$, переводящих точку $(t_0, \mathbf{x}(t_0))$ в точку $(T, \mathbf{x}(T))$, найти такие, для которых функционал (2), определенный на решениях системы уравнений (1), принимает наименьшее значение при выполнении условий (3).

Введем вектор-функцию множителей Лагранжа $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$, $\mathbf{p} \in C_1$ и составим гамильтониан задачи оптимизации H:

$$H = \sum_{i=1}^{n} p_i f_i + \sum_{j=1}^{m} p_j B_j u_j . \tag{4}$$

С использованием функции H в пространстве переменных $D^n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\mathbf{x} \in D^n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$, $\mathbf{p} \in D^n(\mathbf{x}, \mathbf{p})$ уравнения (1) запишутся в следующей канонической форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}; \\ \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что H и $\mathbf{p}$ на оптимальном решении непрерывны (см. [1]) и к этому же приводит аналог условия Эрдмана–Вейерштрасса классического вариационного исчисления. Непрерывность сохраняется и в том случае, когда правые части уравнений (1) терпят разрыв.

Для оптимального управления $\mathbf{u}(t)$ и фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$ в рамках принципа максимума необходимо существование такого ненулевого вектора p, что выполняются условия:

1) функция H переменного $\mathbf{u} \in U$ при каждом $t \in [t_0, T]$, т.е. при фиксированных $\mathbf{x}, \mathbf{p}$, достигает при $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{\text{opt}}(t)$ минимума:

$$H(\mathbf{x}_{\text{opt}}, \mathbf{u}_{\text{opt}}, \mathbf{p}) = \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}) . \tag{6}$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как:

$$u_{\text{opt}} = \arg\min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}); \tag{7}$$

2) выполняются условия трансверсальности:

$$\left[H\delta t - \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \right]_{t_0}^{T} + \left[\sum_{i=1}^{n} \left(\mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \right]_{t_0}^{T} = 0, \tag{8}$$

где δt, δx_i — произвольные вариации соответствующих переменных; $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ — вектор констант.

Обобщенные условия трансверсальности в силу независимости вариаций приводят к соотношениям:

$$\begin{aligned} &[H]_{t_0}^{T} = 0 \\ &p_i = \left[\frac{\partial F}{\partial x_i} + \mu_i \frac{\partial h_i}{\partial x_i} \right]_{t_0}^{T}, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{9}$$

Непосредственным следствием системы уравнений (5) и условия (6) является выполнение соотношения:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{10}$$

поскольку вдоль оптимальной траектории

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right).$$

Подставив в это соотношение (5), получим (10).

Для автономных систем соотношение (10) приводит к первому интегралу:

$$H = \text{const}. \tag{11}$$

С учетом (9) для автономных систем при незаданном явно аргументе T имеем:

$$H = \text{const} = 0. \tag{12}$$

На участке особого управления выполняется соотношение:

$$\det \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial u_i \partial u_j} \right\} \equiv 0, \quad (i, j = 1, \dots, m), \tag{13}$$

при $t \in [\tau_1, \tau_2]$, $\tau_1 \in [t_0, T]$, $\tau_2 \in [t_0, T]$.

Показано, что, ввиду линейного вхождения управления в систему уравнений (1), особое оптимальное управление каждой j-той компоненты может быть найдено из системы уравнений:

$$\frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, 2p_s, \tag{14}$$

где p_s — порядок сингулярности, при выполнении следующих необходимых условий оптимальности:

$$(-1)^{p_s} \frac{\partial}{\partial u_j} \left[\frac{d^{2p_s}}{dt^{2p_s}} \left(\frac{\partial H}{\partial u_j} \right) \right] \geq 0, \qquad p_s = 0, 1, 2, \dots \tag{15}$$

Из системы уравнений (14) особое оптимальное управление определяется как $u_{\text{особ}\, j} = u_{\text{особ}\, j}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$.

Отметим, что если в каждый момент времени значения $\mathbf{x}$ известны (могут быть оценены), то вектор $\mathbf{p}$ определен (с точностью до констант) на правом конце фазовой траектории.

Возникает специфическая краевая задача, после решения которой тем или иным способом можно найти $u_{\text{особ}\, j} = u_{\text{особ}\, j}(\mathbf{x}, \mathbf{p})$. Однако вычислительные трудности, стоящие на этом пути, методические ошибки и ошибки округлений при численном решении систем уравнений (14) делают процесс нахождения достоверных значений $u_{\text{особ}\, j}$ весьма трудным.

Поэтому представляется желательным поиск нетрадиционных методов нахождения особого оптимального управления.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

2. Метод огибающих

Докажем следующую теорему: оптимальная траектория динамической системы (1) в фазовом пространстве, определяемая в смысле минимизации функционала (2), является огибающей семейства мгновенных решений, проведенных из каждой ее точки.

Доказательство.

Оптимальная траектория динамической системы (1) удовлетворяют уравнению (см. (12)):

$$H\left[\mathbf{x},\mathbf{p},\mathbf{u}_{\text{opt}}(\mathbf{x},\mathbf{p})\right]=H(\mathbf{x},\mathbf{p})=0=\text{const}. \qquad (16)$$

Введем непрерывную функцию $V(\mathbf{x})$ такую, что

$$V(\mathbf{x}(T))=J=F[x_i(T),\ i=m+1,\dots,n] \text{ и } \mathbf{p}=\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}.$$

Тогда уравнение (16) преобразуем к виду:

$$H(\mathbf{x},\mathbf{p})=H\left(\mathbf{x},\frac{\partial V}{\partial x}\right)=0. \qquad (17)$$

Поскольку функция V входит в уравнение (17) только своими частными производными, то она определяется с точностью до аддитивной постоянной V_0, т.е.:

$$V=V_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})+V_0, \qquad (18)$$

где $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ — вектор независимых параметров, $V_p(x,\alpha)$ — решение уравнения (17), $V_p[\mathbf{x}(t_0),\boldsymbol{\alpha}]=0$.

Запишем уравнения гиперповерхности

$$S=V-V_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})-V_0 \qquad (19)$$

в $(n+1)$-мерном пространстве переменных $V,x_1,\dots,x_n$. Из-за наличия $(n+1)$ независимых параметров $V_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n$ эта гиперповерхность является $(n+1)$-параметрическим семейством гиперповерхностей. Параметр V_0 вызывает только сдвиг вдоль оси V, поскольку $\frac{\partial S}{\partial V_0}=-1\neq 0$. Примем:

$$\begin{aligned} V_0 &= V_0(\gamma_1,\dots,\gamma_n) \\ \alpha_\nu &= \alpha_\nu(\gamma_1,\dots,\gamma_n), \qquad \nu=1,\dots,n, \end{aligned} \qquad (20)$$

где $\gamma_1,\dots,\gamma_n$ — параметры, такие, что

$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\neq 0, \qquad \frac{\partial \alpha_\nu}{\partial \gamma_i}\neq 0, \qquad i=1,\dots,n, \qquad \nu=1,\dots,n, \qquad (21)$$

и построим огибающие S относительно параметров $\gamma_1,\dots,\gamma_n$:

$$\frac{\partial S}{\partial \gamma_\nu}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_\nu}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V_p}{\partial \alpha_i}\cdot\frac{\partial \alpha_i}{\partial \gamma_\nu}-\frac{\partial V_0}{\partial \gamma_\nu}=0, \qquad \nu=1,\dots,n. \qquad (22)$$

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Выбором функций (20) добьемся, чтобы $\det\left(\frac{\partial\alpha_i}{\partial\gamma_\nu}\right) \neq 0$, $i,\nu = 1,\ldots,n$.

Тогда уравнения (22) будут иметь решения:

$$\beta_\nu = \frac{\partial V}{\partial\alpha_\nu}, \qquad \nu = 1,\ldots,n. \tag{23}$$

С другой стороны, если V — полный интеграл уравнения (17), то по теореме Якоби имеем:

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\partial V}{\partial\boldsymbol{\alpha}}, \qquad \mathbf{p} = \frac{\partial V}{\partial\mathbf{x}}. \tag{24}$$

Потребуем, чтобы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ удовлетворяли преобразованию гамильтониана $H(\mathbf{x},\mathbf{p})$ в гамильтониан $H(\boldsymbol{\alpha})$, а также каноническим уравнениям, которые, ввиду (16), запишутся как:

$$\frac{d\boldsymbol{\alpha}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\beta}} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial\boldsymbol{\alpha}} = 0. \tag{25}$$

Так как $\frac{\partial S}{\partial\gamma_\nu} = 0$, $\nu = 1,\ldots,n$, то, ввиду (23–25), имеем, что оптимальные траектории являются огибающими n-параметрического семейства поверхностей.

Представим функцию $V_p(\mathbf{x},\boldsymbol{\alpha})$ в виде суммы функций, каждая из которых зависит только от одной из переменных x_ν, $\nu = 1,\ldots,n$, т.е.:

$$V = \sum_{\nu=1}^{n} \tilde{V}_\nu(x_\nu,\boldsymbol{\alpha}) + V_0. \tag{26}$$

Определим канонические переменные p_ν, $\nu = 1,\ldots,n$:

$$p_\nu = \frac{\partial V}{\partial x_\nu} = \frac{\partial \tilde{V}_\nu(x_\nu,\boldsymbol{\alpha})}{\partial x_\nu}, \qquad \nu = 1,\ldots,n. \tag{27}$$

Согласно выражениям (27) переменные p_ν, $\nu = 1,\ldots,n$ оказываются функциями только от одной x_ν и $\boldsymbol{\alpha}$, в то время как уравнения (1), (5), (17), (24) говорят о том, что p_ν, $\nu = 1,\ldots,n$ в общем случае должны быть функциями всех $x_1,\ldots,x_n$ и остальных p_i, $i = 1,\ldots,n$, $i \neq \nu$. Это противоречие может быть устранено, если приравнять α_ν, $\nu = 1,\ldots,n$ некоторые определенные комбинации переменных $x_1,\ldots,x_n$, т.е.:

$$\alpha_\nu = \alpha_\nu(x_1,\ldots,x_n). \tag{28}$$

Сопоставим выражения (20) и (28). Из сравнения следует, что $p_1,\ldots,p_n$ могут быть определены на параметрическом семействе поверхностей, которое огибает оптимальная траектория, если в качестве параметров $\gamma_1,\ldots,\gamma_n$ соответствующим образом взять фазовые координаты, а уравнения (22) будут разрешимы относительно частных производных V_p по параметрам $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$. Фиксируя в качестве параметров «замороженные» в текущий момент времени значения фазовых координат, мы тем самым на параметрическом семействе поверхностей определим семейство кривых. Назовем их мгновенными решения-

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ми, поскольку они определяются функцией V_p, являющейся решением уравнения (22). В то же время соотношения (25) показывают, что эти кривые в общем случае не являются фазовыми траекториями.

Следовательно, оптимальная траектория динамической системы в фазовом пространстве является огибающей семейства мгновенных решений, проведенных из каждой ее точки. Теорема доказана.

3. Способ построения мгновенных решений

Из доказательства теоремы следует, что для построения мгновенных решений необходимо:

а) Представить функцию V в виде (26);

б) Согласно (27), (28) провести <u>условное</u> разделение переменных в уравнении Гамильтона–Якоби (17); при этом уравнение Гамильтона–Якоби в частных производных первого порядка (17) с n переменными может быть заменено n обыкновенными дифференциальными уравнениями с одной независимой переменной (остальные играют роль параметров); разделение переменных необходимо производить так, чтобы в каждое из уравнений входила бы только одна производная $\frac{\partial \tilde{V}_\nu(x_\nu, \boldsymbol{\alpha})}{\partial x_\nu}$, $\nu = 1, \dots, n$.

Таким образом, ввиду того, что множители Лагранжа линейно входят в гамильтониан, имеем:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tilde{V}_j(x_j, \alpha)}{\partial x_j} = \frac{Z_j(x_j, \alpha)}{f_j + B_j u_j}, \qquad j = 1, \dots, m, \\
&\frac{\partial \tilde{V}_i(x_i, \alpha)}{\partial x_i} = Z_i(x_i, \alpha), \qquad i = m+1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{29}$$

где $Z_\nu(x_\nu, \boldsymbol{\alpha})$, $\nu = 1, \dots, n$ — некоторые непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные по $\boldsymbol{\alpha}$.

в) Проинтегрируем уравнения (29), имея в виду, что в каждом их них только одна соответствующая независимая переменная, а затем сложим и, согласно (26), определим функцию V:

$$V = \sum_{j=1}^{m} \int \frac{Z_j(x_j, \boldsymbol{\alpha})}{f_j + B_j u_j} dx_j + \sum_{i=m+1}^{n} \int Z_i(x_i, \boldsymbol{\alpha}) dx_i + V_0. \tag{30}$$

г) По теореме Якоби определим мгновенные решения с учетом начальных значений для интегралов и (25):

$$\beta_\nu = \frac{\partial V}{\partial \alpha_\nu} = \sum_{j=1}^{m} \int \frac{\partial Z_j(x_j, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} \cdot \frac{dx_j}{f_j + B_j u_j} + \sum_{i=m+1}^{n} \int \frac{\partial Z_i(x_i, \boldsymbol{\alpha})}{\partial \alpha_\nu} dx_i = 0, \quad \nu = 1, \dots, n. \tag{31}$$

Отметим, что на мгновенных решениях $u_j = f(x_j, \boldsymbol{\alpha})$, что упрощает их построение.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

4. Пример

Требуется минимизировать функционал $J = \sqrt{\left(x_3(T) - x_3^k\right)^2 + \left(x_4(T) - x_4^k\right)^2}$, определенный на решениях следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = A(u - \cos x_1), \quad \frac{dx_2}{dt} = B, \quad \frac{dx_3}{dt} = x_2 \sin x_1, \quad \frac{dx_4}{dt} = x_2 \cos x_1,$$

где u — управление, A, B — константы, x_3^k, x_4^k — заданные функции.

Уравнение Гамильтона–Якоби имеет вид:

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} A(u - \cos x_1) + \frac{\partial V}{\partial x_2} B + \frac{\partial V}{\partial x_3} B \sin x_1 + \frac{\partial V}{\partial x_4} B \cos x_1 = 0.$$

Условно разделим переменные с учетом условий трансверсальности:

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} A(u - \cos x_1) + \alpha_2 + \alpha_3 x_2 \sin x_1 + \alpha_4 x_2 \cos x_1 = 0,$$
$$\frac{\partial V_2}{\partial x_2} B = \alpha_2, \quad \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = \alpha_3, \quad \frac{\partial V_4}{\partial x_4} = \alpha_4.$$

Определим V:

$$V = (\alpha_2 + \alpha_3 x_2 \sin x_1 + \alpha_4 x_2 \cos x_1)(t - T) + \alpha_2 \int\limits_{x_2(t)}^{x_2(T)} \frac{dx_2}{B} + \alpha_3 \int\limits_{x_3(t)}^{x_3(T)} dx_3 + \alpha_4 \int\limits_{x_4(t)}^{x_4(T)} dx_4 + V_0.$$

Определим мгновенные решения:

$$x_1 = \eta,$$
$$x_2(T) = x_2(t) + B(T - t),$$
$$x_3(T) = x_3(T) + x_2(T - t)\sin\eta,$$
$$x_4(T) = x_4(T) + x_2(T - t)\cos\eta.$$

Поставляя эти значения в функционал и минимизируя последний, после преобразований получим: $tg\eta = \dfrac{x_3^k - x_3}{x_4^k - x_4}$.

Управление u найдем из системы уравнений: $p_1 = 0$, $\dfrac{dp_1}{dt} = 0$, $\dfrac{d^2 p_1}{dt^2} = 0$.

После преобразований получим (с учетом условий трансверсальности):

$$u = \cos\eta + \frac{1}{A} \cdot \frac{d\eta}{dt}.$$

Производные $\dfrac{d\eta}{dt}$ можно найти, дифференцируя геометрические соотношения, либо применяя численные методы. На мгновенных решениях выполняется соотношение: $x_1 = \eta$ или $x_1 = \eta \pm \pi$, $\eta = \text{const}$.

Заметим, что вырожденное управление в рамках данного примера не зависит явно от B, x_3^k, x_4^k, т.е. является адаптивным по отношению к ним.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Литература

1. *Розоноэр Л. И.* Принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем // Автоматика и телемеханика. 1959. № 10–12. С. 243–267.
2. *Болтянский В. Г.* Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
3. *Сейдж Э. П., Уайт Ч. С.* Оптимальное управление системами. М.: Радио и связь, 1982. 398 с.
4. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особое оптимальное управление. М.: Наука, 1973. 256 с.
5. *Шмутцер Э.* Основные принципы классической механики и классической теории поля (канонический аппарат). М.: Мир, 1976. 157 с.

Труды СПИИРАН. 2006. Вып. 3. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2006. Issue 3. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru