МЕТОДЫ ОБРАБОТКИ ОДНОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

И. Я. Богатушин, Р. И. Полонников

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия ВО, д.39

УДК 519.6

И. Я. Богатушин, Р. И. Полонников. **Методы обработки одномерных сигналов на основе вейвлет-преобразований** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.

Аннотация. *В статье рассмотрены задачи обработки сигналов на основе вейвлет-преобразований. Даны рекомендации по развитию названного метода обработки сигналов.* —Библ. 4 назв.

UDK 519.6

I. J. Bogatushin, R. I. Polonnikov. **Metods of processing of scalar signals on basis wavelets transforms** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.:Nauka, 2005.

Abstract. *In the article, processing of scalar signals on basis wavelets transforms is described.* — Bibl. 4 Items.

1. Введение

Опираясь на результаты, полученные в работе [1], рассмотрим сначала абстрактный фрактальный объект, занимающий ограниченную область R размера L в евклидовом пространстве с размерностью d. Пусть на каком-то этапе его построения он представляет собой множество из N >>1 точек и пусть $N \to \infty$. Каждый шаг итерационной процедуры добавляет к множеству ещё одну точку. Разобьём область R на кубические ячейки ε^d со стороной ε. Будем интересоваться только занятыми ячейками, в которых содержится хотя бы одна точка и пусть номера занятых ячеек меняются в пределах i = 1, 2, 3, ... , N (ε), где N (ε) — суммарное количество занятых ячеек. Пусть также $n_i(\varepsilon)$ — количество точек в ячейке с номером i, тогда величина:

$$p_i(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} (n_i(\varepsilon)/N)\,. \tag{1}$$

есть вероятность того, что наугад взятая точка из множества находится в ячейке i. Иначе говоря, вероятности $P_i(\varepsilon)$ характеризуют относительную заселенность точек. По условию нормировки имеем:

$$\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим теперь обобщенную статистическую сумму $Z(q,\varepsilon)$, где показатель степени q может принимать любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$:

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q(\varepsilon)\,. \tag{3}$$

Спектр обобщённых фрактальных размерностей D_q, характеризующих данное распределение точек в области R, определяется соотношением:

$$D_q = \tau(q)/(q-1), \tag{4}$$

где функция $\tau(q)$ имеет вид:

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln Z(q,\varepsilon)/\ln\varepsilon] \tag{5}$$

Если $D_q = D = const$, то есть не зависит от q, то данное множество точек представляет собой обычный регулярный фрактал с фрактальной размерностью D. Если же D_q есть функция q, то данное множество точек является мультифракталом, который характеризуется нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы Z(q,ε) при $\varepsilon \to 0$:

$$Z(q,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q(\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(q)}. \qquad 6)$$

В случае обычного регулярного фрактала во всех занятых ячейках содержится одинаковое число точек:

$$n_i(\varepsilon) = N/N(\varepsilon). \tag{7}$$

и вероятности $P_i(\varepsilon) = 1/N(\varepsilon)$, тоже одинаковы, так что обобщённая статистическая сумма будет иметь вид:

$$Z(q,\varepsilon) = N^{1-q}(\varepsilon). \tag{8}$$

Учтём, что число занятых ячеек при достаточно малом значении ε есть:

$$N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D}, \tag{9}$$

так как это приближенное равенство лежит в основе определения фрактальной размерности D. Логарифмируя обе части равенства (9) и переходя к пределу при условии, что $\varepsilon \to 0$, имеем:

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln(N(\varepsilon))/\ln(\varepsilon^{-1})]. \tag{10}$$

Подставляя это выражение в (8) и сравнивая с (6) получим для обычного фрактала:

$$\tau(q) = (q-1)D, \tag{11}$$

то есть эта функция является линейной по переменной q, когда все $D_q = D = const$.

Непосредственно из (5) и (3) может быть найдено выражение для производной:

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q(\varepsilon)\ln P_i(\varepsilon)}{(\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^q(\varepsilon))\ln\varepsilon}, \tag{12}$$

имеющей важный физический смысл, о котором будет сказано ниже. При $q = 0$ из (3) следует, что

$$Z(0,\varepsilon) = N(\varepsilon). \tag{13}$$

С другой стороны, в соответствии с (6) и (4) имеем:

$$Z(0,\varepsilon) \approx \varepsilon^{\tau(0)} = \varepsilon^{-D_0}. \tag{14}$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Сопоставляя (14) и (13) видим, что $N(\varepsilon) \approx \varepsilon^{-D_0}$, что соответствует определению (9). Это означает, что величина D_0 представляет собой обычную размерность Хаусдорфа фрактального множества в области R, то есть является наиболее грубой характеристикой этого множества и не несёт информации об его статистических свойствах. Теперь рассмотрим величину D_1. При $q = 1$, в силу условия нормировки (2), статистическая сумма равна:

$$Z(1,\varepsilon) = 1, \tag{15}$$

следовательно, согласно (6) $\tau(1) = 0$ и, таким образом, имеем неопределённость в (4) для D_1. Раскрывая ее, находим, что:

$$D_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon)}{\ln \varepsilon}. \tag{16}$$

С точностью до знака числитель в формуле (16) представляет собой энтропию $S(\varepsilon)$ фрактального множества, соответствующую текущему значению ε:

$$S(\varepsilon) = -\sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i(\varepsilon) \ln P_i(\varepsilon). \tag{17}$$

В термодинамике под P_i понимается вероятность обнаружить систему в состоянии i, и энтропия является мерой беспорядка в системе. Таким образом,

$$D_1 = -\lim_{\varepsilon \to 0} [S(\varepsilon)/\ln(\varepsilon)]. \tag{18}$$

Рассмотрим совокупность из двух приближенных равенств, соответствующих формуле (18) при различных достаточно малых значениях ε

$$S(\varepsilon) \approx \ln(\varepsilon^{-D_1(\varepsilon)}), \tag{19}$$

$$D_1(\varepsilon) \approx S(\varepsilon)/\ln\left(\varepsilon^{-1}\right). \tag{20}$$

Используя подход Шеннона можно говорить о том, что $D_1(\varepsilon)$ в формуле (20) характеризует информацию, необходимую для определения местоположения точки в некоторой ячейке. В связи с этим обобщённую фрактальную размерность D_1, входящую в формулу (18), называют ИНФОРМАЦИОННОЙ размерностью. Формула (20) дает возможность также проанализировать, как изменяется количество информации, необходимое для определения местоположения точки, при стремлении размера ε к нулю. Найдем скорость изменения её количества при уменьшении размера ячейки ε, продифференцировав соотношение (20) по переменной ε:

$$\frac{dD_1(\varepsilon)}{d\varepsilon} \approx \frac{S(\varepsilon) - S'(\varepsilon)\varepsilon \ln(\varepsilon)}{\varepsilon \ln^2(\varepsilon)}. \tag{21}$$

Наконец, рассмотрим случай $q = 2$. Здесь справедлива формула:

$$D_2 = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2(\varepsilon)]/\ln(\varepsilon). \tag{22}$$

Введём в рассмотрение парный корреляционный интеграл:

$$I(\varepsilon) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N(N-1)/2} \sum_{n,m} \theta(\varepsilon - |r_n - r_m|). \tag{23}$$

где суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиус-векторами r_n и r_m, а $\theta(x)$ - ступенчатая (единичная) функция Хевисайда: $\theta(x)=1$, если $x \ge 0$ и $\theta(x)=0$, если $x<0$. Сумма в (23) определяет число пар точек n,m, для которых расстояние между ними меньше, чем ε. Поэтому, поделённая на $N(N-1)/2$, она определяет вероятность того, что наугад взятые точки разделены расстоянием меньшим чем ε. Эту же вероятность можно определить и по-другому. Вероятность попадания двух точек в одну и ту же ячейку есть P_i^2. Суммируя P_i^2 по всем занятым ячейкам, получим вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества R лежат внутри одной ячейки размером ε. Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или порядка ε. Таким образом, с точностью до численных коэффициентов и, принимая во внимание (6) и (11) получим:

$$I(\varepsilon) \approx \sum_{i=1}^{N(\varepsilon)} P_i^2 \approx \varepsilon^{D_2(\varepsilon)} . \tag{24}$$

Следовательно, обобщённая размерность D_2 определяет зависимость корреляционного интеграла от ε в пределе при $\varepsilon \to 0$. По этой причине D_2 называют корреляционной размерностью. Установим её связь с парной корреляционной функцией. Введём плотность вероятности $\rho(r)$:

$$\rho(r) = \frac{1}{N}\sum_n \delta(r - r_i) . \tag{25}$$

Физический смысл $\rho(r)d^d r$ — это вероятность обнаружить точку фрактального множества в объёме $d^d r$ вокруг точки r. Она удовлетворяет условию нормировки:

$$\int_R \rho(r) d^d r = 1. \tag{26}$$

Парная корреляционная функция связана с функцией $\rho(r)$ следующим образом:

$$C(r) = \int_R \rho(r`)\rho(r`+r)d^d r` . \tag{27}$$

и представляет собой плотность вероятности нахождения двух произвольных точек множества на расстоянии r друг от друга. Под интегралом здесь стоит плотность условной вероятности иметь одной точке координату $r'+r$, если другая точка имеет координату r'. В силу отсутствия характерного масштаба длины для введённой таким образом корреляционной функции $C(r)$ характерно степенное поведение с расстоянием r, т.е. $C(r) \approx 1/r^{\beta}$, где β — некоторый показатель степени. Он связан с корреляционной размерностью D_2 соотношением:

$$\beta = d + D_2 . \tag{28}$$

где d — обычная евклидова размерность пространства. Действительно, в силу своего определения плотности условной вероятности величина $C(r)$, будучи проинтегрирована по d — мерной сфере радиуса ε, определяет вероятность того, что две наугад взятые точки из множества R окажутся внутри этой сферы. А это есть не что иное, как корреляционный интеграл:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$I(\varepsilon) \approx \int_0^{\varepsilon} drr^{d-1} C(r) \approx \varepsilon^{\beta-d} . \tag{29}$$

Сравнивая это с выражением (24) приходим к соотношению (28).

Можно показать, что если корреляционная функция мультифрактала убывает с расстоянием по степенному закону:

$$C(r) \approx 1/r^{d+D_2} . \tag{30}$$

то её Фурье-компонента $C(k)$ в зависимости от волнового вектора k тоже меняется по степенному закону:

$$C(k) \approx 1/k^{D_2} . \tag{31}$$

Простую физическую и математическую интерпретацию имеют также значения $q = 3, \ldots n, \ldots$ в виде указанного ряда натуральных чисел, при их использовании с целью формирования статистических сумм по формуле (3). В этой формуле каждое слагаемое $P_i^q(\varepsilon) = P_i^n(\varepsilon)$ обозначает вероятность нахождения в некоторой ячейке с номером i определенного количества $n(\varepsilon)$ введенных выше точечных значений фрактала.

Таким образом, может существовать бесконечное множество размерностей D_q, которые характеризуют различные статистические свойства исследуемого фрактала. Продифференцировав равенство (11) по переменной q, предположив, что $D = const$, получим формулу для вычисления размерности D с помощью производной от функции $\tau(q)$

$$D = \frac{d\tau(q)}{dq} = h , \tag{32}$$

где введено обозначение

$$h = \frac{d\tau(q)}{dq} . \tag{33}$$

Так как в рассматриваемом случае размерность D является постоянной величиной, то эту постоянную можно считать функцией от переменной h:

$$D(h) = h . \tag{34}$$

Продифференцировав еще раз равенство (11) по переменной q, предположив, что $D \neq const$, после элементарных преобразований получим уравнение для определения размерности $D(h)$:

$$\left[(q-1)\frac{dh}{dq} \right] \frac{dD}{dh} + D - h = 0 . \tag{35}$$

Введем в рассмотрение преобразование Лежандра:

$$D_L = qh - \tau(q) . \tag{36}$$

При преобразовании Лежандра (36) с целью представления D_L с применением аргумента h, то есть в виде $D(h)$ в случае, когда $D(q) = D(h)$ производится изменение аргумента функции $D(q)$, которая согласно (11) имеет вид

$$D(q) = \tau(q)/(q-1) . \tag{37}$$

Уравнению (35) при $h = const$ удовлетворяет функция $D_L(h)$, заданная формулой (36). Действительно, после подстановки этой функции в уравнение (35), получим равенство

$$\tau(q) = (q-1)h . \tag{38}$$

Равенство (38) соответствует формуле (11), если принять во внимание соотношение (34), что доказывает справедливость применения $D_L(h)$, заданной формулой (36), при условии $h = const$, то есть в том случае, когда мы имеем дело с регулярным фракталом. Подставив функцию $\tau(q)$, заданную в виде (38), в равенство (36), с учетом (34) получим, что

$$D_L = h = D. \tag{39}$$

Функция $D(q)$, заданная в виде (37) имеет минимальное значение при равенстве нулю ее первой производной:

$$\frac{dD}{dq} = \frac{h(q)(q-1) - \tau(q)}{(q-1)^2} = 0. \tag{40}$$

Приравнивая нулю числитель равенства (40), получим:

$$\tau(q) = (q-1)h(q). \tag{41}$$

По форме равенство (41) совпадает с формулой (38). Но, тем не менее, эти формулы имеют различный математический смысл. Формула (38) справедлива только в случае, когда $h = const$. Равенство (41) получено нами без каких — либо ограничений на функцию $h(q)$ и оно справедливо только при определенном значении $q = q_0$. В сущности, оно и служит для определения этого значения q_0. С другой стороны соотношение (41) выполняется при $h = const$, поэтому можно считать, что оно является соотношением (38), полученным из условия (40), то есть при $dD/dq = 0$. Производные всех функций, входящих в равенства (39), в которых h=const, равны нулю. Поэтому при нахождении минимума правой части равенства (36) по переменной q мы обязательно найдем значение D, соответствующее регулярному фракталу при $h = const$ и функцию $D_L(h)$, соответствующую мультифракталу.

Сказанное без использования понятия производной можно записать в виде

$$D_L(h) = \min_q (qh - \tau(q)). \tag{42}$$

Итак, функция $D_L(h)$ определенная нами в виде (42) только исходя из условия, что она позволяет определить размерность Хаусдорфа регулярного фрактала, если таковой подвергнут исследованию, позволяет также определить размерность мультифрактала во всех остальных случаях. Следовательно, соотношение (42) можно рассматривать как определение некоторой размерности мультифрактала.

Перейдем теперь к вопросам математической обработки мультифрактальных функций одной переменной (называемых в приложениях одномерными сигналами).

Согласно работе [2] для достижения максимальной эффективности обработки одномерного сигнала используется структурное древовидное представление этого сигнала. Названное представление сигнала можно сформировать с помощью фильтрующих преобразований, как это показано в работе [2], например, для фрагмента аудиосигнала «К Элизе» Бетховена. При этом используется семейство фильтров на основе функции Гаусса.

При разработке методов мультифрактального анализа сигналов на основе вейвлет-преобразований были широко использованы некоторые аналогии между методами безкоординатного описания фракталов на основе их покрытия совокупностями ячеек, объемом ε^d, с размером стороны ячейки ε в простран-

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

стве с топологической размерностью d, и методами обработки сигналов с применением базисных функций, получаемых на основе одной вейвлет-функции [4] путем масштабирования и сдвига ее аргумента. Так, например, аналогом покрытия фрактального множества совокупностью упомянутых ячеек является «покрытие» мультифрактального сигнала совокупностью заданных вейвлет-функций, что выражается в вычислении интегралов от произведений заданного сигнала и различных вейвлет-функций. О других аналогиях скажем в процессе изложения метода WTMM (Wavelet transform modulus maxima), базирующегося на вейвлет-преобразованиях. Изложение произведем строго в соответствии с работой [3]. Это необходимо для того, чтобы можно было легко производить рассмотрение введенных авторами направлений развития данного метода в сравнении с предложенным в работе [3] методом обработки одномерных сигналов. После описания названного алгоритма приведем предложения авторов данной статьи по совершенствованию существующего метода вейвлет-преобразований одномерных сигналов, используя результаты работы [4].

Будем считать, что дискретный обрабатываемый сигнал $s(t)$ задан на интервале (B_1, B_2) с шагом дискретизации Δt. Этот сигнал должен быть известен также слева и справа от рассматриваемого интервала на интервалах такой же длины (B_0, B_1) и (B_2, B_3) соответственно. Будем считать, что фрактальный сигнал на этих трех интервалах является трехкратным повторением одного и того же сигнала, то есть периодическим. Шаг дискретизации сигнала на всех указанных интервалах одинаковый. При выполнении вейвлет-преобразований будем использовать вейвлет-преобразующие функции вида

$$\psi = \psi(a,b,t) = 2^{-1}(\pi a)^{-1/2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}e^{-\frac{(t-b)^2}{4a}}, \qquad (43)$$

где a,b — масштабный множитель и параметр сдвига по оси времени t соответственно. Параметр b принимает начальное значение равное B_1, увеличиваясь при переходе от текущего шага к последующему на величину $\Delta b = \Delta t$ вплоть до достижения конечного значения B_2. Масштабный множитель изменяется с некоторым шагом в пределах от $a = a_{MIN}$ до $a = a_{MAX}$.

2. Описание алгоритма обработки одномерного сигнала

Дадим краткое описание алгоритма А1 обработки одномерного сигнала $s(t)$.

Шаг 0. Производится формирование вектора-столбца $A[i]$ (i = 1,2,…,100) таким образом, что $A[i] = 1{,}01 + i$. Компоненты данного вектора имеют различные значения параметра a, входящего в формулу (43).

Осуществляется формирование вектора-строки $BS[j]$ $(j = 0,1,\dots,n1)$; $n1 = [(B_2 - B_1)/\Delta t]$ таким образом, что $BS[j] = B_1 + j\Delta t$, где Δt — шаг дискретизации сигнала $s(t)$, характеристики которого зависят от типа используемого для снятия сигнала прибора. Элементы вектора - строки BS имеют все допустимые дискретные значения параметра b, входящего в формулу (43).

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Осуществляется формирование вектора — строки $T[k]$ $(k=-(n1+1),-n1,...,0,1,2,...,n1,(n1+1),...,2n1,(2n1+1))$; $n1=[(B_2-B_1)/\Delta t]$) так, что $T[k]=B_1+k\Delta t$. Вектор — строка T содержит дискретные значения моментов времени t, входящих в формулу (43).

Производится ввод в оперативную память компьютера исследуемого сигнала $s(t)$ и запись его в ту часть массива $S[j]$, в которой индекс j изменяется следующим образом: $(j=0,1,...,n1)$. Затем сигнал $s(t)$ записывается в массив $S[j]$ сначала со значениями индекса $j=-(n1+1),-n1,...,-1$, а затем со значением индекса $j=(n1+1),2n1,...,(2n1+1)$. Следовательно, один и тот же сигнал $s(t)$ записывается в массив $S[j]$ $(j=-(n1+1),-n1,...,0,1,2,...,n1,(n1+1),...,2n1,(2n1+1))$; $n1=[(B_2-B_1)/\Delta t]$) в трех разных его областях, поэтому данный массив можно считать заполненным значениями периодической функции, образованной в результате записи сигнала $s(t)$.

Шаг 1. Производятся интегральные вейвлет-преобразования функции $s(t)$ и при этом формируется двухмерный массив $M[i,j]$, каждая строка которого соответствует фиксированному значению масштабного множителя a_i, а столбец —фиксированному значению параметра b_j. Индекс i = 1,2,…,100, а индекс j = 0,1,2,…,$n1$; $n1=[(B_2-B_1)/\Delta t]$. Элементы двухмерного массива $M[i,j]$ вычисляются по формулам, содержащим сформированные на шаге 0 матрицы:

$$M1[i,j]=\sum_{k=-(n1+1)}^{2n1+1} S[k]\psi(A[i],BS[j],T[k])\Delta t\,,$$

что соответствует следующим математическим соотношениям

$$T_{\psi}[s](a,b)=\int_{B_0}^{B_3} s(t)\psi(a,b,t)dt,$$

Шаг 2. Осуществляется поиск локальных минимумов и максимумов элементов во всех строках матрицы $M1$. Производится замена найденных в матрице $M1$ значений локальных минимумов и максимумов на их абсолютные величины, а промежуточных значений между локальными минимумами и максимумами на нулевые значения. Данная информация и представляет собой скелетон.

Шаг 3. Находятся наибольшие значения элементов каждой i-й строки матрицы $M1[i,j]$ и эти значения записываются в соответствующую строку вектора — столбца M[i] (i = 1, 2,…,100).

Указанные действия производятся с целью выбора на каждом определенном уровне скелетона, соответствующего фиксированному значению индекса i, самого большого абсолютного значения обработанного сигнала. Такие значения являются аналогами вероятностей нахождения точки фрактала в ячейках, содержащих элементы фрактала. Другие значения скелетона этого уровня не используются потому, что среди них могут встретиться нулевые значения, которые при их возведении на следующем шаге в отрицательную степень q_k приведут к делению на ноль.

Замечание 0. В дальнейшем при разработке программы на основе данного алгоритма не следует принимать во внимание никаких замечаний, так как они предназначены для последующего усовершенствования описываемого алгоритма.

Замечание 1. Если ограничиться в исследованиях только положительными значениями q, то данный шаг выполнять не понадобится. Тогда после шага 2 выполняется шаг 4.

Шаг 4. Производится формирование элементов матрицы $M2[i,k]$ по формуле

$$M2[i,k]=\sum_{l=0}^{i}(M[l])^{q_k}\ , \qquad (44)$$

где $q_{\min}$ = $1\le q_k\le 3$ = $q_{\max}$, $\Delta q=1/100$, i — номер текущей строки матрицы $M2[i,k]$, k = 0, 1,…,200. Для определения значения индекса k в общем случае следует воспользоваться формулой $k=(q_{\max}-q_{\min})/\Delta q$.

На этом шаге мы формируем двухмерную функцию, образуемую в ее дискретном представлении совокупностью одномерных функций, возникающих при каждом фиксированном значении q_k в соответствии с равенством:

$$Z(q_k,a_i)=\sum_{j=0}^{i}(M[j])^{q_k}\ . \qquad (45)$$

Данное равенство аналогично функции $Z(q,\varepsilon)$, заданной формулой (3).

Замечание 2. С учетом замечания 1 вместо формулы (45) следует воспользоваться следующей формулой:

$$M2[r,k]=Z(q_k,a_i)=\sum_{i=0}^{r}\ \sum_{j=0}^{m}M1[i,j]^{q_k}\ , \qquad (46)$$

где k = 0, 1,…,200, r — текущая строку матрицы $M1[r,k]$ (r = 1, 2,…, 100).

Шаг 5. Осуществляется формирование элементов массива $M3$, содержащего значения двухмерной функции, таким образом, что

$$M3(i,k)\ =\tau(q_k,a_i)=\ln(Z(q_k,a_i))/\ln(a_i)\,. \qquad (47)$$

Это аналог функции $\tau(q)$ из (5). Переменная a_i — аналог ε_i.

Шаг 6. Производится вычисление значений матрицы $M4$, элементы которой состоят из производных $h(q)$ функции $\tau=\tau(q_k,a_i)$ по формулам

$$M4(i,k)=h_{ik}\ =\frac{\tau(q_k+\Delta q,a_i)-\tau(q_k,a_i)}{\Delta q}\,. \qquad (48)$$

Шаг 7. Выполняется вычисление значений массива $M5$ по формулам

$$M5(i,k)\ =\ D(h_{ik},a_i)=h_{ik}q_k-\tau(q_k,a_i)\,. \qquad (49)$$

Здесь производится введенное выше формулой (36) преобразование Лежандра.

Шаг 8. Формируются элементы вектора $M6$, каждый из которых равен сумме всех элементов столбцов матрицы $M5$:

$$M6(k)=\sum_{k=0}^{m}M5[i,k]^{q_k}\ . \qquad (50)$$

Данные суммы с точностью до постоянных множителей равны значениям интегралов положительных функций $D(h_{ik}, a_i) = h_{ik}q_k - \tau(q_k, a_i)$ по аргументу a при фиксированных значениях q_r.

Шаг 9. Осуществляется поиск минимального элемента вектора $M6$. Эта процедура эквивалентна процессу поиска минимума функции Лагранжа в соответствии с формулой (42), так как эта функция достигает минимума в том случае, когда интеграл от ее сечения в некоторой точке q_r наименьший. При этом определяется и фиксируется значение $q = q_r$, при котором эта функция минимальна в соответствии с тем, что минимальный элемент находится в строке r вектора $M6$.

Шаг 10. Производится аппроксимация функции

$$D(h_{ir}, a_i) = D(h_{ir}) = h_{ir}q_r - \tau(a_i, q_r), \qquad (51)$$

полученной из элементов столбца матрицы $M5$ полиномиальной функцией

$$Dan(h_{ir}) = \sum_{i=0}^{n} p^i h_{ir}{}^i, \qquad (52)$$

и нахождение коэффициентов этой аппроксимирующей функции путем аппроксимации функции $D(h_{ir}, a_i)$, заданной формулой (51). Число n целесообразно выбрать постоянным, произведя предварительные исследования типового одномерного энцефалографического сигнала.

Шаг 11. Нахождение наибольшего по абсолютной величине отклонения ε аппроксимирующей функции от аппроксимируемой:

$$\varepsilon = \max(abs(D(h_{ir}) - \sum_{i=0}^{n} p_i h_{ir}{}^{\mathrm{i}})). \qquad (53)$$

Шаг 12. Выход. Осуществляется вывод на экран дисплея численных значений функций $D(h_{ir})$ и $Dan(h_{ir}) = \sum_{i=0}^{n} p^i h_{ir}{}^i$, а также аналитический вид аппроксимирующей функции $Dan(h_{ir}) = \sum_{i=0}^{n} p^i h_{ir}{}^i$ и ее аппроксимирующих коэффициентов, а также величины погрешности аппроксимации ε.

3. Развитие методов обработки одномерных сигналов

Сначала отметим существенную разницу в выборе используемой для обработки информации между фракталами и мультифрактальными одномерными функциями (сигналами). В первом случае используются результаты покрытий фрактала достаточно малыми и равными по величине d-мерными ячейками со стороной ε, а во втором применяются одновременно «покрытия» различных размеров, соответствующих разным значениям параметра a вейвлет-преобразующих функций (43). Некоторое соответствие между двумя названными подходами имело бы место только в том случае, если бы покрытию фрактала ячейками со стороной ε_i соответствовали только вейвлет-преобразующие функции с некоторым фиксированным параметром преобразования a_i, то есть для формирования функций $Z(q_k,a_i)$ использовался бы только один уровень интегральных вейвлет - преобразований. Здесь говорится не о соответствии, а только о некотором соответствии, потому что фрактал при нашем рассмотрении покрывался непересекающимися ячейками, а мультифрактальная функция «покрывается» пересекающимися по области определения вейвлет - функциями. В случае использования других интегральных вейвлет-преобразований на основе функций, отличающихся от вейвлет-преобразующих функций (43), в общем случае области определения этих функций могут быть как пересекающимися, так и непересекающимися одновременно.

Так как нашей целью является получение значимой и понятной информации на основе имеющихся сигналов, то в дополнение к информации, которую можно получить с применением изложенного выше алгоритма А1, рассмотрим также возможность получения другой полезной информации. В завершение высказанного выше соображения о некотором соответствии методов исследования фрактала и мультифрактального сигнала целесообразно провести исследования по применению других результатов интегральных вейвлет-преобразований. Например, могут быть использованы результаты обработки исходного сигнала только одного уровня обработки путем применения интегральных вейвлет-преобразований при фиксированном и достаточно малом значении a_i. Здесь аналогами значений P_j могут быть значения абсолютных величин минимумов и максимумов функции данного уровня обработки. Функции $Z(q_k,a_i)$ могут быть получены с применением формулы (3).

После построения двухмерной функции $\tau(q_k,a_i)=\ln(Z(q_k,a_i))/\ln(a_i)$ на шаге 5 изложенного выше алгоритма А1 целесообразно вычислить двухмерную функцию $D(q_k,a_i)$, воспользовавшись формулой (37):

$$D(q_k,a_i) = \tau(q_k,a_i)/(q_k-1). \qquad (54)$$

Далее можно осуществить полиномиальные аппроксимации по переменной a_i ряда одномерных функций $D_{q_k}(a_i)$, получаемых на основе построенной двумерной функции $D(q_k,a_i)$ при фиксированных значениях q_k, поскольку нами уже было показано, что такие функции допускают различную смысловую интерпретацию и отличаются друг от друга. Возможны также аналогичные аппроксимации сечений двухмерной функции $D(q_k,a_i)$ при фиксированных значениях a_i, которые образуют совокупность одномерных функций $D(q_k)$. Полученные таким образом коэффициенты аппроксимирующих функций несомненно несут дополнительную информацию об исследуемом сигнале. В качестве одного из важнейших источников получения дополнительной информации следует рассматривать аппроксимирующие коэффициенты двухмерной функции $D(q_k,a_i)$ при ее аппроксимации в виде полиномиальной функции двух аргументов. И, наконец, возможна полиномиальная аппроксимация функции $\tau(q_k,a_i)$.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Вместо примененных в алгоритме A1 интегральных вейвлет-преобразований с целью экономии вычислений возможно применение также интегральных преобразований на основе функции Гаусса

$$G(t) = [1/(2(\pi a)^{\frac{1}{2}})]\exp\left(-\frac{(t-b)^2}{4a}\right), \tag{55}$$

которая не относится к вейвлет-преобразующим функциям. Фильтрующее преобразование сигнала $s(t)$ с применением функции (55), которая при $a \to \infty$ стремится к дельта - функции Дирака, вновь приводит к исходному сигналу $s(t)$.

С целью последующей обработки возможно получение одномерных функций, каждое значение которых соответствует разным плавно изменяющимся переменным значениям q_k. Для этого могут быть использованы кроме функции $D(q_k, a_i)$, заданной формулой (54), также матричные представления двумерной функции преобразования Лежандра (49) или функции $\tau(q_k, a_i)$, определяемой равенством (47). Такие одномерные функции могут быть получены, например, в результате последовательного выбора элементов матрицы $M5$, содержащей значения двухмерной функции $D_L(q_k, a_i)$, сформированной на шаге 7 алгоритма A1, начиная, например, с элемента матрицы $(M5)_{11}$ и заканчивая элементом $(M5)_{nm}$, то есть одномерная функция формируется из элементов, расположенных на главной диагонали указанной матрицы или стоящих на параллельных ей диагоналях. Затем производится полиномиальная аппроксимация полученных функций либо по аргументу a, либо по аргументу t. Аналогичные функции могут быть построены путем соответствующего выбора элементов, стоящих, например, на диагонали упомянутой матрицы, перпендикулярной главной.

После обработки сигнала $s(t)$, заданного дискретным образом на интервале $(0, T)$ с применением вейвлет-преобразующей функции (43) или преобразующей функции (55) на некотором уровне преобразования с достаточно малым фиксированным значением a_i получим функцию $s_{a_i}(t)$. На ее основе можно построить двухмерную функцию $Z(q_k, a_i, t)$, зависящую от аргументов q_k и t, следующим образом. При каждом фиксированном значении q_k и некотором дискретном значении t_j находим текущее значение функции $Z(q_k, a_i, t_j)$ по формуле:

$$Z(q_k, a_i, t_j) = \sum_{m=1}^{j} abs(s_{a_i})^{q_k}(t_m), \tag{56}$$

где $t_1 = 0$, а наибольшее значение $t_m = T$. Функция $abs(x)$ имеет значение абсолютной величины аргумента х. Суммирование по формуле (56) производится с использованием всех подряд расположенных дискретных значений функции $s_{a_i}(t_m)$, заданных с шагом Δt.

Заметим, что формула (56) применима и к нулевому уровню обработки сигнала, то есть попросту говоря она применима к самому исходному сигналу $s(t)$.

Далее полученная указанным способом двухмерная функция $Z(q_k, a_i, t)$, зависящая от аргументов q_k и t, может быть использована с целью построения

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

на ее основе одномерных функций каким — либо из предложенных выше способов. Эти функции в свою очередь могут быть аппроксимированы с применением полиномов от их аргументов. Возможна также двухмерная полиномиальная аппроксимация самой двухмерной функции $Z(q_k, a_i, t)$.

4. Выводы

В данной статье авторами показано, что возможно получение большого объема необходимой информации о одномерном сигнале на основе его обработки с использованием вейвлет-преобразования, преобразующая функция которого содержит только один подходящий фиксированный масштабный множитель. При использовании для обработки одномерного сигнала преобразующей функции с ограниченным дискретным множеством масштабных множителей, изменяющихся в заданных границах, получаются различные двумерные функции, которые могут служить основой для дальнейшей обработки с целью получения полезной информации об обрабатываемом сигнале. На основе упомянутых двумерных функций могут быть получены монотонно возрастающие и неубывающие одномерные функции, содержащие сведения о величине и порядке вхождения абсолютных значений максимумов и минимумов двумерных функций. Эти функции в свою очередь могут служить основой для последующей обработки. Предложенные авторами идеи в области обработки одномерных сигналов могут служить основой для получения модификаций алгоритма А1, которые должны быть реализованы в виде различных алгоритмов обработки одномерных сигналов. Описание упомянутых алгоритмов и изложение результатов, полученных в результате их применения для обработки одномерных сигналов, является предметом следующей публикации.

Литература

[1] *Божокин С. В., Паршин Д. А.* Фракталы и мультифракталы. Ижевск, НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. 128 с.
[2] *Скурихин А. В.* Рекурсивно-иерархическое представление одномерных фракталоподобных сигналов // Труды СПИИРАН, т. 1. СПб: СПИИРАН, 2001.
[3] *Павлов А. Н. и др.* Мультифрактальный анализ временных рядов // Изв. Вузов «ПНД», т. 9, № 3, 2001.
[4] *Астафьева Н. М.* Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1966, том 166

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru