ДОЛЕВЫЕ СТРУКТУРЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ВЕЛИЧИНАХ

В. Е. Марлей

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия ВО, д. 39
<vmarley@mail.iias.spb.su>

УДК 681.322.067

В. Е. Марлей. **Долевые структуры и моделирование в относительных величинах** // Труды СПИИРАН, Вып. 2, т. 2. — СПб.: Наука, 2005.

Аннотация. *В работе рассмотрен подход к построению моделей в относительных величинах на основе исчисления долевых структур.*

UDC 681.322.067

V. E. Marley. **The portions structure and modeling with using only ratio values** // SPIIRAS Proceedings. Issue 2, vol. 2. — SPb.: Nauka, 2005.

Abstract.*The article is devoted to the method of creation models with using only ratio values based on calculation of portions structure are discussed*.

С долевыми структурами люди сталкиваются постоянно. Их называют по-разному, но обычно слова структура и доля встречаются. Например, рассматриваются доли продукции отраслей в общей продукции промышленности, концентрация веществ в растворе, половозрастная структура населения и т.п. Все, кто занимался моделированием, их использовали, выводили нужные формулы, потом их забывали, выводили вновь и т.д. В данной работе делается попытка обобщить и упорядочить имеющийся опыт работы с долевыми структурами и рассмотреть их как математический объект. Хотя все эти свойства вытекают из общеизвестных соотношений теории множеств и алгебры, в литературе не удалось найти систематического рассмотрения данного вопроса.

Рассмотрим основные особенности долевых структур. Прежде всего, предполагается разбиение некоторого ограниченного множества на непересекающиеся классы. Например, людей можно разделить по половому признаку — мужчины и женщины. Данные классы не пересекаются (гермафродитов можно выделить в отдельный класс). Таким образом, можно говорить о доле женщин или доле мужчин, которые будут отношением числа женщин или числа мужчин к общему числу людей. Перечисление долей всех выделенных классов будем называть долевой структурой.

Рассмотрим в качестве примера следующий процесс. Пусть имеется некоторая емкость, в которой находится смесь нескольких жидкостей. В течение некоторого времени в эту емкость влили определенный объем смеси жидкостей со своим составом и влили часть содержимого. Какой состав и в каких пропорциях будет в емкости к концу периода? Считаем, что вещества в смесях не взаимодействуют друг с другом, т.е. ничего нового в составе смесей не появляется, и ничего по сравнению с исходными объемами компонентов не исчезает, если жидкость не трогают.

Построим модель этого процесса. Обозначим

$B(t)$ — общий объем, который был в емкости к началу периода t ,

$W(t)$ — общий объем, который был влит в емкость в период t,

$V(t)$ — общий объем, который был вылит из емкости в период t.

Тогда общий объем в емкости (без учета смесей) к началу $t+1$ периода будет

$$B(t+1) = B(t) + W(t) - V(t).$$

Пусть $B_i(t)$ — объем i-го компонента смеси в емкости $B(t)$.

$B(t) = \sum_{i=1}^{i=n} B_i(t),\ n$ — число компонент в смеси $B(t)$.

$W_{iw}(t)$ — объем iw го компонента во вливаемой смеси $W(t)$.

$W(t) = \sum_{iw=1}^{iw=m} W_{iw}(t),\ m$ — число компонент во вливаемой смеси $W(t)$.

$V_{iv}(t)$ — объем iv-го компонента в выливаемой смеси $V(t)$.

$V(t) = \sum_{iv=1}^{iv=l} V_{iv}(t),\ l$ — число компонент в выливаемой смеси $V(t)$.

Тогда i-компонента в $B(t+1)$ в общем случае будет, если считать, что для одинаковых компонент

$$B_i(t+1) = B_i(t) + W_{iw}(t) - V_{iv}(t).$$

Если каких-либо компонент в смешиваемых объемах нет, то соответствующие элементы в данной формуле будут равны нулю.

Модель в абсолютных величинах построена (рис. 1). Она требует задания в абсолютных величинах всех компонент во взаимодействующих объемах.

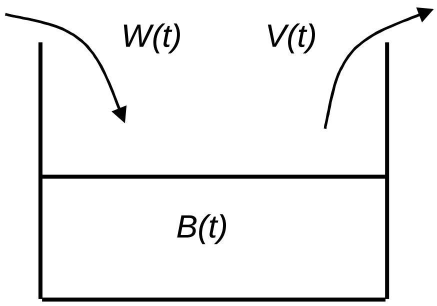

Рис. 1. Изменение объема в емкости.

Однако в практических задачах часто нужны не просто абсолютные значения, а определенные соотношения компонентов. Например, в стекле должно быть определенное соотношение окислов металлов, задаваемое их долями. Поделим на $B(t)$ все члены в формуле $B(t) = \sum_{i=1}^{i=n} B_i(t),\ n$, в результате получим

$1 = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{B_i(t)}{B(t)},\ d_i^B(t) = \frac{B_i(t)}{B(t)}$ — доля i-го компонента в $B(t)$, аналогично $d_{iw}^W(t) = \frac{W_{iw}(t)}{W(t)}$, $d_{iv}^V(t) = \frac{V_{iv}(t)}{V(t)}$, тогда формула для i-ой компоненты $B(t+1)$:

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$B_i(t+1) = B(t)d_i(t) + W(t)d_{iw}^W(t) - V(t)d_{iv}^V(t)$$

или

$$B(t+1) \bullet d_i(t+1) = B(t)d_i(t) + W(t)d_{iw}^W(t) - V(t)d_{iv}^V(t),$$

$$\left(B(t) + W(t) - V(t)\right) \bullet d_i(t+1) = B(t)d_i(t) - W(t)d_{iw}^W(t) - V(t)d_{iv}^V(t);$$

поделим правую и левую части на $B(t)$, получим

$$\left(1 + \frac{W(t)}{B(t)} - \frac{V(t)}{B(t)}\right) \bullet d_i(t+1) = d_i(t) + \frac{W(t)}{B(t)} d_{iw}^W(t) - \frac{V(t)}{B(t)} d_{iv}^V(t).$$

Обозначим $\frac{W(t)}{B(t)} = K_W(t)$, $\frac{V(t)}{B(t)} = K_V(t)$.

$K_W(t)$, $K_V(t)$ — соотношения вливаемого $W(t)$ и выливаемого $V(t)$ объемов относительно $B(t)$. Доля i-ой компоненты в $B(t+1)$ будет

$$d_i(t+1) = \frac{d_i(t) + K_W(t) \bullet d_{iw}^W(t) - K_V(t) \bullet d_{iv}^V(t)}{1 + K_W(t) - K_V(t)}.$$

Таким образом получили формулу, позволяющую рассчитать доли i-ой компоненты в $t+1$ период без использования абсолютных величин, если известны $K_W(t)$ и $K_V(t)$. Разрешение данной формулы относительно других долей позволяет найти требуемые значения $d_i(t)$ или $d_{iw}^W(t)$, или $d_{iv}^V(t)$, которые необходимы, чтобы получить требуемое значение $d_i(t+1)$.

Есть много задач, для которых важны не абсолютные значения компонент, а их соотношение. Например, при варке стекла важно именно процентное соотношение окислов, составляющих стекломассу. Аналогичные примеры можно привести и в других предметных областях: экономике, экологии и т.п. Использование подобных формул позволяет получить условия соблюдения этих соотношений без использования абсолютных величин, а затем, подставляя различные значения величин, (в нашем случае $B(t)$), получать различные множества согласованных между собой абсолютных значений всех компонент. То есть использование долевых структур позволяет агрегировать все возможные варианты согласованных абсолютных значений анализируемых величин.

Рассмотрим теперь долевые структуры, как математический объект. Имеется ограниченное множество B, $|B|$ — мощность множества. Данное множество разбито на n классов B_i.

$B_i \subseteq B$, $B = \bigcup_{i=1}^{i=n} B$, $B_{i1} \cap B_{i2} = \varnothing \Leftrightarrow i_1 \neq i_2$, $|B_i|$ — мощность i-го класса, $|B| \geq |B_i|$, $|B| = \sum_{i=1}^{i=n} |B_i|$.

<u>Определение 1.</u> Доля d_i^B класса (компоненты) $B_i \subseteq B$ — отношение мощностей множеств B_i и B.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$d_i^B = \frac{|B_i|}{|B|};\ \ d_i^B \in [0{,}1].$$

Рассмотрим сумму долей всех классов:

$$\sum_{i=1}^{i=n} d_i^B = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{|B_i|}{|B|} = \frac{1}{|B|}\sum_{i=1}^{i=n} |B_i| = \frac{|B|}{|B|} = 1.$$

Определим понятие долевой структуры.

Определение 2. Долевая структура — дискретное конечное множество $D^n(B) = \{d_1^B, ..., d_n^B\}$, где d_i^B — доля i-го класса выделенного в множестве B, $\sum_{i=1}^{i=n} d_i^B = 1$, $n = |D^n(B)|$ — число классов, на которое разбито множество B.

Определим понятие равенства долевых структур.

Определение 3. Долевые структуры $D^n(B)$ и $D^m(A)$ строго равны между собой тогда и только тогда, когда $n = m$ и между долями обеих структур имеется взаимнооднозначное отображение, при котором соответствующие друг друга доли равны $d_i^A = d_j^B$.

Рассмотрим возможные преобразования долевых структур, которые могут встретиться в практической работе.

Прежде всего две внешние операции, которые позволяют переходить от абсолютных значений к долевым структурам и от долевых структур к абсолютным значениям.

Операция получения долевой структуры

Представим значения мощностей всех классов, на которое разбито множество B как вектор строку $(\ |B_1|, ..., |B_i|, ..., |B_n|\ )$, тогда вектор-строка соответствующая долевой структуре $D^n(B) = (d_1^B, ..., d_i^B, ..., d_n^B)$,получится умножением скаляра равного $\frac{1}{|B|}$ на вектор-строку $(\ |B_1|, ..., |B_i|, ..., |B_n|\ )$:

$$D^n(B) = \frac{1}{|B|} \oplus (|B_1|, ..., |B_n|).$$

Операция перехода к абсолютным значениям

$$|B| \otimes D^n(B) = (|B_1|, ..., |B_n|).$$

Умножаем скаляр $|B|$ на вектор строку $D^n(B) = (d_1^B, ..., d_n^B)$.

Рассмотрим теперь внутренние операции над долевыми структурами.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Операция раскрытия (подстановки) долевой структуры

В одном из выделенных классов $B_i \subseteq B$ выделяются подклассы, то есть рассматривается $D^m(B_i)$. Необходимо определить, как изменится долевая структура B $D^n(B)$, если подклассы B_i рассматривать как классы B.

$$
\begin{aligned}
&D^n(B) = \left\{d_1^B, ..., d_i^B, ..., d_n^B\right\};\\
&D^m(B_i) = \left\{d_1^{B_i}, ..., d_j^{B_i}, ..., d_m^{B_i}\right\};\\
&D^n(B) \circ D^m(B_i) = \left\{d_1^B, ..., d_{i'}^B, ..., d_{n+m-1}^B\right\} = D^{n+m-1}(B),
\end{aligned}
$$

где для всех $i' \in [i, i+m-1]$ $d_{i'}^B = d_i^B \bullet d_j^{B_i}$.

Операция свертки долевой структуры

Часть ранее выделенных классов сводится в один класс. Возможно два случая. Первый, когда просто часть классов объединяется, второй, когда учитывается внутренняя структура полученного класса.

В первом случае

$$D^n(B) = \left\{d_1^B, ..., d_i, ..., d_{i+m-1}, ..., d_n\right\}.$$

Классы с , по $i+m-1$ объединяются:

$$
\begin{aligned}
&D^{n-(m-1)}(B) = \left\{d_1^B, ..., d_{i'}^B, ..., d_{n-(m-1)}\right\};\\
&A\left(D^n(B)\right)\Big|_{i+m-1}^{i} = D^{n-(m-1)}(B),
\end{aligned}
$$

где $d_{i'}^B = \sum_{i=i'}^{i=i'+m-1} d_i$.

Во втором случае

$$A'\left(D^n(B)\right)\Big|_{i+m-1}^{i} = D^{n-(m-1)}(B) \,\&\, D^m(B_{i'}),$$

где $d_{i'}^B = \sum_{i=i'}^{i=i'+m-1} d_i$, а $d_{i'}^{B_{i'}} = \dfrac{d_i}{\sum_{i=i'}^{i=i'+m-1} d_i}$.

Следует заметить, что добавление в число выделенных в B классов пустого класса не меняет значения долей всех остальных классов (доля пустого класса равна нулю), но увеличивает число членов долевой структуры. Таким образом, можно уравнять длины двух структур. В дальнейшем при описании взаимодействия структур будем считать, что они равной длины и упорядочены так, что соответствующие друг другу классы имеют одинаковые индексы (если

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

какого-либо класса в одних из структур нет, то ему будет соответствовать нулевая доля).

Единичной долевой структурой будем считать долевую структуру множества неразделенного на классы $D^1(B)$. Соответственно она имеет только одну долю $d_1^1 = 1$, но может быть дополнена любым количеством нулевых долей. Долевая структура пустого множества единичная.

Рассмотрим бинарные операции над долевыми структурами. Как видно из приведенного в начале статьи примера, в данном случае необходимо учитывать соотношения величин взаимодействующих множеств, обозначим его k, $k = \dfrac{|B_2|}{|B_1|}$.

Операция сложения долевых структур

В данном случае можно это проинтерпретировать как смешивание двух объектов, состоящих из нескольких компонент. По аналогии с рассмотренным примером:

$$\left.\left[D^n(B_1) + D^n(B_2)\right]\right|_k = D^n(B_1 - B_1),$$

где $d_i^{B_1+B_2} = \dfrac{d_i^{B_1} + k \bullet d_i^{B2}}{1+k}$.

Считаем, что взаимодействующие объемы измеряются в одних величинах.

Операция вычитания долевых структур

Аналогично сложению:

$$\left.\left[D^n(B_1) - D^n(B_2)\right]\right|_k = D^n(B_1 - B_2),$$

где $d_i^{B_1-B_2} = \dfrac{d_i^{B_1} - k \bullet d_i^{B2}}{1-k}$.

На данную операцию необходимо наложить ограничение, обеспечивающее, что $d_i^{B_1-B_2} \in [0,1]$, то есть для всех $d_i^{B_1-B_2}$ $\quad 0 \le \dfrac{d_i^{B_1} - kd_i^{B_2}}{1-k} \le 1$, $k \ne 1$. Поэтому возможно в данной операции долю следовало бы определить

$$d_i^{B_1-B_2} = \begin{cases} \dfrac{\max(0, d_i^{B_1} - kd_i^{B_2})}{1-k} & при\ k < 1; \\ \max(0, d_i^{B_1} - kd_i^{B_2}) & при\ k = 1. \end{cases}.$$

Долевые структуры будем называть взаимодополняющими, если

$$\left.\left[D^n(B_1) - D^n(B_2)\right]\right|_k = D^n(\varnothing).$$

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Операция внутреннего умножения на скаляр

$$\lambda \bullet D^n(B) = D^n(\lambda \bullet B) = D^n(B).$$

Данная операция описывает изменение долевой структуры при изменении объема в λ раз, при этом все компоненты объема также пропорционально изменяются, поэтому изменения долевой структуры не происходит. Данная операция введена специально, чтобы показать, что оператор долевой структуры линеен. То есть

$$\lfloor D^n(B_1) + D^n(B_2) \rfloor_k = D^n(B_1 + B_2);$$
$$\lambda \bullet D^n(B) = D^n(\lambda B).$$

Операция внутреннего умножения на вектор-строку

Данный оператор необходим, когда мощности классов требуется выразить в других единицах измерения. Например, перейти от объемной концентрации в растворе к массовой. Для этого нужно знать удельные веса всех компонент раствора. Например, водка содержит 0,4 объема спирта и 0,6 объема воды. При переходе от объемной концентрации к весовой, с учетом того, что относительная плотность спирта равна 0,9, а воды — 1,0, получим 0,375 доли спирта и 0,625 доли воды.

$$D^n(B) \bullet \langle g_1, \ldots, g_n \rangle = D^n(B'),$$

где $d_{i'}^{B'} = \dfrac{d_i \bullet g_i}{\sum\limits_{i=1}^{i=n} d_i \bullet g_i}$.

Введенных операций и понятий достаточно для большинства наиболее часто встречающихся в практике ситуаций использования долевых структур.

Исходный пример в данном случае можно записать:

$$D^n(B(t+1)) = \lfloor D^n(B(t)) + D^n(W(t)) \rfloor_{kw} + \lfloor D^n(B(t)) - D^n(V(t)) \rfloor_{kv}.$$

Таким образом, с использованием введенных операций можно описывать компактно и наглядно динамические процессы изменения структур.

Данный подход можно расширить и для случая, когда элементы множеств могут взаимодействовать друг с другом.

В этом случае будет необходимо знать уравнение баланса, описывающего переход взаимодействующих компонент в новые компоненты, и зависимость, описывающую скорость этого перехода для заданного шага процесса. Данные соотношения могут быть описаны введенными операциями, однако общих рекомендаций по данным моделям, не зависящим от предметной области пока дать нельзя.

Труды СПИИРАН. 2005. Вып. 2. Т. 2. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2005. Issue 2. V. 2. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru