ПРОБЛЕМА КВАНТОВАНИЯ СИГНАЛОВ ПО УРОВНЮ И БАЗИСНЫЕ СПЛАЙНЫ

С. Ф. Свиньин

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН
199178, Санкт-Петербург, 14 линия В.О., д.39
svin@mail.iias.spb.su

УДК 621.391.24
С. Ф. Свиньин. **Проблема квантования сигналов по уровню и базисные сплайны** //Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 1. — СПб.: СПИИРАН, 2002.
Аннотация. *Задача определения ошибок квантования сигнала по уровню рассматривается с позиций теории сплайнов. Предлагается способ оценки этой ошибки на основе формул для энергетических спектров при приближении сигналов ступенчатыми В-сплайнами нулевой степени и полиномиальными сплайнами высоких степеней* — Библ. 5 назв.

UDC 621.391.24
S. F. Svinyin. **The problem of signal's level quantization and basic splines** // SPIIRAS Proceedings. Issue1, v. 1. — SPb.: SPIIRAS, 2002.
Abstract. *The problem of the determination of signal quantization mistakes is considering from spline theory position. The method of the mistakes estimation based on formulas for power spectrum with signal approximation by graded B-splines of zero degree and by polynomial splines of high degrees is offering.* — Bibl. 5 items.

Процессы ввода аналоговых сигналов в цифровые вычислительные системы разделяются на процессы дискретизации по времени и квантования по уровню. Если иметь в виду только равномерное квантование по уровню (т.е. с постоянным шагом), то проблема ставится следующим образом.

С одной стороны, число квантованных уровней сигнала x(t)

$$N = x_{max}/q \tag{1}$$

должно быть достаточно большим, чтобы ошибка квантования не превосходила допустимого значения. В формуле (1) обозначены:

x_{max} — максимальное по модулю значение аналогового сигнала;
$q = x_{k+1} - x_k$ — величина шага квантования по уровню;
k — номер текущего уровня квантования.

С другой стороны, не имеет смысла значительно по сравнению с разрешающей способностью цифровых датчиков увеличивать число квантов, дабы предотвратить избыточность в представлении информации и не усложнять конструкцию устройств ввода, не повышать их стоимость.

Существующая теория квантования сигналов по уровню разработана применительно к стационарным детерминированным и случайным процессам, реализуемым как функции времени. Известная трактовка эффекта квантования при равномерном шаге заключается в представлении его как процесса добавления аддитивного шума к сигналу, имеющему определенную плотность вероятности распределения [1]. Квантователь при этом рассматривается как безынерционное устройство. Среднеквадратическое значение ошибки квантования определяется по второму моменту распределения плотности вероятности в пределах заданного шага.

Получены выражения для автокорреляционной функции шума квантования и взаимной корреляционной функции сигнала, подчиняющегося гауссовому распределению, и шума квантования при известной характеристической функции процесса или его спектральной плотности.

В работе [2] теория квантования по уровню рассматривается с позиций теории сигналов с финитным спектром в предположении, что таковыми являются плотности вероятностей распределения сигнала p(x), и следовательно, финитной является характеристическая функция χ(ω). Авторы применили интегральную формулу для ошибки квантования в спектральной области в качестве энергетической оценки высокочастотной части характеристической функции. В формулу для ошибки входит квадрат общего члена кардинального ряда Котельникова-Шеннона, который быстро убывает с ростом частоты. В итоге поставлена проблема «наилучшего усечения спектра», т.е. минимизации ошибки, возникающие при отбрасывании «высокочастотных хвостов» характеристических функций.

Оценки мощности шума квантования, как для равномерного, так и для неравномерного шага квантования по уровню приведены в [3].

Предлагаемый в данной работе подход заключается в построении модели процесса квантования на основе теории полиномиальных базисных сплайнов (В-сплайнов) [4], причем центральной является идея использования аналитической спектральной характеристики последовательности В-сплайнов целой степени m, аппроксимирующих сигнал с произвольным распределением.

Главным критерием, определяющим выбор шага, является оценка разности высокочастотных составляющих энергетических спектров неквантованного и квантованного сплайн-приближений сигнала. Интегральные соотношения для этих составляющих определяются на основе известного равенства Парсеваля, связывающего выражения для энергии сигнала E во временной и в спектральной областях [2]:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F^2(\omega)d\omega, \tag{2}$$

где F(ω) — амплитудная спектральная плотность сигнала.

В соответствии с [5] обозначим как $F_{nq}(\omega)$ выражение для амплитудной спектральной плотности группы В-сплайнов, аппроксимирующих неквантованный сигнал x(t) на интервале [a,b], и как $F_q(\omega)$ — выражение для спектральной плотности квантованных В-сплайнов.

Запись F_{nq} в аналитической форме имеет вид

$$F_{nq}(\omega) = h\left|\frac{\sin(\omega h/2)}{\omega h/2}\right|^{m+1}\left|\sum_{i=0}^{r} b_i \exp(-ji\omega(m+1)h)\right|, \tag{3}$$

где h — расстояние между узлами сплайна степени m (шаг аппроксимации сигнала x(t));

r — число узлов сплайна на интервале [a,b];

b_i — коэффициенты В-сплайна;

i — номер текущего интервала времени.

Для квантованной последовательности спектральная плотность описывается выражением:

$$F_q(\omega) = h_0 \left|\frac{\sin(\omega h_0 / 2)}{\omega h_0 / 2}\right| \left|\sum_{l=0}^{n} b_{ql}^0 \exp(-jl\omega h_0)\right| =$$

(4)

$$= h_0 q \left|\left(\frac{\sin(\omega h_0 / 2}{\omega h_0 / 2}\right)\right| \left|\sum_{l=0}^{n} c_l \exp(-jl\omega h_0)\right|,$$

где h_0 — расстояние между узлами квантованного сплайна нулевой степени;

n — число узлов сплайна нулевой степени на интервале [a,b];

b_{ql} — коэффициенты В-сплайна нулевой степени;

l — номер интервала В-сплайна нулевой степени;

c_l — целые числа, $b^0_{ql}=q\cdot c_l$.

Дисперсия ошибки неквантованного сплайна, обусловленная высокочастотными его составляющими, определяется формулой [5]:

$$\pi D_\omega = \sigma^2(\omega) = \int_{\omega c}^{\infty} F_{nq}^2(\omega) d\omega < C^2 h^2 \int_{\omega c}^{\infty} \left(\frac{sin(\omega h / 2)}{\omega h / 2}\right)^{2m+2} d\omega <$$

(5)

$$< C^2 h^2 \int_{\omega c}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega h}\right)^{2m+2} d\omega = \frac{2^{2m+2} C^2}{(2m+1)\pi^{2m+1}} h.$$

Для дисперсии высокочастотных составляющих квантованного сплайна получаем:

$$\pi D_{\omega q} < C^2 h_0^2 \int_{\omega c}^{\infty} \left(\frac{2}{\omega h_0}\right)^2 d\omega = \frac{4C_q^2}{\pi} h_0, \qquad (6)$$

где C_q — число, ограничивающее сверху в формуле (4) модуль суммы коэффициентов аппроксимации сплайна степени m группой В-сплайнов нулевой степени.

Из (5) и (6) можно получить выражения для разности дисперсий высокочастотных составляющих неквантованного и квантованного сплайнов:

$$D_\omega - D_{\omega q} \le \frac{4}{\pi}\left(\frac{2^m C^2}{(2m+1)\pi^{2m}} h - C_q^2 h_0\right). \qquad (7)$$

Квантование должно быть выполнено таким образом, чтобы эта разность по модулю была меньше, чем D_ω.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Литература

[1] *Косякин А. А.* Статистическая теория квантования по уровню // Автоматика и телемеханика. — 1961, № 6. — с.722-729.

[2] *Хургин Я. И., Яковлев В. П.* Финитные функции в физике и технике. — М.: Наука, 1971.

[3] *Птачек М.* Цифровое телевидение. Теория и техника. — М.: Радио и связь, 1990.

[4] *Марчук Г. И., Агошков В. И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981.

[5] *Свиньин С. Ф.* Дискретизация на основе локальных сплайнов при измерениях сигналов конечной длительности // Метрология. — 1998, № 4. — с. 28-33.