СТРУКТУРНЫЙ СИНТЕЗ: МЕТОДЫ, АЛГОРИТМЫ, МОДЕЛИ, КОМПЬЮТЕРНАЯ ПОДДЕРЖКА

А. В. Флегонтов

Санкт-Петербургский институт информатики и автоматизации РАН,
199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., д.39,
afleg@mail.iias.spb.su

УДК 517.9+681.3:001.89.
А. В. Флегонтов. **Структурный синтез: методы, алгоритмы, модели, компьютерная поддержка** // Труды СПИИРАН. Вып. 1, т. 1. — СПб: СПИИРАН, 2002.
Аннотация. *Рассматриваются методы структурного синтеза и общие принципы инвариантного анализа сложных нелинейных математических моделей. Аналитическая форма представления моделей имеет вид многопараметрических дифференциальных уравнений или динамических систем с управлением. Вводятся понятия о формальных моделях полиномиального типа, формальных интегральных многообразиях и дифференциальных комплексах. Приводятся примеры алгоритмов. Рассматриваются модели полиномиального и сингулярного типа, обратимые и управляемые, экологические минимального типа. Приводятся примеры компьютерных математических справочных систем.* — Библ. 11 назв.

UDK 517.9+681.3:001.89.
A. V. Flegontov. **Structural synthesis: methods, algorithms, models, computer support** // SPIIRAS Proceedings. Issue 1 , v. 1. — SPb: SPIIRAS, 2002.
Abstract. The methods of structural synthesis and common principles of the invariant analysis of complicated nonlinear mathematical models are considered. The analytic form of representation of models looks like the multiparameter differential equations or dynamic systems with control. The concepts about formal models of type polynomial, formal integral manifolds and differential complexes are introduced. The examples of algorithms are reduced. The models polynomial and singular type converted and controlled, ecological minimum type are considered. The examples of the mathematical Handbook are reduced. — Bibl. 11 items.

1. Введение

Вопросы структурного синтеза и инвариантного анализа сложных нелинейных математических моделей тесно связаны с неослабевающим интересом к точным (аналитическим) методам, использующим символьные вычисления, методам конструирования сложных систем в форме дифференциальных уравнений и построения их решений, к многопараметрическим задачам. Этот интерес вызван, прежде всего, тем, что исследование конкретных задач сопряжено с преодолением значительных математических трудностей, обусловленных либо нелинейностью, либо наличием большого числа неопределенных параметров в исходных моделях. Непосредственное получение решений для таких сложных систем обычно сводится к весьма трудоемким вычислительным процедурам, основывающимся на численных методах поиска частных решений, что требует применения мощных вычислительных средств и дорогой аппаратуры управления. При наличии же аналитического решения те же задачи могут быть решены ценой значительно меньших ресурсов и, очевидно, с большей точностью.

В настоящее время, широкое распространение получили именно такие аналитические исследования, опирающиеся на накопленные знания об отдельных типах дифференциальных уравнений и точных представлений их решений. Каждое точное решение имеет большую информационную ценность, вопервых, как точное описание реального сложного процесса в рамках данной аналитической модели, во-вторых, как эталон или результат первого приближения для реализации различных численных методик, в-третьих, как фундаментальный теоретический факт, помогающий совершенствовать используемые модели.

В свою очередь, задание структуры системы базисных образующих и определяющих соотношений дает полное представление для математической модели. Выбираемое для этой цели, как правило, полиномиальное представление является удобным, в силу, конечномерности базиса системы инвариантов и компактности полиномиальной топологии, а также давно используемым в формальных теориях математического моделирования.

Свойства инвариантности, симметрии модельных уравнений являются фундаментальными свойствами любого сложного процесса и, соответственно, математической модели, описывающей этот процесс. Инвариантные же методы эффективны практически для всех типов математических моделей — от алгебраических до динамических.

Знание группы симметрии — группы допускаемых преобразований переменных или параметров — также дает существенную информацию об изучаемой модели, а именно: средство классификации множества решений; средство классификации семейств дифференциальных уравнений, зависящих от произвольных параметров или функций; возможность определения типов дифференциальных уравнений, допускающих заданную группу симметрии.

При решении задач структурного синтеза дифференциальных уравнений с априорной симметрией и задач анализа симметрийной структуры уравнений рассматривается не только отдельное уравнение инвариантное к определенной группе симметрий, но и класс уравнений, связанных дискретной симметрией, а также дифференциальный комплекс уравнений разных порядков, базирующихся на одном многообразии.

Реализация на компьютере такой теоретико-групповой методологии получения аналитических решений для широкого класса систем нелинейных дифференциальных уравнений, кардинально облегчает процессы моделирования и построения соответствующих управлений.

Современные компьютерные технологии предоставляют исследователям не только разнообразные системы аналитических вычислений, но и средства обработки сложной математической информации, а также обеспечивают новые возможности по организации, хранению, иллюстративности и сетевой (доступных для многих пользователей посредством Интернет) передачи такой информации. Таким образом, появление и развитие компьютерных банков моделей, основу которых составляет справочная литература, также приводит к БЗ и интеллектуальным справочным системам.

2. Методы

2.1. Прямые методы группового анализа

Наиболее эффективными из разнообразных теоретико-алгебраических подходов к поиску точных решений дифференциальных уравнений оказались два подхода: классический групповой анализ и дискретно-групповой анализ

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

(ДГА), составляющие современный симметрийный анализ дифференциальных уравнений.

Классический групповой анализ впервые был предложен Софусом Ли в XIX веке, как обобщение идей Н. Абеля и групповой теории Э. Галуа, и основывается на применении непрерывных групп преобразований дифференциальных уравнений.

Современное состояние группового анализа во многом определяется работами 60-х годов XX века (Л. В. Овсянников и его школа) [6]. Алгоритмы поиска группы Ли, развитые академиком Л.В. Овсянниковым, открыли новый этап в исследовании ряда нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными.

Расширение области приложений групп Ли преобразований к уравнениям нелинейной математической физики произошло благодаря обобщению теории С. Ли, созданному к 1977 году Н. Х. Ибрагимовым и Р. Л. Андерсоном (группы Ли-Беклунда) [4].

Для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) сфера применения метода Ли оказалась намного уже, чем для уравнений с частными производными. Как показал сам С. Ли, для уравнений первого порядка метод приводит к уравнению, эквивалентному по сложности исходному; для уравнений высших порядков допускаемая группа часто тривиальна.

Поиск нового подхода к классификации, исследованию и интегрированию ОДУ лежал на пути объединения эвристического опыта таких известных математиков прошлого, как Абель, Бернулли, Клеро, Лагранж, Эйлер, Якоби, стандартных приемов понижения порядка уравнений, собранных в учебниках и справочниках с регулярными методами классического группового анализа. Этот путь и привел к созданию ДГА, а, впоследствии, и к организации Санкт-Петербургской школы современного группового анализа [1–3].

Развитый новый подход к исследованию групповых свойств ОДУ оказался весьма плодотворным и позволил как описать дискретные симметрии классов уравнений, вообще неинтегрируемых, так и найти на основе известных разрешимых уравнений ряд новых, которые, как правило, не могут быть найдены ни классическими, ни регулярными групповыми методами.

К настоящему времени накоплен большой практический опыт применения подобных методов и проанализировано около 7000 уравнений нелинейной динамики, которые ранее рассматривались как не имеющие аналитических решений и не приводились ни в одном из широко известных до 90 годов XX века справочников по дифференциальным уравнениям.

Основные понятия ДГА отражены в виде графов на рис. 1 и 2.

Определение 2.1. Множество уравнений называется типом, если каждый его элемент однозначно определяется вектором параметров.

Пример 2.1. Среди уравнений первого порядка выделяются уравнения Абеля 2-го рода с бесконечномерным вектором параметров R^∞

$$(y+g(x))y' = f_2(x)y^2 + f_1(x)y + f_0(x), \tag{2.1}$$

а среди множества уравнений 2-го порядка можно выделить уравнения типа обобщенного уравнения Эмдена-Фаулера с вектором параметров $\bar{a}$

$$y'' = Ax^n y^m y'^l, \qquad \bar{a} = (n,m,l). \tag{2.2}$$

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Определение 2.2. Классом преобразований называется множество обратимых преобразований замкнутое относительно операций обращения и композиции. Рассматриваются такие классы преобразований как: точечные, где $y = f(t,u)$, $x = g(t,u)$ с условием невырожденности, и Беклунда, куда входят зависимости от производных $y = f(t,u,\dot{u},...,u^{(k)})$, $x = g(t,u,\dot{u},...,u^{(k)})$.

Определение 2.3. Множество $G_{\bar{a}}$ обратимых преобразований $\{g_i\} \in G_{\bar{a}}$, отображающих тип уравнений $D_{\bar{a}}$ в себя называется дискретной группой преобразований (ДГП) $G_{\bar{a}}$, допускаемой типом уравнений $D_{\bar{a}}$ ($\{g_i\} \in G_{\bar{a}}$ – образующие дискретной группы).

Основные группы дискретного симметрийного анализа – циклические, диэдральные и их расширения.

Пример 2.2. Допускаемая типом обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера основная дискретная группа имеет строение группы диэдра D_3 (рис. 1) и расширяется до группы $C_2 \times D_6$ (24-порядка). Здесь же представлены основные образующие: r, g и классификационные параметры уравнений ((n,m,l) и преобразованные значения).

Орбита разрешимого элемента типа уравнений, т.е. такого, для которого заранее известно решение, носит название куста, а сам элемент – корня куста. Если в $D_{\bar{a}}$ существует набор корней, то можно найти их орбиты – кусты, элементы которых соответствуют уравнениям, допускающим представление точных решений в виде элементарных или специальных функций, выражаемых через решения корневой пары (φ,ψ). Взаимосвязь рассматриваемых в дискретном симметрийном анализе типов уравнений, функций, преобразований, алгебраических орбит (множество всех образов классификационного параметра) и орбит решений (множество в пространстве решений) дает соответствующую орбитальную классификацию модельных типов уравнений.

Пример 2.3 [3]. Для обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера (2.2) рассматриваются орбиты: P-функций Вейерштрасса, полиномиальных функций, эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода, функций Бесселя, Эйлера, интегралов вероятностей и т.д.

2.2. Обратные методы группового анализа

Исследования последних лет и прикладные потребности привели к выводу, что наряду с задачами поиска симметрий конкретных уравнений и задачами групповой классификации можно решать и более общие задачи поиска типов уравнений заданных порядков, допускающих симметрию определенного вида (точечную, Ли-Беклунда, неклассические, ...). Это позволило бы выделить весь спектр возможных моделей для описания процесса или явления, имеющего априорную симметрию, что особенно часто требуется в физических приложениях. Такие задачи получили название обратных задач современного группового анализа. Алгоритм их решений, в общем случае, существенно отличается от алгоритма решения прямых задач. Так, например, прямая задача поиска допускаемой дискретной группы приводится к решению системы нелинейных уравне-

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ний с частными производными, а обратная — к соответствующему функциональному уравнению. К этому же ряду обратных задач относится и задача структурного синтеза, которая сводится к построению ОДУ с априорными свойствами по заданному интегральному многообразию определенной структуры. При этом, для построения определенного ОДУ используется формально-полиномиальное представление интегрального многообразия, а для семейства ОДУ — дифференциальные комплексы [8, 11].

Такая формулировка задачи является обратной по отношению к задаче инвариантного анализа, которая ставится как задача восстановления структуры интегрального многообразия по ОДУ в заданном классе функций с априорными симметрийными свойствами.

К настоящему времени обратные задачи получили широкое распространение, и решения их найдены для многих типов уравнений и симметрий.

2.3. Методы структурного синтеза

Одна из главных задач общей теории дифференциальных уравнений состоит в изучении структуры решений любого заданного дифференциального уравнения непосредственно по его аналитическому виду независимо от возможности проинтегрировать это уравнение в конечном виде. Исследуется связь между аналитической структурой уравнений и их решений. При этом используются методы аналитической теории дифференциальных уравнений, которые дают возможность ответить на следующие вопросы: какой структурой должно обладать дифференциальное уравнение, чтобы оно имело решение, удовлетворяющее заданным дополнительным свойствам или обладающее заданной структурой; как построить это дифференциальное уравнение. Устанавливается, в некотором смысле, адекватность структур уравнений и их решений.

Динамические минимальные модели описываются дифференциальными уравнениями

$$F(x,y,y',...,y^{(n)},\bar{a})=0, \tag{2.3}$$

решения которых будем рассматривать, как правило, в параметрической форме

$$\begin{cases} x=\varphi\left(\tau,C_1,...C_n\right), \\ y=\psi\left(\tau,C_1,...C_n\right), \end{cases} \tag{2.4}$$

а уравнения интегральных многообразий, соответственно, в виде

$$f_i\left(\tau,y_j,C_j,z_l\right)=0, \quad (i=\overline{1,n};\, j=\overline{1,n}; l=\overline{1,m}; m\le n), \tag{2.5}$$

где $y_j(\tau)$ — фазовые переменные; $C_j,z_l(\tau)$ — в общем случае, неопределенные неизвестные, причем $DC_j=0$.

Пусть $\mathrm{P}[\tau,\varphi(\tau),\psi(\tau)]$ — дифференциальное поле алгебраических функций, порожденное двумя функционально-независимыми полиномами $\varphi(\tau)$ и $\psi(\tau)$. Образуем множество полиномов вида

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$\varphi_i = C^{r_{i1}} \varphi^{r_{i2}} \psi^{r_{i3}}, \qquad \psi_i = C^{s_{i1}} \varphi^{s_{i2}} \psi^{s_{i3}}. \tag{2.6}$$

Из условия инвариантности дифференциального поля $\mathrm{P}[\tau, \varphi(\tau), \psi(\tau)]$ относительно любой дискретной группы преобразований, получаем следующую теорему.

Теорема (структурная) 2.1. Если $\exists$ пара (φ, ψ) такая, что выполняется ОДУ

$$F\left(\varphi, \psi, \dot{\psi}/\dot{\varphi}, \left(\ddot{\psi}\dot{\varphi} - \ddot{\varphi}\dot{\psi}\right)/\dot{\varphi}^3, \vec{a}\right) = 0, \tag{2.7}$$

при $\vec{a} = a_0$ с априорной дискретной группой симметрий G_a, то найдутся такие k и $< r_{11}, r_{21}, r_{31}, s_{11}, s_{21}, s_{31} >$, что и (φ_1, ψ_1) вида (2.6) будет допускаться (2.7) при $\vec{a} = a_k$.

Методы инвариантного синтеза обыкновенных дифференциальных уравнений базируются на технике представления интегральных многообразий f_i над дифференциальным полем базисных полиномов. Продифференцируем систему уравнений многообразия (2.5) по τ

$$\frac{\partial f_i}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial \tau} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial \tau} = 0.$$

Разрешая эти уравнения относительно $\frac{dy_i}{d\tau}$ и исключая произвольные константы, получим систему ОДУ вида

$$\frac{dy_j}{d\tau} = \Phi_j(\tau, y_j) \qquad (j = \overline{1, n}), \tag{2.8}$$

где $\Phi_j(\tau, y_j)$ — полиномы над полем $\mathrm{Q}[z_l, \frac{\partial z_l}{\partial \tau}]$. Разрешая базисные полиномы относительно параметра τ и исключая его из приведенной системы, получим ОДУ первого порядка $y' = F(x, y)$.

Дифференцируя базисное многообразие несколько раз, получим D-комплексы уравнений старших порядков связанных между собой.

Уравнения многообразий (2.5) характеризуется размерностью, которая для математических моделей в форме ОДУ определяется размерностью фазового пространства, а также условием неприводимости.

Т.о., задача структурного синтеза сводится к построению (2.3) с априорными свойствами по заданной паре функций $(\varphi(\tau), \psi(\tau))$ определенной структуры, а задача инвариантного анализа ставится как задача восстановления многообразия (2.5) по системе (2.3) в заданном классе функций с симметрийными свойствами.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

Если записать соответствующее общее уравнение многообразия формальным образом (через формальные коэффициенты, которые требуется определить, для простоты выбран полином 2-го порядка, где y_j и z_l выражены через φ и ψ):

$$\alpha_1\tau^2+\alpha_2\varphi^2+\alpha_3\psi^2+\alpha_4\tau\varphi+\alpha_5\tau\psi+\alpha_6\varphi\psi+\alpha_7C_1\tau+\alpha_8C_1\varphi+\alpha_9C_1\psi+$$
$$+\alpha_{10}C_2\tau+\alpha_{11}C_2\varphi+\alpha_{12}C_2\psi=0, \tag{2.9}$$

то, дифференцируя (2.9) и подставляя вместо производных их соответствующие значения, получим определяющее уравнение, расщепление которого по степеням τ и произвольным константам $C_{1,2}$, приведет к определяющей системе, откуда и получим искомое интегральное многообразие.

Формирование таких динамических моделей существенным образом опирается на структурно-инвариантный анализ и синтез, т.к. знание симметрии уравнений (2.3) приводит к применению групповых операторов и всему многообразию методов современной теории групп Ли-Беклунда. Возникающие при этом генераторы групп преобразований (особенно дискретных) и порождают семейства соизмеримых подобных динамических моделей. А структурное подобие, в свою очередь, позволяет выделить класс моделей в виде определенного D-комплекса.

Для заданных интегральных многообразий, оператора полного дифференцирования и дискретной симметрии (генератора группы) определим D-комплекс в виде диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & F_{ki}^0 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "X_i"] & F_{ki}^1 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "X_i"] & F_{ki}^2 \arrow[r, "D"] \arrow[d, "X_i"] & \cdots \arrow[r, "D"] & F_{ki}^n \arrow[r] \arrow[d, "X_i"] & 0 \\
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & F_{kj}^0 \arrow[r, "D"] & F_{kj}^1 \arrow[r, "D"] & F_{kj}^2 \arrow[r, "D"] & \cdots \arrow[r, "D"] & F_{kj}^n \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

В общем случае введенный комплекс определяет для $\forall q$ l-параметрическое семейство решений для l-класса дифференциальных уравнений F_k^{q-l}, общие решения класса уравнений F_k^q и частные решения для их дифференциальных продолжений $(n>q)$.

3. Алгоритмы

3.1. Построение и разрешимость определяющих систем

Алгоритмичность основных представленных методов является большим преимуществом перед ранее разработанными эвристическими приемами. Существует явный алгоритм построения определяющих уравнений для поиска ко-

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

ординат инфинитезимального оператора $X = \xi(x, y)\partial_x + \eta(x, y)\partial_y$, допускаемого уравнением (2.3). Такой алгоритм, часто называемый алгоритмом Ли, состоит из следующих этапов:

1. Задание вида инфинитезимального оператора и его продолжений на старшие производные с учетом конкретного вида исходного уравнения (2.3);
2. Действие полученным оператором на уравнение, т.е. непосредственное вычисление производных Ли;
3. Переход на многообразие, задаваемое исходным дифференциальным уравнением, т.е. замыкание относительно уравнения;
4. Расщепление полученного уравнения по степеням независимой переменной.

На этапе 3 получаем определяющее уравнение, а на этапе 4 определяющую систему.

Выделенные таким образом коэффициенты при различных степенях независимой переменной представляют собой линейные однородные выражения относительно ξ и η и их производных по независимым и зависимым переменным дифференциального уравнения (для ОДУ по x и y). Условие равенства этих выражений нулю и дает соответствующую определяющую систему. В силу переопределенности такой системы определяющих уравнений удается, как правило, получить наиболее общее ее решение и, тем самым, найти полную алгебру Ли.

Пример 3.1. Если дифференциальное уравнение (2.3) при $n = 2$ допускает такой оператор, то определяющее уравнение имеет вид

$$\eta_{xx} + \left(2\eta_{xy} - \xi_{xx}\right)y' + \left(\eta_{yy} - 2\xi_{xy}\right)y'^2 - \xi_{yy}y'^3 + \left(\eta_y - 2\xi_x - 3y'\xi_y\right)F -$$
$$- \xi F_x - \eta F_y - \left[\eta_x + \left(\eta_y - \xi_x\right)y' - y'^2\xi_y\right]F_{y'} = 0 .$$

Работа [3], где изложена компьютерная реализация приведенного алгоритма, а также последующие работы, послужили основой для аналогичных алгоритмов вычисления более сложных симметрий – симметрий Ли-Беклунда. Подобные алгоритмы и их реализации также состоят из трех основных частей: 1) вычисление результата действия продолженного векторного поля на исходное уравнение и переход на многообразие; 2) выделение определяющих уравнений из определяющей системы как коэффициентов при различных степенях производных; 3) исключение линейных зависимостей из системы определяющих уравнений по методу Гаусса-Жордана с учетом дифференциальных следствий одночленных уравнений.

Для ДГА при отыскании основной ДГП $G_{\bar{a}}$, допускаемой типом $D_{\bar{a}}$ алгоритм состоит из трех следующих этапов:

1. Формирование определяющей системы уравнений для заданного типа $D_{\bar{a}}$ и фиксированного класса преобразований;
2. Построение множества решений определяющей системы;
3. Структурный анализ строения группы $G_{\bar{a}}$, заданной образующими, порожденными полученными решениями.

Реализация этого алгоритма связана, в свою очередь, с выбором метода эффективного поиска ДГП. Так в классе точечных преобразований эффективными оказываются два метода — наиболее общий (прямой) метод и метод следа, основанный на вышеизложенном алгоритме Ли. Для прямого метода поиска точечных преобразований $D_{\bar{a}}$ ОДУ n-ого порядка осуществляется подстановка такого произвольного точечного преобразования. В результате получаем дифференциальное выражение, зависящие от новых переменных и их производных $t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n)}$, а также от функций f и g и их частных производных по t и u до порядка n включительно (т.к. рассматриваются точечные преобразования, функции f и g не зависят от производных $u^{(s)}$). Условие замкнутости действия преобразования на данном типе уравнений $D_{\bar{a}}$ соответствует тому, что преобразованное уравнение должно иметь тот же структурный вид, отличаясь от исходного лишь вектором существенных параметров, т.е. вид

$$u^{(n)} = F\left(t, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}, \bar{b}\right). \tag{3.1}$$

Подстановка (3.1) в получившееся выражение приводит к определяющему уравнению относительно функций f и g, содержащему независимые переменные $\dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}$, от которых функции f и g не зависят. Поэтому, для того, чтобы определяющее уравнение удовлетворялось тождественно, необходимо и достаточно после приведения его к виду

$$\sum_{(k,\ldots,s)} A_{k,\ldots,s}\left(t, u, f, g, f_u, f_t, g_u, g_t, \ldots\right) \dot{u}^k \ldots \left(u^{(n-1)}\right)^s = 0$$

положить все $A_{k,\ldots,s}$ равными нулю. Это позволяет расщепить определяющее уравнение до переопределенной определяющей системы, которая конечна, если функция F — полином по всем производным $u^{(s)}$ и бесконечна в противном случае (тогда F разлагается в ряд по степеням $u^{(s)}$, $s = \overline{1, n-1}$).

Коротко вышеизложенный метод можно представить в виде следующего алгоритма поиска ДГП в виде:

1. Подстановка произвольного преобразования в (2.3);
2. Наложение условия замкнутости, которое приводит к уравнению в частных производных относительно неизвестных функций f и g;
3. Расщепление полученного уравнения по независимым переменным – младшим производным u по t.

Пример 3.1 [3]. Для ОДУ (2.3) в нормальной форме при $n = 2$, используя преобразованное уравнение в качестве условия замкнутости и следуя алгоритму, приходим к определяющему уравнению

$$\begin{gathered}\left(g_t f_u - f_t g_u\right) F(t, u, \dot{u}, \bar{b}) + \left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right)\dot{u}^3 + (g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + \\ + 2 g_u f_{ut} - 2 f_u g_{ut})\dot{u}^2 + \left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2 g_t f_{ut} - 2 f_t g_{ut}\right)\dot{u} + \\ + g_t f_{tt} - f_t g_{tt} = \left(g_t + g_u \dot{u}\right)^3 F\left(g, f, \frac{f_t + f_u \dot{u}}{g_t + g_u \dot{u}}, \bar{a}\right).\end{gathered}$$

Пример 3.2 [3]. Для такого же ОДУ при $n = 3$ приходим к следующему определяющему уравнению

$$
\begin{gathered}
g_t\left(g_t f_{ttt} - f_t g_{ttt}\right) - 3g_{tt}\left(g_t f_{tt} - f_t g_{tt}\right) + \\
+ \dot{u}\left[g_u\left(g_t f_{ttt} - f_t g_{ttt}\right) + g_t\left(g_u f_{ttt} - f_u g_{ttt} + 3g_t f_{utt} - 3f_t g_{utt}\right) - \right. \\
\left. - 3g_{tt}\left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{ut} - 2f_t g_{ut}\right) - 6g_{ut}\left(g_t f_{tt} - f_t g_{tt}\right)\right] + \\
+ \dot{u}^2\left[g_u\left(g_u f_{ttt} - f_u g_{ttt} + 3g_t f_{utt} - 3f_t g_{utt}\right) + \right. \\
+ 3g_t\left(g_u f_{utt} - f_u g_{utt} + g_t f_{uut} - f_t g_{uut}\right) - 6g_{ut}\left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{ut} - 2f_t g_{ut}\right) - \\
\left. - 3g_{tt}\left(g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2g_u f_{ut} - 2f_u g_{ut}\right) - 3g_{uu}\left(g_t f_{tt} - f_t g_{tt}\right)\right] + \\
+ \dot{u}^3\left[g_t\left(g_t f_{uuu} - f_t g_{uuu} + 3g_u f_{uut} - 3f_u g_{uut}\right) + \right. \\
+ 3g_u\left(g_u f_{utt} - f_u g_{utt} + g_t f_{uut} - f_t g_{uut}\right) - 6g_{ut}\left(g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2g_u f_{ut} - 2f_u g_{ut}\right) - \\
\left. - 3g_{uu}\left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + 2g_t f_{ut} - 2f_t g_{ut}\right) - 3g_{tt}\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right)\right] + \\
+ \dot{u}^4\left[g_t\left(g_u f_{uuu} - f_u g_{uuu}\right) + g_u\left(g_t f_{uuu} - f_t g_{uuu} + 3g_u f_{uut} - 3f_u g_{uut}\right) - \right. \\
\left. - 3g_{uu}\left(g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2g_u f_{ut} - 2f_u g_{ut}\right) - 6g_{ut}\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right)\right] + \\
+ \dot{u}^5\left[g_u\left(g_u f_{uuu} - f_u g_{uuu}\right) - 3g_{uu}\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right)\right] + \\
+ 3\ddot{u}\left[g_t\left(g_t f_{ut} - f_t g_{ut}\right) - g_u\left(g_t f_{tt} - f_t g_{tt}\right) - g_{tt}\left(g_t f_u - f_t g_u\right)\right] + \\
+ 3\dot{u}\ddot{u}\left[g_t\left(g_t f_{uu} - f_t g_{uu}\right) - g_u\left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt}\right) - 3g_{ut}\left(g_t f_u - f_t g_u\right)\right] + \\
+ 3\dot{u}^2\ddot{u}\left[g_t\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right) - g_u\left(g_u f_{ut} - f_u g_{ut}\right) - g_{uu}\left(g_t f_u - f_t g_u\right)\right] + \\
+ 3\ddot{u}^2 g_u\left(f_t g_u - g_t f_u\right) - \left(g_t + g_u\dot{u}\right)\left(g_t f_u - f_t g_u\right)F\left(t, u, \dot{u}, \ddot{u}, \bar{b}\right) = \\
= \left(g_t + g_u\dot{u}\right)^5 F\left(g, f, \frac{f_t + f_u\dot{u}}{g_t + g_u\dot{u}}, \left(g_t + g_u\dot{u}\right)^{-3}\left[g_t f_{tt} - f_t g_{tt} + \dot{u}\left(g_u f_{tt} - f_u g_{tt} + \right.\right.\right. \\
\left. + 2g_t f_{ut} - 2f_t g_{ut}\right) + \dot{u}^2\left(g_t f_{uu} - f_t g_{uu} + 2g_u f_{ut} - 2f_u g_{ut}\right) + \\
\left.\left. + \dot{u}^3\left(g_u f_{uu} - f_u g_{uu}\right) + \ddot{u}\left(g_t f_u - f_t g_u\right)\right], \bar{a} - \right).
\end{gathered}
$$

3.2. Вычисления на графе

Знание ДГП, порожденной конечным набором образующих, полученных из решения определяющей системы, позволяет перейти к нахождению общих решений и описать все разрешимые случаи орбит исследуемых уравнений. Еще раз отметим, что замкнутость орбит на классах известных преобразований дает возможность прогноза не только разрешимости, но и представимости общего решения в некотором дифференциальном поле (а иногда и кольце) базисных функций.

Алгоритм поиска общих решений выглядит следующим образом:

1. По заданным разрешимым элементам типа $D_{\bar{a}}$ определяются соответствующие им значения вектора существенных параметров a_j;

2. Находятся алгебраические орбиты всех точек a_j;

3. Осуществляются все подстановки, соответствующие образующим ДГП, в известные решения заданных разрешимых элементов;

4. Выписывается полный набор общих решений;

5. Производится проверка построенных решений;

6. Строятся все расширения исходной ДГП, допускаемые орбитами G_{a_j};

7. Производится повторение пп. 1–5 алгоритма с учетом построенных расширений.

Пункты 1 и 2 алгоритма связаны с определением корней и построением кустов в виде набора векторов $G(\bar{a}_k)$, т.е. алгебраических орбит (рис. 2), а пункт 4 связан с нахождением орбит решений в корневых — базисных функциях (φ_i, ψ_i). Таким образом взаимосвязь рассматриваемых типов уравнений, функций, преобразований, алгебраических орбит и орбит решений дает полную орбитальную классификацию ОДУ [3].

3.3. Алгоритм автогенерации

Последовательное применение оператора полного дифференцирования и образующих групп симметрии для задач синтеза динамических моделей приводит к следующему алгоритму автогенерации.

Алгоритм автогенерации моделей (общий случай).

[Представление]. Задание структуры интегрального многообразия над дифференциальным полем алгебраических функций, причем для явной формы достаточно одно образующее соотношений, а для параметрической - два.

[Дифференцирование]. Применение оператора полного дифференцирования D к многообразию по независимой переменной или по параметру.

[Нормализация]. Исключение произвольных констант. Если задана параметрическая форма представления, то необходимо обратить ее относительно параметра и затем исключить его из системы. Приведение к нормальному виду.

[D-генерация]. Построение дифференциальных продолжений и формирование моделей в соответствии с шагами 2 и 3.

[X_i-генерация]. Применение генераторов групп $X_i \in G_a$ к полученным моделям и формирование классов подобных моделей.

Выполнение шага 4 сохраняет все априорные симметрии для получаемых моделей и порождает новые продолженные для каждого k-продолжения. На 5-ом шаге изменяется структура интегральных многообразий получаемых моделей, порожденная на шаге 1 и определяемая тем же полем.

4. Модели

Рассмотрим теперь конкретные модели в контексте разработанных методов.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

4.1. Полиномиальные уравнения типа Брио-Буке

Значительное количество работ посвящено исследованию голоморфной и неголоморфной структуры решений уравнений Брио и Буке $y' = P/Q$, где P и Q голоморфны в точке $(0,0)$. Часто встречаются в теории динамических систем при исследовании поведения динамики 2-го порядка многопараметрические нелинейные уравнения первого порядка принадлежащие некоторому семейству моделей полиномиального типа, коэффициенты которых являются полиномами относительно зависимой и независимой переменных. Такие модели также представляются в виде уравнений Брио и Буке, где число свободных параметров в P_k и Q_k определяется структурой и соответствующими параметрами интегрального многообразия. Будем синтезировать такие модели из голоморфного подмножества в параметрическом виде

$$x = \frac{f_1}{g}, \quad y = \frac{f_2}{g}, \quad \text{где} \quad f_i = \alpha_{i1} C_1 \tau + \sum_{k=2}^{n} \alpha_{ik} \tau^k , \quad g = \gamma_0 C_1 + \sum_{k=2}^{n} \gamma_k \tau^k . \quad (4.1)$$

Применение алгоритма автогенерации 3.3 приводит к полиномиальным моделям, со связанными структурами $< f_1, f_2, g >$ и $< P,Q >$, и степенями полиномов. Т.о., синтезируются не только 10-параметрические нелинейные динамические модели, частично изученные [2], но, при $n \geq 4$, уже и 18-параметрические модели вида:

$$y' = \frac{B_{10}x + B_{01}y + B_{20}x^2 + B_{11}xy + B_{02}y^2 + B_{21}x^2y + B_{12}xy^2 + B_{30}x^3 + B_{03}y^3}{A_{10}x + A_{01}y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2 + A_{21}x^2y + A_{12}xy^2 + A_{30}x^3 + A_{03}y^3}, \quad (4.2)$$

а также, модели старших порядков.

4.2. Обобщенные уравнения Эмдена-Фаулера сингулярного типа

В современном симметрийном анализе при рассмотрении дискретных групп преобразований встречаются некоторые сингулярные значения вектора параметров a_i^k, т.е. такие, которые под действием дискретных преобразований переходят в бесконечные [9]. При этом осуществляется гладкое продолжение действий дискретных групп и происходит формальная замена функциональных переменных степенного роста на функции экспоненциального роста.

Рассмотрим такой подкласс уравнений класса обобщенных уравнений Эмдена-Фаулера, над базисным многообразием интегралов вероятностей, структура которого имеет вид:

$$\begin{cases} x = \varphi(\tau) = -C_1\sqrt{\pi} \times \operatorname{erf}\sqrt{\pi} + C_2, \\ y = \psi(\tau) = C_1 e^{-\tau}. \end{cases}$$

Цепочка D-отображений с учетом композиций преобразований сингулярных орбит вида

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$g_{\infty}^{-1a} \circ s \quad : \quad (\varphi, \psi) \to \left[\ln\psi - \ln\varphi, \left(\psi - \varphi \frac{\dot{\psi}}{\dot{\varphi}} \right)^2 \right],$$

приведет к остальным элементам D-комплекса, связанных диаграммой на рис. 3.

4.3. Обратимые управляемые системы

При рассмотрении обратимых управляемых систем вида

$$\mathbf{F}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n)}, \mathbf{a}) = \Phi(\mathbf{u}(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}', \ldots, \mathbf{y}^{(n-1)}, \mathbf{c}), \mathbf{b}) \tag{4.3}$$

используются несколько различных базисных определений симметрии: симметрии по состоянию системы, симметрии по управлению и симметрии по структурному состоянию [10]. На последний тип симметрии рассмотрим одну задачу автоматического управления в виде $y'' + ay' + by = \Phi(u, \lambda)$ с управлением и структурой функции Φ в виде

$$\Phi(u, \lambda) = u^{\lambda}, \qquad u = f(x, y, y', c) = \alpha y'^2 + \beta y y' + \gamma y y^2 \ . \tag{4.4}$$

Такие уравнения очевидно допускают группу переносов. Известно некоторое нелокальное преобразование переводящее рассматриваемое уравнение в автономное уравнение второго порядка вида:

$$\ddot{y}_1 = \frac{\alpha_1 \dot{y}_1^{\,3}}{\beta_1 y_1^{\,4} + \gamma_1 \dot{y}_1^{\,3}} \quad \text{или} \quad \ddot{y}_1 = \frac{\alpha_2 \dot{y}_1}{\beta_2 y_1^{\,2} + \gamma_2 \dot{y}_1}. \tag{4.5}$$

Уравнения (4.5), допускают еще понижение порядка. Сделав замену $y_2(y_1) = \dot{y}_1$, придем к соответствующим уравнениям первого порядка

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \alpha_2 (\beta_2 y_1^{\,2} + \gamma_2 y_2)^{-1} \quad \text{или} \quad \frac{dy_2}{dy_1} = \alpha_1 y_2^{\,2} (\beta_1 y_1^{\,4} + \gamma_1 y_2^{\,3})^{-1}. \tag{4.6}$$

Первое из уравнений (4.6) заменой по квадратичной функции приводится к уравнению, которое является уравнением Абеля второго рода, причем, разрешимым уравнением, решение которого выражается через известные функции Бесселя. Найдя, таким образом, решения уравнений (4.6) в параметрической форме $y_1 = y_1(\tau, C_1)$, $y_2 = y_2(\tau, C_1)$, получим параметрическое представление решений и уравнений (4.5).

4.4. Экологическая система эвтрофирования водоема

Анализируя сложную экологическую систему или целый комплекс, состоящий из экологии и экономики, часто возникает необходимость смоделировать происходящие процессы на уровне минимальных моделей с учетом основных переменных и параметров системы, чтобы уже на аналитическом уров-

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

не дать приближенную оценку развития таких систем, которую, в дальнейшем, можно было бы использовать при построении более подробных имитационных моделей [5].

Рассмотрим одну из таких моделей на примере оценки процесса эвтрофирования небольшого озера. В качестве выходной переменной x системы выбирается биомасса всех видов планктонных водорослей в озере. В качестве управляющих переменных рассматриваются u_1 и u_2. Первое управление — концентрация растворимого фосфора в соответствующих единицах измерения. Второе управление — биомасса одного из представителей фитопланктона рода Anabaena, которое выступает в качестве эквивалента уровня освещенности и температуры в озере. Наблюдения показывают, что скорость накопления фосфора планктонными водорослями пропорциональна концентрации последних во время «цветения» воды. Когда наступает отмирание, фосфор осаждается на дно вместе с клетками и может быть «освобожден» только после окончания периода «цветения» и следующего за ним процесса отмирания. Этот факт характерен для многих водоемов в стадии эвтрофирования.

Для вывода уравнения, описывающего общую концентрацию фитопланктона, используется логистическая модель, широко используемая в экологии для моделирования возрастания или уменьшения численности популяции при наличии верхнего предела емкости среды, квадратичной скорости роста численности популяции и с учетом вымирания отдельных видов.

Таким образом, будем рассматривать следующую модель:

$$\begin{cases} \dot{x} = -(c_1 x^3 - c_2 u_1 x + c_3 u_2), \\ \dot{u}_1 = -c_4 x u_1, \\ \dot{u}_2 = c_5 u_1 u_2 - c_6 u_2 x, \end{cases} \tag{4.7}$$

где c_j, $(j = \overline{1,6})$ — константы скорости; равновесная концентрация фосфора считается равной нулю. Уравнение (4.7) можно рассматривать как обратимое по управлению $v = c_2 x u_1 - c_3 u_2$, тогда такое управление будет иметь структуру биномиально-экспоненциального вида, т.е. вид

$$v(t) = c_2 u_1(t_0) x(t) e^{-c_4 x(t) t} - c_3 u_2(t_0) e^{\left[c_5 u_1(t_0) e^{-c_4 x(t) t} - c_6 x(t)\right] t} \equiv \gamma_1 x(t) e^{p_1(t)} - \gamma_2 e^{p_2(t)}.$$

Выбор такого управления согласуется с результатами наблюдений. Если подбирать управления такого типа, аппроксимируя кривые наблюдений, то в результате из (4.7) получим искомые значения для x.

Когда управляющие воздействия гасят возрастающую биомассу планктонных водорослей, наступает условие стабильности экосистемы и x, при этом, может вести себя как решение уравнения первого порядка с кубической нелинейностью, где коэффициент A согласовано с коэффициентами для v той же структуры, что и само уравнение, или как частное решение ОУЭФ $(0,2,1)$, получающееся в результате применения D-комплекса и которое можно выразить в параметрической форме.

При построении сложных моделей экологических или эколого-экономических систем учет на минимальном уровне основных механизмов в

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

виде балансовых соотношений, принципа подвижного равновесия, условий стабильности является необходимым требованием к адекватности таких моделей, а сами эти условия являются, как правило, следствием симметрии (инвариантности) рассматриваемых процессов и, соответственно, моделей.

5. Компьютерная поддержка

Для компьютерной поддержки вычислений рассмотренных методов и моделей реализованы алгоритмы символьных вычислений синтеза нелинейных моделей, допускающих базисные формы аналитического представления решений в классе полиномиальных функций. Реализованы алгоритмы построения определяющих систем и частичного их решения при нахождении дискретных групп преобразований. Программная реализация осуществлялась в системах аналитических вычислений типа Reduce и Maple. Разработанные программы являются достаточно простыми в обращении и легко переносятся на другие современные системы аналитических вычислений и компьютерные платформы.

Для информационной поддержки разработана интеллектуальная справочная система поиска и хранения динамических моделей в аналитической форме с распределенным доступом по сети Интернет и осуществлена программная реализация математической справочной системы в области дифференциальных уравнений (версия системы ISDIFF 1.0 [7]). Система предназначена в первую очередь для конечного пользователя-математика, использующего современные средства телекоммуникации и, работающего с динамическими моделями. При организации поисковой части ИС ISDIFF 1.0 учитывались следующие необходимые требования: простота набора математических символов; поддержка интеллектуального уровня поиска; обеспечение возможности использования шаблонов (масок) при вводе уравнений.

Литература

[1] Зайцев В. Ф. О дискретно-групповом анализе обыкновенных дифференциальных уравнений// ДАН СССР, т.299, N3, 1988. — с. 542-545

[2] Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. — М.: Физматлит, 1995. — 560 с.

[3] Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Дискретно-групповой анализ дифференциальных уравнений. Методы и алгоритмы: Препринт № 84. — Л.: ЛИИАН, 1988. — 66 с.

[4] Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

[5] Иванищев В. В., Михайлов В. В., Флегонтов А. В. и др. Имитационное моделирование природной системы «озеро-водосбор». — Л.: ЛИИАН, 1987. — 230 с.

[6] Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 399 с.

[7] Осипенко Г. С., Зайцев В. Ф., Флегонтов А. В. Информационная система "Дифференциальные уравнения" // Труды 2 Международной Конференции "Дифференциальные уравнения и их применения". Санкт-Петербург, СПбГТУ, 1998 — с. 62-173

[8] Флегонтов А. В. Полиномиальные системы в задачах инвариантного анализа и синтеза на многообразиях// Теоретические основы и прикладные задачи интеллектуальных информационных технологий. — Санкт-Петербург, СПИИРАН, 1998. — с. 261-267

[9] Флегонтов А. В. О сингулярных структурах интегральных многообразий с дискретной симметрией // Труды IX Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики (МДОЗМФ — 2000)». Орёл, ОГУ, 2000 — с. 448-451.

[10] Флегонтов А. В. О симметрийном и структурном анализе управляемых систем// Сб. Трудов 1-ой Международная конференция по мехатронике и робототехнике (МиР'2000), т. 2, Санкт-Петербург, НПО Омега БФ Омега, 2000. — с. 349-354.
[11] Flegontov A. V. Synthesis of differential equations and their groups on manifolds// Computer Algebra in Scientific Computing. Extended abstracts of the Int.Conf.CASC-98. St.Petersburg: Euler IMI, 1998. — c. 42-47

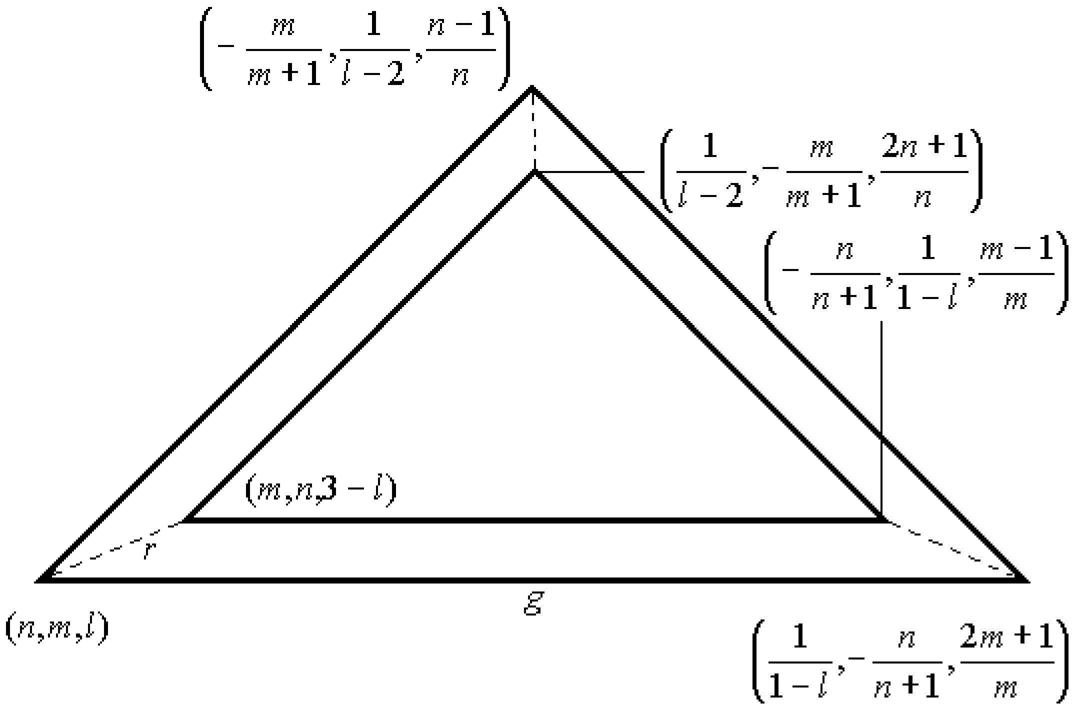

Рис. 1.

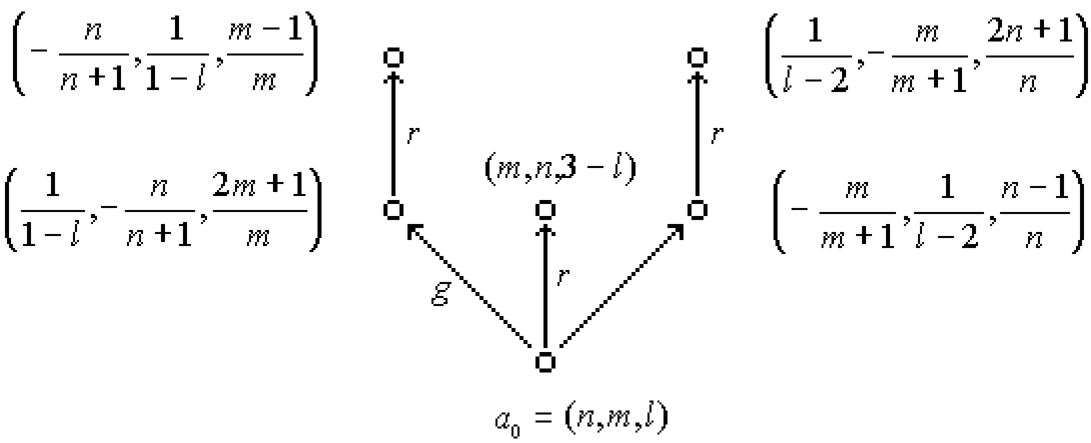

Рис. 2.

Труды СПИИРАН. 2002. Вып. 1. Т. 1. ISSN 2078-9181 (печ.), ISSN 2078-9599 (онлайн)
SPIIRAS Proceedings. 2002. Issue 1. V. 1. ISSN 2078-9181 (print), ISSN 2078-9599 (online)
www.proceedings.spiiras.nw.ru

$$
\begin{tikzcd}
\vdots & \vdots & \vdots \\
(0,-1,0) \arrow[u, "D"] \arrow[r, "g_{\infty}^{-1a} \circ s"] & (\infty,-1/2,3/2) \arrow[u, "D"] \arrow[r, "r_{\infty}"] & (-1/2,\infty,3/2) \arrow[u, "D"] \\
F_{ki}^{1} \arrow[u, "D"] & F_{kj}^{1} \arrow[u, "D"] & \\
F_{ki}^{0} \arrow[u, "D"] \arrow[r, "g_{\infty}^{-1a} \circ s"] \arrow[uur] & F_{kj}^{0} \arrow[u, "D"] &
\end{tikzcd}
$$

Рис. 3. Диаграмма сингулярных интегралов вероятностей.