

# Решение интегрального уравнения Винера – Хопфа методом гипердельтовой аппроксимации

Смагин В. А.  
СПИИРАН  
Россия, Санкт-Петербург  
va\_smagin@mail.ru

**Аннотация.** Представлен метод приближённого решения интегрального уравнения Винера – Хопфа при гладких распределениях вероятностей, составляющих его компонент. Метод основывается на гипердельтовой аппроксимации исходных распределений. Использование в ней преобразования Фурье и характеристической функции позволяет работать в методе со случайными величинами, сосредоточенными на всей вещественной оси абсцисс.

**Ключевые слова:** интегральное уравнение Винера – Хопфа, гипердельтовая аппроксимация распределений, коррекция, преобразование Фурье, характеристическая функция, начальные моменты, скачок распределения функции ожидания.

## ВВЕДЕНИЕ

К рассматриваемым в настоящей статье задачам по духу и направленности можно отнести небольшое число публикаций. Для примера отметим следующие из них.

В [1] рассматриваются вопросы решения интегрального уравнения Винера – Хопфа на основе использования двух вариантов аппроксимации, одна из которых проводится на основе теоремы дискретизации Шеннона. Указываются границы применимости и приложения к задачам статистики.

В [2] рассмотрен новый класс обобщенных вариационных неравенств и новый класс обобщенных уравнений Винера – Хопфа, включающих многозначные и не расширительные отображения в вещественном Гильбертовом пространстве.

В статье [3] рассматривается применение методов аппроксимации для решения операторных уравнений, содержащих дискретный оператор Винера – Хопфа. Приводятся оценки погрешности и затухающие свойства решений, получаемых с точки зрения некоторых гладких пространств.

В работе [4] рассматриваются некоторые приложения Дельта-функции Дирака к решению задач статистики. При этом некоторые известные результаты обобщаются на случай двух переменных.

В докладе [5] рассматривается применение смесей Дельта-функций Дирака (гипердельтного распределения) для аппроксимации плотностей функций распределений в аналитической форме. Предлагаются субоптимальные решения и процедура вывода, основанная на последовательном разбиении пространства состояний и размещении компонентов с помощью локальной оптимизации.

## ГИПЕРДЕЛЬТОВАЯ АППРОКСИМАЦИЯ НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Известно, что нормальное распределение вероятностей может быть представлено дискретным гипердельтным распределением в аналитическом виде [6]. С учётом трёх начальных моментов это представление имеет вид

$$f(t) \approx C_1 \Delta(t - T_1) + C_2 \Delta(t - T_2), \quad (1)$$

где  $f(t) = (1/\sqrt{2\pi}\sigma) \exp(-(t - m)^2 / 2\sigma^2)$  – плотность вероятности аппроксимируемого распределения;  $C_1, C_2$  – вероятности,  $C_1 > 0, C_2 > 0, C_1 + C_2 = 1$ ;  $\Delta(t)$  – дельта-функция Дирака;  $T_1 > 0, T_2 > 0$  – положительные постоянные величины. Неизвестные значения  $C_i, T_i, i = 1, 2$  вычисляются из четырёх нелинейных уравнений, составленных методом моментов. В результате решения получают

$$f_a(t) = \frac{1}{2} (\Delta(t - m + \sigma) + \Delta(t - m - \sigma)), \quad (2)$$

где  $m, \sigma$  – параметры аппроксимируемого распределения.

В статье [7] показано, что если хотя бы один из параметров  $T_i, i = 1, 2$  принимает отрицательное значение, т. е. располагается на отрицательном луче вещественной оси абсцисс, то можно составить аналогичную [6] систему нелинейных уравнений. В ней для определения искомым параметров применяются не обычные производные от дельта-функций, а производные от характеристических функций:

$$\begin{aligned} C_1 \varphi_1(0) + C_2 \varphi_2(0) &= 1; \\ C_1 \frac{\varphi_1'(0)}{i} + C_2 \frac{\varphi_2'(0)}{i} &= v_1; \\ C_1 \frac{\varphi_1''(0)}{i^2} + C_2 \frac{\varphi_2''(0)}{i^2} &= v_2; \\ C_1 \frac{\varphi_1'''(0)}{i^3} + C_2 \frac{\varphi_2'''(0)}{i^3} &= v_3. \end{aligned} \quad (3)$$

В системе уравнений (3) использованы обозначения характеристической функции и её производных, а также мнимая единица  $i = \sqrt{-1}$ .

Система уравнений (3), в отличие от предшествующей системы, может иметь как положительные, так и отрицательные значения начальных моментов  $v_j, j = 1-3$ . Выражения

для дельта-функций в отличие от  $\Delta(t - a)$  могут принимать вид  $\Delta(t + a)$ , а функция Хевисайда (для вырожденного распределения вероятностей) – вместо  $\varphi(t) = e^{ita} - \varphi(t) = e^{-ita}$ , где  $a$  – некоторая вещественная постоянная.

Это позволяет распространить метод аппроксимации вероятностей не только на положительные значения, но и на положительные и отрицательные значения случайной величины. Предложенная коррекция метода основывается на применении вместо преобразования Лапласа преобразования Фурье и характеристической функции.

ПРИМЕР АППРОКСИМАЦИИ ДВУХ НОРМАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть заданы две плотности вероятности нормального распределения. Первая характеризует время между заявками, поступающими в одноканальную СМО:

$$a(x) = (1 / \sqrt{2\pi\delta}) \exp(-(x - n)^2 / 2\delta^2) \quad (4)$$

с параметрами  $n = 20h, \delta = 5h$ . Вторая характеризует время обслуживания:

$$b(x) = (1 / \sqrt{2\pi\sigma}) \exp(-(x - m)^2 / 2\sigma^2) \quad (5)$$

с параметрами  $m = 10h, \sigma = 3h$ . Требуется представить выражения (4) и (5) в виде гипердельтовых распределений. Для распределения (4) будем иметь:

$$a_a(x) \approx \frac{1}{2} (\Delta(x - 15) + \Delta(x - 25)). \quad (6)$$

Для распределения (5) получим:

$$b_a(x) \approx \frac{1}{2} (\Delta(x - 7) + \Delta(x - 13)). \quad (7)$$

Выражения (6) и (7) получены из формулы, приведенной в [6]:

$$f(x) \approx \frac{1}{2} (\Delta(x - m + \sigma) + \Delta(x - m - \sigma)). \quad (8)$$

Изображения Лапласа (6) и (7), соответственно, будут равны:

$$a_a^*(s) \approx \frac{1}{2} (e^{-15s} + e^{-25s}); \quad b_a^*(s) = \frac{1}{2} (e^{-7s} + e^{-13s}), \quad (9)$$

где  $*$ ,  $s$  – символ преобразования и переменная Лапласа.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ДЛЯ ФОРМУЛ ПЛОТНОСТЕЙ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Характеристическая функция плотности вероятности  $f(x)$  определяется выражением

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x) dx, \quad (10)$$

в котором  $i = \sqrt{-1}$ . Если случайная величина сосредоточена на положительной полуоси абсцисс, тогда характеристические функции для (4) и (5) принимают вид

$$\varphi_a(t) = \frac{1}{2} (e^{it(n-\delta)} + e^{it(n+\delta)}); \quad (11)$$

$$\varphi_b = \frac{1}{2} (e^{it(m-\sigma)} + e^{it(m+\sigma)}).$$

Если случайная величина сосредоточена на отрицательной полуоси абсцисс, то характеристические функции для (4) и (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \varphi_a(t) &= \frac{1}{2} (e^{-it(n-\delta)} + e^{-it(n+\delta)}); \\ \varphi_b(t) &= \frac{1}{2} (e^{-it(m-\sigma)} + e^{-it(m+\sigma)}). \end{aligned} \quad (12)$$

Характеристическая функция для суммы случайных величин, имеющих плотности вероятностей (4) и (5), определяемая плотностью вероятностей

$$c_+(x) = \int_0^t b(x-z)a(z) dz, \quad (13)$$

принимает вид

$$\varphi_+(t) = e^{it(n=m)} \cos(\delta t) \cos(\sigma t), \quad (14)$$

а характеристическая функция для разности случайных величин, определяемая плотностью вероятностей

$$c_-(x) = \int_0^{\infty} b(x+z)a(z) dz, \quad (15)$$

– вид

$$\varphi_-(t) = e^{-(n-m)it} \cos(\delta t) \cos(\sigma t). \quad (16)$$

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМУМА В ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим решение задачи о распределении максимума на примере системы массового обслуживания для одноканальной системы  $G/G/1$ , приведённое в [8]. Основное рекуррентное соотношение для данной СМО представляется в виде

$$w_{n+1} = \max[0, w_n + u_n], \quad (17)$$

где  $w_{n+1}$  – время ожидания обслуживания поступающего требования в систему с номером  $n + 1$ ;  $u_n = x_n - t_n$  – разность между временем обслуживания  $n$ -го требования и промежутком времени между моментами поступления  $n$ -го и  $n + 1$ -го требований. Обе случайные величины  $s_n$  и  $t_n$  независимы от номера  $n$  и друг от друга и распределены с плотностями вероятностей  $b(t)$  и  $a(t)$ , а их разность распределена с плотностью вероятности

$$c(t) = \int_0^{\infty} b(t+u)a(u) du. \quad (18)$$

Определяемая функция распределения времени ожидания требования в системе при условии, что существует её стационарный предел, представляется уравнением

$$W(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^t W(t-u)c(u) du, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} \quad (19)$$

В книге [8] обсуждались способы преодоления трудностей при изучении системы  $G/G/1$  путём построения приближений и границ для точных решений. Среди них – довольно грубое дискретное приближение. Идея этого подхода состояла в изменении входных распределений  $A(t)$  и  $B(t)$  таким образом, чтобы основное рекуррентное соотношение (17) позволяло получать прямое аналитическое решение для распределения времени ожидания.

Итеративное решение этого уравнения достаточно просто, когда обе входные случайные величины представляются дискретными случайными величинами. В моменты времени  $k\tau$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ , с единицей отсчёта времени  $\tau$ ) они принимают только ненулевые значения. Тогда можно записать предел рекуррентной процедуры, получить систему линейных разностных уравнений, которая может быть решена методом  $Z$ -преобразований, и узнать точное распределение времени ожидания.

Но если случайные величины непрерывны, то возникает задача: как непрерывные случайные величины аппроксимировать дискретными таким образом, чтобы сохранялось существо искомого решения. Вопрос, как выбрать такое приближение, ещё не исследован. Естественная рекомендация состоит в том, чтобы согласовать как можно больше моментов исходных распределений, начиная с первого момента. Исследование точности такого приближения только начинается [3].

В данной статье попытаемся проиллюстрировать этот метод на примере аппроксимации нормальных распределений с точностью до трёх начальных моментов. Используя гипердельтное распределение, можно определить моменты скачков входных распределений. Распределения вероятностей в соответствии с (6) и (7) будут равны:

$$A(t) = \begin{cases} 0, & t < n - \delta, \\ \frac{1}{2}, & n - \delta \leq t < n + \delta, \\ 1, & t \geq n + \delta, \end{cases} \quad (20)$$

$$B(t) = \begin{cases} 0, & t < m - \sigma, \\ \frac{1}{2}, & m - \sigma \leq t < m + \sigma, \\ 1, & t \geq m + \sigma. \end{cases} \quad (21)$$

Так как берутся только дискретные случайные величины, можно записать  $a(k) = P[t_n = k\tau]$  и  $b(k) = P[x_n = k\tau]$ . Дискретные функции могут быть представлены и как плотности вероятностей с импульсами в соответствующих точках, как мы показали в первом разделе статьи.

Если пользоваться уравнением (17), то можно найти распределение вероятностей для  $u_n$ . Определив  $c(k) = P[u_n = k\tau]$ , так как  $u_n = x_n - t_n$ , очевидно, что  $c(k)$  в общем виде представляется свёрткой [8]:

$$c(k) = a(-k) * b(i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(-k+i)b(i). \quad (22)$$

Если  $a(k)$  и  $b(k)$  содержат небольшое число членов, то свёртка легко вычисляется. Но остаётся нерешённым вопрос, как выбрать единицу отсчёта времени  $\tau$ .

Пример 1. Представим плотности исходных распределений (4) и (5), используя формулу (8) в виде дискретных распределений. Эти распределения применительно к свёртке (22) показаны на рис. 1. Распределение  $a(-k)$  показано на отрицательной полуоси. Для уменьшения размера рисунка масштаб по оси абсцисс изменён, численные значения интервалов между дельта-функциями, указанные в (6) и (7), не соответствуют реальным значениям.

Для выполнения рекуррентной процедуры в уравнении (17) предположим, что начальная величина  $w_0 = 0$ . Кроме того, определим вероятность  $p_n = P[w_n = k\tau]$ . Теперь можно применить рекурсию, состоящую в выполнении операций, описанных уравнением

$$w_{n+1}(y) = \pi(w_n(y) \cdot c(y)), \quad (23)$$

в котором  $\pi$ -оператор заменяет плотность вероятности своего аргумента путём замены всей вероятности, связанной с отрицательными значениями, на импульс в точке  $y = 0$ , площадь которого равна этой вероятности. Предельное решение следует из уравнения

$$w(y) = \pi(w(y) \cdot c(y)). \quad (24)$$

Оно даёт стационарную плотность вероятности времени ожидания в системе. Эта плотность должна быть такой, что когда она образует свёртку с  $c(y)$  и результирующая плотность переносит свою вероятность с отрицательной оси в импульс, расположенный в нуле, результирующая плотность имеет такой же вид, как и  $w(y)$ , с которой начиналось рассмотрение.

Для численного расчёта примем следующие значения параметров плотностей: для  $a(x)$   $n = 11h$ ,  $\delta = 3h$ , а для  $b(x)$

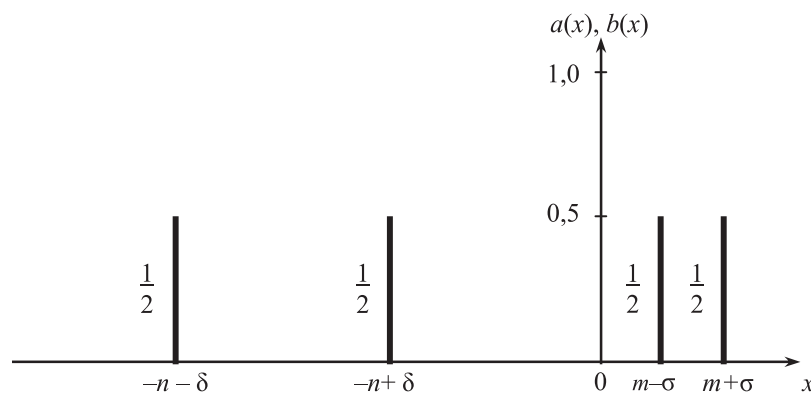


Рис. 1. Дискретное представление исходных распределений

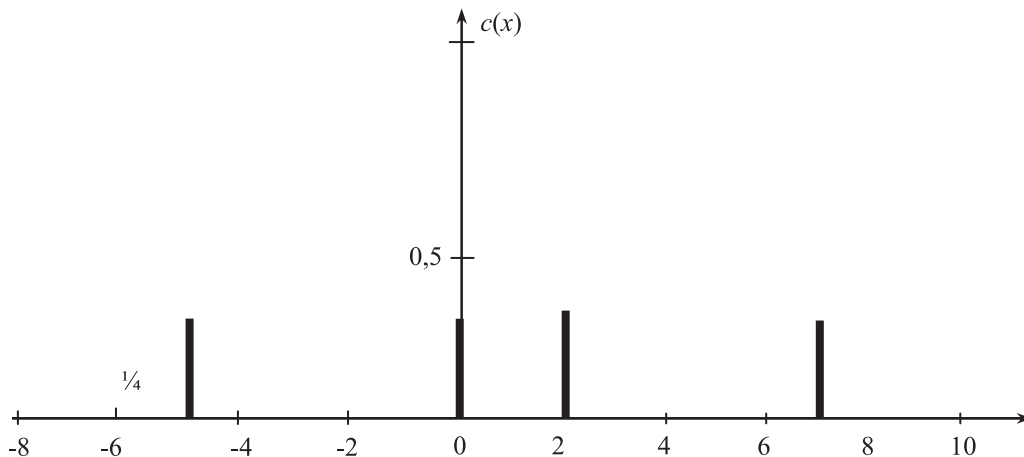


Рис. 2. Графическое изображение дискретной свёртки

$m = 10, \sigma = 3h$ . В этом случае выражение для свёртки (22) принимает вид

$$c(x) = \frac{1}{4}(\Delta(x) + \Delta(x-2) + \Delta(x+5) + \Delta(x-7)). \quad (25)$$

График этого выражения показан на рис. 2.

Далее поступая, как описано в начале примера, и полагая  $k = x$ , можно записать выражение для определения величины вероятности на  $k$ -м шаге:

$$p(k) = \frac{1}{4} p(k+5) + \frac{1}{4} p(k) + \frac{1}{4} p(k-2) + \frac{1}{2} p(k-7), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (26)$$

Граничное уравнение для  $p(0)$  равно:

$$p(0) = \frac{1}{4} p(0) + \frac{1}{4} p(5) + \frac{1}{4} p(-2) + \frac{1}{4} p(-7), \quad k = 0. \quad (27)$$

Теперь имеем знакомую задачу решения системы линейных разностных уравнений. К такому же результату приводит метод факторизации Винера. Достоинство описанного здесь метода состоит в том, что он использует в явном виде дискретную природу случайных величин. В обоих случаях трудная часть решения состоит в нахождении корней многочлена (корни знаменателя  $P(z) = \sum_k p(k)z^k$ , тогда как в методе факторизации спектра корни находят из выражения  $A^*(-s)B^*(s) - 1$  [8].

В данном разделе статьи показано, как превратить непрерывные задачи в дискретные, для которых применимы довольно простые методы. Это проиллюстрировано решением задачи при обоих нормальных распределениях случайных величин между требованиями их обслуживания. Однако вопросы выбора шага дискретизации и адекватности приближения требуют дальнейшего исследования. Здесь мы показали, как переходить от непрерывных распределений к дискретным на основе гипердельтного распределения. Для выполнения численного расчёта распределения времени ожидания в системе при любых непрерывных распределениях мы рекомендуем процедуру со свёрткой, детально изложенную в [8].

### ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАКСИМУМА В НЕПРЕРЫВНОМ ВИДЕ

Решение уравнения (17) на основе гипердельтной аппроксимации возможно не только в дискретном, но и в непрерывном виде. Принцип такого подхода заключается в том, чтобы использовать для решения уравнения (17) не плотности вероятностей исходных распределений  $a(x)$  и  $b(x)$ , а их характеристические функции, а более конкретно – характеристическую функцию их разностной свёртки (15).

Представляя начальную и все последовательные вероятности состояний  $P_n$  СМО также характеристическими функциями, производя их последовательное свёртывание с характеристической функцией разности исходных случайных величин и сдвигая на каждом шаге отрицательную вероятность в начало координат, получим на положительном луче оси абсцисс характеристическую функцию случайной величины времени ожидания.

Иначе говоря, операция решения (17) на основе гипердельтной дискретной аппроксимации заменяется операцией решения этого уравнения на основе действий с характеристическими функциями тех же исходных случайных величин, указанных в разделе «Пример аппроксимации двух нормальных распределений». Для рассмотренных в нём двух нормальных распределений выражение для характеристической функции свёртки плотности разности случайных величин будет равно

$$\varphi(t) = e^{-(n-m)t} \cos(\sigma t) \cos(\delta t). \quad (28)$$

Характеристическая функция начальной единичной вероятности состояния СМО будет принимать вид

$$P(0) = 1. \quad (29)$$

Далее следует применять алгоритм вычисления, аналогичный дискретному алгоритму, рассмотренному в [8].

Шаг 1. Произвести свёртку характеристических функций (28) и (29).

Шаг 2. По полученной свёртке вычислить вероятность попадания случайной величины на отрицательную часть оси абсцисс. Полученную вероятность сосредоточить в нуле оси абсцисс.

Шаг 3. Получить составную плотность вероятности на положительной полуоси абсцисс и найти для неё характеристическую функцию.

Шаг 4. Умножить полученную характеристическую функцию на характеристическую функцию (28).

Далее шаги 2–4 необходимо последовательно повторять до тех пор, пока плотность вероятности на положительной полуоси абсцисс не будет изменяться, т. е. совпадать с предшествующей на ней плотностью вероятности.

После этого следует использовать полученную плотность вероятности для нахождения стационарной функции распределения времени ожидания обслуживания поступающего требования в СМО.

Вместо исходных нормальных распределений могут использоваться любые распределения, плотности вероятностей которых позволяют на основе гиперэкспоненциальной аппроксимации получать необходимые характеристические функции. Свёртки сводятся к перемножению характеристических функций.

На элементарном примере покажем, как вычислить значения распределения времени ожидания в начале первого и второго циклов – характерные разрывные значения, присутствующие в начале распределения времени ожидания.

Положим, что заданы значения параметров указанных нормальных распределений:  $n = 11h$ ,  $\delta = 2h$ ,  $m = 10h$ ,  $\sigma = 3h$ . Тогда скачок распределения времени ожидания в начале первого цикла определится как  $1 - \rho_0 = \int_0^{\infty} c(z) dz$  и численно

будет равен  $1 - \rho_0 = 0,609$ . Соответствующая характеристическая функция равна  $\varphi(t) = e^{-(n-m)it} \cos(\sigma t) (\cos \delta t)$ . Вычислим начальные моменты  $c(x)$ :  $v_1 = -1h$ ,  $v_2 = 14h$ ,  $v_3 = -40h$  и, решив систему уравнений гипердельтной аппроксимации, найдём значения искомым параметров  $C_1 = 0,5$ ,  $C_2 = 0,5$ ,  $T_1 = -4,606h$ ,  $T_2 = 2,606h$ . Составим по ней аппроксимационную функцию  $F(x) = 0,5\Phi(x - 2,606) + 0,5\Phi(x + 4,606)$ , а затем найдём условную функцию распределения для положительной полуоси  $F_1(x, \tau) = \frac{F(x + \tau) - F(\tau)}{1 - F(\tau)}$ . Обе функции показаны на рис. 3.

Величина  $\tau = -5$ . Легко записать выражение для условной плотности вероятности, расположенной на положительной полуоси:

$$c_1(x) = 0,5\Delta(x) + 0,5\Delta(x - 7,606). \quad (30)$$

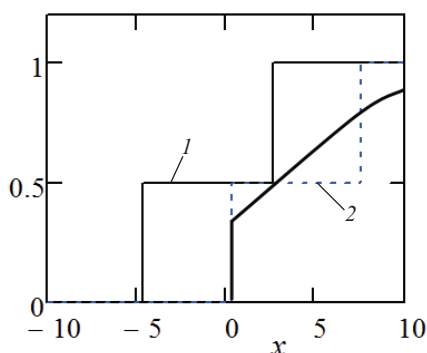


Рис. 3. Аппроксимационная (1) и условная (2) функции распределения

Соответствующая (30) характеристическая функция имеет вид

$$\varphi_1(t) = 0,5(1 + e^{7,606it}). \quad (31)$$

Умножая характеристические функции  $\varphi(t)$  и  $\varphi_1(t)$ , получим общую характеристическую функцию

$$\varphi\varphi_1(t) = 0,5 \cos(2t) \cos(3t) e^{-it} (1 + e^{7,606it}). \quad (32)$$

Используя (32), найдём значения начальных моментов и параметров новой гипердельтной аппроксимации:  $v_1 = 2,802h$ ;  $v_2 = 35,320h^2$ ;  $v_3 = 252,96h^3$ ;  $C_1 = 0,5$ ;  $C_2 = 0,5$ ;  $T_1 = -2,438h$ ;  $T_2 = 8,044h$ . Запишем выражения для плотности вероятности и функции распределения:

$$c(x) = \frac{1}{2}(\Delta(x + 2,438) + \Delta(x - 8,044));$$

$$C(x) = \frac{1}{2}(\Phi(x + 2,438) + \Phi(x - 8,044)). \quad (33)$$

Далее составим условную функцию распределения для положительной полуоси абсцисс и вычислим её значения при  $\theta = -2,438h$ :

$$C_1(x, \theta) = \frac{C(x + \theta) - C(\theta)}{1 - C(\theta)}. \quad (34)$$

Графики обеих функций представлены на рис. 4.

Начальный скачок функции распределения времени ожидания составит  $1 - \rho_1 = C_1(0,1;0) = 0,333$ .

Подобным образом согласно указанному пошаговому алгоритму могут быть определены следующие итеративные значения скачков распределения времени ожидания. Более того, при проведении дополнительного исследования можно составить алгоритм вычисления стационарного значения величины скачка функции распределения времени ожидания СМО.

Поведение функции за скачком будет определяться дискретной аппроксимацией функции распределения. В данной статье исследование выполнено только с точностью до трёх начальных моментов. Для получения непрерывной функции распределения времени ожидания следует слева направо соединить середины скачков непрерывной плавной линией.

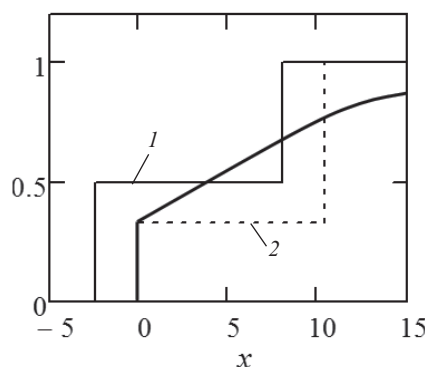


Рис. 4. Функция распределения (1) и условная функция распределения (2)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решению интегрального уравнения Винера – Хопфа распределения максимума случайного блуждания, когда координата процесса может принимать как положительное, так и отрицательное значение, посвящено большое число исследований. Однако его решение представляет определенные трудности, когда оба исходных распределения непрерывны и нетривиальны.

Основываясь на идее дискретного решения уравнения, предложенного в [8], в настоящей статье развивается дискретный метод решения уравнения именно для непрерывных исходных распределений. В его основе лежит предложенный автором метод гипердельтной аппроксимации произвольных распределений [6]. Но для того, чтобы этот метод не только был пригоден для положительных значений случайной величины, но и был распространён на всю вещественную ось, его скорректировали, применив в нём преобразования Фурье и характеристическую функцию. Это позволило получить итеративное численное решение уравнения Винера – Хопфа при трёх начальных моментах обеих нормальных исходных распределений. Для иллюстрации решения приведены частные примеры, подтверждающие работоспособность метода.

Метод может применяться для произвольных гладких распределений вероятностей. Количество начальных моментов, привлекаемых в методе, можно увеличить. Это приведёт к повышению точности решения, однако численный процесс решения усложнится. Хотя с практической точки зрения иногда ограничение может быть оправдано и малым числом моментов.

Применённый аппарат использования преобразования Фурье и характеристической функции, на наш взгляд, в дальнейшем можно усовершенствовать с целью получения решения уравнения в замкнутом аналитическом виде.

Источник [9] следует рассматривать как дополнительный для ознакомления с предшествующим исследованием авторов в данной области.

ЛИТЕРАТУРА

1. Payandeh Najafabadi A. T. An Approximate to Solution of a Subclass of Wiener-Hopf Integral Equation / A. T. Payandeh Najafabadi, D. Z. Kucerovsky // Proc. World Congr. Eng. "WCE 2009", 1–3 July, 2009, London, U. K. – Vol. II. – URL : [https://www.researchgate.net/publication/44260185\\_An\\_Approximate\\_To\\_Solution\\_Of\\_A\\_Subclass\\_Of\\_Wiener-Hopf\\_Integral\\_Equation](https://www.researchgate.net/publication/44260185_An_Approximate_To_Solution_Of_A_Subclass_Of_Wiener-Hopf_Integral_Equation).
2. Mansotral P. Wiener-Hopf Equation Technique for Generalized Variational Inequalities and Nonexpansive Mappings / P. Mansotral, B. S. Komal // Appl. Math. Sci. – 2012. – Vol. 6, № 18. – P. 869–878.
3. Nowak M. A. Approximation methods for a class of discrete Wiener-Hopf equations / M. A. Nowak // Opuscula Math. – 2009. – Vol. 29, № 3. – P. 271–288.
4. Chakraborty S. Some Applications of Dirac's Delta Function in Statistics for More Than One Random Variable / S. Chakraborty // Appl. Appl. Math. – 2008. – Vol. 3, Is. 1. – P. 42–54.
5. Klumpp V. Dirac Mixture Trees for Fast Suboptimal Multi-Dimensional Density Approximation / V. Klumpp, U. D. Hanebeck // Proc. 2008 IEEE Int. Conf. Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems "MFI 2008", Seoul, Republic of Korea, Aug. 2008.
6. Смагин В. А. О моделировании случайных процессов на основе гипердельтного распределения / В. А. Смагин, Г. В. Филимоныхин // Автоматика и вычислительная техника. – 1990. – № 1. – С. 25–31.
7. Смагин В. А. Коррекция гипердельтного распределения в теории случайных процессов / В. А. Смагин // Информация и космос. – 2015. – № 4. – С. 60–64.
8. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями : пер. с англ. / Л. Клейнрок. – М. : Мир, 1979. – 600 с.
9. Смагин В. А. Аппроксимационный метод расчёта разомкнутых сетей массового обслуживания / В. А. Смагин, Г. В. Филимоныхин // Автоматика и вычислительная техника. – 1986. – № 4. – С. 28–33.

# The Decision of the Integrated Equation of Wiener – Hopf by Method of Hyper-Delta Approximation

Smagin V.A.

SPIIRAS

Russia, St. Petersburg

va\_smagin@mail.ru

**Abstract.** The method of the approached decision of the integrated equation of Wiener – Hopf is presented at smooth distributions of probabilities making its component. The method is based on giperdelta approximations of initial distributions. Use in it of transformation of Fourier and characteristic function allows to work in a method with the random variables concentrated to all material axis of abscises.

**Keywords:** Wiener – Hopf integrated equation, giperdelta approximation of distributions, correction, transformation of Fourier, characteristic function, the initial moments, jump of distribution of function of expectation.

## REFERENCES

1. Payandeh Najafabadi A. T., Kucеровsky D. Z. An Approximate to Solution of a Subclass of Wiener-Hopf Integral Equation. *Proc. World Congr. Eng. "WCE 2009"*, 1–3 July, 2009, London, U. K., Vol. II. Available at: [https://www.researchgate.net/publication/44260185\\_An\\_Approximate\\_To\\_Solution\\_Of\\_A\\_Subclass\\_Of\\_Wiener-Hopf\\_Integral\\_Equation](https://www.researchgate.net/publication/44260185_An_Approximate_To_Solution_Of_A_Subclass_Of_Wiener-Hopf_Integral_Equation).
2. Mansotral P., Komal B. S. Wiener-Hopf Equation Technique for Generalized Variational Inequalities and Nonexpansive Mappings, *Appl. Math. Sci.*, 2012, Vol. 6, no. 18, pp. 869-878.
3. Nowak M. A. Approximation methods for a class of discrete Wiener-Hopf equations, *Opuscula Math.*, 2009, Vol. 29, no. 3, pp. 271-288.
4. Chakraborty S. Some Applications of Dirac's Delta Function in Statistics for More Than One Random Variable, *Appl. Appl. Math.*, 2008, Vol. 3, Is. 1, pp. 42-54.
5. Klumpp V., Hanebeck U. D. Dirac Mixture Trees for Fast Suboptimal Multi-Dimensional Density Approximation // Proc. 2008 IEEE Int. Conf. Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems "MFI 2008", Seoul, Republic of Korea, Aug. 2008.
6. Smagin V.A., Filimonihin G. V. About modeling random processes on the basis of the limit distribution [O modelirovanii sluchajnyh processov na osnove giperdeltnogo raspredeleniya], *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika [Automation and Computer Engineering]*, 1990, no. 1, pp. 25-31.
7. Smagin V.A. Correction giperdeltnogo distribution in the theory of random processes [Korrekcija giperdeltnogo raspredeleniya v teorii sluchajnyh processov], *Informaciya i kosmos [Information and Space]*, 2015, no. 4, pp. 60-64.
8. Klejnrok L. *Vychislitelnye sistemy s ocheredyami* [Computer systems with queues], Moscow, Mir, 1979, 600 p.
9. Smagin V.A., Filimonihin G. V. The approximation method for calculation of open queuing networks [Approksimacionnyj metod raschyota razomknutyh setej massovogo obsluzhivaniya], *Avtomatika i vychislitel'naya tekhnika [Automation and Computer Engineering]*, 1986, no. 4, pp. 28-33.