DOI: 10.24412/2413-2527-2023-133-57-60

Математическое моделирование процессов распространения загрязняющих веществ в замкнутой акватории

к.ф.-м.н. А. Н. Бестужева
Петербургский государственный университет
путей сообщений Императора Александра I
Санкт-Петербург, Россия
bes_alla@inbox.ru

к.т.н. В. А. Гончаренко
Петербургский государственный университет
путей сообщения Императора Александра I,
Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского
Санкт-Петербург, Россия
vlango@mail.ru

Аннотация. **Рассматриваются двумерные задачи о распространении диффундирующего вещества в замкнутой водной акватории. Получено аналитическое решение краевых задач для уравнения диффузии в круге конечного радиуса в зависимости от координат и времени. Это дает возможность для исследования области концентрации диффундирующего вещества выше предельно допустимой. Рассмотренные математические модели имеют важное прикладное значение в проблеме защиты окружающей среды при возникновении аварийных ситуаций на кораблях и судах.**

Ключевые слова: **краевые задачи математической физики, математическое моделирование, диффундирующее вещество, уравнение диффузии, область загрязнения, замкнутая акватория.**

Введение

Увеличение антропогенной нагрузки на экологические системы, в частности на водные объекты, обусловливает необходимость развития методов исследования масштабов загрязнения водной среды при попадании в них загрязняющих веществ. Для решения этой задачи требуются анализ процессов и прогнозирование параметров распространения загрязняющих веществ в водной среде. Из-за сложности постановки экспериментов в натурных условиях математическое моделирование становится основным способом изучения таких процессов.

Физическая модель исследуемого объекта — область загрязнения, которая образуется в результате попадания загрязняющих веществ в водную среду. Характеристика объекта — значение концентрации загрязняющего вещества в этой области не ниже «порогового» значения. Такое значение соответствует допустимому уровню воздействия на окружающую среду, его принято называть предельно допустимой концентрацией (ПДК).

Попадание загрязняющего вещества в водную среду обусловлено, как правило, наличием источника загрязнения, возникающего в результате аварийной ситуации. Обычно рассматривают два вида источника — залповый сброс загрязняющего вещества, при котором практически мгновенно в водной среде оказывается определенное количество загрязняющего вещества, второй — постепенное поступление загрязняющего вещества через образовавшуюся пробоину определенных размеров в корпусе кораблей и судов. В данном исследовании остановимся на первом варианте попадания загрязняющего вещества на поверхность замкнутой водной акватории. Такие ситуации являются следствием пожара или взрыва на корабле или судне, их разломов, образования значительных размеров пробоин.

Актуальность темы исследования подчеркивается еще тем, что согласно [1] капитанам судов предписано сообщать основные характеристики загрязнения, например площадь разлива загрязняющих веществ.

Решению краевых задач для уравнения диффузии посвящено большое число работ, из которых отметим фундаментальные труды [2–4]. К настоящему времени накоплен значительный опыт математического моделирования процессов турбулентной диффузии, результаты которых опубликованы в работах Г. И. Марчука, Л. Н. Тихонова, А. А. Самарского, Г. П. Астраханцева [5–7] и др. Однако математические модели исследуемых процессов носят общий характер и использование их для решения прикладных задач требует формулирования краевых условий, соответствующих реальным экологическим ситуациям.

Сходные вопросы были рассмотрены ранее в работе, посвященной решению уравнения теплопроводности в цилиндрических и сферических координатах с граничными условиями первого, второго и смешанного рода [8]. В статье [9] решались одномерное и двумерное уравнения диффузии для стержня и круга с различного вида граничными условиями, причем в этом случае исследуемая задача на собственные значения в силу наличия конечной границы имела дискретный спектр.

В [10] уравнение диффузии получено как в общем виде, так и для изотропной среды в цилиндрических телах, из физических соображений выводится выражение для коэффициента диффузии.

Несмотря на наличие обширной литературы, многообразие граничных и начальных условий, обусловленных новыми прикладными задачами, приводит к краевым задачам, не рассмотренным ранее. В частности, необходимость нахождения ограниченных решений для неограниченной области иногда оказывается нетривиальной задачей, а наличие «пороговых» значений для искомой функции концентрации приводит к необходимости нахождения корней неявной функции. В работе [11] было предложено аналитическое решение краевых задач для уравнения диффузии в неограниченной водной среде при начальном условии специального вида. В работе [12] было изучено влияние неравномерности начального распределения вещества на динамические характеристики области загрязнения.

Целью данного исследования является постановка математической задачи для уравнения диффузии с граничным условием второго рода с возможностью ее аналитического решения. Предположения и допущения, позволяющие решить данную краевую задачу математической физики для уравнения диффузии, сформулированы в [11].

Будем считать, что распространение загрязняющего вещества происходит в идеальной несжимаемой жидкости. Предположим, что среда изотропна в горизонтальной плоскости, источники (стоки) загрязняющего вещества отсутствуют. Будем учитывать как адвективный, так и турбулентный механизмы движения жидкости и переноса загрязняющего вещества. Процессами испарения и осаждения загрязняющего вещества пренебрегаем в связи с высокой скоростью его распространения. Особенностью данного исследования является предположение о замкнутости водной акватории, где происходит распространение загрязняющего вещества и образование области загрязнения. В рамках идеальной модели предположим, что водная акватория представляет собой круг радиуса R.

Данная статья посвящена вопросам получения аналитического решения процесса диффузии вещества, попавшего на водную поверхность в замкнутой акватории. Рассматривается двумерное уравнение диффузии в круге конечного радиуса.

Постановка задачи

Рассмотрим процесс диффузии вещества, попавшего на водную поверхность закрытой акватории в начальный момент времени.

Целью настоящего исследования является получение и исследование аналитического решения в зависимости от параметров задачи, которые будут описывать качественную картину развития процесса.

Перечислим основные предположения: жидкость считается идеальной и несжимаемой.

Математическую модель диффузии вещества, попавшего на водную поверхность в начальный момент времени, будем строить на основе краевой задачи математической физики для уравнения диффузии [2, 7].

Основное отличие от предыдущих постановок заключается в новом граничном условии.

Если не принимать во внимание эффект дифракции от границы акватории, то распространение диффундирующего вещества в двумерном приближении описывается уравнением диффузии, в котором неизвестной функцией является концентрация диффундирующего вещества $c = c(x, y, t)$:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = K\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

где K — горизонтальный коэффициент турбулентной диффузии.

Поставим краевые условия для данного уравнения диффузии. Начальное условие описывает способ попадания загрязняющего вещества, когда мгновенно в водной среде оказывается определенное количество загрязняющего вещества:

$$c(x, y, 0) = c_0(x, y);\ \ (x, y) \in D,$$

где $c_0(x, y)$ — начальное распределение концентрации загрязняющего вещества в D (D — область загрязнения в начальный момент времени $t = 0$). Начало координат $O(0, 0)$ помещено в геометрический центр области D. Рассмотрим геометрическую область D как круг радиуса l. Тогда для двумерной краевой задачи начальное условие будет выглядеть следующим образом:

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} c_0, 0 \le r \le l \\ 0,\ \ r > l. \end{cases} \tag{2}$$

Граничные условия:

$$c(0, t) < \infty;\ \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R. \tag{3}$$

Здесь $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Проведем операцию обезразмеривания:

$$c^1 = \frac{c}{c_0},\ \ c_m^1 = \frac{c_m}{c_0},\ \ r^1 = \frac{r}{l},\ \ t^1 = \frac{Kt}{l^2},\ \ R^1 = \frac{R}{l},$$

где c_m — предельное значение допустимой концентрации загрязняющего вещества. Индекс 1 далее опустим.

Тогда краевая задача (1)–(3) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r} \tag{4}$$

с граничными условиями

$$c(0, t) < \infty;\ \frac{\partial c}{\partial r} = 0 \text{ при } r = R \tag{5}$$

и начальным условием (для двумерной краевой задачи)

$$c(r, 0) = \begin{cases} \frac{1}{\pi},\ \ 0 \le r \le 1 \\ 0,\ \ r > 1. \end{cases} \tag{6}$$

Аналитическое решение методом Фурье

Решая уравнение (4) методом Фурье, получим

$$c(r, t) = \int_0^\infty (A_\lambda J_0(\lambda r) + B_\lambda Y_0(\lambda r)) e^{-\lambda^2 t} d\lambda,$$

где $J_0(\lambda r), Y_0(\lambda r)$ — функции Бесселя нулевого порядка I и II рода соответственно.

Из первого граничного условия $c(0, t) < \infty$ получим, что $B_\lambda = 0$.

Второе граничное условие $\partial c/_{\partial r} = 0$ при $r = R$ приводит к уравнению для нахождения λ: $J_1(\lambda R) = 0$.

Это уравнение дает бесконечное множество корней $\gamma_k = \lambda_k R,\ \ k = 1, 2, \dots$.

Тогда решение примет следующий вид:

$$c(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0(\lambda_k r)\, e^{-\lambda_k^2 t}.$$

Для частного случая начального условия

$$c(r, 0) = f(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi},\ 0 \le r \le 1 \\ 0,\ \ r > 1 \end{cases}$$

имеем:

$$f(r)=\sum_{k=1}^{\infty}A_kJ_0(\lambda_k r)=\begin{cases}\frac{1}{\pi},\ 0\le r\le 1\\ 0,\ r>1.\end{cases}$$

Используем разложение Фурье-Бесселя произвольной функции $f(x)$ вещественного переменного x [13].

$$\left(J_2(\gamma_k)\right)^2\frac{A_k}{2}=\int_0^1\xi f(\xi)J_1(\gamma_k\xi)\,d\xi=\int_0^1\xi J_1(\gamma_k\xi)\,d\xi\,.$$

Следовательно,

$$A_k=\frac{2}{\pi\gamma_k^2J_2^2(\gamma_k)}\int_0^{\gamma_k}uJ_1(u)\,du.$$

И тогда аналитическое решение краевой задачи (4)–(6) примет вид

$$c(r,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_k^2J_2^2(\gamma_k)}J_0(\lambda_k r)e^{-\lambda_k^2t}\int_0^{\gamma_k}uJ_1(u)du.$$

Известно, что

$$\int_0^{\gamma_k}uJ_1(u)du=\frac{\pi\gamma_k}{2}\left(J_1(\gamma_k)H_0(\gamma_k)-J_0(\gamma_k)H_1(\gamma_k)\right),$$

где $H_k(x)$ — функция Струве k-го порядка [14].

Окончательный вид решения:

$$c(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k RJ_2^2(\lambda_k R)}e^{-\lambda_k^2t}\left(J_1(\lambda_k R)H_0(\lambda_k R)-J_0(\lambda_k R)H_1(\lambda_k R)\right).$$

Заключение

Полученное решение позволяет решать следующие прикладные задачи: численно исследовать зависимость концентрации диффундирующего вещества $c=c(x,y,t)$ от времени и расстояния (как в безразмерных, так и в размерных переменных), исследовать области поверхности («пятна загрязнения»), в которой концентрация диффундирующего вещества превосходит определенное значение c_m («пороговое» значение, которое принято называть предельно допустимой концентрацией).

При этом можно показать, что размер пятна загрязнения сначала растет, достигая максимума, а затем убывает, то есть пятно загрязнения монотонно уменьшается. Можно определить максимальный радиус пятна загрязнения из равенства $r_{\max}(c_m)=r(t_{\max},c_m)$, где $t_{\max}$ — корень уравнения $r'(t,c_m)=0$ — следует искать численно.

С течением времени концентрация диффундирующего вещества уменьшается. Можно найти момент времени, когда пятно загрязнения с концентрацией выше чем c_m исчезает. Для этого следует найти время T из уравнения $c(0,T)=c_m$. Это предмет дальнейших исследований.

Литература

1. МАРПОЛ 73/78. Международная конвенция по предотвращению загрязнения с судов 1973 г., измененная протоколом 1978 г. к ней. Книга I и II = MARPOL 73/78. International convention for prevention of pollution from ships, 1973, as modified by the protocol of 1978 relating thereto. Book I and II. — Санкт-Петербург: ЦНИИМФ, 2023. — 862 с.
2. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982. — 320 с.
3. Озмидов, Р. В. Диффузия примесей в океане: Монография. — Ленинград [Санкт-Петербург]: Гидрометеоиздат, 1986. — 280 с.
4. Кошляков, Н. С. Уравнения в частных производных математической физики: Учебное пособие / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — Москва: Высшая школа, 1970. — 712 с.
5. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики: Учебное пособие / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — 6-е изд., испр. и доп. — Москва: Изд-во Московского университета, 1999. — 799 p.
6. Самарский, А. А. Численные методы решения задач конвекции-диффузии / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — 4-е изд. — Москва: URSS, 1999. — 246 с.
7. Моделирование экосистем больших стратифицированных озер: Монография / Г. П. Астраханцев, В. В. Меншуткин, Н. А. Петрова, Л. А. Руховец; под ред. Л. А. Руховца. — Санкт-Петербург: Наука, 2003. — 362 с.
8. Caretto, L. S. Solution of the Diffusion Equation // ME 501B — Seminar in Engineering Analysis. Course Notes. California State University Northridge, Mechanical Engineering Department. — Spring 2009. — 36 p. URL: http://www.csun.edu/~lcaretto/me501b/diffusion.doc (дата обращения 20.03.2023).
9. Olver, P. J. Introduction to Partial Differential Equations. — Cham: Springer Nature, 2014. — 661 p. — (Undergraduate Texts in Mathematics). DOI: 10.1007/978-3-319-02099-0.
10. Thambynayagam, R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. — New York: McGraw-Hill Education, 2011. — 2039 p.
11. Бестужева, А. Н. Динамика распространения диффундирующего вещества на поверхности и в толще воды / А. Н. Бестужева, А. Л. Смирнов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2015. Т. 2 (60), Вып. 4. С. 589–599.
12. Бестужева, А. Н. Влияние начальных условий на динамику распространения диффундирующего вещества / А. Н. Бестужева, А. Л. Смирнов // Вестник Санкт-Петербургского университета. Математика. Механика. Астрономия. 2017. Т. 4 (62), Вып. 4. С. 664–670. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.414.
13. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции = Higher transcendental functions: в 3 т. / Г. Бейтмен, А. Эрдейи; пер. с англ. Н. Я. Виленкина. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965–1967. — (Справочная математическая библиотека).
Том 2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. — 1966. — 296 с.
14. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами = Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables / Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган; пер. с англ. под ред. В. А. Диткина и Л. Н. Кармазиной. — Москва: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979. — 832 с.

DOI: 10.24412/2413-2527-2023-133-57-60

Mathematical Modeling of the Spread of Pollutants in a Closed Water Area

PhD A. N. Bestuzheva
Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University
Saint Petersburg, Russia
bes_alla@inbox.ru

PhD V. A. Goncharenko
Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University,
Mozhaisky Military Space Academy
Saint Petersburg, Russia
vlango@mail.ru

Abstract. **Two-dimensional problems of diffusing substance propagation in a closed water area are considered. An analytical solution of boundary value problems for the diffusion equation in a circle of finite radius is obtained depending on the coordinates and time. This makes it possible to study the area of concentration of the diffusing substance above the maximum permissible. The considered mathematical models have an important applied value in the problem of environmental protection in the event of emergencies on ships and vessels.**

Keywords: **boundary value problems of mathematical physics, mathematical modeling, diffusing substance, diffusion equation, pollution spot, polluting area, closed water area.**

References

1. MARPOL 73/78. International convention for prevention of pollution from ships, 1973, as modified by the protocol of 1978 relating thereto. Book I and II [MARPOL 73/78. Mezhdunarodnaya konventsiya po predotvrashcheniyu zagryazneniya s sudov 1973 g., izmenennaya protokolom 1978 g. k ney. Kniga I i II]. Saint Petersburg, Central Marine Research and Design Institute (CNIIMF), 2023, 862 p.

2. Marchuk G. I. Mathematical models in environmental problems [Matematicheskoe modelirovanie v probleme okruzhayushchey sredy], Moscow, Nauka Publishers, 1982, 320 p.

3. Ozmidov R. V. Diffusion of contaminants in the ocean: Monograph [Diffuziya primesey v okeane: Monografiya]. Leningrad [Saint Petersburg], Hydrometeoizdat Publishing House, 1986, 280 p.

4. Koshlyakov N. S., Gliner E. B., Smirnov M. M. Differential equations of mathematical physics: Study guide [Uravneniya v chastnykh proizvodnykh matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie]. Moscow, Vysshaya Shkola Publishing House, 1970, 712 p.

5. Tikhonov A. N., Samarsky A. A. Equations of mathematical physics: Study guide [Uravneniya matematicheskoy fiziki: Uchebnoe posobie]. Moscow, Moscow State University, 1999, 799 p.

6. Samarsky A. A., Vabishchevich P. N. Numerical methods for solving convection-diffusion problems [Chislennye metody resheniya zadach konvektsii-diffuzii]. Moscow, URSS Publishing Group, 1999, 246 p.

7. Astrakhantsev G. P., Menshutkin V. V., Petrova N. A., Rukhovets L. A. Modelling the ecosystems of large stratified lakes: Monograph [Modelirovanie ekosistem bolshikh stratifitsirovannykh ozer: Monografiya]. Saint Petersburg, Nauka Publishers, 2003, 362 p.

8. Caretto L. S. Solution of the Diffusion Equation, *ME 501B — Seminar in Engineering Analysis. Course Notes. California State University Northridge, Mechanical Engineering Department*, Spring 2009, 36 p.
Available at: http://www.csun.edu/~lcaretto/me501b/diffusion.doc (accessed 20 Mar 2023).

9. Olver P. J. Introduction to Partial Differential Equations. Cham, Springer Nature, 2014, 661 p.
DOI: 10.1007/978-3-319-02099-0.

10. Thambynayagam R. K. M. The Diffusion Handbook: Applied Solutions for Engineers. New York, McGraw-Hill Education, 2011, 2039 p.

11. Bestuzheva A. N., Smirnov A. L. Propagation Dynamics of a Diffusive Pollutants on the Water Surface and in the Water [Dinamika rasprostraneniya diffundiruyushchego veshchestva na poverkhnosti i v tolshche vody], *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy [Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya]*, 2015, Vol. 2 (60), Is. 4, Pp. 589–599.

12. Bestuzheva A. N., Smirnov A. L. Effect of Initial Conditions on Dispersion Dynamics of Pollution Spot [Vliyanie nachalnykh usloviy na dinamiku rasprostraneniya diffundiruyushchego veshchestva], *Vestnik of Saint Petersburg University. Mathematics. Mechanics. Astronomy [Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Astronomiya]*, 2017, Vol. 4 (62), Is. 4, Pp. 664–670.
DOI: 10.21638/11701/spbu01.2017.414.

13. Bateman H., Erdélyi A. Higher transcendental functions. Volume 2. Bessel functions, functions of a parabolic cylinder, orthogonal polynomials [Vysshie transtsendentnye funktsii. Tom 2. Funktsii Besselya, funktsii parabolicheskogo tsilindra, ortogonalnye mnogochleny], Moscow, Nauka Publishers, 1966, 296 p.

14. Abramowitz M., Stegun I. A. (eds.) Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables [Spravochnik po spetsialnym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami]. Moscow, Nauka Publishers, 1979, 832 p.