DOI: 10.24412/2413-2527-2022-331-19-24

Об ожидаемом размере подмножества Парето случайного множества точек

к.ф.-м.н. А. Н. Баушев
Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I
Санкт-Петербург, Россия
baushev@pgups.ru

к.ф.-м.н. О. Л. Семёнова
Санкт-Петербургский государственный университет
Санкт-Петербург, Россия
o_semenova@mail.ru

Аннотация. **Статья посвящена оцениванию математического ожидания мощности множества Парето в конечном множестве точек, образованном симметрично зависимыми случайными элементами пространства $\mathbb{R}^d$. Получены оценки, аналогичные хорошо известным оценкам для случая независимых случайных векторов.**

Ключевые слова: **случайное множество точек, множество Парето, симметрично зависимые случайные величины, случайные перестановки, рекорды в последовательности случайных величин.**

Введение

Задача построения и исследования множества Парето играет ключевую роль в современных подходах к решению задач многокритериальной оптимизации [1–8]. Ей посвящено большое количество работ, которые можно разбить на два класса, в зависимости от того, конечным или бесконечным является рассматриваемое исходное множество, с незначительными отличиями в терминологии. Мы будем иметь дело со случаем конечного исходного множества и говорить о *множестве Парето,* а не о «границе Парето» или о «фронте Парето», как это принято в работах, в которых исходное множество описывается как подмножество пространства $\mathbb{R}^d$, точки которого удовлетворяют определенным аналитическим соотношениям [5].

Отметим, что несмотря на то, что можно легко построить примеры, в которых множество Парето совпадает с исходным множеством, в типичных ситуациях множество Парето имеет существенно меньшую мощность, чем исходное множество, как это было показано в пионерской работе [9]. «Типичная ситуация» в этой работе определялась как ситуация, в которой множество весов рассматриваемых объектов может быть интерпретировано как результат процедуры независимого выбора из вероятностного распределения в пространстве $\mathbb{R}^d$ с независимыми и одинаково распределенными координатами, имеющими непрерывную функцию распределения.

Заметим, что случай, когда координаты независимы, но имеют различные непрерывные строго монотонные функции распределения F_i, $i = 1, \dots, d$ при помощи преобразования Смирнова $(x_1, \dots, x_d) \to \big(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)\big)$ сводится к случаю независимых координат, имеющих равномерное распределение на отрезке [0,1], поскольку такое преобразование, помимо прочего, сохраняет отношение частичного порядка на $\mathbb{R}^d$.

Однако попытки отказаться от «независимости» приводят к необходимости так или иначе описывать модели зависимостей между элементами исходного множества. Отметим, что имеются два направления для обобщения результатов работы [9]. В первом из них происходит отказ от условия независимости координат, но сохраняется условие независимого выбора при генерировании исходного множества, а во втором, наоборот, сохраняется условие независимости координат, но при этом исходное случайное множество интерпретируется как реализация случайного вектора с $\mathbb{R}^d$-значными компонентами или, другими словами, как случайная $n \times d$ матрица с независимыми столбцами, где n — число точек в исходном множестве.

В настоящей работе мы примыкаем ко второму из этих направлений, предполагая, что строки матрицы представляют собой симметрично зависимые $\mathbb{R}^d$-значные случайные векторы, а столбцы независимы.

Симметрично зависимые случайные величины и векторы естественным образом возникают в различных прикладных задачах [9]. Приводимая далее лемма 3 также в какой-то мере описывает достаточно широкий спектр ситуаций, в которых могут появляться симметрично зависимые случайные величины.

Основные результаты нашей работы оказываются вполне аналогичными результатам работы [9]. Однако мы использовали другой подход, основанный на теории рекордов [7, 10, 11], который позволил обобщить результаты [9] на случай симметрично зависимых случайных векторов.

Предварительные результаты

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество. Множеством *минимальных элементов* множества X или *множеством Парето* для множества X называется множество $Min(X) = \{x \in X \mid \nexists\, y \in X: y < x\}$.

Отображение $\varphi: Y \longmapsto Min(Y)$, определенное на совокупности подмножеств множества X, называется *фильтрацией* совокупности подмножеств отношением частичного порядка $\leq$. Неподвижные точки этого отображения, то есть подмножества $Y \subset X$, состоящие из попарно несравнимых элементов, называются *фильтрованными* множествами. Таким образом, множество Парето для множества X — это максимальное по включению фильтрованное подмножество множества X.

В дальнейшем мы будем иметь дело с естественным отношением частичного порядка на пространстве $\mathbb{R}^d$. По определению $x = (x_1, \dots, x_d) \leq y = (y_1, \dots, y_d)$ равносильно выполнению системы неравенств $x_1 \leq y_1, \dots, x_d \leq y_d$. Мы также будем иметь дело с отношениями частичного порядка $\leq_k$, для которых неравенство

$$x = (x_1, \dots, x_d) \leq_k y = (y_1, \dots, y_d)$$

равносильно выполнению системы неравенств $x_k \le y_k, \dots, x_d \le y_d$. Через φ_k мы будем обозначать соответствующие фильтрации при $k = 2, \dots, d$.

Мы будем рассматривать множества $X \subset \mathbb{R}^d$, обладающие следующим свойством *координатной единственности*: для любых $x, y \in X$ и любого $j \in \{1, \dots, d\}$ выполняется одно из неравенств $x_j < y_j$ или $y_j < x_j$. Такие множества мы будем называть U-множествами (англ. *Uniqueness* — «уникальность, единственность»).

Лемма 1. Пусть элементы U-множества $X \subset \mathbb{R}^d$ занумерованы по возрастанию первой координаты: $X = \{x^1, \dots, x^n\}$. Положим $X_k = \{x^1, \dots, x^k\}$, $k = 2, \dots n$. Для того, чтобы $x^k \in \varphi(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $x^k \in \varphi_2(X_k)$.

Доказательство.

1) Необходимость. Если $x^k \notin \varphi_2(X_k)$, то найдется $r < k$ такое, что $x_2^r \le x_2^k, \dots, x_d^r \le x_d^k$, причем по крайней мере одно из этих неравенств является строгим. Поскольку $x_1^r \le x_1^k$, отсюда следует, что $x^k \notin \varphi(X)$.

2) Достаточность. Доказательство от противного. Предположим, что $x^k \in \varphi_2(X_k)$, но $x^k \notin \varphi(X)$. Тогда найдется $r \in \{1, \dots, n\} \backslash \{k\}$ такое, что $x_1^r \le x_1^k, \dots, x_d^r \le x_d^k$, а по условию координатной единственности все эти неравенства являются строгими. Так как элементы занумерованы по возрастанию первой координаты, то должно выполняться неравенство $r < k$, но тогда получаем противоречие с условием $x^k \in \varphi_2(X_k)$. ■

Следствие. Пусть элементы U-множества $X \subset \mathbb{R}^d$ занумерованы по возрастанию j-й координаты:

$$1 \le j \le d - 1 : X = \{x^1, \dots, x^n\}, X_k = \{x^1, \dots, x^k\}, k = 2, \dots n.$$

Для того, чтобы $x^k \in \varphi_j(X)$ необходимо и достаточно, чтобы $x^k \in \varphi_{j+1}(X_k)$.

Доказательство следствия вполне аналогично доказательству леммы 1.

Лемма 1 служит основой для рекурсивной конструкции, которая используется в дальнейшем при построении множества Парето. Граничные условия для этой конструкции описываются леммой 2.

Лемма 2. Пусть элементы U-множества $X \subset \mathbb{R}^2$ занумерованы по возрастанию первой координаты: $X = \{x^1, \dots, x^n\}$. Для того, чтобы множество X было фильтрованным, необходимо и достаточно выполнения неравенств $x_2^1 > x_2^2 > \dots > x_2^n$.

Доказательство леммы 2 непосредственно вытекает из определения фильтрованного множества.

Пусть элементы U-множества $X = \{x^1, \dots, x^n\} \subset \mathbb{R}^2$ занумерованы по возрастанию первой координаты. Элемент x^k называется *рекордным* если $x_2^k < \min\{x_2^1, \dots, x_2^{k-1}\}$. По определению элемент x^1 считается рекордным.

Следствие. Мощность подмножества Парето в U-множестве $X \subset \mathbb{R}^2$ совпадает с числом рекордных элементов в последовательности $x^1, \dots, x^n$, полученной в результате сортировки множества X по первой координате.

В дальнейшем мы будем иметь дело с $\mathbb{R}^d$-значными случайными векторами $X_1, \dots, X_n$. Для обозначения вероятностей событий и математических ожиданий случайных величин мы будем использовать соответственно символы $\mathbf{P}\{\cdot\}$ и $\mathbf{E}(\cdot)$, а для совместного распределения векторов $X_1, \dots, X_n$ использовать символ $P_{X_1,\dots,X_n}$.

Обозначим через Π множество всех перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$, то есть взаимно однозначных отображений множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на себя.

Случайные векторы $X_1, \dots, X_n$ называются *симметрично зависимыми*, если их совместное распределение инвариантно относительно любой перестановки индексного множества, то есть если $P_{X_{\pi(1)},\dots,X_{\pi(n)}} = P_{X_1,\dots,X_n}$ для любой $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n)) \in \Pi$.

Отметим некоторые простейшие факты, связанные с понятием симметричной зависимости.

Предложение 1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — $\mathbb{R}^d$-значные случайные векторы.

1. Для того, чтобы $X_1, \dots, X_n$ были симметрично зависимыми необходимо и достаточно, чтобы их совместное распределение было инвариантным относительно любой транспозиции (перестановки, меняющей местами только два индекса).

2. Если $X_1, \dots, X_n$ симметрично зависимы, то для любого непустого подмножества $I \subset \{1, \dots, n\}$ случайные величины $(X_i)_{i \in I}$ также симметрично зависимы.

3. Если $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены, то $X_1, \dots, X_n$ симметрично зависимы.

4. Если $X_1, \dots, X_n$ симметрично зависимы и X_1 не зависит от $X_2, \dots, X_n$, то $X_1, \dots, X_n$ независимы и одинаково распределены.

5. Если $X_1, \dots, X_n$ симметрично зависимы и $\mathbb{R}^d$-значный случайный вектор Y не зависит от $X_1, \dots, X_n$, то случайные векторы $Z_1 = Y + X_1, \dots, Z_n = Y + X_n$ симметрично зависимы.

6. Если $X_1, \dots, X_n$ симметрично зависимы, то для любой измеримой функции $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ случайные величины $f(X_1), \dots, f(X_n)$ симметрично зависимы. В частности, координаты $X_{1j}, \dots, X_{nj}$ симметрично зависимы для каждого $j \in \{1, \dots, d\}$.

Случайные величины со значениями в множестве Π называются *случайными перестановками* элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$. В дальнейшем мы будем использовать термин «случайная перестановка» в более узком смысле, подразумевая, что случайная перестановка σ имеет равномерное распределение на множестве Π, то есть что $\mathbf{P}\{\sigma = \pi\} = 1/n!$ для любой $\pi \in \Pi$.

Предложение 2. Пусть $\pi \in \Pi$, σ, σ' — случайные перестановки элементов множества $\{1, 2, \dots, n\}$. Тогда:

1. $\pi\sigma$ и $\sigma\pi$ — случайные перестановки.

2. Если σ и σ' независимы, то $\sigma\sigma'$ и $\sigma'\sigma$ — случайные перестановки.

Доказательство. Докажем п. 2. Зафиксируем $\pi' \in \Pi$. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\sigma\sigma' = \pi'\} = \sum_{\pi \in \Pi} \mathbf{P}\{\sigma\sigma' = \pi' | \sigma = \pi\} \mathbf{P}\{\sigma = \pi\} =$$

$$= \sum_{\pi \in \Pi} \mathbf{P}\{\sigma' = \pi'\pi^{-1}\} \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}!} = \frac{1}{n!}$$

так как $\pi'\pi^{-1}$ так же пробегает множество Π, когда его пробегает π. ■

Лемма 3. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — случайные $\mathbb{R}^d$-значные векторы с произвольным совместным распределением и пусть σ — случайная перестановка индексов, не зависящая от $X_1, \dots, X_n$. Тогда случайные векторы $X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}$ симметрично зависимы.

Доказательство. Для любых борелевских множеств $B_1, \dots, B_n \subset \mathbb{R}^d$ и любой перестановки $\pi' \in \Pi$ по формуле полной вероятности мы имеем равенства

$$\mathbf{P}\{X_{\pi'\sigma(1)} \in B_1, \dots, X_{\pi'\sigma(n)} \in B_n\} =$$

$$= \sum_{\pi \in \Pi} \mathbf{P}\{X_{\pi'\sigma(1)} \in B_1, \dots, X_{\pi'\sigma(n)} \in B_n | \sigma = \pi\}\mathbf{P}\{\sigma = \pi\} =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \Pi} \mathbf{P}\{X_{\pi'\pi(1)} \in B_1, \dots, X_{\pi'\pi(n)} \in B_n\}.$$

Когда π пробегает множество Π, $\pi'\pi$ также пробегает множество Π, следовательно, правая часть последнего равенства не зависит от π'. ■

С последовательностью $\mathbb{R}^d$-значных случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ мы будем связывать матрицу их координат $(X_{ij} | \, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, d)$, в которой индекс строки — номер вектора в последовательности, а индекс столбца — номер координаты.

Будем говорить, что случайные $\mathbb{R}^d$-значные векторы обладают свойством *стохастической координатной единственности* и называть их *SU*-векторами (Stochastic Uniqueness), если $\mathbf{P}\{X_{kj} = X_{lj}\} = 0$ для любых различных $k, l \in \{1, \dots, n\}$ и для любого $j \in \{1, \dots, d\}$.

Лемма 4. Пусть $X_1, \dots, X_n$ — $\mathbb{R}^d$-значные симметрично зависимые случайные *SU*-векторы, σ_j — перестановка их индексов в соответствии с возрастанием *j*-й координаты ($j \in \{1, \dots, d\}$). Тогда σ_j — случайная перестановка, то есть σ_j имеет равномерное распределение на множестве Π.

Доказательство. Зафиксируем $\pi \in \Pi$. Случайное событие $\{\sigma_j = \pi\}$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие $\{X_{\pi(1),j} < \dots < X_{\pi(n),j}\}$. Из условия симметричной зависимости следует, что вероятность последнего события не зависит от π, а из условия стохастической координатной единственности — что

$$\sum_{\pi' \in \Pi} \mathbf{P}\{X_{\pi'(1),j} < \dots < X_{\pi'(n),j}\} = 1.$$

Таким образом $n! \; \mathbf{P}\{\sigma_j = \pi\} = 1$, что и требовалось. ■

Замечание. Свойство стохастической координатной единственности играет существенную роль при выводе основных результатов. Для $\mathbb{R}^d$-значных симметрично зависимых случайных векторов $X_1, \dots, X_n$ координатные величины $X_{1j}, \dots, X_{nj}$ симметрично зависимы, поэтому вероятность $\mathbf{P}\{X_{kj} = X_{lj}\}$ не зависит от конкретного выбора пары $k, l \in \{1, \dots, n\}$. Обозначим через F_j функцию распределения величины $X_{1j} - X_{2j}$. Тогда требование условия стохастической координатной единственности равносильно следующему требованию: функции F_j не имеют атомов в нуле при любом $j \in \{1, \dots, d\}$.

При выводе основных результатов наряду с условием стохастической координатной единственности мы будем использовать также условие независимости координат векторов $X_1, \dots, X_n$, то есть условие взаимной независимости столбцов матрицы $(X_{ij} | \, i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, d)$.

$\mathbb{R}^d$-значные случайные векторы $X_1, \dots, X_n$, удовлетворяющие обоим этим условиям, мы будем называть *SUI*-векторами (англ. *Independence* — «независимость»), а соответствующие им координатные матрицы — *SUI*-матрицами.

Основные результаты

Символом *#M* мы в дальнейшем обозначаем число элементов множества *M*. Введем также обозначение для *n*-го гармонического числа:

$$H(n) = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, \dots \, .$$

Пусть $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, где $X_1, \dots, X_n$ — $\mathbb{R}^d$-значные случайные *SUI*-векторы.

Теорема 1. Пусть $d = 2$. Тогда $\mathbf{E}[\#\varphi(X)] = H(n)$.

Доказательство. Пусть $X^1, \dots, X^2$ — элементы множества *X*, перенумерованные в соответствии с возрастанием первой координаты. Тогда, согласно леммам 3 и 4, последовательность вторых координат этих векторов $X_2^1 \dots, X_2^n$ является последовательностью симметрично зависимых случайных величин, для которой выполняется свойство стохастической единственности. По следствию из леммы 2 $\mathbf{E}[\#\varphi(X)] = \mathbf{E}R_n$, где R_n — число рекордных значений в последовательности $X_2^1 \dots, X_2^n$. Положим

$$\tau_1 = 1, \tau_k = \begin{cases} 1, \text{если } X_2^k < min\{X_2^1, \dots, X_2^{k-1}\} \\ 0, \text{если } X_2^k \geq min\{X_2^1, \dots, X_2^{k-1}\} \end{cases}, k \geq 2.$$

Тогда $\mathbf{E}R_n = 1 + \mathbf{P}\{\tau_2 = 1\} + \dots + \mathbf{P}\{\tau_n = 1\}$. Так как величины $X_2^1, \dots, X_2^k$ симметрично зависимы, то события $\{X_2^i = min\{X_2^1, \dots, X_2^k\}\}, i = 1, \dots, k$ равновероятны, а из условия стохастической единственности следует, что эти события являются попарно дизъюнктными с вероятностью 1. Поэтому $\mathbf{P}\{\tau_k = 1\} = \frac{1}{k}$ при $k = 2, \dots, n$. ■

Следствие. Пусть $d = 2$, ξ — случайно выбранная точка из множества *X*, удовлетворяющего условиям теоремы 1. Тогда $\mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X)\} = H(n)/n$.

Доказательство. Пусть $\kappa = \kappa(\xi)$ — номер точки ξ, полученный ею в результате сортировки множества *X*. Случайный выбор точки означает, что событие $\{\kappa = k\}$ имеет вероятность $1 / n$ для каждого $k = 1, \dots, n$. Если это событие произошло, то событие $\xi \in \varphi(X)$ происходит в том и только том случае, когда $X_2^k = min\{X_2^1, \dots, X_2^k\}$. По формуле полной вероятности получаем

$$\mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X)\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X) | \kappa = k\}\mathbf{P}\{\kappa = k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \times \frac{1}{n} = \frac{H(n)}{n} \, . \; ■$$

Заметим, что для любого непустого подмножества $X' \subset X$ мощности $n' = \#X'$ и случайно выбранной точки ξ из множества X'

$$\mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X')\} = \frac{H(n')}{n'} = \frac{\mathbf{E}[\#\varphi(X')]}{n'}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X')\} = \frac{\mathbf{E}[\#\varphi(X')]}{n'}. \qquad (1)$$

Равенство (1) справедливо, как нетрудно видеть, для любого $d \geq 2$.

Пусть $d > 2$, $X = \left(X_{ij} \mid i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, d\right)$ — *SUI*-матрица, строки которой симметрично зависимы и занумерованы по возрастанию первой координаты. Рассмотрим подматрицу X' полученной матрицы, образованную столбцами с номерами $2, \dots, d$. Эта подматрица также будет *SUI*-матрицей, строки которой симметрично зависимы согласно леммам 3 и 4. Пусть X_{k*} — k-я строка матрицы X, X'_{k*} — подстрока в матрице X'. По лемме 1 событие $\{X_{k*} \in \varphi(X)\}$ происходит тогда и только тогда, когда происходит событие

$$\{X'_{k*} \in \varphi(\mathcal{M}_k)\},\ \text{где}\ \mathcal{M}_k = \{X'_{1*}, \dots, X'_{k*}\}.$$

Обозначим через τ_k индикатор этого события. Имеем

$$\mathbf{E}[\#\varphi(X)] = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\{\tau_k = 1\} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{E}[\#\varphi_2(\mathcal{M}_k)]}{k}. \qquad (2)$$

Итерируя (2) (d - 2) раза и используя теорему 1, мы получим следующее равенство:

$$\mathbf{E}[\#\varphi(X)] = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}\left[\sum_{k_1=1}^{k} \frac{1}{k_1}\left[\dots\left[\frac{1}{k_{d-4}} \sum_{k_{d-3}=1}^{k_{d-4}} \frac{H(k_{d-3})}{k_{d-3}}\right]\right]\dots\right]. \qquad (3)$$

Формула (3) слишком громоздка для использования на практике, поэтому оставшаяся часть статьи посвящена получению простых оценок для $\mathbf{E}[\#\varphi(X)]$.

Лемма 5.

1. $\mathbf{E}[\#\varphi(X)] \leq H^{d-1}(n)$.
2. $\mathbf{E}[\#\varphi(X)] \geq \frac{1}{2^{\frac{(d-2)(d-1)}{2}}} H^{d-1}(n)$.

Доказательство.

1. Из (2) имеем

$$\mathbf{E}[\#\varphi(X)] \leq \mathbf{E}[\#\varphi_2(X)]H(n) \leq \dots \leq H^{d-1}(n).$$

2. Заметим, что

$$S(n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{H(k)}{k} > \frac{1}{2} H^2(n). \qquad (4)$$

Действительно, так как

$$\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{1}{kj} = \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{kj},$$

имеем

$$S(n) = \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq j \leq k \leq n} \frac{1}{kj} + \sum_{1 \leq k \leq j \leq n} \frac{1}{kj}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{1 \leq j,k \leq n} \frac{1}{kj} + \sum_{1 \leq k = j \leq n} \frac{1}{kj}\right) > \frac{1}{2} H^2(n).$$

Покажем теперь, что для любых $r, n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{H^r(k)}{k} \geq \frac{1}{2^r} H^{r+1}(n). \qquad (5)$$

Так как функция $f(x) = x^r$ выпукла, то по неравенству Йенсена, принимая во внимание (4), имеем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{H^r(k)}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kH(n)} \left(H(k) H^{1/r}(n)\right)^r \geq$$

$$\geq H^{(1/r-1)r}(n) \times (S(n))^r \geq$$

$$\geq H^{1-r}(n) \times \frac{H^{2r}(n)}{2^r} = \frac{1}{2^r} H^{r+1}(n).$$

Применяя последовательно неравенство (5) в равенстве (3) (d - 2) раза, получим:

$$\mathbf{E}[\#\varphi(X)] \geq \frac{H^{d-1}(n)}{2^{1+\dots+(d-2)}} = \frac{1}{2^{\frac{(d-2)(d-1)}{2}}} H^{d-1}(n). \blacksquare$$

Принимая во внимание, что $H(n) = \Theta(\log n)$ мы получаем следующий результат.

Теорема 2. Пусть $d \geq 2$. Тогда

$$\mathbf{E}[\#\varphi(X)] = \Theta([\log n]^{d-1}).$$

Следствие. Пусть $d \geq 2$, ξ — случайно выбранная точка в множестве X. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi \in \varphi(X)\} = \Theta\left(\frac{[\log n]^{d-1}}{n}\right).$$

Литература

1. Campigotto, P. Active Learning of Pareto Fronts / P. Campigotto, A. Passerini, R. Battiti // IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems. 2014. Vol. 25, Is. 3. Pp. 506–519. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2275918.

2. Couckuyt, I. Fast Calculation of Multiobjective Probability of Improvement and Expected Improvement Criteria for Pareto Optimization / I. Couckuyt, D. Deschrijver, T. Dhaene // Journal of Global Optimization. 2014. Vol. 60, Is. 3. Pp. 575–594. DOI: 10.1007/s10898-013-0118-2.

3. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II / K. Deb, A. Pratap, S. Agarwal, T. Meyarivan // IEEE Transactions on Evolutionary Computation. 2002. Vol. 6, Is. 2. Pp. 182–197. DOI: 10.1109/4235.996017.

4. Zuluaga, M. ε-PAL: An Active Learning Approach to the Multi-Objective Optimization Problem / M. Zuluaga, A. Krause, M. Püschel // Journal of Machine Learning Research. 2016. Vol. 17. Art. No. 15-047. 32 p.

5. Messac, A. The Normalized Normal Constraint Method for Generating the Pareto Frontier / A. Messac, A. Ismail-Yahaya, C. A. Mattson // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2003. Vol. 25, Is. 2. Pp. 86–98.
DOI: 10.1007/s00158-002-0276-1.

6. Andersson, J. A Survey of Multiobjective Optimization in Engineering Design. Technical report LiTH-IKP-R-1097. Department of Mechanical Engineering Linköping University, Linköping, Sweden. 2000. 34 p.

7. Kallenberg, O. Probabilistic Symmetries and Invariance Principles. — New York: Springer New York, 2005. — 524 p. — (Probability and Its Applications).
DOI: 10.1007/0-387-28861-9.

8. Goldie, C. M. Records in a Partially Ordered Set / C. M. Goldie, S. Resnick // The Annals of Probability. 1989. Vol. 17, No. 2. Pp. 678–699. DOI: 10.1214/aop/1176991421.

9. On the Average Number of Maxima in a Set of Vectors and Applications / J. L. Bentley, H. T. Kung, M. Schkolnick, C. D. Thompson // Journal of the Association for Computing Machinery. 1978. Vol. 25, No. 4. Pp. 536–543.
DOI: 10.1145/322092.322095.

10. Невзоров, В. Б. Рекорды. Математическая теория. — Москва: Фазис, 2000. — 244 с. — (Стохастика; Вып. 4).

11. Arnold, B. C. Records / B. C. Arnold, N. Balakrishnan, H. N. Nagaraja. — New York: John Wiley & Sons, 1998. — (Wiley Series in Probability and Statistics).
DOI: 10.1002/9781118150412.

DOI: 10.24412/2413-2527-2022-331-19-24

On the Expected Size of the Pareto Subset of a Random Set of Points

PhD A. N. Baushev
Emperor Alexander I St. Petersburg
State Transport University
Saint Petersburg, Russia
baushev@pgups.ru

PhD O. L. Semenova
Saint Petersburg State University
Saint Petersburg, Russia
o_semenova@mail.ru

Abstract. **The article is devoted to an estimation of the expected size of the Pareto set in a finite set of points drawn by symmetrically dependent random variables in $\mathbb{R}^d$. The received estimates are fully analogized to the well-known estimates in the case of independent random variables.**

Keywords: **a random set of points, the Pareto set, symmetrically dependent random variables, random permutations, records in a sequence of random variables.**

References

1. Campigotto P., Passerini A., Battiti R. Active Learning of Pareto Fronts, *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 2014, Vol. 25, Is. 3, Pp. 506–519. DOI: 10.1109/TNNLS.2013.2275918.
2. Couckuyt I., Deschrijver D., Dhaene T. Fast Calculation of Multiobjective Probability of Improvement and Expected Improvement Criteria for Pareto Optimization, *Journal of Global Optimization*, 2014, Vol. 60, Is. 3, Pp. 575–594. DOI: 10.1007/s10898-013-0118-2.
3. Deb K., Pratap A., Agarwal S., Meyarivan T. A Fast and Elitist Multiobjective Genetic Algorithm: NSGA-II, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, Vol. 6, Is. 2, Pp. 182–197. DOI: 10.1109/4235.996017.
4. Zuluaga M., Krause A., Püschel M. ε-PAL: An Active Learning Approach to the Multi-Objective Optimization Problem, *Journal of Machine Learning Research*, 2016, Vol. 17, Art. No. 15-047, 32 p.
5. Messac A., Ismail-Yahaya A., Mattson C. A. The Normalized Normal Constraint Method for Generating the Pareto Frontier, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2003, Vol. 25, Is. 2, Pp. 86–98. DOI: 10.1007/s00158-002-0276-1.
6. Andersson J. A Survey of Multiobjective Optimization in Engineering Design. Technical report LiTH-IKP-R-1097. Department of Mechanical Engineering Linköping University, Linköping, Sweden, 2000, 34 p.
7. Kallenberg O. Probabilistic Symmetries and Invariance Principles. New York, Springer New York, 2005, 524 p. DOI: 10.1007/0-387-28861-9.
8. Goldie C. M., Resnick S. Records in a Partially Ordered Set, *The Annals of Probability*, 1989, Vol. 17, No. 2, Pp. 678–699. DOI: 10.1214/aop/1176991421.
9. Bentley J. L., Kung H. T., Schkolnick M., Thompson C. D. On the Average Number of Maxima in a Set of Vectors and Applications, *Journal of the Association for Computing Machinery*, 1978, Vol. 25, No. 4, Pp. 536–543. DOI: 10.1145/322092.322095.
10. Nevzorov V. B. Records. Mathematical theory [Rekordy. Matematicheskaya teoriya]. Moscow, Fazis Publishing House, 2000, 244 p.
11. Arnold B. C., Balakrishnan N., Nagaraja H. N. Records. New York, John Wiley & Sons, 1998. DOI: 10.1002/9781118150412.