

ISSN 2713-3192  
DOI 10.15622/ia.2023.22.3  
<http://ia.spcras.ru>

ТОМ 22 № 3

**ИНФОРМАТИКА  
И АВТОМАТИЗАЦИЯ**

**INFORMATICS  
AND AUTOMATION**



**СПб ФИЦ РАН**

**Санкт-Петербург  
2023**



# INFORMATICS AND AUTOMATION

Volume 22 № 3, 2023

Scientific and educational journal primarily specialized in computer science, automation, robotics, applied mathematics, interdisciplinary research

Founded in 2002

---

## Founder and Publisher

St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS)

---

## Editor-in-Chief

**R. M. Yusupov**, Prof., Dr. Sci., Corr. Member of RAS, St. Petersburg, Russia

---

## Editorial Council

<b>A. A. Ashimov</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan
<b>N. P. Veselkin</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>I. A. Kalyaev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Taganrog, Russia
<b>Yu. A. Merkuruyev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the Latvian Academy of Sciences, Riga, Latvia
<b>A. I. Rudskoi</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, St. Petersburg, Russia
<b>V. Sgurev</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of the Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria
<b>B. Ya. Sovetov</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAE, St. Petersburg, Russia
<b>V. A. Soyfer</b>	Prof., Dr. Sci., Academician of RAS, Samara, Russia

---

## Editorial Board

<b>O. Yu. Gusikhin</b>	Ph. D., Dearborn, USA
<b>V. Delic</b>	Prof., Dr. Sci., Novi Sad, Serbia
<b>A. Dolgui</b>	Prof., Dr. Sci., St. Etienne, France
<b>M. N. Favorskaya</b>	Prof., Dr. Sci., Krasnoyarsk, Russia
<b>M. Zelezny</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Plzen, Czech Republic
<b>H. Kaya</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Utrecht, Netherlands
<b>A. A. Karpov</b>	Assoc. Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>S. V. Kuleshov</b>	Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>A. D. Khomonenko</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>D. A. Ivanov</b>	Prof., Dr. Habil., Berlin, Germany
<b>K. P. Markov</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Aizu, Japan
<b>R. V. Meshcheryakov</b>	Prof., Dr. Sci., Moscow, Russia
<b>N. A. Moldovian</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. V. Nikulin</b>	Prof., Ph.D., New York, United States
<b>V. Yu. Osipov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>V. K. Pshikhopov</b>	Prof., Dr. Sci., Taganrog, Russia
<b>A. L. Ronzhin</b>	Prof., Dr. Sci., Deputy Editor-in-Chief, St. Petersburg, Russia
<b>H. Samani</b>	Assoc. Prof., Ph.D., Plymouth, UK
<b>A. V. Smirnov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>B. V. Sokolov</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia
<b>L. V. Utkin</b>	Prof., Dr. Sci., St. Petersburg, Russia

---

**Editor:** A. S. Lopotova

**Interpreter:** Ya. N. Berezina

**Art editor:** N. A. Dormidontova

---

## Editorial office address

SPC RAS, 39 litera A , 14-th line V.O., St. Petersburg, 199178, Russia

e-mail: [ia@spcras.ru](mailto:ia@spcras.ru), web: <http://ia.spcras.ru>

## The journal is indexed in Scopus

The journal is published under the scientific-methodological supervision of Department for Nanotechnologies and Information Technologies of the Russian Academy of Sciences

© St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences, 2023

# ИНФОРМАТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ

Том 22 № 3, 2023

Научный, научно-образовательный журнал с базовой специализацией в области информатики, автоматизации, робототехники, прикладной математики и междисциплинарных исследований.

Журнал основан в 2002 году

## Учредитель и издатель

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук»  
(СПб ФИЦ РАН)

## Главный редактор

Р. М. Юсупов, чл.-корр. РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ

## Редакционный совет

А. А. Ашимов	академик Национальной академии наук Республики Казахстан, д-р техн. наук, проф., Алматы, Казахстан
Н. П. Веселкин	академик РАН, д-р мед. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
И. А. Каляев	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Таганрог, РФ
Ю. А. Меркурьев	академик Латвийской академии наук, д-р, проф., Рига, Латвия
А. И. Рудской	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
В. Сгурев	академик Болгарской академии наук, д-р техн. наук, проф., София, Болгария
Б. Я. Советов	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
В. А. Сойфер	академик РАН, д-р техн. наук, проф., Самара, РФ

## Редакционная коллегия

О. Ю. Гусихин	д-р наук, Диаборн, США
В. Делич	д-р техн. наук, проф., Нови-Сад, Сербия
А. Б. Долгий	д-р наук, проф. Сент-Этьен, Франция
М. Железны	д-р наук, доцент, Пльзень, Чешская республика
Д. А. Иванов	д-р экон. наук, проф., Берлин, Германия
Х. Кайя	д-р наук, доцент, Утрехт, Нидерланды
А. А. Карпов	д-р техн. наук, доцент, Санкт-Петербург, РФ
С. В. Кулешов	д-р техн. наук, Санкт-Петербург, РФ
К. П. Марков	д-р наук, доцент, Аизу, Япония
Р. В. Мещеряков	д-р техн. наук, проф., Москва, РФ
Н. А. Молдовян	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
В.В. Никулин	д-р наук, проф., Нью-Йорк, США
В.Ю. Осипов	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
В. Х. Пшихолопов	д-р техн. наук, проф., Таганрог, РФ
А. Л. Ронжин	д-р техн. наук, проф., зам. главного редактора, Санкт-Петербург, РФ
Х. Самани	д-р наук, доцент, Плимут, Соединённое Королевство
А. В. Смирнов	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
Б. В. Соколов	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
Л. В. Уткин	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
М. Н. Фаворская	д-р техн. наук, проф., Красноярск, РФ
А. Д. Хомоненко	д-р техн. наук, проф., Санкт-Петербург, РФ
Л. Б. Шереметов	д-р техн. наук, Мехико, Мексика

Выпускающий редактор: А. С. Лопотова

Переводчик: Я. Н. Березина

Художественный редактор: Н. А. Дормидонтова

## Адрес редакции

14-я линия В.О., д. 39, лит. А, г. Санкт-Петербург, 199178, Россия

e-mail: ia@spcras.ru, сайт: <http://ia.spcras.ru>

## Журнал индексируется в международной базе данных Scopus

Журнал входит в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание ученой степени доктора и кандидата наук»

Журнал выпускается при научно-методическом руководстве Отделения нанотехнологий и информационных технологий Российской академии наук

© Федеральное государственное бюджетное учреждение науки

«Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук», 2023  
Разрешается воспроизведение в прессе, а также сообщение в эфир или по кабелю опубликованных в составе печатного периодического издания - журнала «ИНФОРМАТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ» статей по текущим экономическим, политическим, социальным и религиозным вопросам с обязательным указанием имени автора статьи и печатного периодического издания журнала «ИНФОРМАТИКА И АВТОМАТИЗАЦИЯ»

## CONTENTS

### **Artificial Intelligence, Knowledge and Data Engineering**

I. Lebedev

APPLICATION OF MULTILEVEL MODELS IN CLASSIFICATION AND REGRESSION PROBLEMS 487

P. Slivnitsin, L. Mylnikov

OBJECT RECOGNITION BY COMPONENTS AND RELATIONS BETWEEN THEM 511

S. Kumar, U. Pilonia, N. Nandal

A SYSTEMATIC STUDY OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE-BASED METHODS FOR DETECTING BRAIN TUMORS 541

N. Shilov, A. Ponomarev, A. Smirnov

THE ANALYSIS OF ONTOLOGY-BASED NEURO-SYMBOLIC INTELLIGENCE METHODS FOR COLLABORATIVE DECISION SUPPORT 576

### **Mathematical Modeling and Applied Mathematics**

G. Algazin, D. Algazina

CONVERGENCE IN NORM OF COLLECTIVE BEHAVIOR DYNAMICS IN THE REFLEXIVE MODEL OF OLIGOPOLY WITH LEADERS 616

N. Dudarenko, N. Vunder, V. Melnikov, A. Zhilenkov

MINIMIZATION OF PEAK EFFECT IN THE FREE MOTION OF LINEAR SYSTEMS WITH RESTRICTED CONTROL 647

R.K. Sharma, K.K. Sharma, T. Varma

DESIGNING OF 2D-IIR FILTER USING A FUSED ESMA-PELICAN OPTIMIZATION ALGORITHM (FEPOA) 667

V. Voevodin

A MODEL FOR ASSESSING THE FUNCTIONAL STABILITY OF INFORMATION INFRASTRUCTURE ELEMENTS FOR CONDITIONS OF EXPOSURE TO MULTIPLE COMPUTER ATTACKS 691

## СОДЕРЖАНИЕ

### **Искусственный интеллект, инженерия данных и знаний**

И.С. Лебедев  
ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОУРОВНЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ  
КЛАССИФИКАЦИИ И РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА 487

П.А. Сливницын, Л.А. Мыльников  
РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ ИХ  
ПРИМИТИВАМ И ОТНОШЕНИЯМ МЕЖДУ НИМИ 511

С. Кумар, У. Пилания, Н. Нандал  
СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ ОБНАРУЖЕНИЯ  
ОПУХОЛЕЙ ГОЛОВНОГО МОЗГА НА ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО  
ИНТЕЛЛЕКТА 541

Н.Г. Шилов, А.В. Пономарев, А.В. Смирнов  
АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОНТОЛОГО-ОРИЕНТИРОВАННОГО НЕЙРО-  
СИМВОЛИЧЕСКОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ КОЛЛАБОРАТИВНОЙ  
ПОДДЕРЖКЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 576

### **Математическое моделирование и прикладная математика**

Г.И. Алгазин, Д.Г. Алгазина  
СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО  
ПОВЕДЕНИЯ В РЕФЛЕКСИВНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ С  
ЛИДЕРАМИ 616

Н.А. Дударенко, Н.А. Вундер, В.Г. Мельников, А.А. Жиленков  
МИНИМИЗАЦИЯ ОТКЛОНЕНИЙ В ТРАЕКТОРИЯХ СВОБОДНОГО  
ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО  
УПРАВЛЕНИЮ 647

Р.К. Шарма, К.К. Шарма, Т. Варма  
ПРОЕКТИРОВАНИЕ 2D-БИХ-ФИЛЬТРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ  
АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ FUSED ESMA-PELICAN OPTIMIZATION  
ALGORITHM (FEROA) 667

В.А. Воеводин  
МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ЭЛЕМЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ ДЛЯ  
УСЛОВИЙ ВОЗДЕЙСТВИЯ МНОЖЕСТВА КОМПЬЮТЕРНЫХ АТАК 691

И.С. ЛЕБЕДЕВ  
**ПРИМЕНЕНИЕ МНОГОУРОВНЕВЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ  
КЛАССИФИКАЦИИ И РЕГРЕССИОННОГО АНАЛИЗА**

*Лебедев И.С.* **Применение многоуровневых моделей в задачах классификации и регрессионного анализа.**

**Аннотация.** Применение моделей машинного обучения обуславливает необходимость создания методов, направленных на повышение качественных показателей обработки информации. В большинстве практических случаев диапазоны значений целевых переменных и предикторов формируются под воздействием внешних и внутренних факторов. Такие явления, как дрейф концепций, приводят к тому, что модель со временем понижает показатели полноты и точности результатов. Целью работы является повышение качества анализа выборок и информационных последовательностей на основе многоуровневых моделей для задач классификации и регрессии. Предлагается двухуровневая архитектура обработки данных. На нижнем уровне происходит анализ поступающих на вход информационных потоков и последовательностей, осуществляется решение задач классификации или регрессии. На верхнем уровне выполняется разделение выборок на сегменты, определяются текущие свойства данных в подвыборках и назначаются наиболее подходящие по достигаемым качественным показателям модели нижнего уровня. Приведено формальное описание двухуровневой архитектуры. В целях повышения показателей качества решения задач классификации и регрессии производится предварительная обработка выборки данных, вычисляются качественные показатели моделей, определяются классификаторы, имеющие лучшие результаты. Предложенное решение позволяет реализовывать постоянно обучающиеся системы обработки данных. Оно направлено на снижение затрат на переобучение моделей в случае трансформации свойств данных. Проведены экспериментальные исследования на ряде наборов данных. Численные эксперименты показали, что предложенное решение позволяет повысить качественные показатели обработки. Модель может быть рассмотрена как совершенствование ансамблевых методов обработки информационных потоков и выборок данных. Обучение отдельного классификатора, а не группы сложных классификационных моделей дает возможность уменьшить вычислительные затраты.

**Ключевые слова:** машинное обучение, многоуровневые модели, назначение классифицирующих алгоритмов.

**1. Введение.** В настоящее время применение методов искусственного интеллекта в отдельных задачах направлено на повышение достигаемых качественных показателей обработки информации. Алгоритмы машинного обучения дают возможность выявлять характеристики, статистические свойства, неявные знания, необходимые для достижения заданного результата, путем систематического анализа достаточного количества соответствующих выборок данных.

Алгоритмы машинного обучения требуют предварительного извлечения значений характеристик объектов наблюдения для представления входных последовательностей данных. Показатели

качества алгоритмов машинного обучения в значительной степени зависят от характеристик анализируемых выборок. Крайне важно выбрать правильную группу признаков, оптимально представляющих наиболее значимые свойства входных данных [1]. После этого модель позволяет получить сопоставление между извлеченными характеристиками объектов и желаемым результатом.

Тем не менее, для многих задач выявление основных характеристик и признаков данных, которые позволят достичь лучших качественных показателей, является сложным и трудоемким процессом.

Одновременно с этим на практике при обработке информационных потоков возникают явления, связанные с дрейфом концепции, когда происходит смещение диапазонов целевых переменных и изменения распределений данных. Все это приводит к тому, что с течением времени любая модель может ухудшить свои качественные показатели обработки. В статье предложено одно из возможных решений повышения качественных показателей, где рассматривается использование многоуровневых моделей для решения задач классификации и регрессии. На нижнем уровне происходит обработка поступающих на вход информационных потоков и последовательностей, а на верхнем – решаются задачи разделения потоков на части, определения текущих свойств данных в сегментах и, исходя из их свойств, назначения наиболее подходящей по достигаемым качественным показателям моделей нижнего уровня.

**2. Современные методы обработки выборок.** Большинство методов машинного обучения используют «централизованные данные», где в выборках хранится вся информация по объектам наблюдения. Процессы сбора осуществляются в течение определенного периода времени и, обычно, содержат кортежи значений, когда наблюдаемая система находится в разных состояниях и на нее воздействует множество разнородных факторов. В результате возникают явления, связанные с трансформацией свойств, смещения диапазонов значений, полученных от регистрирующих элементов. Это приводит к возникновению неоднородности данных в выборках. В отдельных последовательностях внутри выборки может появляться дисбаланс классов, происходить смена распределений, изменение вероятностей возникновения событий и частоты появления объектов наблюдения.

Решение задач классификации и регрессии методами машинного обучения может быть затруднено при возникновении различных статистических эффектов. Например, если в данных

наблюдается парадокс Симпсона [2], стандартный подход к централизованному интеллектуальному анализу выборки может не позволять достигать заданных качественных показателей обработки данных, а результат обработки не соответствовать истинному состоянию.

Современные подходы к построению моделей обработки связаны с формированием, анализом и объединением локальных результатов, при котором используются методы агрегирования.

Методы и алгоритмы, решающие задачи классификации и регрессии, могут иметь различные результаты выбранного показателя качества на одном и том же наборе данных, например, в случае разных обучающих примеров. Полученные при обработке объектов наблюдения результаты различных классификаторов могут отличаться. Их ответы объединяются агрегирующей функцией для формирования общего ответа. За счет интеграции нескольких моделей в ряде случаев становится возможным повысить качество классификации.

На сегодняшний день доминирующими являются ансамблевые методы. Среди них наиболее известны подходы на основе простого, комбинированного голосования [3, 4], а так же применение ряда агрегирующих функций, вычисляющих максимальные, средние, медианные и другие вероятности классов, усредняющих результат предсказания по совокупности ответов.

В качестве альтернативы используются различные агрегаторы, основанные на рейтингах классифицирующих алгоритмов, арбитры, комбинаторы [4, 5], которые могут быть применены как к бинарным, так и к многоклассовым задачам.

Еще одно направление связано с формированием выборок. В [3, 5 – 9] были исследованы различные аспекты вертикально разделенных данных, предложены технологии, базовые алгоритмы и комбинированные стратегии, направленные на выбор объектов наблюдения, позволяющих получить основные характеристики последовательностей и выборок, исключить из рассмотрения значения, приводящие к искажению свойств данных [10 – 12].

В последние годы в ряде задач обработки информации применяются гибридные классификаторы. Используются комбинации методов, где различные модели на основе относительно простых классифицирующих алгоритмов и сложных нейронных сетей достигают высоких показателей полноты и точности [13, 14]. Однако возможности негибридных моделей зависят от свойств обучающей выборки и, в случае изменения характеристик данных, качественные



показатели могут существенно снизиться [15 – 19]. Точность, полнота результатов обработки зависит от многих факторов.

Применение подобных подходов часто приводит к возникновению различных ситуаций, когда агрегация разных моделей не только не способствует повышению качественных показателей, а наоборот ухудшает результаты [20, 21]. Причем подобные эффекты часто нивелируются на большой выборке данных, но явно прослеживаются на ее отдельных сегментах. Это приводит к тому, что при обработке потоков данных возможны ошибки вследствие разных настроек классифицирующих моделей.

Таким образом, необходимо разрабатывать новые и адаптировать существующие стратегии, дающие возможность проводить точное и надежное обучение в рамках разделения функций и выборок.

### **3. Построение многоуровневой модели обработки данных.**

Практически все предлагаемые подходы, методы, алгоритмы машинного обучения на сегодняшний день являются узко специализированными. Каждая модель достигает определенных качественных показателей для тех предметных областей, где она оптимизировалась, и на данных которых она обучалась.

Одна из основных проблем достижения качественных показателей в методах машинного обучения связана с тем, что при изменении свойств поступающих данных, возникает необходимость в дополнительном обучении. Большинство моделей, решающие задачи классификации и регрессии, обучаются на заранее определенной совокупности объектов наблюдения. В случае появления трансформации свойств информационных последовательностей качество обработки снижается.

В статье предлагается решение, направленное на дальнейшее усовершенствование и расширение ансамблевых методов, где в зависимости от свойств данных происходит выбор модели с лучшими качественными показателями, а также формирование многоуровневых структур, осуществляющих анализ поступающих информационных потоков и назначение наиболее подходящей модели для обработки последовательностей в рамках решения текущей задачи.

В основе предлагаемого решения лежит возможность построения иерархий, когда модель верхнего уровня применяется для назначения наиболее эффективной модели нижнего уровня на отдельный сегмент выборок.

Для этого на различных уровнях иерархии разделяются роли и выполняемые функции моделей.

На нижних уровнях располагаются классификаторы и алгоритмы, реализации которых предназначены для решения узкоспециализированных задач.

На верхнем уровне применяются модели, решающие задачи управления алгоритмами нижнего уровня. Они "оценивают" поступающие информационные последовательности, определяют их свойства, сегментируют данные и назначают наиболее подходящую для решения текущей задачи модель нижнего уровня. В дальнейшем на верхнем уровне осуществляется мониторинг ошибок и отклонений результатов от реальных значений, организуется непрерывное обучение моделей нижнего уровня.

Применение иерархии направлено на обеспечение параллельного функционирования алгоритмов. Иерархическая система координирует действия для достижения заданных качественных показателей обработки данных, производит анализ текущих свойств данных, используемых для назначения эффективных алгоритмов.

В основе реализации многоуровневых моделей для классификации и регрессии лежит разделение их функций обработки.

В целях управления классификаторами, алгоритмами, работающими непосредственно с данными, формируются модели верхнего уровня. Они, в зависимости от свойств данных и требуемых качественных показателей, назначают наиболее подходящую модель нижнего уровня. В их функционал входят решение ряда перечисленных ниже задач:

- идентификация и сегментирование поступающей на вход последовательности;
- формирование пула предобученных моделей для ее обработки;
- выбор показателей и назначения наиболее подходящей модели для обработки текущей последовательности;
- анализ результатов обработки;
- принятие решения о формировании новой выборки и дополнительного обучения моделей.

Для их решения моделями верхнего уровня осуществляется управление и запуск стандартных алгоритмов кластеризации, поиска точек разладки для разделения поступающей последовательности, выполнение процессов обучения заранее предопределенного пула моделей нижнего уровня, определение их свойств и назначения на сегменты тех, которые имеют лучшие качественные показатели обработки. Они также отслеживают свойства поступающих данных и,

в случае обнаружения изменений и ухудшения результатов обработки, принимают решение о запуске процедур обучения.

Функции классификаторов и обрабатывающих алгоритмов нижнего уровня направлены на решение заранее определенных задач обработки и вычисления информации.

Для их обучения на вход подаются сформированные моделями верхнего уровня подвыборки, где свойства объектов наблюдения различаются. В процессе обучения определяются модели, достигающие лучших показателей качества на сегментах.

В результате в зависимости от свойств выборки данных определяются модели обработки, которые используются при появлении близких по свойствам сегментов.

Схема иерархии представлена на рисунке 1.

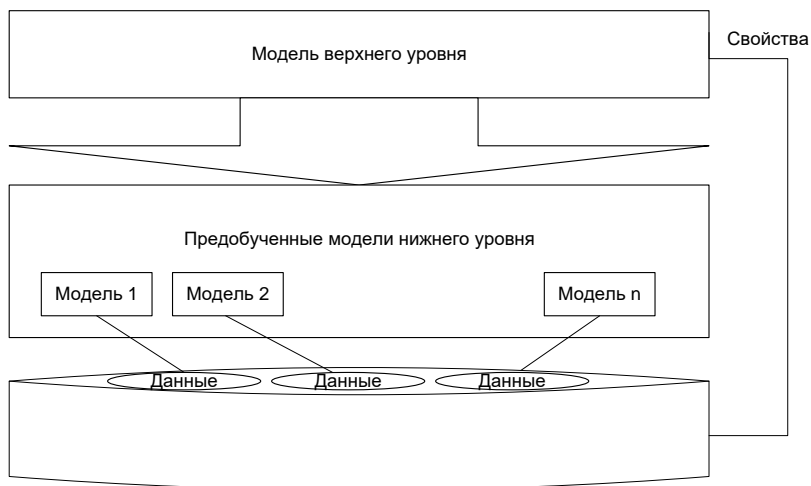


Рис. 1. Иерархия моделей

Использование нескольких моделей для повышения качества результатов предсказания известно как ансамблевые методы. Несмотря на различные комбинации, объединяющие отдельные алгоритмы в модель, возникают разные ситуации, где такое объединение не только может не повысить, но и даже ухудшить результат. В связи с этим необходимо предотвращать подобные ситуации.

В отличие от классических подходов, когда методы ансамбля [20] пытаются объединить несколько моделей с определенными стратегиями для улучшения качественных показателей классификации, в предложенном решении делается выбор наиболее

подходящей модели для текущих свойств данных. Это позволяет избегать различных ситуаций, когда слабые классификаторы могут ухудшить качественные показатели более сильной модели обработки данных.

Для этого рассматривается применение двухуровневых моделей, где на нижнем уровне идет обработка последовательности, а на верхнем – происходят процедуры оценивания данных и назначения алгоритмов.

**4. Формальное описание модели.** Финальную обработку данных для решения задач выполняют модели нижнего уровня. Они обрабатывают множество объектов наблюдения  $\{x_1, \dots, x_z\} \in X$ , заданных в метрическом пространстве, где каждому объекту  $x_i$  ставится в соответствие метка  $y_i \in Y$ , определенная на множестве меток.

Однако в различных локальных областях множества объектов наблюдения возможно изменение свойств (частоты появления, размаха данных, диапазонов предикторов и целевых переменных, распределений). В связи с этим, возникает необходимость реализации функции разделения множества  $\mu: X \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , которая любому объекту  $x_i \in X$  ставит в соответствие одно из подмножеств  $X^1, \dots, X^m$ .

В результате множество  $X$  сегментируется на подмножества  $X^1 \cup X^2 \cup \dots \cup X^m = X$  и  $X^i \cap X^j \neq \emptyset \quad \forall i \neq j$ . Объединение подмножеств совпадает с множеством  $X$ , подмножества не пересекаются.

Объекты подмножеств используются для вычисления центроидов  $\hat{x}_c$  и определения метрики близости  $\rho(x_i, \hat{x}_c)$ , например, на основе евклидова расстояния. При выборе функции разделения множества необходимо добиваться, чтобы после обработки выборки подмножества состояли из объектов близких по  $\rho(x_i, \hat{x}_c)$ , а сами множества отличались.

После применения функции  $\mu$  обучающая выборка разделяется на подмножества и представляется парами значений  $(x_j^i, y_j^i)_{j=1}^{n_i} \in X^i$ , где  $\{X^1, \dots, X^m\} \in X$  – множество сегментов выборки данных  $X$ ,  $X^i$  – множество описаний объектов наблюдения в сегменте,  $n_i$  – количество объектов в  $i$ -ом сегменте.

Для каждого сегмента  $X^i$  из заранее предопределенного множества моделей классификации  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in A$  определяется

решающая функция  $a_i: X^i \rightarrow Y$ , имеющая наилучшие выбранные качественные показатели для сегмента.

Метод построения решающих функций на подмножествах  $X^i$  ставит в соответствие сегменту  $X^i$  алгоритм обработки, принадлежащий заданному классу решающих функций. Он основывается на том, что каждая функция характеризуется своими показателями качества.

Пусть  $L(y_j, a_k(x_j))$  – функция потерь. Тогда показатель качества для сегмента  $X^i$  определяется выражением:

$$Q(a_k(x), X^i) = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} L(y_j, a_k(x_j)). \quad (1)$$

Используя (1), обозначим  $q_0^i = \min_{a_k \in A} Q(a_k(x), X^i)$  полученное оптимальное значение, выбранное из всех значений функционала качества для моделей  $a_k(x)$  на сегменте  $X^i$ .

Тогда для множества  $X$ , разделенного на ряд сегментов  $\{X^1, \dots, X^m\} \in X$ , возможно определить матрицу  $R_X$ , показывающую лучшие значения показателей качества для каждого сегмента.

	$X^1$	...	$X^m$	
$a_1$	$q_1^1$	...	$q_1^m$	).
...	...	...	...	
$a_n$	$q_n^1$	...	$q_n^m$	

Анализируя значения (2) можно осуществить выбор лучшей по определенному показателю качества модели для сегмента  $X^i$ :

$$a_k(x) = \arg \min_{a_k \in A} Q(a_k(x), X^i). \quad (3)$$

Выражение (3) дает возможность определить модели для сегментов.

В дальнейшем, рассматривая в динамике изменяющиеся значения матрицы  $R_X$ , становится возможным в автоматическом режиме определять модели для сегментов.

Качество результатов решения любой задачи методами машинного обучения зависит от свойств данных. Модели верхнего уровня предназначены для отслеживания изменений в информационных последовательностях вследствие воздействия внешних и внутренних факторов. Для этого они запускают процессы, разбиения на отдельные сегменты, выполняют алгоритмы определения точки разладки для временных рядов, определяют изменения свойств, а так же производят анализ и осуществляют назначение алгоритмов, моделей, обладающих лучшими характеристиками для выбранных сегментов.

В общем случае решение задач классификации и регрессии осуществляется на многомерных данных информационных последовательностей, из которых формируются выборки. Все информационные последовательности подвергаются процедурам обработки и сегментируются. На каждом из сегментов определяются качественные показатели таким образом, что выборке  $X$  ставится в соответствие матрица  $R_X$ , которая дает возможность назначить модели верхнего уровня наиболее подходящую модель.

В матрице  $R_X$ , содержится информация о значениях качественных показателей на выборке  $X$  каждой модели  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , что дает возможность назначать на сегменты выборки  $X$  моделей  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in A$ , исходя из значений их показателей.

**5. Реализация модели.** Построение системы, использующей предложенную модель, происходит в несколько этапов.

Вначале выполняется настройка моделей нижнего уровня на решение требуемых задач обработки информации. Для них (рисунок 2) происходит первоначальное обучение. Определяется предварительная информация о совокупности объектов наблюдения  $\{x_1, \dots, x_2\} \in X$  и формируется первоначальное обучающее множество.

В выборке  $X$  осуществляется сегментирование областей. Формирование сегментов может происходить как с помощью заданной заранее системы правил, так и в автоматическом режиме с помощью алгоритмов, осуществляющих обнаружение точек, где изменяются свойства последовательностей. В этих целях могут быть применены методы поиска точек разладки, кластеризации, обнаружения и идентификации смены концепции и т.д. Выбор способа разделения последовательности происходит с учетом требований по обработке. В результате их применения определяются сегменты с различными свойствами. В дальнейшем все действия алгоритмов машинного

обучения происходят с отдельными областями, выделенными на предварительном этапе.

Обработка последовательности, в которой происходят периодические изменения, может дать возможность сформировать эвристические правила, позволяющие выделить сегменты, кластеры, имеющие разные свойства и диапазоны значений. Такой подход очень часто определяет довольно эффективную систему правил, направленную на достижение заданных показателей качества. Однако в дальнейшем приходится иметь дело со статичной и сложной в настройке системой [22].

В случае автоматического разделения последовательности объектов наблюдения обнаруживается момент  $\theta$ , где происходит изменение характеристик наблюдаемого процесса [23]:

$$x_t^i = \begin{cases} x_t^i, & 0 < t < \theta_i \\ x_t^{i+1}, & t \geq \theta_i \end{cases}. \quad (4)$$

Исходная выборка в моменты изменения характеристик наблюдаемого процесса (4) делится на несколько частей  $X^1, \dots, X^m$ . Их свойства анализируются, совпадающие по свойствам сегменты объединяются, им присваиваются одинаковые индексы. В дальнейшем происходит обучение заранее определенных моделей  $a_1, a_2, \dots, a_n$  на подвыборках  $X^1, \dots, X^m$ , и анализируется достигаемый каждой моделью функционал качества  $Q(a_k(x), X^i)$ . С его помощью осуществляется ранжирование моделей  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\} \in A$ , и для каждого сегмента определяются те, которые имеют наиболее высокие качественные показатели.

Поступающий на вход информационный поток подвергается такой же обработке, как и обучающая последовательность. На нем выделяются сегменты, определяются их свойства, и, в зависимости от них, назначается модель, имеющая лучшие значения функционала качества на схожем по свойствам сегменте обучающей выборки [22]. Затем выбранная модель  $a_k(x)$  используется для решения задач обработки потока. Предсказанные моделью результаты спустя некоторое время сравниваются с реальными значениями объектов наблюдения, полученными от регистрирующих систем и устройств. В случае увеличения ошибок выше заранее определенного порога принимается решение о формировании данных для уточнения

алгоритма, которые впоследствии добавляются в обучающую выборку. Происходит дальнейшее обучение модели.

Таким образом, для каждого информационного потока формируется постоянно обучающаяся модель, где процессы обучения и обработки информационных потоков могут выполняться параллельно. Предварительное обучение на выборках со сходными свойствами может сократить временные затраты, когда необходимо в режиме реального времени осуществить назначение модели в условиях изменения свойств.

Модели верхнего уровня являются надстройкой, задачи которой – анализировать свойства входящего потока и назначать наиболее подходящую модель нижнего уровня.

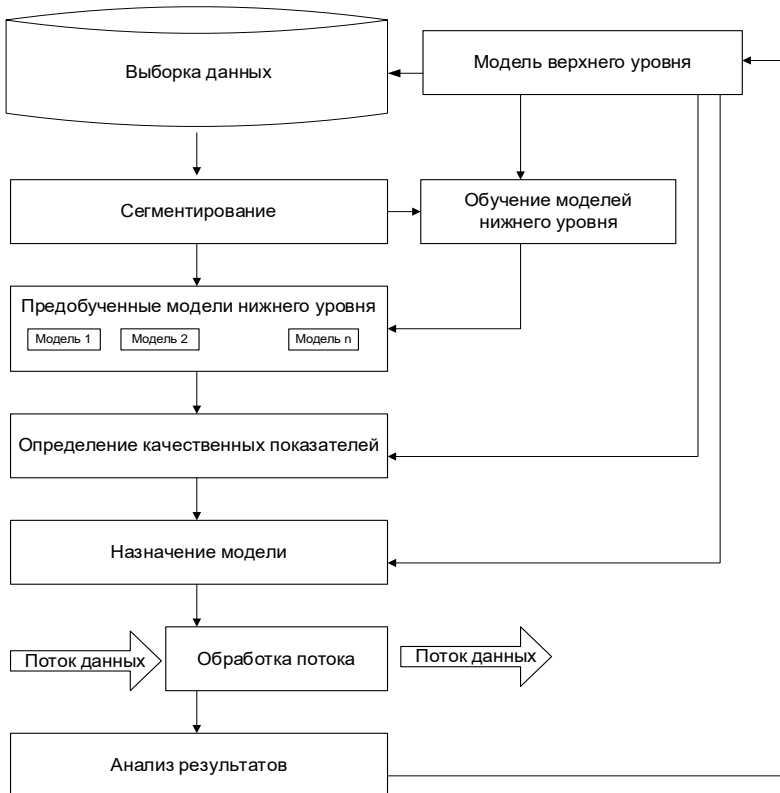


Рис. 2. Взаимодействие моделей верхнего и нижнего уровня



**6. Эксперимент на модельных данных.** Данные, поступающие от источников, часто представляют трудно разделяемые последовательности. В них содержится множество классов, неоднородность областей, различные диапазоны значений. Один из примеров таких данных приведен на рисунке 3.

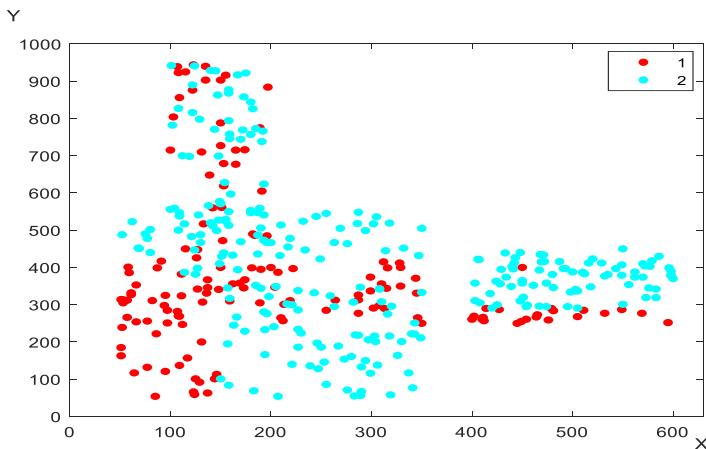


Рис. 3. Модельный ряд данных значений X, Y для двух классов

Для реализации предлагаемой модели осуществляется разделение набора на отдельные кластеры, обладающие разными свойствами. Задача такого разбиения состоит в том, чтобы уменьшить разброс данных, выбросы и использовать изменение диапазонов значений при формировании областей анализа для повышения показателей качества моделей.

Одним из проблемных вопросов является определение кластеров данных. В эксперименте их количество вычислялось на основе коэффициента силуэта, который показывает, насколько среднее расстояние до объектов своего кластера отличается от среднего расстояния до объектов других кластеров.

Полученные результаты коэффициента силуэта на рисунке 4 дают возможность выбрать наиболее подходящее количество кластеров. Оптимальное значение было получено при разбиении выборки на четыре подмножества.

Кластеризация дает возможность выделить группы схожих объектов, учесть выбросы, определить нетипичные объекты. Анализ групп может быть проведен с помощью графика функции плотности вероятности. При разделении множества необходимо добиваться

в подмножествах уменьшения пересекающихся площадей между классами. Поэтому в целях улучшения разделимости данных могут применяться различные алгоритмы.

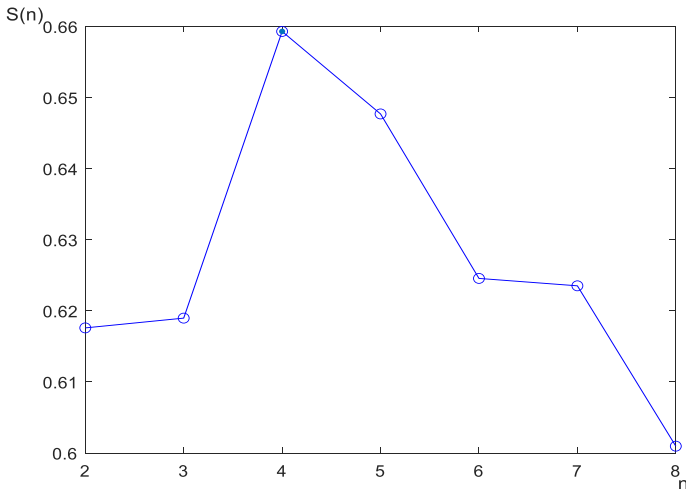


Рис. 4. Результаты значений коэффициента силуэта  $S(n)$  для  $n$  кластеров

На рисунке 5 приведены графики функций плотности вероятностей для всей выборки и кластеров, определенных методом К-средних. Полученные результаты кластеризации для разбиения выборки явились основой для дальнейшего исследования характеристик и качественных показателей различных классифицирующих алгоритмов.

В рассматриваемом примере разделение выборки данных, использующее коэффициент силуэта, позволяет для бинарной классификации построить такие группы, где суммарно площади пересечений функций плотности вероятностей в относительных единицах уменьшаются по сравнению со всей выборкой целиком.

На следующем этапе рассматривались отдельные модели и их ансамбли на кластерах и выборки целиком. В качестве базовых алгоритмов были выбраны: наивный байесовский классификатор с гауссовым ядром (NBK), линейный дискриминантный анализ (LD), квадратичный дискриминантный анализ с параболической функцией (QD), деревья решений с максимальным количеством ветвлений 100 (DT), метод К ближайших соседей (KNN) с количеством соседей 10, метод опорных векторов (SVM) с линейным ядром, метод

случайного леса с 30 деревьями (RF). Алгоритмы были поделены по своим качественным показателям на два подмножества: «сильных» и «слабых» классификаторов.

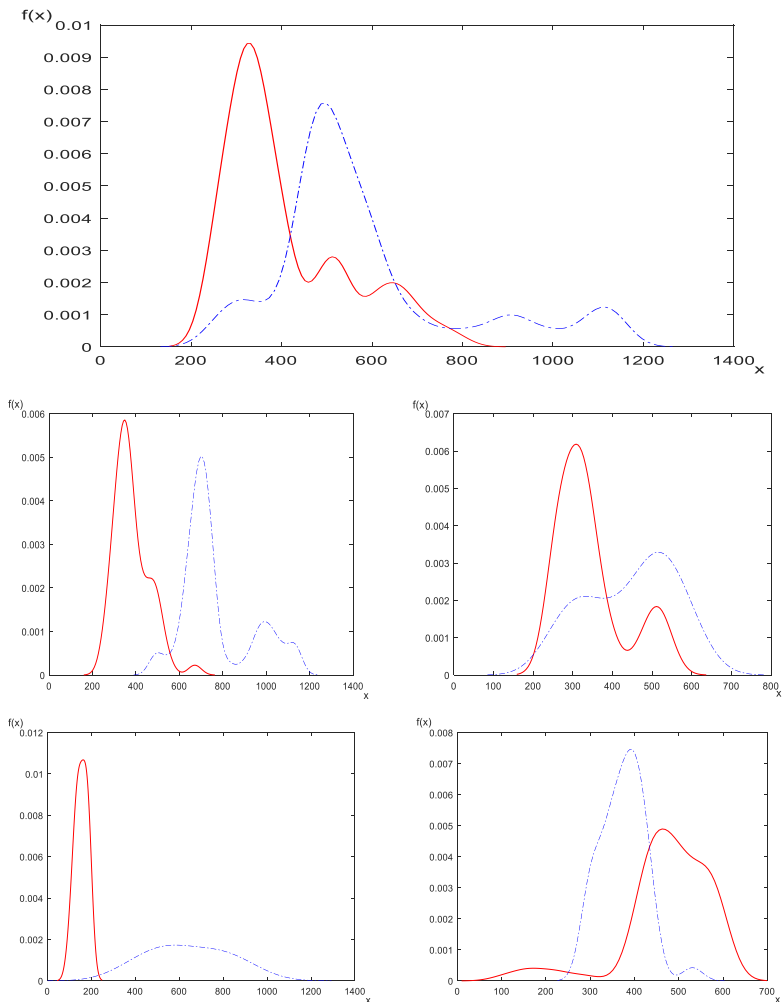


Рис. 5. Функции плотности вероятности  $f(x)$  для всей выборки (верхний рисунок) и кластеров (нижние 4 рисунка)

Каждая модель обучалась на всей последовательности целиком и на полученных в результате кластеризации подмножествах данных.

Результаты значения доли правильных ответов (ассигару) для каждого выбранного классификатора для всей выборки и при кластеризации приведены на рисунке 6.

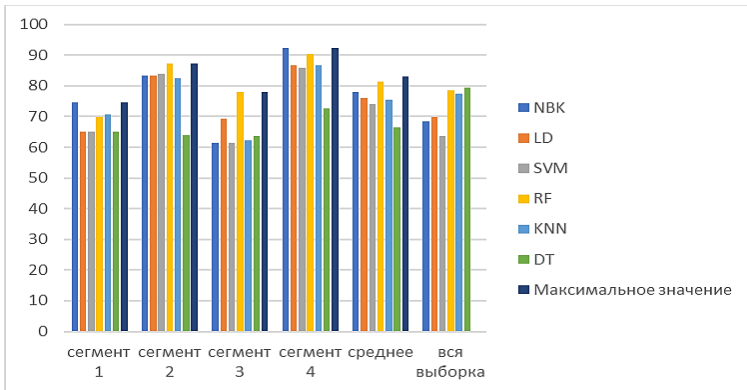


Рис. 6. Результаты значений доли правильных ответов (ассигару) для выборки и кластеров

Гистограмма показывает значения доли правильных ответов для каждого выбранного классификатора. Несмотря на отсутствие явного дисбаланса классов (соблюдаются пропорции 60:40), возникает ситуация, когда лучшие достигаемые качественные показатели на каждом сегменте и выборке показывают разные классификаторы. Выбирая для каждого сегмента классификатор, имеющий лучшее значение, становится возможным повысить качественные показатели обработки.

Таким образом, выделение сегментов данных и оценка их свойств позволяют осуществлять поиск и назначении моделей машинного обучения, обладающих лучшими характеристиками.

Аналогичным образом возможно сравнение ансамблей, состоящих из нескольких сложных классифицирующих моделей или простейших алгоритмов. В прилагаемом эксперименте был рассмотрен бэггинг. Его особенностью является возможность обучаться на множестве выборок, полученных из исходной. Каждая модель строится на основе случайного подмножества данных.

На практике не всегда удаётся сделать разнообразные независимые модели классификации. В рассмотренном примере классификаторы обучаются на одинаковых множествах, что снижает

их разнообразие. Не всегда возможно реализовать разделение обучающей выборки данных, чтобы данные оказались случайными, однородными и независимыми.

В результате может возникнуть ситуация, когда имеется, например, один «хороший» и один «плохой» по качественным показателям алгоритмы, а это будет приводить к тому, что качество результатов ансамбля будет хуже, чем у «хорошего» алгоритма. Результаты работы классификаторов и отдельных алгоритмов для полученных сегментов приведены на рисунке 7.

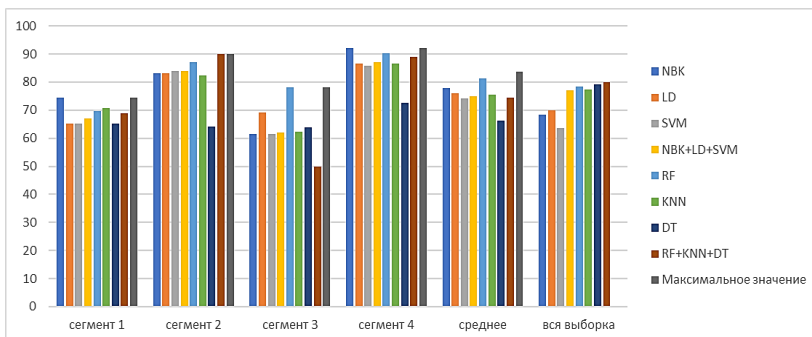


Рис. 7. Значения доли правильных ответов (ассигасу) классификаторов и их моделей

На гистограмме видно, что на различных сегментах отдельные классифицирующие алгоритмы показывают результаты лучше, чем ансамбли. Применение усреднения по максимальным значениям на каждом сегменте дает возможность получить выигрыш по точности. Подходы, связанные с усреднением модели хорошо работают только тогда, когда отдельные классификаторы показывают результаты, имеющие высокую дисперсию. Ансамбль полезен в случае применения классификаторов, когда незначительные изменения свойств данных в выборке могут приводить к существенным изменениям классификации [4].

В то же время вычислительные затраты на агрегацию и обучение группы сложных классификационных моделей выше, чем затраты на обучение отдельного классификатора. Это может вызывать увеличение времени и вычислительных затрат, когда происходит смена концепции или изменение свойств данных, по сравнению с «подстановкой» готовой модели. Не всегда модели могут быть

построены с использованием различных комбинаций признаков, например при анализе одномерного ряда. А это, в свою очередь, влечет невозможность достижения их различности. Среднее значение моделей будет улучшением только в том случае, если модели независимы друг от друга.

В информационных потоках в условиях постоянно поступающих данных последовательности может происходить трансформация свойств данных. В результате, обученные на исторических данных слабые классификационные модели в различные временные промежутки могут становиться сильными и наоборот. Такие изменения свойств классифицирующих моделей происходят за очень короткий период, что приводит к тому, что качество решения задач ансамблем классифицирующих моделей оказывается хуже, чем одним из классификаторов. Это позволяет назначать лучшие классификаторы на подмножества.

**7. Результаты обработки реальных данных.** Следующим этапом эксперимента был рассмотрен ряд наборов данных, содержащих значения периодической выработки электроэнергии. В качестве экспериментальных данных рассматривались несколько наборов данных [24, 25], которые содержали данные о производстве электроэнергии в различных регионах Италии и Испании с 1995 по 2020 год. Объем первого набора около 30000 записей, 3 предиктора и 1 целевая переменная, второго – 250000 записей, 16 предикторов и 1 целевая переменная. Данные представлялись временными рядами. Для формирования обучающей выборки использовалось около 30% записей. Запись об объектах наблюдений определялась вектором  $x$ . Во время процессов обучения обрабатываемые последовательности были разделена на сегменты  $X^i$ . В каждом сегменте вычислялось значение его центра  $\hat{x}_c$ . Были заранее определены модели обработки данных. Они обучались на выделенных сегментах, где определялся оптимальный функционал качества  $Q(a_k(x), X^i) \rightarrow \min_{a_k \in A}$ .

В дальнейшем оставшаяся часть записей использовалась для имитации потока информации. По поступающим значениям с помощью функции расстояния между объектами  $\rho(x_i, \hat{x}_c)$  определялась принадлежность точек кластеру. В целях усреднения результатов было реализовано «окно», внутри которого постоянно определялись усредненные значения. Они сравнивались с заранее вычисленными центрами кластеров последовательности. Задавая ширину окна, возможно вычислять среднее значение

последовательности для оценки близости к предполагаемому центру, а также определять правила формирования выборок, основанные на частоте, для постоянного обучения сегментов.

В рассмотренном эксперименте были выбраны наборы данных [24, 25], описывающие генерацию «зеленой» электроэнергии в течение 3 лет. Предобучение заключалось в предварительном анализе выборок за 1 год. На обучающем множестве были выделены сегменты. На основе оценки коэффициента силуэта количество рекомендованных сегментов оказалось равным четырем. Наиболее вероятно, что это связано с погодными условиями, возникающими вследствие смены времен года.

В качестве анализируемых показателей были выбраны F-мера, доля правильных ответов (ассигасу), площадь под кривой ошибок (AUC). Все выборки подвергались обработке целиком и алгоритмами, перечисленным в разделе 6.

Результаты качественных показателей, полученных при предсказании для сегментов и всей выборки целиком, представлены в таблицах 1–3.

Таблица 1. Результаты обработки набора данных

Классификатор	Показатель	Вся выборка	Сегменты Power Supply dataset				среднее
			1	2	3	4	
LD	<b>F мера</b>	0,80	0,84	0,81	0,82	0,81	0,82
	<b>Accuracy %</b>	70,3	78,9	73,1	74,0	72,8	74,7
	<b>AUC</b>	0,74	0,79	0,73	0,75	0,76	0,76
QD	<b>F мера</b>	0,81	0,84	0,81	0,82	0,81	0,82
	<b>Accuracy %</b>	71,3	78,2	72,2	74,2	73,4	74,5
	<b>AUC</b>	0,74	0,79	0,73	0,75	0,76	0,76
KNN	<b>F мера</b>	0,70	0,81	0,51	0,80	0,78	0,73
	<b>Accuracy %</b>	70,5	77,6	72,4	72,9	72,3	73,8
	<b>AUC</b>	0,71	0,79	0,72	0,74	0,76	0,76
NB	<b>F мера</b>	0,79	0,84	0,81	0,81	0,81	0,82
	<b>Accuracy %</b>	69,4	76,1	73,3	73,6	72,6	73,9
	<b>AUC</b>	0,72	0,78	0,73	0,75	0,76	0,76
SVM	<b>F мера</b>	0,81	0,81	0,83	0,83	0,82	0,83
	<b>Accuracy %</b>	71,4	77,5	77,6	77,6	77,5	77,6
	<b>AUC</b>	0,75	0,74	0,76	0,75	0,75	0,75
RF	<b>F мера</b>	0,83	0,83	0,84	0,85	0,84	0,84
	<b>Accuracy %</b>	71,5	74,5	77,1	73,6	73,5	74,7
	<b>AUC</b>	0,73	0,75	0,76	0,75	0,76	0,76

Таблица 2. Результаты обработки набора данных

Классификатор	Показатель	Вся выборка	Сегменты Valencia Sun energy generation dataset				среднее
			1'	2'	3'	4'	
LD	F мера	0,80	0,83	0,82	0,82	0,80	0,82
	Accuracy %	72,1	76,0	72,5	73,5	72,3	73,6
	AUC	0,71	0,73	0,74	0,74	0,76	0,75
QD	F мера	0,81	0,83	0,82	0,81	0,81	0,82
	Accuracy %	72,3	75,3	72,7	73,3	73,9	73,6
	AUC	0,74	0,74	0,75	0,74	0,77	0,75
KNN	F мера	0,75	0,80	0,62	0,79	0,78	0,75
	Accuracy %	70,5	75,7	71,0	71,6	72,1	72,6
	AUC	0,71	0,76	0,72	0,71	0,76	0,74
NB	F мера	0,79	0,83	0,82	0,80	0,80	0,83
	Accuracy %	70,3	73,5	73,4	71,5	72,2	72,7
	AUC	0,72	0,73	0,74	0,74	0,76	0,75
SVM	F мера	0,81	0,80	0,84	0,83	0,83	0,83
	Accuracy %	71,3	76,9	76,3	76,1	76,5	76,5
	AUC	0,73	0,72	0,76	0,73	0,74	0,74
RF	F мера	0,83	0,83	0,84	0,85	0,84	0,84
	Accuracy %	71,3	72,6	75,1	73,1	72,1	73,3
	AUC	0,74	0,74	0,76	0,73	0,75	0,75

Таблица 3. Результаты обработки набора данных

Классификатор	Показатель	Вся выборка	Сегменты Valencia Wind energy generation dataset				среднее
			1'	2'	3'	4'	
LD	F мера	0,81	0,84	0,81	0,85	0,83	0,84
	Accuracy %	71,3	77,0	72,1	73,9	72,9	74,0
	AUC	0,74	0,76	0,73	0,76	0,77	0,76
QD	F мера	0,82	0,84	0,85	0,81	0,82	0,83
	Accuracy %	72,3	75,1	73,2	74,1	74,1	74,1
	AUC	0,72	0,75	0,73	0,74	0,79	0,75
KNN	F мера	0,80	0,83	0,74	0,83	0,89	0,82
	Accuracy %	70,5	76,4	73,0	71,8	72,9	73,5
	AUC	0,71	0,77	0,73	0,72	0,78	0,75
NB	F мера	0,78	0,85	0,83	0,84	0,84	0,84
	Accuracy %	70,4	73,7	74,5	72,4	72,3	73,2
	AUC	0,73	0,74	0,76	0,79	0,78	0,77
SVM	F мера	0,82	0,83	0,82	0,84	0,83	0,83
	Accuracy %	71,9	75,3	72,3	73,1	74,2	73,4
	AUC	0,71	0,72	0,73	0,72	0,72	0,72
RF	F мера	0,82	0,83	0,81	0,84	0,83	0,83
	Accuracy %	71,4	71,9	73,3	72,9	71,4	72,4
	AUC	0,76	0,74	0,80	0,75	0,77	0,77



Результаты эксперимента показывают, что на отдельных сегментах значения показателя качества отдельных алгоритмов лучше, чем при обработке всей выборки целиком. Реализовав функцию, производящую анализ качественных показателей, можно назначать на сегмент модель, имеющую на нем лучшее значение, что позволяет в зависимости от показателя получить выигрыш около 3-5%.

**8. Заключение.** Применение моделей и методов искусственного интеллекта возможно в проблемных областях, где возникает неопределенность и трудно определить оптимальные решения.

В целях повышения показателей качества классификационных и регрессионных моделей существует возможность реализации процессов предварительной обработки выборки данных, чтобы извлечь определенные атрибуты, которые представляют наиболее важные характеристики информации. В различных сегментах приходится реализовывать разделяющие поверхности разной сложности, что приводит к тому, что на разных подвыборках лучше работают различные модели.

Сбор объектов наблюдения является трудоемкой задачей, где внутри кортежей могут возникать различные смещения из-за настроек регистрирующих устройств или потерь точности значений отдельных параметров. Извлечение признаков может терять свою актуальность в случае возникновения дрейфа концепции. В связи с этим необходимо постоянно обрабатывать поступающие на вход выборки данных и анализировать каждый сегмент.

Информация о свойствах данных в сегментах сильно зависит от способа сегментации и разделения выборки. Обработка этих данных необходима, чтобы получить информацию о разделимости классов, сформировать разделяющую поверхность и повысить качественные показатели классифицирующего алгоритма.

Использование нескольких моделей для повышения качества результатов предсказания в виде ансамблевых методов, приводит к тому, что, несмотря на различные комбинации, объединяющие отдельные алгоритмы в модель, возникают ситуации, где такое объединение не только может не повысить, но и даже ухудшить результат. В связи с этим необходимо предотвращать подобные ситуации. Для этого предлагаются использовать многоуровневые модели, где на нижнем уровне идет обработка последовательности, а на верхнем – происходят процедуры оценивания данных и назначения алгоритмов.

Выполнение процесса сегментации и вычисления характеристик должно осуществляться постоянно для настройки моделей обработки.

**Літэратура**

1. Pouyanfar S., Sadiq S., Yan Y., Tian H., Tao Y., Reyes M.P., Shyu M.L., Chen S.C., Iyengar S.S. A survey on deep learning: algorithms, techniques, and applications // *ACM Computing Surveys*. 2019. vol. 51. no. 5. pp. 1–36.
2. Blyth C.R. On Simpson's Paradox and the Sure-Thing Principle // *Journal of the American Statistical Association*. 1972. vol. 67. pp. 364–387.
3. McConnell S., Skillicorn D.B. Building predictors from vertically distributed data // *Proceedings of the 2004 Conference of the Centre for Advanced Studies on Collaborative Research (CASCON '04)*. 2004. pp. 150–162.
4. Trevizan B., Chamby-Diaz J., Bazzan A.L.C., Recamonde-Mendoza M. A comparative evaluation of aggregation methods for machine learning over vertically partitioned data // *Expert Systems with Applications*. 2020. vol. 152. pp. 113–126.
5. Li Y., Jiang Z.L., Yao L. et al. Outsourced privacy-preserving C4.5 decision tree algorithm over horizontally and vertically partitioned dataset among multiple parties // *Cluster Computation*. 2019. vol. 22. no. 1. pp.1581–1593.
6. Mendoza M.R., Bazzan A.L.C. On the Ensemble Prediction of Gene Regulatory Networks: a Comparative Study // *Proceedings of the Brazilian Symposium on Neural Networks*. 2012. pp. 55–60.
7. Chan P.K., Stolfo S.J. On the Accuracy of Meta-learning for Scalable Data Mining // *Journal of Intelligent Information Systems*. 1997. no. 8. pp. 5–28.
8. Sun L., Mu W.S., Qi B. et al. A new privacy-preserving proximal support vector machine for classification of vertically partitioned data // *International journal of machine learning and cybernetics*. 2015. vol. 3. no. 6. pp. 109–118.
9. Zhou Z.-H., Feng J. Deep forest // *National Science Review*. 2019. vol. 6. no. 1. pp. 74–86.
10. Ho T.K. The random space method for constructing decision forests // *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1998. vol. 20. no. 8. pp. 832–844.
11. Takacs A., Toledano-Ayala M., Dominguez-Gonzalez A., Pastrana-Palma A., Velazquez D.T., Ramos J.M., Rivas-Araiza A.E. Descriptor generation and optimization for a specific outdoor environment // *IEEE Access*. 2020. vol. 8. pp. 2169–3536.
12. Liu J., Li Y., Song S., Xing J., Lan C., Zeng W. Multi-modality multi-task recurrent neural network for online action detection // *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2018. vol. 29. no. 9. pp. 2667–2682.
13. Salehi H., Burgueno R. Emerging artificial intelligence methods in structural engineering // *Engineering Structures*. 2018. no. 171. pp. 170–189.
14. Lu J., Liu A., Dong F., Gu F., Gama J., Zhang G. Learning under concept drift: a review // *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2019. vol. 31. no. 12. pp. 2346–2363.
15. Zhang X., Wang M. Weighted Random Forest Algorithm Based on Bayesian Algorithm // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. vol. 1924. pp. 1–6.
16. Scanagatta M., Salmieron A., Stella F. A survey on Bayesian network structure learning from data // *Progress in Artificial Intelligence*. 2019. no. 8, pp. 425–439.
17. Wright M., Dankowski T., Ziegler A. Unbiased split variable selection for random survival forests using maximally selected rank statistics // *Statistics in Medicine*. 2017. vol. 36. no. 8. pp. 1272–1284.
18. Zheng X., Aragam B., Ravikumar P., Xing E. DAGs with no tears: Continuous optimization for structure learning // *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018. vol. 43. pp. 9492–9503.
19. Di Franco G., Santurro M. Machine learning, artificial neural networks and social research // *Qual Quant*. 2021. no. 5. pp. 1007–1025.

20. Scanagatta M., Corani G., Zaffalon M., Yoo J., Kang U. Efficient learning of bounded-treewidth Bayesian networks from complete and incomplete data sets // *International Journal of Approximate Reasoning*. 2019. vol. 95. pp. 152–166.
21. Kheyreddine D., Kadda B.-B., Abdenour A. A new adaptive sampling algorithm for big data classification // *Journal of Computational Science*. 2022. vol. 61. pp. 101–116.
22. Лебедев И.С. Сегментирование множества данных с учетом информации воздействующих факторов // *Информационно-управляющие системы*. 2021. № 3. С. 29–38.
23. Лебедев И.С. Адаптивное применение моделей машинного обучения на отдельных сегментах выборки в задачах регрессии и классификации // *Информационно-управляющие системы*. 2022. № 3. С. 20–30.
24. Power Supply dataset. URL: <http://www.cse.fau.edu/~xqzhu/stream.html> (Дата обращения 27.10.2022).
25. Energy generation dataset. URL: [https://www.kaggle.com/nicholasjhana/energy-consumption-generation-prices-and-weather/data?select=energy\\_dataset.csv](https://www.kaggle.com/nicholasjhana/energy-consumption-generation-prices-and-weather/data?select=energy_dataset.csv) (Дата обращения 27.10.2022).

**Лебедев Илья Сергеевич** — д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник, лаборатория интеллектуальных систем, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: методы машинного обучения, представление и обработка слабоструктурированных данных, применение методов искусственного интеллекта в системах информационной безопасности. Число научных публикаций — 200. [isl\\_box@mail.ru](mailto:isl_box@mail.ru); 14 линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-3311.

I. LEBEDEV

**APPLICATION OF MULTILEVEL MODELS IN CLASSIFICATION AND REGRESSION PROBLEMS*****Lebedev I. Application of Multilevel Models in Classification and Regression Problems.***

**Abstract.** There is a constant need to create methods for improving the quality indicators of information processing. In most practical cases, the ranges of target variables and predictors are formed under the influence of external and internal factors. Phenomena such as concept drift cause the model to lose its completeness and accuracy over time. The purpose of the work is to improve the processing data samples quality based on multi-level models for classification and regression problems. A two-level data processing architecture is proposed. At the lower level, the analysis of incoming information flows and sequences takes place, and the classification or regression tasks are solved. At the upper level, the samples are divided into segments, the current data properties in the subsamples are determined, and the most suitable lower-level models are assigned according to the achieved qualitative indicators. A formal description of the two-level architecture is given. In order to improve the quality indicators for classification and regression solving problems, a data sample preliminary processing is carried out, the model's qualitative indicators are calculated, and classifiers with the best results are determined. The proposed solution makes it possible to implement constantly learning data processing systems. It is aimed at reducing the time spent on retraining models in case of data properties transformation. Experimental studies were carried out on several datasets. Numerical experiments have shown that the proposed solution makes it possible to improve the quality processing indicators. The model can be considered as an improvement of ensemble methods for processing information flows. Training a single classifier, rather than a group of complex classification models, makes it possible to reduce computational costs.

**Keywords:** machine learning, multilevel models, purpose of classifying algorithms.

**References**

1. Pouyanfar S., Sadiq S., Yan Y., Tian H., Tao Y., Reyes M.P., Shyu M.L., Chen S.C., Iyengar S.S. A survey on deep learning: algorithms, techniques, and applications. *ACM Computing Surveys*. 2019. vol. 51. no. 5. pp. 1–36.
2. Blyth C.R. On Simpson's Paradox and the Sure-Thing Principle. *Journal of the American Statistical Association*. 1972. vol. 67. pp. 364–387.
3. McConnell S., Skillicorn D.B. Building predictors from vertically distributed data. *Proceedings of the 2004 Conference of the Centre for Advanced Studies on Collaborative Research (CASCON '04)*. 2004. pp. 150–162.
4. Trevizan B., Chamby-Diaz J., Bazzan A.L.C., Recamonde-Mendoza M. A comparative evaluation of aggregation methods for machine learning over vertically partitioned data. *Expert Systems with Applications*. 2020. vol. 152. pp. 113–126.
5. Li Y., Jiang Z.L., Yao L. et al. Outsourced privacy-preserving C4.5 decision tree algorithm over horizontally and vertically partitioned dataset among multiple parties. *Cluster Computation*. 2019. vol. 22. no. 1. pp.1581–1593.
6. Mendoza M.R., Bazzan A.L.C. On the Ensemble Prediction of Gene Regulatory Networks: a Comparative Study. *Proceedings of the Brazilian Symposium on Neural Networks*. 2012. pp. 55–60.
7. Chan P.K., Stolfo S.J. On the Accuracy of Meta-learning for Scalable Data Mining. *Journal of Intelligent Information Systems*. 1997. no. 8. pp. 5–28.

8. Sun L., Mu W.S., Qi B. et al. A new privacy-preserving proximal support vector machine for classification of vertically partitioned data. *International journal of machine learning and cybernetics*. 2015. vol. 3. no. 6. pp. 109–118.
9. Zhou Z.-H., Feng J. Deep forest. *National Science Review*. 2019. vol. 6. no. 1. pp. 74–86.
10. Ho T.K. The random space method for constructing decision forests. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1998. vol. 20. no. 8. pp. 832–844.
11. Takacs A., Toledano-Ayala M., Dominguez-Gonzalez A., Pastrana-Palma A., Velazquez D.T., Ramos J.M., Rivas-Araiza A.E. Descriptor generation and optimization for a specific outdoor environment. *IEEE Access*. 2020. vol. 8. pp. 2169–3536.
12. Liu J., Li Y., Song S., Xing J., Lan C., Zeng W. Multi-modality multi-task recurrent neural network for online action detection. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2018. vol. 29. no. 9. pp. 2667–2682.
13. Salehi H., Burgueno R. Emerging artificial intelligence methods in structural engineering. *Engineering Structures*. 2018. no. 171. pp. 170–189.
14. Lu J., Liu A., Dong F., Gu F., Gama J., Zhang G. Learning under concept drift: a review. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*. 2019. vol. 31. no. 12. pp. 2346–2363.
15. Zhang X., Wang M. Weighted Random Forest Algorithm Based on Bayesian Algorithm. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. vol. 1924. pp. 1–6.
16. Scanagatta M., Salmeron A., Stella F. A survey on Bayesian network structure learning from data. *Progress in Artificial Intelligence*. 2019. no. 8, pp. 425–439.
17. Wright M., Dankowski T., Ziegler A. Unbiased split variable selection for random survival forests using maximally selected rank statistics. *Statistics in Medicine*. 2017. vol. 36. no. 8. pp. 1272–1284.
18. Zheng X., Aragam B., Ravikumar P., Xing E. DAGs with no tears: Continuous optimization for structure learning. *Advances in Neural Information Processing Systems*. 2018. vol. 43. pp. 9492–9503.
19. Di Franco G., Santurro M. Machine learning, artificial neural networks and social research. *Qual Quant*. 2021. no. 5. pp. 1007–1025.
20. Scanagatta M., Corani G., Zaffalon M., Yoo J., Kang U. Efficient learning of bounded-treewidth Bayesian networks from complete and incomplete data sets. *International Journal of Approximate Reasoning*. 2019. vol. 95. pp. 152–166.
21. Kheyreddine D., Kadda B.-B., Abdenour A. A new adaptive sampling algorithm for big data classification. *Journal of Computational Science*. 2022. vol. 61. pp. 101–116.
22. Lebedev I.S. [Dataset segmentation considering the information about impact factors]. *Informacionno-upravljajushhie sistemy – Information and Control Systems*. 2021. no. 3. pp. 29–38. (In Russ.).
23. Lebedev I.S. [Adaptive application of machine learning models on separate segments of a data sample in regression and classification problems]. *Informacionno-upravljajushhie sistemy – Information and Control Systems*. 2022. no. 3. pp. 20–30. (In Russ.).
24. Power Supply dataset. Available at: <http://www.cse.fau.edu/~xqzhu/stream.html> (accessed 27.10.2022).
25. Energy generation dataset. Available at: [https://www.kaggle.com/nicholasjhana/energy-consumption-generation-prices-and-weather/data?select=energy\\_dataset.csv](https://www.kaggle.com/nicholasjhana/energy-consumption-generation-prices-and-weather/data?select=energy_dataset.csv) (accessed 27.10.2022).

**Lebedev Ilya** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Chief researcher, Laboratory of intelligent systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS). Research interests: machine learning methods, representation and processing of weakly structured data, application of artificial intelligence methods in information security systems. The number of publications — 200. [isl\\_box@mail.ru](mailto:isl_box@mail.ru); 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-3311.

П.А. СЛИВНИЦИН, Л.А. МЫЛЬНИКОВ  
**РАСПОЗНАВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ПО СОСТАВЛЯЮЩИМ ИХ  
ПРИМИТИВАМ И ОТНОШЕНИЯМ МЕЖДУ НИМИ**

*Сливницин П.А., Мыльников Л.А. Распознавание объектов по составляющим их примитивам и отношениям между ними.*

**Аннотация.** Целью работы является разработка способа и алгоритма распознавания объектов окружающего пространства, качество работы которого не будет зависеть от числа типов объектов реального мира, которые он может распознавать. Для этого поставлены и решены задачи распознавания множества элементарных геометрических объектов (признаков-примитивов), определения отношений между ними и поиска соответствий между найденными признаками-примитивами и отношениями и заданными шаблонами-описаниями сложносоставных и простых объектов реального мира. Для распознавания элементарных геометрических фигур применена нейронная сеть свёрточного типа. Для её обучения использовались искусственно сгенерированные изображения с элементарными геометрическими фигурами (3D примитивами), которые располагались на сцене случайным образом с различными свойствами их поверхностей и текстурами. В результате обучения была получена нейронная сеть, способная распознавать объекты примитивы. Сформировано множество отношений, необходимое для распознавания объектов, которые могут быть представлены как составные из признаков-примитивов. В предложенном способе распознавания количество классов для поиска ограничивается набором признаков-примитивов. Проверка на фотографиях реальных объектов показала способность распознавать объекты реального мира в независимости от их типа (в случаях, когда возможны их разные модели и модификации) и материала изготовления, а также способность успешно решать задачи поиска объектов в условиях частичного перекрытия объектов и их ограниченной видимости и частичной деформации. В работе рассмотрен пример с распознаванием светильника уличного освещения. Пример показывает способность алгоритма не только выявлять объект на изображении, но и определять ориентацию положения его составляющих. Предложенное решение может быть использовано в задачах манипуляции объектами внешнего мира робототехническими системами.

**Ключевые слова:** распознавание объектов, признаки-примитивы, отношения признаков, нейронная сеть, компьютерное зрение.

**1. Введение.** Распознавание объектов окружающего пространства является задачей компьютерного зрения, которая на данный момент нашла широкое применение в распознавании людей/положения их фигур/лиц, автомобильных номеров, транспортных средств и др. [1]. Алгоритмы распознавания нашли применение в промышленности, например, при контроле состояния оборудования, контроле ношения средств индивидуальной защиты, контроле качества сырья, полуфабрикатов и готовой продукции [1, 2], аутентификации персонала [3], а также в оцифровке текстов [4]. Решение задач распознавания объектов внешнего мира является одним из ключевых элементов в создании автономных

систем, таких как автомобили с автопилотом [5], автономные робототехнические системы [6, 7], системы дополненной реальности [8]. Делаются шаги по развитию существующих алгоритмов для идентификации состояний, действий, ситуаций [1, 9].

Задачи компьютерного зрения можно разделить на задачи:

- классификации (присвоение класса изображению в зависимости от того, что на нём изображено) [10];
- поиска объектов (локализация и классификация объектов из конечного набора классов на изображении) [11];
- сегментации объектов (отнесение каждого пикселя на изображении к некоторому классу, логика классификации пикселей может отличаться в зависимости от типа сегментации, среди которых семантическая, экземплярная, паноптическая) [12, 13].

Их различие заключается в получаемой из входных данных информации об объектах. Если прикладная задача требует более детальное представление, определение его частей, говорят о комплексных задачах распознавания. Например, поиск ключевых точек объекта [14], более детальная сегментация лица человека [15]. На основе комплексных задач распознавания решаются ещё более сложные задачи, связанные с оценкой положения объекта относительно сенсора, с которого поступают входные данные [16].

Задачи определения положения объектов на данный момент являются одними из основополагающих задач, которые необходимы для создания автономных робототехнических систем, которые находят применение в агропромышленном комплексе [17], обслуживании объектов городской инфраструктуры [6], обслуживании складских помещений [8].

Подходы к распознаванию, как правило, основываются на выделении признаков распознаваемых объектов для их поиска и классификации [18]. На основе выделенных признаков составляется прототип объекта, который представляет собой «усреднённое» представление объекта. В современных алгоритмах, основанных на глубоком обучении, признаки объекта выделяются автоматически на основе размеченных примеров из обучающей выборки.

Наиболее распространённым инструментом для распознавания объектов на данный момент являются нейронные сети свёрточного типа [19], которые вытеснили не нейросетевые алгоритмы распознавания (метод Виолы-Джонса [20], метод Далала-Триггса [21], DPM [22]). При этом говорить о преимуществе одних методов

над другими не представляется возможным, т.к. выбор метода и алгоритма (а также других параметров, таких как функция потерь, оптимизатор и т.д.) распознавания подбирается под конкретную, частную задачу [23] (при разном применении один и тот же метод может давать хорошие результаты и плохие). В связи с этим в литературе встречаются работы, связанные со сравнением и выбором различных методов (реализаций) для конкретной задачи распознавания [24]. Однако работ, сравнивающих эффективность использования разных концепций в рамках области или класса задач не наблюдается, поскольку нет применимых метрик, позволяющих провести сравнительную оценку разных концепций, таких как классификация, поиск объектов, сегментация. Разные алгоритмы могут учитывать специфику задачи и имеют разную эффективность в одинаковой прикладной задаче. Поэтому сравнение доступно только на качественном уровне. Пример некоторого количества алгоритмов распознавания на качественном уровне представлен в таблице 1. Точность распознавания для каждой задачи зависит от большого количества параметров, таких как выбранная метрика, обучающая выборка данных, нюансы самих распознаваемых объектов. Зачастую, чтобы подобрать подходящую выборку, проводится несколько итераций обучения и сравнения [24]. Также встречаются работы, в которых рассматривается влияние количества классов на точность распознавания объектов [25]. При значительном увеличении количества распознаваемых классов наблюдается снижение точности распознавания, что также подтверждается эмпирическими наблюдениями.

Следуя из этого, можно говорить об ограниченной сфере применения алгоритмов распознавания, где для перенастройки и адаптации при применении алгоритма, решающего конкретную задачу, для нового применения требуются дополнительные затраты. Более сложные задачи, основанные на распознавании объектов, таких как манипуляция объектами автономными роботизированными системами, требуют выявления ещё большей информации об объекте, что проблематично реализуется существующими алгоритмами и накладывает ещё больше ограничений при распознавании (например, такие свойства объекта, как прозрачность или отражающая способность, хрупкость, место и способ захвата).



Таблица 1. Качественное сравнение алгоритмов распознавания (оценки низкие/средние/высокие являются мнением авторов, полученным на основе практической реализации этих алгоритмов)

Метод	Извлекаемая информация об изображении / объекте	Вычислительная сложность	Сложность реализации	Возможность добавления новых классов объектов
1. Методы поиска ассоциативных правил	Класс изображения (бинарная/multi-class классификация)	Низкие требования к вычислительным ресурсам	Требует описания правил	Необходимо описание новых правил
2. Экспертные системы	Класс изображения (бинарная/multi-class классификация)	Низкие требования к вычислительным ресурсам	Требует описания правил	Необходимо описание новых правил
3. Теория предикатов	Класс изображения (бинарная/multi-class классификация)	Теория не предъявляет высоких требований к вычислительным ресурсам (зависит от реализации)	Требует небольшое количество обучающих данных	Необходимо описание новых объектов
4. Метод Виолы-Джонса (Haar Cascades)	Положение объекта класса на изображении (ограничивающая рамка)	Низкие требования к вычислительным ресурсам	Требует небольшое количество обучающих данных	Необходимо формирование новой обучающей выборки
5. Метод Далала-Триггса (HOG descriptor)	Положение объекта класса на изображении (ограничивающая рамка)	Средние требования к вычислительным ресурсам	Требует небольшое количество обучающих данных	Необходимо формирование новой обучающей выборки
6. Deformable Part Model detector (DPM)	Положение объекта класса и его частей на изображении (ограничивающая рамка)	Средние требования к вычислительным ресурсам	Требует небольшое количество обучающих данных	Необходимо формирование новой обучающей выборки
7. Нейронные сети	Класс изображения (бинарная/multi-class/multi-label классификация) / положение объекта класса на изображении (ограничивающая рамка) / положение объекта класса на изображении (контур объекта) / положение частей объекта класса на изображении (ключевые точки)	Значительные требования к вычислительным ресурсам, как при обучении алгоритма, так и при использовании	Требует большого количества обучающих данных и времени на обучение	Необходимо формирование новой обучающей выборки

Все существующие на данный момент методы распознавания работают либо с пикселями, либо с вокселями. Кроме этого, методы делятся на те, которые используют предварительную/дополнительную обработку данных и – нет. Последние ориентированы на поиск и распознавание единичных заранее заданных объектов, под которые разрабатываются и обучаются специализированные модели. Таких моделей разработано большое количество (например, YOLO [26], SSD [27]). Для оценки эффективности работы таких моделей используются такие метрики как среднее значение и дисперсия IoU [28].

Методы с дополнительной или предварительной обработкой данных являются более перспективными и включают в себя самые разные подходы. Примерами реализации таких подходов могут быть методы селективного поиска для чего выделяется специальный слой нейронной сети для выявления области интереса (области содержащей объект с высокой вероятностью), с последующей классификацией каждого региона на принадлежность к искомым классам и уточнение местоположения ограничивающих рамок с помощью регрессора (Faster R-CNN [29]). Распространение получают методы использующие специальные структуры для идентификации объектов и определения их положения [30].

Развиваются методы реконструкции пространства (методы группы SLAM++) [31 – 33] которые помимо составления облака точек для исключения столкновения при перемещении в пространстве ориентированы на распознавание отдельных объектов, что дает дополнительную информацию о локации в которой находится робототехническая система. Развивается направление распознавания объектов по частям [34], распознавания множества предопределённых в базе знаний объектов [35], а также поиска особых взаимосвязей между пикселями или вокселями которые будут выступать ключевыми признаками в процессе распознавания [36]. Для оценки качества работы таких методов необходимо учитывать возможность распознавания множества объектов на рассматриваемой сцене, что приводит к ситуации, когда точность работы зависит от алгоритмов используемых для предварительной обработки данных (например, распознавания частей), а фактором показывающим качество работы всего алгоритма становится не метрика работы отдельного алгоритма, а сам факт распознавания ключевого объекта/локации/элемента в разных условиях или их множеств. Тогда к алгоритмам распознавания становятся применимы метрики, используемые в задачах классификации (правильное распознавание объекта/класса).

Упомянутые выше методы распознавания элементов сцен или частей объектов используют в своей работе все множество возможных модификаций объектов для идентификации, например, спинок/ножек стульев, тем самым полагаясь на то, что используемый метод (как правило, нейронная сеть) сам выделит необходимые уникальные признаки. Таким образом, в ситуациях с большим количеством вариантов конструкции качество работы методов будет снижаться как у методов, не использующих дополнительные этапы/предобработку. Решением может быть выделение некоторых универсальных признаков/объектов/черт комбинация которых делает объект или его часть уникальными.

Подходы, основанные на комбинации алгоритмов, как правило, работают дольше, однако имеют более высокую точность распознавания, это связано с тем, что последующие алгоритмы уточняют предсказание и уменьшают ошибку предыдущих. В связи с этим точность многоэтапных подходов не может быть оценена обобщением качества работы промежуточных алгоритмов. Точность алгоритма при распознавании простых объектов, которые могут быть описаны одним признаком-примитивом, является точностью исходной модели поиска. Точность классификации объектов как комбинации признаков и отношений между ними является предметом дальнейших исследований, поскольку требует подготовки набора данных для оценки точности.

Исходя из этого, внедрение систем распознавания и автономных роботизированных систем хоть и происходит, но не носит масштабный характер. Решение этой проблемы лежит в разработке универсальных методов распознавания, которые позволят расширить способы их применения.

И. Бидерман показал, что человек для распознавания окружающих его объектов использует множество компонент и учитывает их расположение относительно друг друга [37]. При этом существуют некоторые границы, после превышения которых в ориентации и расстоянии между компонентами человек перестает воспринимать объект (набор компонент) как единое целое, что стало обобщением данных экспериментов (например, иллюзия Тэтчер [38]). Способность распознавать также в зависимости от набора компонент с помощью которых происходит формирование объекта [39]. В рамках своей теории распознавания по компонентам И. Бидерман рассматривал вопросы когнитивной психологии, связанные с процессом распознавания объектов человеком. Она строится на предположении, что каждый предмет может быть представлен

совокупностью геометрических фигур – геонов. Каждый геон может быть описан совокупностью неслучайных свойств, которые неизменны при изменении угла зрения [18, 37]. Развитие подходов к распознаванию основанных на таком представлении объектов можно проследить в [30, 40]. Задача распознавания в таком случае сводится к определению необходимого набора элементов для идентификации объектов мира или только необходимых для рассматриваемой области деятельности, выбору и обучению модели для их распознавания и выработки правил на основании соответствия которым объект будет однозначно идентифицирован.

Некоторые авторы показывают, что число распознаваемых типов компонентов может быть, в некоторых случаях, сведено даже до одного – двух элементов. Так работает вычислительная теория восприятия Д. Марра [41], которая предполагает, что для распознавания необходима многоэтапность с возрастающей детализацией объектов. Сначала обрабатывается информация о контурах, краях и пятнах, затем о глубине и ориентации видимых поверхностей, после чего генерируется трёхмерная модель распознаваемого объекта. Модели, согласно этой теории, состоят из канонических форм (например, цилиндров).

**2. Методология.** ***Определение 1.** Признаками-примитивами будем называть множество пространственных геометрических фигур и их свойств, составляющих множество объектов распознавания (общие элементы во всем множестве целевых объектов распознавания).*

***Определение 2.** Отношениями признаков-примитивов будем называть общий для всех целевых объектов набор отношений между признаками-примитивами для описания их взаимодействия в рамках каждого целевого объекта.*

***Определение 3.** Сложным признаком будем называть множество признаков-примитивов и других сложных признаков отношения, между которыми описываются без использования отношения «без отношений». Сложный признак, как и простые признаки-примитивы, может состоять в отношениях с другими признаками-примитивами и/или сложными признаками.*

Среди алгоритмов распознавания существуют примеры использования только отношений компонентов объектов. Такой подход работает при распознавании поз и жестов. Однако информации только об отношениях, как правило, не достаточно для распознавания объектов [42].

Набор признаков-примитивов может зависеть от предметной области распознаваемых объектов и учитывать особенности, характерные для этой области, например, в области обслуживания наружного освещения [6] (ограниченное множество креплений, форм, текстур и т.д.). Однако даже при отсутствии ограничений, накладываемых предметной областью число отношений и признаков примитивов, является конечным (в отличие от форм объектов окружающего мира).

Примерами признаков-примитивов могут быть признаки формы (простые и сложные трёхмерные фигуры: призма, сфера, тор и т.д.), признаки цвета, текстуры, материала и др.

Множество известных объектов обозначим через  $O = \{o_1, o_2, o_3, \dots, o_i, \dots, o_n\}$ , каждому из элементов которого может быть сопоставлена пара множеств признаков-примитивов и отношений  $o_i = (s^{o_i}, q^{o_i})$ , где  $s^{o_i} \in S$ ,  $q^{o_i} \in Q$ . При этом  $\forall s_j^{o_i} \in s^{o_i}$  можно определить множество отношений из  $q_j^{o_i} \in q^{o_i}$ , которые описывают его взаимодействие с  $\forall s_k^{o_i} \in s^{o_i}$  для  $j \neq k$ .

**Предположение 1 (о представлении объекта).** Любой объект может быть представлен как конечное множество признаков-примитивов  $s \in S$ , связанных между собой конечным множеством отношений  $q \in Q$ .

**Предположение 2 (о распознавании объекта).** Распознавание объекта  $o$  из множества известных объектов  $O$  может осуществляться как поиск совокупности признаков объекта  $s \in S$ , связанных между собой совокупностью отношений  $q \in Q$ .

**Предположение 3 (о сложном признаке).** Множество признаков  $S$  может включать в себя наряду с признаками-примитивами сложные признаки.

Множество сложных признаков вводится для упрощения распознавания сложносоставных объектов.

**Предположение 4 (о распознавании сложносоставных объектов).** Распознавание сложносоставного объекта  $o$  из множества известных объектов  $O$  может осуществляться как поиск совокупности сложных признаков и признаков примитивов  $s \in S$ , связанных между собой совокупностью отношений  $q \in Q$ .

Множество отношений  $Q$  описывает взаимодействие объектов  $O$  в трехмерном пространстве. При работе с реальными объектами мы

можем видеть их с разных точек зрения, использовать различные проекции.

Для оперирования объектами и отношениями между ними необходимо введение точки отсчёта направления осей, относительно которых будем описывать объекты и отношения. В этом случае, зная нахождение точки зрения, можно выполнить необходимые преобразования в пространстве и преобразовать фигуры и отношения, использовать для распознавания объектов соответствующую точке зрения модель.

Для реализации описанного подхода для введённого множества примитивов необходимо определить положения, например, с помощью алгоритма Direct Linear Transform (DLT) [43], по ключевым точкам (рисунок 1).

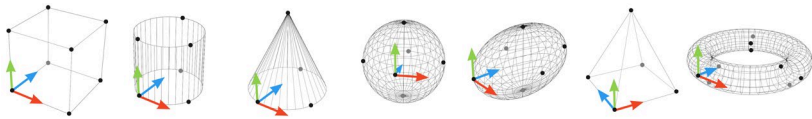


Рис. 1. Примеры геометрических примитивов с нанесёнными ключевыми точками и направляющими осями

Для описания сцены введём следующее множество пространственных отношений между объектами, формула (1).

$$Q = \{ \text{над, под, справа от, слева от, за,} \\ \text{перед, выше, ниже, правее, левее,} \\ \text{дальше, ближе, наклон, поворот,} \\ \text{удалённость, размер, соприкосновение,} \\ \text{стоит на, вставлен в} \} \quad (1)$$

Для идентификации необходимо несколько снимков со смещениями для определения удалённости.

Из приведённых предположений можно сделать вывод, что комбинации признаков и отношения между ними определяют распознаваемый объект. Последовательность распознавания объектов может быть представлена следующим образом:

1) Идентифицируем признаки-примитивы на изображении и определяем их положение относительно точки наблюдения (далее при проведении экспериментов использовалась свёрточная нейронная сеть YOLACT [44, 45] для поиска признаков-примитивов и ансамбли

регрессионных деревьев [46] вместе с алгоритмом Direct Linear Transform (DLT) [43] для определения положения признаков-примитивов).

2) Выбираем базовый признак-примитив, точку отсчёта. В качестве базового примитива может выбираться любой признак-примитив (его выбор необходим для определения отношений между признаками-примитивами).

3) Вычисляем положение точки наблюдения относительно системы координат базового признака-примитива.

4) Формируем множество всех признаков-примитивов и сложных признаков (пространственных отношений), присутствующих на анализируемом изображении  $S_{img} \in S$ , и множество отношений между ними  $Q_{img} \in Q$ .

5) Проверяем достаточность выделенных признаков для определения объектов на изображении, для этого формируем множество объектов ( $Q_{img}$ ), для которых выполняется  $S^{(O)} \in S_{img}$ ,  $\forall O$ .

6) Если  $O_{img} = \emptyset$ , то объектов на изображении нет. Переходим на шаг 9.

7) Для каждого элемента ( $i$ ) из множества  $Q_{img}$  проверяем между соответствующими ему признаками  $S_{img}^{(O_{img}^{(i)})} \in S_{img}$  наличие необходимых отношений  $Q_{img}^{(O_{img}^{(i)})} \in Q_{img}$ . Из элементов, прошедших проверку, формируем множество  $O_{img}^* \in O_{img}$  и исключаем соответствующие им признаки из множества признаков  $S_{img} = S_{img} / S_{img}^{(O_{img}^*)}$ .

8) Добавляем распознанные объекты  $O_{img}^*$  в множество признаков  $S_{img} = S_{img} + O_{img}^*$  и переходим на шаг 2.

9) Выводим множество  $O_{img}^*$ , которое представляет собой множество распознанных объектов.

Рассмотрим случай, когда общая для рассматриваемой сцены система координат ориентирована так, что ось  $OX$  направлена вправо, ось  $OY$  вверх, а ось  $OZ$  от наблюдателя (рисунок 2).

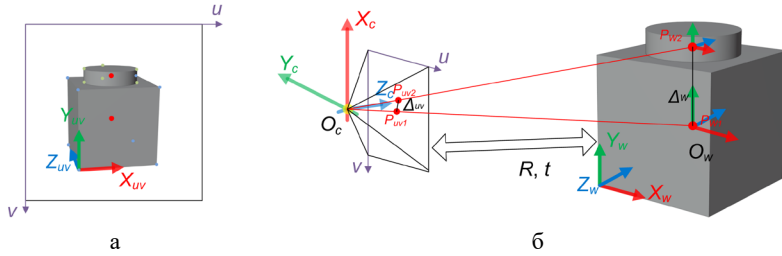


Рис. 2. Пример проекции отношения на плоскость изображения:  
 а) проекция объекта на плоскость изображения; б) трёхмерный вид соотношения объекта и камеры, где  $X_w, Y_w, Z_w, O_w$  – мировая система координат;  $X_c, Y_c, Z_c, O_c$  – система координат камеры;  $u, v$  – система координат изображения;  $R$  – матрица поворота камеры;  $t$  – вектор перемещения камеры)

На основе ограничивающих рамок и ключевых точек, отношения между примитивами А и В могут быть описаны следующими выражениями:

- 1) строгие отношения положения:
  - А над В:**  $\min(y^{(A)}) \geq \max(y^{(B)})$ ;
  - В под А:**  $\max(y^{(B)}) \leq \min(y^{(A)})$ ;
  - А справа от В:**  $\min(x^{(A)}) \geq \max(x^{(B)})$ ;
  - А слева от В:**  $\max(x^{(B)}) \leq \min(x^{(A)})$ ;
  - А за В:**  $\min(z^{(A)}) \geq \max(z^{(B)})$ ;
  - А перед В:**  $\max(z^{(A)}) \leq \min(z^{(B)})$ ;
- 2) «мягкие» отношения положения (примитивы имеют пересечение):
  - А выше В:**  $\min(y^{(A)}) < \max(y^{(B)}) \wedge \max(y^{(A)}) > \min(y^{(B)})$ ;
  - В ниже А:**  $\max(y^{(B)}) > \min(y^{(A)}) \wedge \min(y^{(B)}) > \min(y^{(A)})$ ;
  - А правее В:**  $\min(x^{(A)}) < \max(x^{(B)}) \wedge \max(x^{(A)}) > \max(x^{(B)})$ ;
  - А левее В:**  $\min(x^{(A)}) < \min(x^{(B)}) \wedge \max(x^{(A)}) > \min(x^{(B)})$ ;
  - А дальше В:**  $\min(z^{(A)}) < \max(z^{(B)}) \wedge \max(z^{(A)}) > \max(z^{(B)})$ ;
  - А ближе В:**  $\min(z^{(A)}) < \min(z^{(B)}) \wedge \max(z^{(A)}) > \min(z^{(B)})$ ;
- 3) отношения положения и взаимодействия:  
**Наклон А относительно В** представлен формулой 2:

$$OY^{(A)} \angle OX^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee OZ^{(A)} \angle OZ^{(B)} \in [c_1, c_2], \quad (2)$$



где  $OX^{(A)}$  – прямая оси  $OX$  для примитива **A** (остальные аналогично),  $[c_1, c_2]$  – интервал значений наклона, характерного для пары примитивов при описании объекта.

**Поворот A относительно B** представлен формулой 3:

$$OY^{(A)} \angle OY^{(B)} \in [c_1, c_2], \quad (3)$$

где  $OX^{(A)}$ ,  $OY^{(B)}$  – прямые оси  $OY$  для примитивов **A** и **B** соответственно,  $[c_1, c_2]$  – интервал значений поворота, характерного для пары примитивов при описании объекта.

**Удалённость A от B** представлен формулой 4:

$$\Delta = \sqrt{(x_c^{(A)} - x_c^{(B)})^2 + (y_c^{(A)} - y_c^{(B)})^2 + (z_c^{(A)} - z_c^{(B)})^2}, \quad (4)$$

где  $x_c^{(A)}$ ,  $x_c^{(B)}$ ,  $y_c^{(A)}$ ,  $y_c^{(B)}$ ,  $z_c^{(A)}$ ,  $z_c^{(B)}$  – координаты центра примитива, расчет для  $x_c^{(A)}$  представлен формулой (5) остальные рассчитываются аналогично.

$$x_c^{(A)} = \frac{\max(x^{(A)}) - \min(x^{(A)})}{2}. \quad (5)$$

**Размер A относительно B** представлен формулой 6:

$$V^{(A)} : V^{(B)}, \quad (6)$$

где  $V^{(A)}$ ,  $V^{(B)}$  – габаритные размеры примитива, расчет для  $V^{(A)}$  представлен формулой 7 остальные рассчитываются аналогично.

$$V^{(A)} = (\max(x^{(A)}) - \min(x^{(A)})) \cdot (\max(y^{(A)}) - \min(y^{(A)})) \cdot (\max(z^{(A)}) - \min(z^{(A)})). \quad (7)$$

**Отношение площадей сечения A и B** представлено формулой (8):

$$\begin{aligned}
& S_{x\_min}^{(A)} : S_{x\_min}^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee S_{x\_max}^{(A)} : S_{x\_max}^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee \\
& \vee S_{y\_min}^{(A)} : S_{y\_min}^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee S_{y\_max}^{(A)} : S_{y\_max}^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee , \quad (8) \\
& \vee S_{z\_min}^{(A)} : S_{z\_min}^{(B)} \in [c_1, c_2] \vee S_{z\_max}^{(A)} : S_{z\_max}^{(B)} \in [c_1, c_2]
\end{aligned}$$

где  $S_{x\_min}^{(A)}$  – площадь сечения  $\min(x^{(A)})$  примитива  $A$ , расчет для  $S_{x\_min}^{(A)}$  представлен формулой (9) остальные рассчитываются аналогично.

$$S_{x\_min}^{(A)} = \left( \max(y^{(A)}) - \min(y^{(A)}) \right) \cdot \left( \max(z^{(A)}) - \min(z^{(A)}) \right). \quad (9)$$

**Сопрокосновение А с В** представлено формулой (10):

$$\begin{aligned}
& \max(x^{(A)}) = \min(x^{(B)}) \vee \max(y^{(A)}) = \min(y^{(B)}) \vee \\
& \vee \max(z^{(A)}) = \min(z^{(B)}) \vee \max(x^{(B)}) = \min(x^{(A)}) \vee . \quad (10) \\
& \vee \max(y^{(B)}) = \min(y^{(A)}) \vee \max(z^{(B)}) = \min(z^{(A)})
\end{aligned}$$

**Выражение А стоит на В** представлено формулой (11):

$$\begin{aligned}
& \max(y^{(A)}) = \min(y^{(B)}) \wedge \\
& \wedge (\min(x^{(A)}) < \max(x^{(B)}) \wedge \max(y^{(A)}) < \min(y^{(B)})) \wedge . \quad (11) \\
& \wedge (\min(z^{(A)}) < \max(z^{(B)}) \wedge \max(z^{(A)}) < \min(z^{(B)}))
\end{aligned}$$

**Выражение А вставлен в В** представлено формулой (12):

$$\begin{aligned}
& V^{(A)} < V^{(B)} \wedge \min(y^{(A)}) < \max(y^{(B)}) \wedge \\
& \wedge (\min(x^{(A)}) < \max(x^{(B)}) \wedge \max(x^{(A)}) > \min(x^{(B)})) \wedge . \quad (12) \\
& \wedge (\min(z^{(A)}) < \max(z^{(B)}) \wedge \max(z^{(A)}) > \min(z^{(B)}))
\end{aligned}$$

Работа алгоритма опирается на множество известных признаков  $S$ , отношений между признаками  $Q$  и множество известных объектов с предзаданной структурой  $O$ . На выходе алгоритма мы получаем множество, состоящее из распознанных объектов, сложных признаков и признаков-примитивов. Такой подход даёт нам возможность анализировать полученные результаты

и вносить изменения в множества примитивов, отношений и объектов, улучшая качество работы предлагаемого алгоритма.

**3. Результаты.** Рассмотрим сцену, приведённую на рисунке 3. Множества  $S$  и  $Q$  для неё примут следующие значения:

$$S = \{\text{призма, цилиндр, конус, эллипсоид, пирамида, тор}\}, \quad (13)$$

$$Q = \{\text{над, под, справа от, слева от, за, перед, выше, ниже, правее, левее, дальше, ближе, наклон, поворот, удалённость, размер, соприкосновение, стоит на, вставлен в, отношение сторон}\}. \quad (14)$$

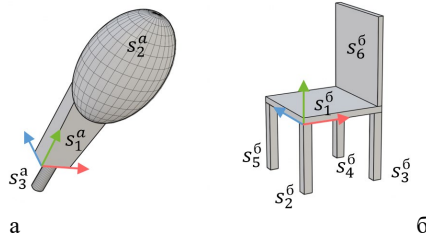


Рис. 3. Представление объектов окружающего мира с использованием признаков-примитивов

Для распознавания объектов необходимо ввести эталонные объекты и отношения, которые будут однозначно идентифицировать рассматриваемые объекты.

Для фонаря, приведённого на рисунке 3(а), такие эталонные описания могут быть представлены с использованием множеств  $S_a = \{s_1^a, s_2^a, s_3^a\}$ , где  $s_1^a = \text{призма}$ ,  $s_2^a = \text{эллипсоид}$ ,  $s_3^a = \text{цилиндр}$  и  $Q_a = \{\text{наклон, стоит на, выше, ниже, над, под, размер, удалённость}\}$  в форме представленной формулой (15):

$$\begin{aligned} Q_a^S = \{ & s_2^a \text{ стоит на } s_1^a \text{ И } s_1^a \text{ размер } s_2^a \text{ И} \\ & \text{И } s_1^a \text{ наклон } s_2^a \text{ И } s_1^a \text{ ниже } s_2^a \text{ И} \\ & \text{И } s_1^a \text{ удалённость } s_2^a \text{ И } s_1^a \text{ размер } s_3^a \text{ И} \\ & \text{И } s_1^a \text{ наклон } s_3^a \text{ И } s_1^a \text{ над } s_3^a \text{ И} \\ & \text{И } s_1^a \text{ удалённость } s_3^a \} \text{ ИЛИ} \\ & \text{ИЛИ } \{ s_2^a \text{ стоит на } s_1^a \text{ И } s_1^a \text{ размер } s_2^a \text{ И} \\ & \text{И } s_1^a \text{ ниже } s_2^a \text{ И } s_1^a \text{ удалённость } s_2^a \}. \end{aligned} \quad (15)$$

Для стула, приведённого на рисунке 3(б), эталонные описания могут быть представлены с использованием множеств  $S_o = \{s_1^o, s_2^o, s_3^o, s_4^o, s_5^o, s_6^o\}$ , где  $s_1^o = \text{призма}$ ,  $s_2^o = \text{призма}$ ,  $s_3^o = \text{призма}$ ,  $s_4^o = \text{призма}$ ,  $s_5^o = \text{призма}$ ,  $s_6^o = \text{призма}$  и  $Q_o$ , представленная формулой (16). Для рисунка 3(б) одним из вариантов описания объекта может быть представлено формулой (17).

$$Q_o = \{\text{наклон, стоит на, левее, правее, выше, ниже, размер, отношение площадей}\}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} Q_o^S = \{ & s_1^o \text{ стоит на } s_2^o \text{ И } s_1^o \text{ над } s_2^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ размер } s_2^o \text{ И } s_1^o \text{ правее } s_2^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ дальше } s_2^o \text{ И } s_1^o \text{ удаленность } s_2^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ отношение сторон } s_2^o \text{ И} \\ & s_1^o \text{ стоит на } s_3^o \text{ И } s_1^o \text{ над } s_3^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ размер } s_3^o \text{ И } s_1^o \text{ правее } s_3^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ дальше } s_3^o \text{ И } s_1^o \text{ удаленность } s_3^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ отношение сторон } s_3^o \text{ И} \\ & s_1^o \text{ стоит на } s_4^o \text{ И } s_1^o \text{ над } s_4^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ размер } s_4^o \text{ И } s_1^o \text{ левее } s_4^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ ближе } s_4^o \text{ И } s_1^o \text{ удаленность } s_4^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ отношение сторон } s_4^o \text{ И} \\ & s_1^o \text{ стоит на } s_5^o \text{ И } s_1^o \text{ над } s_5^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ размер } s_5^o \text{ И } s_1^o \text{ правее } s_5^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ ближе } s_5^o \text{ И } s_1^o \text{ удаленность } s_5^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ отношение сторон } s_5^o \text{ И} \\ & s_1^o \text{ стоит на } s_6^o \text{ И } s_1^o \text{ над } s_6^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ размер } s_6^o \text{ И } s_1^o \text{ левее } s_6^o \text{ И} \\ & \text{И } s_1^o \text{ удаленность } s_6^o \text{ И } s_1^o \text{ отношение сторон } s_6^o \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для идентификации признаков-примитивов при распознавании объектов предложенным методом будем использовать свёрточную нейронную сеть для экземплярной сегментации объектов YOLACT

[44, 45]. Выбор этой архитектуры нейронной сети был основан на сравнении скорости и точности известных архитектур нейронных сетей приведённом в статье [44] (выбранная архитектура нейронной сети согласно данным приведённой статьи обладает наибольшей производительностью и входит в 1/3 лучших по точности, что крайне важно для автономных робототехнических систем, которые и манипулируют объектами внешнего мира). Сравнение сегментационных моделей производилось на наборе данных Common Object in Context (COCO) [47]. В качестве признаков будем использовать трёхмерные фигуры – призма, цилиндр, эллипсоид, пирамида. Для идентификации признаков-примитивов сеть была переобучена на искусственно сформированном наборе данных.

В качестве обучающей выборки используем набор данных, сгенерированный с помощью программной платформы BlenderProc [48]. Она позволяет формировать размеченную выборку данных для экземплярной сегментации в формате COCO на основе 3D сцены в Blender 3D [49]. Для генерации использовалось 4 признака-примитива (призма, цилиндр, эллипсоид, сфера). Для их разметки были сформированы сцены в Blender 3D, на которых признаки-примитивы располагались случайным образом (их положение и поворот) в ограниченных пределах координат (заданных размером сцены). При разметке определялись границы признака-примитива на сгенерированном изображении путём их автоматического проецирования на плоскость изображения камеры (объекта Blender 3D).

В процессе генерации будем выделять признаки-примитивы контуром и ограничивающей рамкой, а также случайным образом задавать освещение сцены, положение камеры, накладывать случайные текстуры, выбирать фон для сцены, задавать положение и ориентацию признаков-примитивов (рисунок 4).



Рис. 4. Примеры сгенерированных для обучающей выборки сцен

Сгенерированные для обучения изображения содержат, в том числе, пересечения различных признаков-примитивов друг с другом, что вызывает ситуации, когда часть признака-примитива не видна. Такие примеры позволяют учесть ситуацию, когда при разделении объекта на признаки-примитивы, части признака формы скрыты другим признаком, что довольно распространено.

Для обучения был сгенерирован набор данных, состоящий из 2500 размеченных изображений для обучения и 1000 изображений для оценки качества модели. Обучение продолжалось в течение 480 эпох (для обучения использовался GPU Nvidia GeForce RTX 2060).

Для поиска точек, требуемых для определения положения примитива, используем ансамбли регрессионных деревьев. Пример использования ансамбля регрессионных деревьев для поиска ключевых точек представлен на рисунке 5 [46, 50].

Рассмотрим пример идентификации объектов реального мира на примере светильников уличного освещения. Пример работы алгоритма для распознавания светильника наружного освещения приведён на рисунке 5.

Исходя из изображений, представленных на рисунке 5, сформировать описание объекта  $O_{ce}$  можно из множеств  $S_{ce} = \{s_1^{ce}, s_2^{ce}\}$ , где  $s_1^{ce} = \text{призма}$ ;  $s_2^{ce} = \text{эллипсоид} \vee \text{призма} \vee \text{цилиндр}$ ;  $Q_{ce} = \{\text{наклон, стоит на, выше, ниже, размер, удалённость}\}$ .  $Q_{ce}^S$  представлена формулой (18).

$$Q_{ce}^S = (s_2^{ce} \text{ стоит на } s_1^{ce} \text{ И } s_1^{ce} \text{ размер } s_2^{ce} \text{ И } s_1^{ce} \text{ ниже } s_2^{ce} \text{ И } s_1^{ce} \text{ удалённость } s_2^{ce} ) , \quad (18)$$

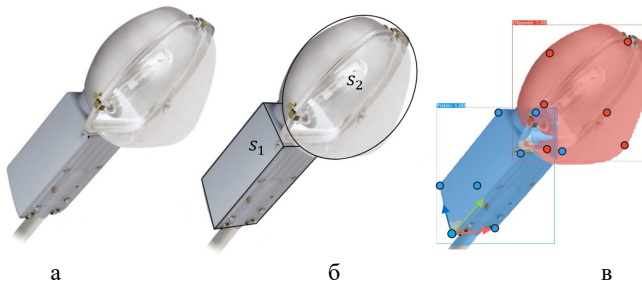


Рис. 5. Иллюстрация работы алгоритма распознавания на простом примере распознавания светильников уличного освещения: а) распознаваемый объект, б) выделенные примитивы из объекта, в) поиск примитивов и выделение ключевых точек)

При распознавании объекта на изображении выделены следующие признаки и определено их положение:  $S_{img} = \{s_1^{img}, s_2^{img}\}$ , где  $s_1^{img} = \text{призма}$ ;  $s_2^{img} = \text{эллипсоид}$ .

Среди выделенных признаков базовым был выбран  $s_1^{img}$ . Относительно его положения далее описываются отношения между примитивами. Сформировано множество отношений на изображении  $Q_{img}^S$ , представленное формулой (19).

$$Q_{img}^S = (s_2^{img} \text{ стоит на } s_1^{img} \text{ И } s_1^{img} \text{ размер } s_2^{img} \text{ И} \\ \text{И } s_1^{img} \text{ ниже } s_2^{img} \text{ И } s_2^{img} \text{ выше } s_1^{img} \text{ И} \\ \text{И } s_1^{ca} \text{ удаленность } s_2^{ca} ) \quad (19)$$

Выделенного множества признаков и отношений между ними достаточно для идентификации единственного искомого объекта (светильника). После проверки соответствия наличия необходимых отношений между всеми признаками объекта, множества  $O_{img}$ ,  $S_{img}$ ,  $Q_{img}$  примут следующий вид:  $O_{img} = \{O_{cs}\}$ ,  $S_{img} = \{O_{cs}\}$ ,  $Q = \emptyset$  – что говорит о наличии объекта класса «светильник» на изображении. Представленный пример, опирается на сегментацию признаков-примитивов на входном изображении свёрточной нейронной сетью. В качестве обучающих данных были использованы автоматически сгенерированные изображения, полученные с помощью программной платформы BlenderProc [48] на основе 3D сцен с объектами в Blender 3D. Данная программная платформа позволяет формировать изображения с признаками примитивами учитывая разные изменяемые параметры: освещение, точку обзора, фон, положение признаков-примитивов, текстуры признаков-примитивов. Для обучения сети, описанной в статье, были использованы три сцены с заданным набором признаков-примитивов, набор из 20 текстур (среди которых есть текстуры с составным рисунком, например, кирпичная кладка) и 25 фоновых изображений, что позволяет сделать относительно разнообразную выборку, но не охватывающую все возможные варианты, которые могут встречаться в реальном мире. Приведённый пример позволяет подтвердить гипотезу о том, что из объектов можно выделить признаки-примитивы существующими методами распознавания.

**4. Дискуссия.** Описание всех известных объектов и текущей сцены необходимо хранить в памяти во время процесса распознавания.

В зависимости от задачи, возможно большое количество распознаваемых на сцене отношений и признаков-примитивов, что выдвигает требования к способу хранения информации о них (формированию базы отношений и примитивов, описывающих объекты). В логику алгоритма хорошо вписываются графовые базы данных [18], что позволяет в явном виде хранить информацию. Если рассмотреть такой способ хранения информации об уличном светильнике, то получим структуру, где признаки-примитивы – это узлы графа, а отношения – это направленные рёбра графа (рисунок 6).

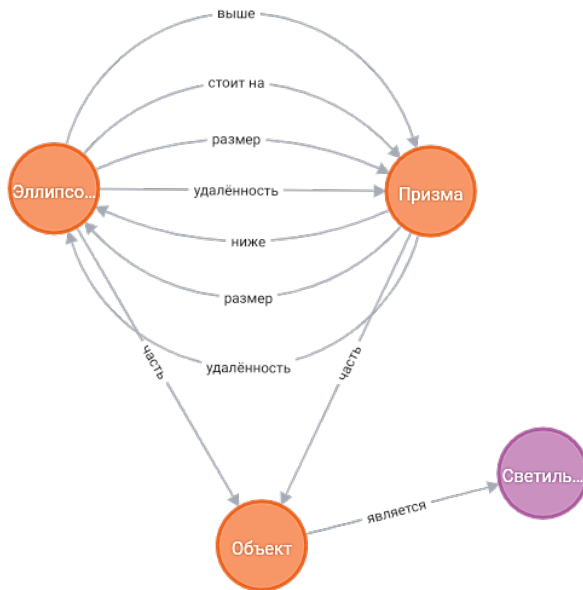


Рис. 6. Пример описания светильника наружного освещения в виде графа

Качество распознавания признаков-примитивов напрямую зависит от набора данных, однако процесс подготовки большого размеченного набора реальных данных является очень трудоёмким. На основе анализа работы текущего обученного алгоритма сформулированы следующие возможные способы повышения качества распознавания при использовании полностью искусственного набора данных:

- увеличение выборки, в том числе увеличение разнообразия сцен с объектами, собранными из признаков-примитивов (например, стол (рисунок 5));



- добавление сцен с объектами, состоящими из признаков-примитивов с плавными переходами между признаками-примитивами;
- возможность использования одинаковой текстуры для всех признаков-примитивов на сцене;
- использование разных текстур для разных граней одного признака-примитива.

Разработанный алгоритм распознавания, опирающийся на поиск признаков-примитивов объектов и определение отношений между ними, позволяет распознавать разнообразные объекты без необходимости переобучения алгоритма с предварительной подготовкой большого количества обучающих данных. Для дополнения списка распознаваемых объектов достаточно дополнить базу распознаваемых объектов описанием нового объекта или класса объектов. Помимо этого, множество признаков примитивов, детализация описания объекта, алгоритм поиска могут быть изменены в зависимости от требований к качеству распознавания и требований к вычислительным ресурсам. Распознанные признаки-примитивы и отношения между ними могут быть использованы для описания новых, неизвестных объектов в полуавтоматическом режиме. Множество признаков-примитивов и отношений между ними были сформулированы, исходя из опыта авторов.

Недостатком является необходимость описания различных конфигураций объектов одного класса, что может быть затруднительно. Однако такой процесс может быть автоматизирован, например, с помощью самого алгоритма, или, например, с помощью дополнительного ПО, которое позволит собирать объекты из блоков (признаков-примитивов) и автоматически генерировать описание для них.

Из экспериментов, проведённых авторами, можно ожидать, что могут быть ложноположительные срабатывания алгоритма на конструкции, похожие на распознаваемые объекты, но не являющиеся ими. Поэтому одним из направлений дальнейшего развития описанного подхода может быть обработка исключений при распознавании. Исключения могут формулироваться при описании объекта (например, требования к цвету, материалу, текстуре, положению, анализ областей соединения признаков-примитивов).

Полученный алгоритм позволяет расширить существующие подходы сбора и хранения информации об окружающем пространстве и объектах в нём, построении карт пространств (SLAM методы [51]). Описанный подход позволяет устранить главный недостаток SLAM алгоритмов, связанный с отсутствием информации об объектах в

пространстве, с которыми могут производиться манипуляции робототехническими системами.

В настоящее время задачи манипуляции объектами решаются индивидуально для каждого случая. Например, в статье [16] рассматривается решение задачи захвата нужного объекта и складывания его в корзину в рамках конкурса Amazon Picking Challenge. Описанный подход основывается на нейронной сети для распознавания и сегментации ограниченного количества объектов на изображении, которые используются в конкурсе, и опирается на их 3D модели для определения положения. Для адаптации подхода к новым объектам необходима трудоёмкая подготовка новых обучающих данных и 3D моделей объектов.

В статье [52] рассматривается задача бросания роботом предметов на основе обучения с подкреплением. На основе разработанного авторами подхода робот успешно совершает броски объектов, однако при захвате не производится классификация объектов, а захват осуществляется только на основе данных о геометрии объектов.

В статье [53] рассматривается задача распознавания и оценки положения объекта на основе одного изображения. Распознавание основывается на построении унифицированного представления множества экземпляров категории объектов. Для создания унифицированного представления используется вариационный автоэнкодер, который формирует независимое от положения представление объекта для каждой из категорий. Для оценки положения новых объектов они сравниваются с этим унифицированным представлением. Такой подход к распознаванию объектов позволяет довольно точно распознавать объекты и определять их положение на основе одного изображения, однако требует большого количества размеченных данных для переобучения и адаптации алгоритма к распознаванию новых объектов, а также ограничивает распознавание только классовой принадлежностью объекта, не позволяя классифицировать объекты внутри одного класса.

Разработанный алгоритм отличается тем, что:

- не требует для дополнения списка распознаваемых объектов подготовки новых обучающих данных и переобучение модели, это заменяется на дополнение базы описаний объектов описанием нового объекта;
- алгоритм не предъявляет требований к выбору способа реализации поиска признаков-примитивов (выбор может

осуществляться в зависимости от требований к качеству распознавания и требований к вычислительным ресурсам);

– распознанные признаки-примитивы и отношения между ними могут быть использованы для описания новых объектов в автоматическом/полуавтоматическом режиме (подход позволяет автоматизировать процесс формирования описания объектов (формирование графов взаимосвязей, рисунок 6)).

**5. Заключение.** В работе рассмотрен алгоритм идентификации объектов реального мира на фотографическом изображении, основанный на гипотезе о возможности распознавания объектов окружающего мира опираясь на ограниченное число признаков-примитивов и отношений между ними. Это позволяет не снижать качество распознавания при увеличении числа распознаваемых объектов.

В результате проведённого исследования удалось выяснить, что задача идентификации объектов внешнего мира может быть решена на синтетических данных и экспертных знаниях об устройстве/конфигурации объектов внешнего мира, что решает проблему создания качественного набора данных для обучения нейронной сети.

Предложенный алгоритм позволяет уйти от сбора большого количества примеров объекта и трудоёмкой разметки наборов данных для обучения, позволяя расширить количество распознаваемых объектов, добавив только их описание. Результаты, описанные в статье, могут быть адаптированы для идентификации объектов в других формах представления. Например, при получении облака точек (получаемого в результате 3D сканирования) для реконструкции окружающего мира (получения 3D модели). Информация об окружающем пространстве в виде облака точек включает в себя информацию об удалённости объектов от сканера в явном виде (в отличие от плоского снимка), что позволяет наиболее точно определить геометрию и пространственные отношения объектов для их идентификации, но при этом несет и дополнительные особенности, которые связаны с возможной деформацией полигональной сетки, наличием множества моделей объектов [54]. Построение 3D сцен, в свою очередь, открывает возможности применения в робототехнических системах в задачах ориентации в пространстве и манипуляции объектами реального мира. При этом можно ожидать, что ориентация на выявление примитивов (крупных форм) позволит показать лучшие результаты работы с помехами, связанными с освещением, осадками (туман, дождь, снег), перекрытиями

прозрачными и частично прозрачными объектами (перекрытия сетками, деревьями и т.п.), при деформации объектов (при сильном ветре, получении вмятин и трещин).

Кроме того, разделение объектов на примитивы позволяет задуматься о возможности для использования в генеративных моделях и научно-техническом творчестве на основе методов морфологического анализа и синтеза применительно к дизайну исследуемых объектов.

### Литература

1. Meel V. The 87 Most Popular Computer Vision Applications for 2023. 2022. Available at: <https://viso.ai/applications/computer-vision-applications/> (accessed: 23.11.2022).
2. Urbonas A., Raudonis V., Maskeliūnas R., Damaševičius R. Automated identification of wood veneer surface defects using faster region-based convolutional neural network with data augmentation and transfer learning // *Appl. Sci.* 2019. vol. 9(22). pp. 4898.
3. Орешин А.Н., Лысанов И.Ю. Новый метод автоматизации процессов аутентификации персонала с использованием видеопотока // *Труды СПИИРАН.* 2017. Т. 5. № 54. С. 35–56.
4. Bureš L., Gruber I, Neduchal P., Hlaváč M., Hruz M. Semantic text segmentation from synthetic images of full-text documents // *SPIIRAS Proc.* 2019. vol. 18(6). pp. 1380–1405.
5. Yu F., Chen H, Wang X., Xian W., Chen Y., Liu F., Madhavan V., Darrell T. BDD100K: A Diverse Driving Dataset for Heterogeneous Multitask Learning // *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition.* 2020. pp. 2633–2642.
6. Slivnitsin P., Bachurin A., Mylnikov L. Robotic system position control algorithm based on target object recognition // *Proceedings of International Conference on Applied Innovation in IT.* Anhalt University of Applied Sciences. 2020. vol. 8(1). pp. 87–94.
7. Чиров Д.С., Чертова О.Г., Потапчук Т.Н. Методика обоснования требований к системе технического зрения робототехнического комплекса // *Труды СПИИРАН.* 2017. Т. 2. № 51. С. 152–176.
8. Delfanti A., Frey B. Humanly Extended Automation or the Future of Work Seen through Amazon Patents // *Sci. Technol. Hum. Values.* 2021. vol. 46. no. 3. pp. 655–682.
9. Al-Azzo F., Taqi A.M., Milanova M. Human related-health actions detection using Android Camera based on TensorFlow Object Detection API // *Int. J. Adv. Comput. Sci. Appl.* 2018. vol. 9. no. 10. pp. 9–23.
10. Russakovsky O., Deng J., Su H., Krause J., Satheesh S., Ma S., Huang Zh., Karpathy A., Khosla A., Bernstein M., Berg A.C., Fei-Fei L. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge // *Int. J. Comput. Vis.* 2015. vol. 115. no. 3. pp. 211–252.
11. Zou Z., Chen K., Shi Zh., Guo Yu., Ye J. Object Detection in 20 Years: A Survey // *arXiv.* 2019. pp. 1–39.
12. He K., Gkioxari G., Dollár P., Girshick R. Mask R-CNN // *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2020. vol. 42. no. 2. pp. 386–397.
13. Kirillov A., He K., Girshick R., Rother C., Dollar P. Panoptic segmentation // *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.* 2019. vol. 2019-June. pp. 9396–9405.

14. Bazarevsky V, Grishchenko I, Raveendran K., Zhu T., Zhang F., Grundmann M. BlazePose: On-device real-time body pose tracking // arXiv. 2020.
15. Khan K., Ahmad N., Ullah K., Din I. Multiclass semantic segmentation of faces using CRFs // Turkish J. Electr. Eng. Comput. Sci. 2017. vol. 25. no. 4. pp. 3164–3174.
16. Zeng A, Yu K.-T., Song S., Suo D., Walker Jr.E., Rodriguez A., Xiao J. Multi-view self-supervised deep learning for 6D pose estimation in the Amazon Picking Challenge // 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2017. pp. 1386–1383.
17. Yaguchi H., Nagahama K., Hasegawa T., Inaba M. Development of an autonomous tomato harvesting robot with rotational plucking gripper // IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Syst. 2016. vol. 2016-Novem. pp. 652–657.
18. Mylnikov L., Slivnitsin P., Mylnikova A. Robotic System Operation Specification on the Example of Object Manipulation // Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT. 2022. vol. 10. no. 1. pp. 51–59.
19. Sermanet P., Eigen D., Zhang X., Mathieu M., Fergus R., LeCun Y. OverFeat: Integrated Recognition, Localization and Detection using Convolutional Networks // 2nd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2014 - Conf. Track Proc. 2013. 16 p.
20. Viola P., Jones M. Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features // Proceedings IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition. 2001. pp. 511–518.
21. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection // Proc. - 2005 IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognition, CVPR 2005. 2005. vol. 1(16). pp. 886–893.
22. Felzenszwalb P., McAllester D., Ramanan D. A discriminatively trained, multiscale, deformable part model // 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2008. vol. 330. no. 6. pp. 1–8.
23. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization // IEEE Trans. Evol. Comput. 1997. vol. 1(1). pp. 67–82.
24. Slivnitsin P., Kniazev A., Mylnikov L., Schlechtweg S., Kokoulin A. Influence of Synthetic Image Datasets on the Result of Neural Networks for Object Detection // Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT. 2021. vol. 9(1). pp. 55–60.
25. Abramovich F., Pensky M. Classification with many classes: Challenges and pluses // J. Multivar. Anal. 2019. vol. 174. pp. 1–25.
26. Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection // 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2016. vol. 2016-Decem. pp. 779–788.
27. Liu W., Anguelov D., Erhan D., Szegedy C., Reed S., Fu C.-Y., Berg A.C. SSD: Single Shot MultiBox Detector // Eeccv / (Eds.: Leibe B.). Cham: Springer International Publishing, 2016. vol. 9905. pp. 398–413.
28. Rezatofighi H., Tsoi N., Gwak J., Sadeghian A., Reid I., Savarese S. Generalized intersection over union: A metric and a loss for bounding box regression // Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2019. vol. 2019-June. pp. 658–666.
29. Ren S., He K., Girshick R., Sun J. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2017. vol. 39(6). pp. 1137–1149.
30. Gomes H.M. Model learning in iconic vision // PQDT – UK & Ireland. 2002. 212 p.
31. Salas-Moreno R.F., Newcombe R.A., Strasdat H., Kelly P.H.J., Davison A.J. SLAM++: Simultaneous localisation and mapping at the level of objects // Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. 2013. pp. 1352–1359.
32. Dai A., Nießner M. 3DMV: Joint 3D-multi-view prediction for 3D semantic scene segmentation // Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics). 2018. vol. 11214 LNCS. pp. 458–474.

33. Dai A., Chang A.X., Savva M., Halber M., Funkhouser T., Nießner M. ScanNet: Richly-annotated 3D reconstructions of indoor scenes // Proc. – 30th IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognition, CVPR 2017. 2017. vol. 2017-Janua. pp. 2432–2443.
34. Le T., Duan Y. PointGrid: A Deep Network for 3D Shape Understanding // Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. 2018. pp. 9204–9214.
35. Su H., Maji S., Kalogerakis E., Learned-Miller E. Multi-view Convolutional Neural Networks for 3D Shape Recognition // 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). IEEE, 2015. vol. 32(1). pp. 945–953.
36. Choy C., Park J., Koltun V. Fully convolutional geometric features // Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis. 2019. vol. 2019-Octob. pp. 8957–8965.
37. Biederman I. Recognition-by-Components: A Theory of Human Image Understanding // Psychol. Rev. 1987. vol. 94(2). pp. 115–147.
38. Thompson P. Margaret Thatcher: A New Illusion // Perception. 1980. vol. 9(4). pp. 483–484.
39. Biederman I. Visual object recognition // An Invitation to Cognitive Science. (Eds.: Kosslyn S.M., Osherson D.N.) Cambridge: MIT Press, 1995. pp. 121–165.
40. Winston P.H. Artificial intelligence. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1992. 737 p.
41. Marr D., Poggio T. A computational theory of human stereo vision // Proc. R. Soc. London - Biol. Sci. 1979. vol. 204. no. 1156. pp. 301–328.
42. Marr D., Nishihara H.K. Representation and recognition of the spatial organization of three-dimensional shapes // Proc. R. Soc. London. Ser. B. Biol. Sci. 1978. vol. 200. no. 1140. pp. 269–294.
43. Abdel-Aziz Y.I., Karara H.M. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry // Photogramm. Eng. Remote Sensing. 2015. vol. 81(2). pp. 103–107.
44. Bolya D, Zhou C., Xiao F., Lee Y.J. YOLACT++ Better Real-Time Instance Segmentation // IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell. 2022. vol. 44. no. 2. pp. 1108–1121.
45. Bolya D, et al. You Only Look At CoefficientTs. 2020. Available at: <https://github.com/dbolya/yolact> (accessed: 11.11.2022).
46. Kazemi V., Sullivan J. One Millisecond Face Alignment with an Ensemble of Regression Trees // Rev. Anthropol. 1992. vol. 21(2). pp. 147–157.
47. Lin T.Y., Maire M., Belongie S., Bourdev L., Girshick R., Hays J., Perona P., Ramanan D., Zitnick C.L., Dollar P. Microsoft COCO: Common objects in context // Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics). 2014. vol. 8693 LNCS(5). pp. 740–755.
48. Denninger M., Sundermeyer M., Winkelbauer D., Zidan Y., Olefir D., Elbadrawy M., Lodhi A., Katam H.T. BlenderProc. 2019. 7 p. DOI: 10.48550/arXiv.1911.01911.
49. Blender 3D. Available at: <https://www.blender.org/> (accessed: 22.11.2022).
50. Slivnitsin P. Position estimation for robotic system positioning using the example of outdoor luminaire replacement: master thesis. Koethen: HS Anhalt, 2021. 54 p.
51. Vershinin D., Mylnikov L. A review and comparison of mapping and trajectory selection algorithms // Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT. 2021. vol. 9(1). pp. 85–92.
52. Zeng A. и др. TossingBot: Learning to Throw Arbitrary Objects With Residual Physics // IEEE Trans. Robot. 2020. vol. 36(4). pp. 1307–1319.
53. Chen D. и др. Learning Canonical Shape Space for Category-Level 6D Object Pose and Size Estimation // 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2020. pp. 11970–11979.
54. Koch S. и др. ABC: A big cad model dataset for geometric deep learning // Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit. 2019. vol. 2019-June. pp. 9593–9603.

**Сливницын Павел Александрович** — аспирант, кафедра информационных технологий и автоматизированных систем электротехнического факультета, ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет». Область научных интересов: информационные системы и процессы, кибернетика, data science, искусственный интеллект, компьютерное зрение, распознавание образов. Число научных публикаций — 11. slivnitsin.pavel@gmail.com; улица профессора Поздеева, 7, 614013, Пермь, Россия; р.т.: +7(342)239-1354.

**Мыльников Леонид Александрович** — доцент, кафедра микропроцессорных средств автоматизации электротехнического факультета, кафедра информационных технологий и автоматизированные системы электротехнического факультета, ФГАОУ ВО «Пермский национальный исследовательский политехнический университет»; заведующий лабораторией, научно-учебная лаборатория междисциплинарных эмпирических исследований, НИУ ВШЭ. Область научных интересов: информационные системы и процессы, кибернетика, системная инженерия, управление в организационных системах. Число научных публикаций — 110. lamylnikov@hse.ru; улица Студенческая, 38, 614070, Пермь, Россия; р.т.: +7(342)200-9555.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке Правительства Пермского края в рамках научного проекта № С-26/692.

P. SLIVNITSIN, L. MYLNIKOV  
**OBJECT RECOGNITION BY COMPONENTS AND RELATIONS  
BETWEEN THEM**

*Slivnitsin P., Mylnikov L. Object Recognition by Components and Relations between Them.*

**Abstract.** The paper's goal is to develop a methodology and algorithm for the recognition of objects in the environment, keeping the quality with an increasing number of objects. For this purpose, the following problems were solved: recognition of the shape features, estimation of relations between features, and matching between the found features and relations and the defined templates (descriptions of complex and simple objects of the real world). A convolutional neural network is used for the shape feature recognition. In order to train it we used artificially generated images with shape features (3D primitive objects) that were randomly placed on the scene with different properties of their surfaces. The set of relations necessary to recognize objects, which can be represented as a combination of shape features, is formed. Testing on photos of real-world objects showed the ability to recognize real-world objects regardless of their type (in cases where different models and modifications are possible). This paper considers an example of outdoor luminaire recognition. The example shows the algorithm's ability not only to detect an object in the image but also to estimate the position of its components. This solution makes it possible to use the algorithm in the task of object manipulation performed by robotic systems.

**Keywords:** object recognition, shape features, shape feature relation, computer vision, neural network.

### References

1. Meel V. The 87 Most Popular Computer Vision Applications for 2023. 2022. Available at: <https://viso.ai/applications/computer-vision-applications/> (accessed: 23.11.2022).
2. Urbonas A., Raudonis V., Maskeliūnas R., Damaševičius R. Automated identification of wood veneer surface defects using faster region-based convolutional neural network with data augmentation and transfer learning. *Appl. Sci.* 2019. vol. 9(22). pp. 4898.
3. Oreshin A.N., Lisanov I.Y. [A new method for automation of the personnel authentication process using a video stream]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proc.* 2017. vol. 5(54). pp. 35–56. (In Russ.).
4. Bureš L., Gruber I, Neduchal P., Hlaváč M., Hruz M. Semantic text segmentation from synthetic images of full-text documents. *SPIIRAS Proc.* 2019. vol. 18(6). pp. 1380–1405.
5. Yu F., Chen H, Wang X., Xian W., Chen Y., Liu F., Madhavan V., Darrell T. BDD100K: A Diverse Driving Dataset for Heterogeneous Multitask Learning. *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition.* 2020. pp. 2633–2642.
6. Slivnitsin P., Bachurin A., Mylnikov L. Robotic system position control algorithm based on target object recognition. *Proceedings of International Conference on Applied Innovation in IT.* Anhalt University of Applied Sciences. 2020. vol. 8(1). pp. 87–94.



7. Chirov D.S., Chertova O.G., Potapchuk T.N. [Methods of study requirements for the complex robotic vision system]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proc.* 2017. vol. 2(51). pp. 152–176. (In Russ.)
8. Delfanti A., Frey B. Humanly Extended Automation or the Future of Work Seen through Amazon Patents. *Sci. Technol. Hum. Values.* 2021. vol. 46. no. 3. pp. 655–682.
9. Al-Azzo F., Taqi A.M., Milanova M. Human related-health actions detection using Android Camera based on TensorFlow Object Detection API. *Int. J. Adv. Comput. Sci. Appl.* 2018. vol. 9. no. 10. pp. 9–23.
10. Russakovsky O., Deng J., Su H., Krause J., Satheesh S., Ma S., Huang Zh., Karpathy A., Khosla A., Bernstein M., Berg A.C., Fei-Fei L. ImageNet Large Scale Visual Recognition Challenge. *Int. J. Comput. Vis.* 2015. vol. 115. no. 3. pp. 211–252.
11. Zou Z., Chen K., Shi Zh., Guo Yu., Ye J. Object Detection in 20 Years: A Survey. *arXiv.* 2019. pp. 1–39.
12. He K., Gkioxari G., Dollár P., Girshick R. Mask R-CNN. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2020. vol. 42. no. 2. pp. 386–397.
13. Kirillov A., He K., Girshick R., Rother C., Dollar P. Panoptic segmentation. *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.* 2019. vol. 2019-June. pp. 9396–9405.
14. Bazarevsky V., Grishchenko I., Raveendran K., Zhu T., Zhang F., Grundmann M. BlazePose: On-device real-time body pose tracking. *arXiv.* 2020.
15. Khan K., Ahmad N., Ullah K., Din I. Multiclass semantic segmentation of faces using CRFs. *Turkish J. Electr. Eng. Comput. Sci.* 2017. vol. 25. no. 4. pp. 3164–3174.
16. Zeng A., Yu K.-T., Song S., Suo D., Walker Jr.E., Rodriguez A., Xiao J. Multi-view self-supervised deep learning for 6D pose estimation in the Amazon Picking Challenge. 2017 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). IEEE, 2017. pp. 1386–1383.
17. Yaguchi H., Nagahama K., Hasegawa T., Inaba M. Development of an autonomous tomato harvesting robot with rotational plucking gripper. *IEEE Int. Conf. Intell. Robot. Syst.* 2016. vol. 2016-Novem. pp. 652–657.
18. Mylnikov L., Slivnitsin P., Mylnikova A. Robotic System Operation Specification on the Example of Object Manipulation. *Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT.* 2022. vol. 10. no. 1. pp. 51–59.
19. Sermanet P., Eigen D., Zhang X., Mathieu M., Fergus R., LeCun Y. OverFeat: Integrated Recognition, Localization and Detection using Convolutional Networks. 2nd Int. Conf. Learn. Represent. ICLR 2014 - Conf. Track Proc. 2013. 16 p.
20. Viola P., Jones M. Rapid Object Detection using a Boosted Cascade of Simple Features. *Proceedings IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition.* 2001. pp. 511–518.
21. Dalal N., Triggs B. Histograms of oriented gradients for human detection. *Proc. - 2005 IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognition, CVPR 2005.* 2005. vol. 1(16). pp. 886–893.
22. Felzenszwalb P., McAllester D., Ramanan D. A discriminatively trained, multiscale, deformable part model. 2008 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. IEEE, 2008. vol. 330. no. 6. pp. 1–8.
23. Wolpert D.H., Macready W.G. No free lunch theorems for optimization. *IEEE Trans. Evol. Comput.* 1997. vol. 1(1). pp. 67–82.
24. Slivnitsin P., Kniazev A., Mylnikov L., Schlechtweg S., Kokoulin A. Influence of Synthetic Image Datasets on the Result of Neural Networks for Object Detection. *Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT.* 2021. vol. 9(1). pp. 55–60.
25. Abramovich F., Pensky M. Classification with many classes: Challenges and pluses. *J. Multivar. Anal.* 2019. vol. 174. pp. 1–25.

26. Redmon J., Divvala S., Girshick R., Farhadi A. You Only Look Once: Unified, Real-Time Object Detection. 2016 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2016. vol. 2016-Decem. pp. 779–788.
27. Liu W., Anguelov D., Erhan D., Szegedy C., Reed S., Fu C.-Y., Berg A.C SSD: Single Shot MultiBox Detector. *Eccv* (Eds.: Leibe B.). Cham: Springer International Publishing, 2016. vol. 9905. pp. 398–413.
28. Rezatofighi H., Tsoi N., Gwak J., Sadeghian A., Reid I., Savarese S. Generalized intersection over union: A metric and a loss for bounding box regression. *Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*. 2019. vol. 2019-June. pp. 658–666.
29. Ren S., He K., Girshick R., Sun J. Faster R-CNN: Towards Real-Time Object Detection with Region Proposal Networks. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2017. vol. 39(6). pp. 1137–1149.
30. Gomes H.M. Model learning in iconic vision. *PQDT – UK & Ireland*. 2002. 212 p.
31. Salas-Moreno R.F., Newcombe R.A., Strasdat H., Kelly P.H.J., Davison A.J. SLAM++: Simultaneous localisation and mapping at the level of objects. *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.* 2013. pp. 1352–1359.
32. Dai A., Nießner M. 3DMV: Joint 3D-multi-view prediction for 3D semantic scene segmentation. *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*. 2018. vol. 11214 LNCS. pp. 458–474.
33. Dai A., Chang A.X., Savva M., Halber M., Funkhouser T., Nießner M. ScanNet: Richly-annotated 3D reconstructions of indoor scenes. *Proc. – 30th IEEE Conf. Comput. Vis. Pattern Recognition, CVPR 2017*. 2017. vol. 2017-Janua. pp. 2432–2443.
34. Le T., Duan Y. PointGrid: A Deep Network for 3D Shape Understanding. *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.* 2018. pp. 9204–9214.
35. Su H., Maji S., Kalogerakis E., Learned-Miller E. Multi-view Convolutional Neural Networks for 3D Shape Recognition. 2015 IEEE International Conference on Computer Vision (ICCV). IEEE, 2015. vol. 32(1). pp. 945–953.
36. Choy C., Park J., Koltun V. Fully convolutional geometric features. *Proc. IEEE Int. Conf. Comput. Vis.* 2019. vol. 2019-October. pp. 8957–8965.
37. Biederman I. Recognition-by-Components: A Theory of Human Image Understanding. *Psychol. Rev.* 1987. vol. 94(2). pp. 115–147.
38. Thompson P. Margaret Thatcher: A New Illusion. *Perception*. 1980. vol. 9(4). pp. 483–484.
39. Biederman I. Visual object recognition. *An Invitation to Cognitive Science*. (Eds.: Kosslyn S.M., Osherson D.N.) Cambridge: MIT Press, 1995. pp. 121–165.
40. Winston P.H. *Artificial intelligence*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc. Boston, MA: Addison-Wesley Publishing Company, 1992. 737 p.
41. Marr D., Poggio T. A computational theory of human stereo vision. *Proc. R. Soc. London - Biol. Sci.* 1979. vol. 204. no. 1156. pp. 301–328.
42. Marr D., Nishihara H.K. Representation and recognition of the spatial organization of three-dimensional shapes. *Proc. R. Soc. London. Ser. B. Biol. Sci.* 1978. vol. 200. no. 1140. pp. 269–294.
43. Abdel-Aziz Y.I., Karara H.M. Direct linear transformation from comparator coordinates into object space coordinates in close-range photogrammetry. *Photogramm. Eng. Remote Sensing*. 2015. vol. 81(2). pp. 103–107.
44. Bolya D, Zhou C., Xiao F., Lee Y.J. YOLACT++ Better Real-Time Instance Segmentation. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 2022. vol. 44. no. 2. pp. 1108–1121.
45. Bolya D, et al. You Only Look At CoefficientTs. 2020. Available at: <https://github.com/dbolya/yolact> (accessed: 11.11.2022).

46. Kazemi V., Sullivan J. One Millisecond Face Alignment with an Ensemble of Regression Trees. *Rev. Anthropol.* 1992. vol. 21(2). pp. 147–157.
47. Lin T.Y., Maire M., Belongie S., Bourdev L., Girshick R., Hays J., Perona P., Ramanan D., Zitnick C.L., Dollar P. Microsoft COCO: Common objects in context. *Lect. Notes Comput. Sci. (including Subser. Lect. Notes Artif. Intell. Lect. Notes Bioinformatics)*. 2014. vol. 8693 LNCS(5). pp. 740–755.
48. Denninger M., Sundermeyer M., Winkelbauer D., Zidan Y., Olefir D., Elbadrawy M., Lodhi A., Katam H.T. *BlenderProc*. 2019. 7 p. DOI: 10.48550/arXiv.1911.01911.
49. Blender 3D. Available at: <https://www.blender.org/> (accessed: 22.11.2022).
50. Slivnitsin P. Position estimation for robotic system positioning using the example of outdoor luminaire replacement: master thesis. Koethen: HS Anhalt, 2021. 54 p.
51. Vershinin D., Mylnikov L. A review and comparison of mapping and trajectory selection algorithms. *Proc. Int. Conf. Appl. Innov. IT*. 2021. vol. 9(1). pp. 85–92.
52. Zeng A. и др. TossingBot: Learning to Throw Arbitrary Objects with Residual Physics. *IEEE Trans. Robot.* 2020. vol. 36(4). pp. 1307–1319.
53. Chen D. и др. Learning Canonical Shape Space for Category-Level 6D Object Pose and Size Estimation. 2020 IEEE/CVF Conference on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR). IEEE, 2020. pp. 11970–11979.
54. Koch S. и др. ABC: A big cad model dataset for geometric deep learning. *Proc. IEEE Comput. Soc. Conf. Comput. Vis. Pattern Recognit.* 2019. vol. 2019-June. pp. 9593–9603.

**Slivnitsin Pavel** — Graduate student, Department of information technologies and automation system, electrical engineering faculty, Perm National Research Polytechnic University. Research interests: data science, cybernetics, data science, artificial intelligence, computer vision, object recognition. The number of publications — 11. [slivnitsin.pavel@gmail.com](mailto:slivnitsin.pavel@gmail.com); 7, Professora Pozdeyeva St., 614013, Perm, Russia; office phone: +7(342)239-1354.

**Mylnikov Leonid** — Associate professor, microprocessor automation means Department, electrical engineering faculty, information technologies and automation system Department, electrical engineering faculty, Perm National Research Polytechnic University; Head of laboratory, Interdisciplinary empirical studies laboratory, HSE University. Research interests: design science, cybernetics, system science, management. The number of publications — 110. [lmylnikov@hse.ru](mailto:lmylnikov@hse.ru); 38, Student St., 614070, Perm, Russia; office phone: +7(342)200-9555.

**Acknowledgements.** The study was supported by the Government of Perm Region, project no. C-26/692.

S. KUMAR, U. PILANIA, N. NANDAL  
**A SYSTEMATIC STUDY OF ARTIFICIAL INTELLIGENCE-  
BASED METHODS FOR DETECTING BRAIN TUMORS**

*Kumar S., Pilania U., Nandal N. A Systematic Study of Artificial Intelligence-Based Methods for Detecting Brain Tumors.*

**Abstract.** The brain is regarded as one of the most effective body-controlling organs. The development of technology has enabled the early and accurate detection of brain tumors, which makes a significant difference in their treatment. The adoption of AI has grown substantially in the arena of neurology. This systematic review compares recent Deep Learning (DL), Machine Learning (ML), and hybrid methods for detecting brain cancers. This article evaluates 36 recent articles on these techniques, considering datasets, methodology, tools used, merits, and limitations. The articles contain comprehensible graphs and tables. The detection of brain tumors relies heavily on ML techniques such as Support Vector Machines (SVM) and Fuzzy C-Means (FCM). Recurrent Convolutional Neural Networks (RCNN), DenseNet, Convolutional Neural Networks (CNN), ResNet, and Deep Neural Networks (DNN) are DL techniques used to detect brain tumors more efficiently. DL and ML techniques are merged to develop hybrid techniques. In addition, a summary of the various image processing steps is provided. The systematic review identifies outstanding issues and future goals for DL and ML-based techniques for detecting brain tumors. Through a systematic review, the most effective method for detecting brain tumors can be identified and utilized for improvement.

**Keywords:** image processing, machine learning, deep learning, hybrid techniques.

**1. Introduction.** The human body contains numerous organ types. The brain is one of the human body's most delicate and specialised organs. Owing to the rapid development of image-processing technology, brain tumors and their investigation are of greater interest [1]. Human brain tumors are considered harmful health conditions. An unusual tissue development in the brain or nearby areas is called a brain tumor (an intracranial neoplasm) [2]. Fundamental or metastatic brain cancers are distinguished [3]. Brain cells are the source of initial tumors, whereas cancer cells from other body components have metastasised to the brain to cause metastatic tumors [4]. Most scientists are motivated by gliomas, among the essential categories of brain cancers. The term "glioma" refers to a variety of tumors, ranging in grade from low-grade (LG) to high-grade (HG) [5]. The HG tumors are called glioblastoma multiforme (GBM), whereas LG tumors are said to be astrocytomas or oligodendrogliomas [6]. It is possible to determine if a brain tumor is benign (non-cancerous) or malignant (cancerous) [7]. Secondary and primary tumors are two different types of malignant tumors that may be distinguished [8]. A malignant tumor is more harmful than a benign one [9]. A malignant tumor can make a patient worse, even to death, by quickly entering other tissues of the brain [10].

Diagnosing brain tumors is challenging according to the brain's complex anatomy [11]. Brain tumor identification is quite complex because of the appearance, location, shape, and diverse size of tumors in the brain [12]. Detection of a brain tumor is a highly complex process at the initial stage because it cannot determine the accurate mensuration of the tumor [13]. If the tumor in the brain gets determined, proper treatment can be started to cure the harmful disease [14]. Only the form of cancer determines the course of treatment for brain tumors, including radiotherapy, chemotherapy, and surgery [15].

Medical imaging is a powerful tool for identifying non-invasive possibilities [16]. X-ray, positron emission tomography (PET), Computed tomography (CT) scan, Magnetic resonance imaging (MRI), single photon emission computed tomography (SPECT), and ultrasound are examples of non-invasive medical imaging techniques [17]. These imaging processes help identify various diseases. Using safe radio waves and magnetic fields makes MR images more accepted in successfully detecting and treating brain tumors [18]. Compared to CT, MRI produces more accurate results in medical diagnosis systems (MDS) because it offers better contrast and clarity for the body's diverse soft tissues [19].

MRI plays a powerful tool in detecting brain tumors [20]. MRI uses practical magnetic field components to identify radio frequency pulses and generate detailed organ images, bone, other internal structures, and soft tissues of the physical body. Brain tumor identification can also be made via MRI images [21]. In image processing, image improvement tools are utilised to enhance the standard of images [22]. The contrast adjustment and threshold techniques are utilised to highlight the characteristics of MRI images [23]. The histogram, edge detection, morphological, and operations segmentation are mainly used in classifying and determining the brain tumor [24].

**1.1. Key contributions.** Brain tumor imaging is a commendable and challenging effort in the medical field. Early brain tumor detection and localisation can save lives and give doctors more treatment options. Thus, we systematically reviewed ML and DL brain tumor recognition approaches due to their importance and benefits. The following are the main results of the literature review:

- The systematic review on brain tumor detection using image processing methods inspires researchers to create new systems using ML and DL algorithms. In other systematic review papers, they used old brain tumor detection research. The proposed systematic review briefly discusses ML and DL-based brain tumor detection methods with understandable tabulation. The systematic review uses research papers from 2020 to 2022.

– The proposed systematic review seeks to learn more about recently proposed brain tumor detection research that has not yet been reviewed. The proposed systematic review summarises ML and DL brain tumor detection methods.

– Few review papers discuss developing a brain tumor detection system using multiple methods. The proposed systematic review collected all recent research papers on ML and DL-based brain tumor detection systems to generate medical invention ideas.

A quick overview of brain tumors, imaging techniques, and different types of brain tumors sets the stage for the proposed systematic review. The systematic review is then divided into subsequent units. Section 2 consists of the review procedure, and Section 3 includes the stages used in detecting brain tumors using image processing methods. Section 4 contains ML-based brain tumor detection, Section 5 contains DL-based brain tumor detection, and Section 6 contains open challenges and research directions. Section 7 discusses the systematic review's overall conclusion and future work.

**2. Stages used in detecting brain tumors using Image Processing techniques.** Four processes comprise a primary method for image processing, preprocessing, extraction of features and selecting segmentation, and classification [25]. Figure 1 lists the phases employed in the image processing method for tumor detection. Initially, the input image is preprocessed using some filtering technique [26].

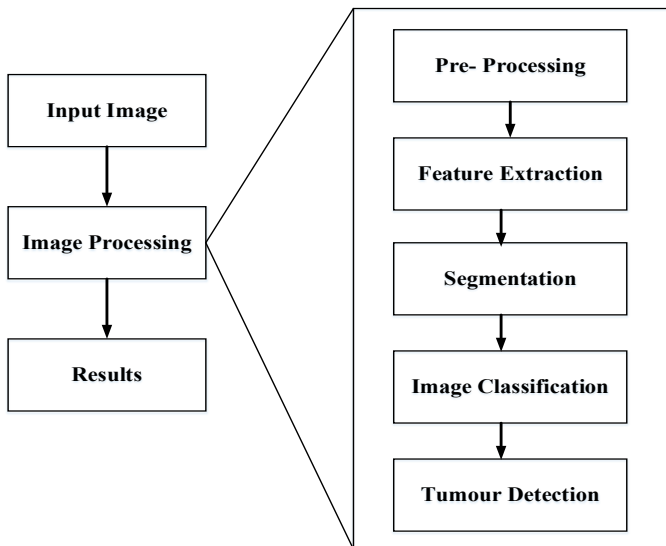


Fig. 1. Image Processing steps for brain tumor detection

After the preprocessing stage, using an effective feature extraction technique, the essential and informative features are derived [27]. The most significant and optimal characteristics are selected from the retrieved features using a feature selection method [28]. A segmentation technique is employed with an attribute extraction method to get the segmented region from the image [29]. Finally, a classifier is included for MRI image classification and to specify the kind of tumor [30].

**2.1. Preprocessing.** Various preprocessing techniques include fixed, adaptive, linear, non-linear, and pixel-based for different conditions [31]. These techniques are employed by considering two main aims. The primary goal is to improve the quality of images that a human observer can use. The second aim is to use the images for different processes with other algorithms to get accurate solutions [32]. The first aim includes contrast improvement, sharpening details in an image, and noise removal. The second aim examples include object segmentation and edge detection. The bias field is vital while segmenting MR images [33]. This bias field is due to the radio frequency coil imperfections known as intensity non-uniformity. The bias field can be corrected by calculating and vanishing from the collected image [34].

Different kinds of noise corrupt a medical image. Speckle, salt and pepper, and Gaussian noise can taint medical imaging [35]. It is impossible to recover essential image features when this noise is found in clinical photos. However, numerous authors use various filtering techniques to eliminate image noise. Rather than using a linear filtering technique to remove noise from an image containing edges, the median filtering technique is employed [36]. The median filter is more effective than the mean filter at preserving the image's most prominent and influential features, but it is costly and challenging to compute [37]. It is also a slow process, even when processed with fast algorithms, such as quick sort, because it must arrange all nearby values into numerical order [38]. Wiener filtering technique is flexible in the case of an image with local and spatial variable information [39]. It integrates two high and low filters and aspects managing their respective weights. This type of filter is mainly applied to CT and MR images.

Non-linear image resolution enhancement is utilised in mammographic images, but resolution and edge enhancement are coupled with noise amplification [40]. Therefore, a wavelet architecture is implemented for contrast enhancement and noise reduction. There are hybrid filters that combine wavelet transforms with an adaptive multistage non-linear filter [41]. By minimising the intensity difference between a pixel and its adjacent pixel, the mean filtering approach minimises image

noise and is easier to implement [42]. The image is primarily smoothed using the filtering process. Figure 2 depicts various filters to remove noise from an input image.

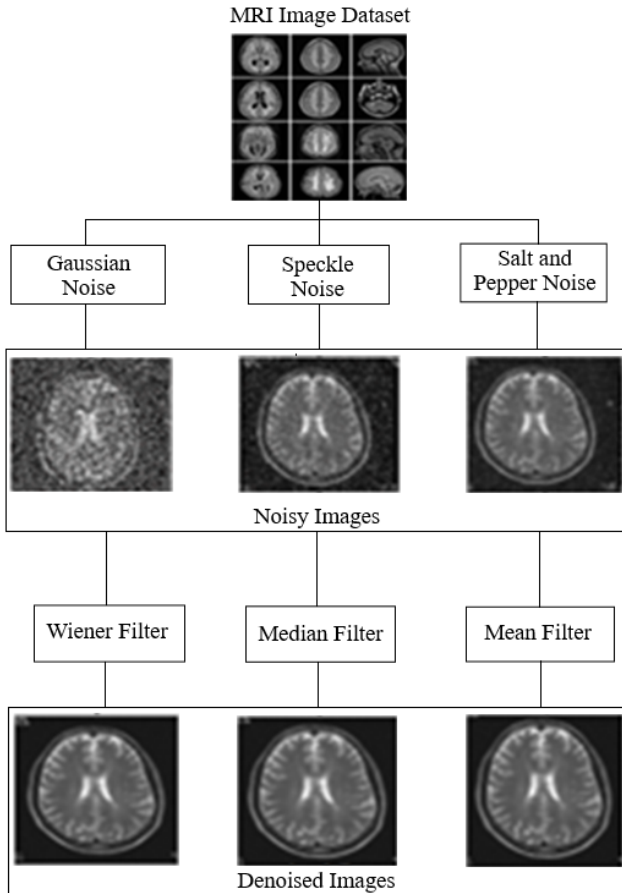


Fig. 2. Preprocessing techniques

**2.2. Feature Extraction and Selection.** Due to its accuracy in identifying and classifying brain tumors, feature extraction has become more critical in the medical field [43]. In the image processing system, feature extraction follows preprocessing. Feature extraction is the shape information of a structure in a pattern to simplify classification [44]. In image processing, feature extraction reduces image dimensions. The most



crucial information is extracted from real photos using feature extraction algorithms, which are then shown in a two-dimensional space [45]. Every image contains tumor classification and detection features.

Various authors have developed a variety of feature extraction techniques. Some of the basic feature extraction methods include the histogram of oriented gradients (HOG), the grey level co-occurrence matrix (GLCM), the speeded-up robust feature (SURF), and the local binary pattern (LBP). For extracting features, several researchers might need hybrid strategies that make the training process more challenging. In this case, the method for choosing essential qualities is crucial. The primary function of a feature selection technique is to choose the necessary tumor identification features. The technique aims to utilise only the necessary features by eliminating superfluous ones. Numerous techniques are proposed for selecting features, including the wrapper method, principal component analysis (PCA), and PSO. Figure 3 shows various feature extraction and selection techniques.

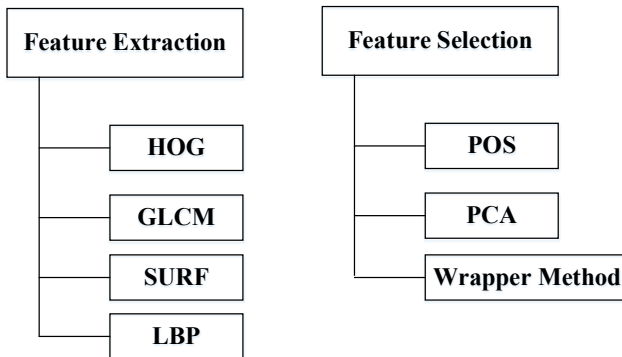


Fig. 3. Feature Extraction and Selection techniques

**2.3. Image segmentation.** *Segmenting an image involves breaking it into pieces depending on different and related traits. Using the segmentation techniques, the tumor is segmented during tumor segmentation. Some segmentation techniques include edge-based, threshold, cluster-based, and region-based techniques [46, 47].*

**2.4. Classification.** After segmentation, the medical image is classified as abnormal or usual [48]. Additionally, it is utilised to classify tumor types. SVM and CNN are examples of classification techniques [49]. Figure 4 illustrates the classification techniques utilised. Here, two main groups of brain tumors are termed primary and metastatic. Primary brain tumors originate from the brain's tissues or immediate surroundings.

Primary tumors are categorised as glial (composed of glial cells) or non-glial (developed on or in the brain's structures, including nerves, blood vessels and glands) and benign or malignant.

Metastatic brain tumors include tumors that arise elsewhere in the body. Metastatic tumors are considered cancer and malignant. The classes of malignant brain tumors are Meningiomas, Glioma, Pituitary tumors, and Pediatric brain tumors.

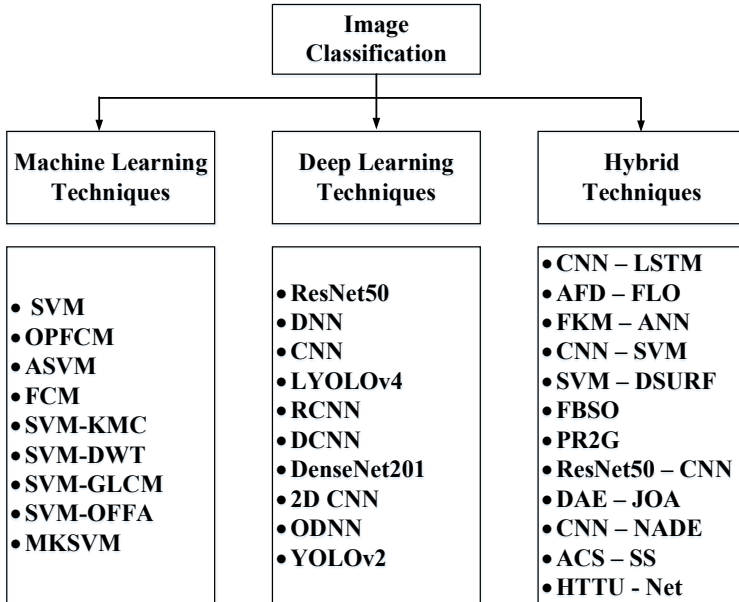


Fig. 4. Image classification

**2.5. Tumor detection.** The final step of an image processing technique is tumor detection. In this stage, the output image is used to make the final diagnosis of whether or not the patient has a brain tumor. It also provides information regarding the tumor's size and type [50]. The physician will then administer appropriate treatment to safeguard the patient. As a result, by identifying brain tumors at an initial point, the brain tumor detection method significantly aids patients [51].

**3. Detection of brain tumors using ML techniques.** ML solves complex medical problems with high specificity and accuracy. Brain tumor detection systems use ML. The system's success is based on its effective classification strategy for medical image normality and abnormality. Many

authors have detected brain tumors using ML methods. Figure 4 shows the different ML techniques to detect brain tumors.

In study [52] the authors proposed ML-based brain tumor detection and segmentation. A novel improved Kalman filter (EKF) with SVM predicts brain tumors in a five-step process. First, a non-local mean filter removed noise, and enhanced dynamic histogram equalisation brightened the image. Second, GLCM extracts features. Third, the SVM classifies extracted features. Cross-validation determines classifier efficiency in the fourth step. Finally, KMC segmentation and regional growth detect brain tumors. The dataset was 120 patients from Tiantan Hospital. The method has 98.02% accuracy, 95.39% specificity, and 97.04% sensitivity.

Study [53] proposed an optimal possibilistic FCM (OPFCM) procedure & adaptive k-nearest neighbour (AKNN) classifier to predict MRI brain tumors. Median filter denoising. The preprocessed images are given input to the extraction phase to extract the texture features. AKNN classifies extracted features. Centroid optimisation uses a competitive binary swarm optimiser (BCSO). Finally, OPFCM is used for tumor segmentation. The model was created using the BRATS dataset and achieves 99.9% accuracy.

In paper [54] the authors suggested MRG and ASVM for MRI brain tumor classification and prediction in which Manual skull stripping extracts the ROI. Median filtering denoises the image and MRG-segmented tumors. GLCM was used to extract features. ASVM is then used to classify tumors from BRATS 2015 dataset. The method has 95.83% accuracy and 91.66% sensitivity.

Study [55] suggested segmenting MRI brain tumors with FCM-rotated triangular sections. Morphological reconstruction involves erosion and dilation. After background removal, expansion, and radius contraction select the FCM optimisation area. The two processes chose the area's maximum radius and centroid from the eliminated background and used 233 patient MRIs to train the model. The method has 65.6% sensitivity, 72.6% specificity, and 90.57% accuracy.

According to paper [56] the authors proposed a DWT-SVM enhanced classification network model to detect brain tumors. Skull detection and preprocessing determine component boundaries which identify image edges. K-means clustering is used for segmentation. SVM was used for classification, while DWT and GLCM were employed to extract features. Performance metrics confirmed precision, recall, and processing time.

In study [57] the authors presented KMC & SVM classifiers to identify and classify brain tumors. The brain tumors are mainly segmented

using K-means clustering. Imadjust adjusts image intensity. Pixels below a threshold are removed. DWT is used to extract image features. Finally, SVM classifies tumors from 40 benign and malignant MR image datasets. The method suggested achieves 93% classification accuracy and 99.7% segmentation accuracy.

A GLCM-based SVM classifier and semantic segmentation of brain malignancies from MRI images were suggested by the authors [58], in which Median filtering and skull stripping are used in the preprocessing stage. Then, watershed thresholding is used for segmentation. To measure the correlation, contrast, homogeneity, and energy, GLCM has been used. SVM is used to classify images. Kaggle and Figshare datasets trained the model. The method detects brain tumors with 93.05% accuracy.

MRI brain tumor segmentation utilising the improved Gabor wavelet transform (IGWT) and rough KMC was suggested by paper [59]. IGWT changes the domain by replacing the image. GLCM extracts and oppositional fruit fly algorithm (OFFA) optimise the features. SVM was used as a classifier. K-means is used to segment abnormal images. BRATS 2018 was used to train the model. The method achieves 99.79% accuracy, 97.27% sensitivity, and 99.92% specificity.

According to paper [60] the authors proposed SVM-based brain tumor classification. The scheme uses Kaggle data. Median filter preprocessing is used to improve image quality. GLCM is used to extract image features. From the GLCM texture, the following properties are extracted: contrast, correlation, energy, homogeneity, entropy, autocorrelation, cluster prominence, cluster shade, difference entropy, difference variance, and dissimilarity. After that, SVM classifies brain tumor images. The method detects brain tumors with 93.33% accuracy.

Study [61] used rough k-means and multi-kernel SVM in MRI images to efficiently classify and segment brain tumors. IGWT is used to extract features, and OFFA is used to select optimised features. As a classifier, Multi-kernel SVM (MKSVM) is employed. Modified rough KMC (MKMC) is applied to segment the tumor image. The method has 99.72% accuracy, 99.72% specificity, and 99.71% sensitivity.

Using DWT & SVM, paper [62] enhanced the extraction of features and forecast of brain tumors. Denoising is done during preprocessing. To recover picture characteristics, DWT and GLCM are employed. The Kaggle dataset was employed to train the SVM model, which is employed to classify data. The method achieves 98.97% accuracy and 98.87% precision.

Brain tumor identification based on SVM was suggested by the authors [63] by using collected data. Preprocessing, classification, segmentation, and brain tumor detection are performed on the input image.

SVM is used for classification. The method has 98% sensitivity, 98.30% accuracy, and 100% specificity.

Table 1 lists ML brain tumor detection methods, tools, pros, cons, and parameters.

Table 1. Detection of brain tumor using Machine Learning techniques

Reference No	Author And Year	Method used	Dataset used	Tool used for implementation	Advantage	Disadvantage	Parameters analysed
[52]	Chen et al. [2021]	SVM EKF GLCM	Tiantan Hospital 120 patients information	-	The computational complexity is due to the use of standardisation in input images	The segmentation results are insufficient to predict the brain tumor	Accuracy – 95.39% Sensitivity – 97.04 % Specificity – 95.39%
[53]	Kumar et al. [2021]	OPFCM AKNN BCSO	BRATS MICCAI	Matlab 2014a	Centroid optimisation is done to enhance system performance	Classification accuracy is significantly less	Accuracy – 99.9%
[54]	Reddy et al. [2021]	MRG ASVM GOA	BRATS 2015	Matlab	Less dependence on operator expertise	More computational time to predict tumor	Accuracy – 95.83% Sensitivity – 91.66%
[55]	Sheela et al. [2021]	FCM	MRI images	-	The approach limits the availability of MRI images	The proposed method's accuracy wasn't tested.	Accuracy – 90.57% Dice-score Sensitivity – 65.6% Specificity – 72.6%
[56]	Gokula-lakshmi et al. [2020]	SVM DWT GLCM	DICOM	Matlab	Simple to understand and implement	The results will not always be more accurate	Precision - 96.7 Recall – 95.4 Processing time – 74.5s

*Continuation of Table 1*

[57]	Chander et al. [2020]	KMC SVM	MRI images	-	The image's undesirable pixels are eliminated to prepare it for processing	Ineffective method for brain tumor detection	Accuracy – 99.7%
[58]	Hussain et al. [2020]	SVM GLCM	Kaggle Figshare	Matlab	Watershed segmentation is used that selects the best seed region for accurate segmentation of the tumor region	Noise may lead to the undesired final result	Accuracy – 93.05%
[59]	Kumar et al. [2020]	SVM OFFA IGWT	BRATS 2018	Matlab	The technique needs only a least human interaction	The method does not apply to images with various foreground and background artefacts	Accuracy – 99.79% Sensitivity – 97.27% Specificity – 99.92%
[60]	Shahajad et al. [2020]	SVM GLCM	Kaggle	Matlab	A compelling feature extraction technique is used	Computationally expensive	Accuracy – 93.05% Sensitivity – 98%
[61]	Krishnakumar et al. [2020]	MKSVM MKMC OFFA		-	Simple and computationally fast	The method is not eligible to segment the tumor part more accurately	Accuracy – 99.72% Specificity – 99.72% Sensitivity – 99.71%
[62]	Mehrotra et al. [2020]	SVM GLCM DWT	Kaggle	Matlab R2018a	Optimised features are extracted using two techniques	Difficult to extract the border or edge features	Accuracy – 98.97% Precision – 98.87%
[63]	Sarkar et al. [2020]	SVM	MRI images	Matlab	Simple to understand	Inefficient technique to detect brain tumors	Accuracy – 98.3% Sensitivity – 98% Specificity – 100%

**4. Brain tumor detection using DL techniques.** To utilise the data for pattern & image recognition, language translation, voice recognition, and decision-making, DL tries to replicate the human brain. Additionally, it is considered a subset of ML. It learns on its own from the data it is given. In practice, the technique is widely employed for a variety of purposes. The technology is utilised to identify brain cancers, among its most important medical uses. Various DL classifiers with low error potential detect abnormalities in medical images. Numerous authors have proposed various DL techniques for diagnosing brain tumors to achieve the best accuracy. Figure 4 shows the different DL techniques to detect brain tumors.

Paper [64] recommended transfer learning and data augmentation to identify brain cancers in MRI images. PCA-based data augmentation is used to reduce the dataset dimensions. Transfer learning is utilised to initialise model weights without training random distributions. Cross-entropy is used to evaluate loss function. The data augmentation technique is validated by training a network known as ResNet50. The cancer genome atlas low-grade glioma (TCGA-LGG) dataset was utilised for training the model. Python-based TensorFlow and Keras libraries are used to model the network. Colab implemented the proposed model. The proposed strategy achieved better accuracy, specificity, sensitivity, and 92.34% of the F1 score.

A DL approach for MRI brain tumor identification was put forth by the authors [65]. A three-step preprocessing is performed on the input image to boost the contrast, lengthen the histogram, and enhance the clarity of MRI pictures. A preprocessing blind referenceless image spatial quality evaluator (BRISQUE) is used to verify the output image's quality. DNN is used as a brain tumor classifier. Batch normalisation is used to speed up model training. The model was trained using the Navoneel brain tumor and Sartaj brain MRI datasets. Keras and Python libraries are used to model the network, which was implemented on Colab. The strategy had 98.22% accuracy, 96.12% sensitivity, 99.65% specificity, and 97.85% F1 score.

In paper [66] the authors proposed CNN-based brain tumor detection. The approach has three steps: augmentation, preprocessing, and classification. The proposed work enlarges a small dataset using augmentation. The RGB image is transformed to grayscale, cropped, low pass filtered, and binary converted during image preprocessing. CNN is used to categorise and identify different kinds of brain tumors. The dataset includes 2065 augmented brain MRI images. The model has an 89.16% F1 score, 87.42% accuracy, and 33.25% relative loss.

For the identification and segmentation of brain tumors, study [67] presented a multi-task network. The suggested technique located the brain tumor and its mask. A contextual brain tumor selection network identified brain tumors, and a 3D atrous residual network determined the mask. BRATS2015, 2017, and 2018 datasets were used to train the network. The strategy achieves an 81.41% dice score and 92.0% sensitivity.

Brain tumor diagnosis using neural network-based end-to-end predictive intelligence was proposed by study [68]. It was easier to forecast brain cancers using LYOLOv4-RNN. The suggested model was trained using brain tumor data from Kaggle. The suggested technique had a 97% accuracy rate for detecting brain cancers.

A recurrent convolutional neural network (RCNN)-based neural net for brain tumor detection and classifying was proposed by paper [69]. A simple framework for analysing brain tumors is suggested to shorten the architecture's completion time. Two CNN channels are utilised initially with a low complex framework for classification, and a similar structure is used as an extractor in RCNN for brain tumor deduction. The model was trained using datasets from Figshare and Kaggle 2020. The design has 98.21% accuracy and 98.83% confidence.

In study [70] the authors proposed DL-based 2D MRI brain tumor detection. DNN is used to segment 2D brain tumors. The Znet-based approach uses skip connection, data amplification, and encoder-decoder frameworks. Data augmentation is performed using an open-source and free Python library, Albumentation. ADAM optimiser is used to train the model. The model was built using the Cancer Genome Atlas Low-Grade Glioma (TCGA-LGG) dataset. The proposed method achieves 99.6% accuracy and 81% F1-score.

To identify and categorise brain cancers in enhanced MRI images, the authors [71] suggested an enhanced DCNN framework & optimisation technique. The suggested approach uses DCNN with enhanced Harris Hawks Optimization (HHO). HHO and grey wolf optimisation (GWO) were combined to boost efficiency. Tumors are divided using Otsu thresholding. The classifier was tested using data on brain tumors from Kaggle. 97% accuracy, 99% precision, 95% recall, and 97% f-measure are attained by the suggested strategy.

A DL-based decision-support system for multi-model brain tumor identification was proposed by the authors [72]. Deep transfer learning is used to train the Densenet201 DL model, which has been fine-tuned. The modified genetic algorithm (MGA) and entropy-kurtosis-based high feature values (EKbBHFV) are used to choose the best features. The selected



characteristics are combined via a non-redundant serial-based method, and then a multi-class SVM classifier is used to categorise them. The model was trained using BRATS 2018 and 2019. The method had a 99.3% F1 score, 99.7% accuracy, and 99.8% precision.

DL network-based computer-aided brain tumor identification from MRI images was proposed by the authors [73]. The suggested method divides brain cancers into two categories: tumor and normal, by using a 2D CNN. The input image is improved with filters, cropped, rotated, and scaled in preprocessing. The ReLU function is thus made available to enhance non-linearity. Every feature map has a pooling layer added to it. The wholly connected neural network receives these features for categorisation. The proposed method has 97% accuracy, 97% F1 score, 94% recall, and 100% precision.

Brain tumor detection utilising in-depth features and SVM focusing on data-restricted technique was proposed by the authors [74]. The proposed method uses VGG16, AlexNet, and VGG19 pre-trained networks. A deep fusion approach was used to improve classification accuracy. Models were trained on BRATS and TCIA datasets. The proposed method achieves 97.89% accuracy and a 97.92% F1 score.

Brain tumor diagnosis from PET and MRI images using wavelet-based image fusion was suggested by the authors [75]. The input image is fused using DWT and several cutting-edge fusion rules. Next, a GLCM extracts features. An optimized DNN (ODNN) then classifies images as normal or abnormal. Spider monkey optimization (SMO) optimises network weight. After categorisation, weighted k-means extract the tumor from the abnormal image. The model was trained on BRATS. The method has 89% sensitivity, 93% specificity, and 93% accuracy.

Using YOLOv2 and CNN, study [76] suggested MRI brain tumor detection. The input image is denoised by homomorphic wavelet filters. The pre-trained Inceptionv3 model is employed to extract features. Then feature selection is made using the non-dominated sorted genetic algorithm (NSGA). To categorise the chosen traits, YOLOv2 is utilised. McCulloch's Kapur entropy then segments the tumor from classified images. The model was trained on BRATS 2018, 2019, and 2020 brain tumor datasets. The proposed method achieves 89.4% PSNR, 78.03% SNR, 36% MSE, 97% dice score, and 84% accuracy.

Table 2 shows the method, tool, advantages, disadvantages, and parameters analysed for different DL techniques for brain tumor detection.

Table 2. Brain tumor detection using deep learning

Reference No	Author and Year	Method used	Dataset used	Tool used for implementation	Advantage	Disadvantage	Parameters analysed
[64]	Isaza et al. [2022]	PCA ResNet50	TCGA-LGG	Colab	Data augmentation is utilised for training the network with small data sets	It Consumes more time to detect tumors	Specificity – 92.34% Sensitivity – 92.34% F1-score – 92.34%
[65]	Musallam et al. [2022]	DNN BRISQUE	Sartaj brain MRI Navoneel brain tumor	Colab	Normalisation technique is used to train the model fast	Brain tumor regions are not segmented	Accuracy – 98.22% Sensitivity – 96.12% Specificity – 99.65% F1-score – 97.85%
[66]	More et al. [2021]	CNN	The dataset created from augmentation	Matlab	The augmentation technique is used to generate smaller datasets	Computational cost is high	F1-score – 87.42% Accuracy – 87.42% Relative loss – 32.25%
[67]	Le et al. [2021]	Contextual detection network 3D atrous residual network	BRATS2015 BRATS2017 BRATS2018	Matlab	The multi-class network is framed for accurate brain tumor detection	The functionalities of prediction are insufficient	Dice score – 81.41% Sensitivity – 92.0%
[68]	Ma et al. [2021]	LYOLOv4-RNN	Kaggle brain tumor	-	A light weigh neural technique is used	The method can identify the tumor but with low accuracy	Accuracy – 97%
[69]	Kesav et al. [2021]	RCNN	Figshare Kaggle 2020	Matlab 2020	Decrease in algorithm execution time	Important features are not selected	Accuracy – 98.21% Confidence score – 98.83%
[70]	Ottom et al. [2022]	Z-net	TCGA-LGG Alburnentation	-	Detected tumor at an early stage	Require more time to detect the tumor	Accuracy – 99.6% F1-score – 81%

*Continuation of Table 2*

[71]	Qader et al. [2022]	DCNN HHO GWO	Kaggle	Python	Optimisation algorithms are used to optimise the network	No preprocessing technique is used	Accuracy – 97% Precision – 99% Recall – 95% F-measure – 97%
[72]	Sharif et al. [2021]	Densenet201 EKbHFV MGA SVM	BRATS2018 BRATS2019	Matlab 2020	Optimised features are selected for the accurate detection of tumors	Need effective techniques to enhance the robustness of the classifier	Accuracy – 99.7% Precision – 99.8% F1-score – 99.3%
[73]	Chanu et al. [2021]	2D CNN	Brain tumor images with normal and tumor	Keras	Applicable for 2D MRI images	Cannot detect the type and size of the tumor	Accuracy – 97% F1-score – 97% Recall – 94% Precision – 100%
[74]	Sethy et al. [2021]	SVM vgg16 alexnet vgg19	BRATS TCIA	Matlab 2020	It avoids the reproduction of MR images	Delay in tumor detection due to increased noise in the images	Accuracy – 97.89% F1-score – 97.92%
[75]	Preethi et al. [2021]	ODNN SMO DWT GLCM	BRATS	Matlab	Detected the accurate size and location of the tumor	Computational complexity	Accuracy – 93% Sensitivity – 89% Specificity – 93%
[76]	Sharif et al. [2021]	YOLOv2 CNN NSGA	BRATS 2018 BRATS 2019 BRATS 2020	Matlab	An effective filtering technique is used to denoise the image	No accurate detection is provided with the proposed approach	Accuracy – 84% PSNR – 89.4% SNR – 78.03% MSE – 36% Dice score – 97%

**5. Hybrid techniques for brain tumor detection.** To improve the network model's detection capability, both DL and ML-based approaches are combined and renamed hybrid approaches. The hybrid approach entails integrating two or more classifiers to improve the model's accuracy and decrease its error rate. Figure 4 depicts the various hybrid methods used to detect brain tumors.

The idea of CNN and LSTM-based brain tumor identification on 3D MRI scans were first forth by the authors [77]. A temporal distribution function envelops the hybrid technique. The model was trained using BRATS 2019, 2018, and 2020. The 3D imageries are normalised and shrunk using the min-max technique to improve speed. 98.83% F1-score, 98.95% precision, 98.90% accuracy, and 98.78% recall are all achieved using the technique.

Brain tumor detection utilising hybrid DL and adaptive squirrel search optimisation was suggested by the authors [78]. Adaptive fuzzy deep learning with frog leap optimisation (AFD-FLO) algorithms was used to determine image abnormality. Error minimisation technique is used to improve the classification. The adaptive flying squirrel (AFS) algorithm segments abnormal images and then analyses tumor size to determine severity. BRATS dataset was used to train the model. The suggested technique has 0.0043 FPR, 0.543 FNR, 99.6% accuracy, 99.9% sensitivity, and 99.8% specificity.

In paper [79] the authors proposed a hybrid brain tumor segmentation method using Fuzzy K-means (FKM) and ANN algorithms. Wiener filters were used to denoise input images. GLCM then extracts features from preprocessed images. ANN is used to determine image normality. FKM is utilised to segment abnormal images. The model was trained on BRATS. The method achieves 94% accuracy, 98% sensitivity, and 99% specificity.

According to paper [80] the authors put forth a hybrid approach employing CNN and SVM for automatically categorising brain tumors. To boost performance, SVM and CNN are combined. CNN is utilised to extract features. The model was developed using Figshare MRI scans. The method has 95.82% accuracy, 97.3% precision, 98.6% recall, and 99.3% specificity.

Study [81] suggested a hybrid method to classify brain tumors. The suggested stages are intensity normalisation, extraction of features, and classification. DSURF and histogram of oriented gradients (HOG) are coupled to extract the features. The min-max approach is used to normalise the intensity of an image. DSURF extracts dense feature points, and HOG divides the image into cells. Then SVM is used to classify images. The proposed work uses Nanfang Hospital data. The proposed method achieves

90.27% accuracy, 84.89% sensitivity, 92.61% specificity, 77.55% precision, and 81.05% F1 score.

For the categorisation of MRI brain tumors, the authors [82] developed hybrid fuzzy brain-storm optimisation (FBSO). GLCM is used to extract features. The BSO prioritises the cluster centres. A fuzzy network then optimises network structure iteratively. The BRATS 2018 dataset was used to train the model. The method achieves 93.85% accuracy, 94.77% precision, 95.77% sensitivity, and a 95.42% F1 score.

A three-phase brain tumor segmentation recognition system utilising patches-based updated run length region growth was proposed by the authors [83] (PR2G). SVM classification starts the scheme. Then Infinite feature selection (IFS) extracts three optimised features. Carelieri estimator is then used to estimate the abnormal and normal tumors. The model was trained using BRATS and Whole Brain Atlas (WBA) datasets. The method had a 97% accuracy rate.

A hybrid CNN was suggested by the authors [84] to identify brain tumors. The Resnet50 basic model is used in this approach. Without altering the CNN model, this structure adds ten new layers while removing the previous five. The output of the convolutional layer is made simpler by the CNN pooling layer. The softmax layer then determines if the image is tumorous or not. The model was trained using the Kaggle brain tumor detection database. The suggested methodology achieves 100% specificity, 94.7% sensitivity, 96.90% F1 score, and 97.01% accuracy.

The categorisation of brain tumors that used a hybrid deep auto-encoder and Bayesian fuzzy clustering (BFC) segmentation was suggested by the authors [85]. A non-local mean filter removes noise from the image as input. Segmentation is accomplished using BFC. Scattering transform (ST) and wavelet packet Tsallis entropy (WPTE) retrieve robust features similar to information-theoretic measurements. Deep auto-encoder-based Java optimisation algorithm (DAE-JOA) then classifies tumor regions. BRATS 2015 dataset was used in the proposed approach. The proposed method had 98.5% accuracy, 96% sensitivity, 99.54% specificity, and 96% precision.

Brain tumor diagnosis from MRI images using a hybrid model that combines neural autoregressive distribution estimates with CNN was proposed by the authors [86]. (CNN-NADE). The dataset used contained 3064 T1-weighted CE-MR images. The proposed method achieves 95% accuracy, 94.64% sensitivity, 97.42% specificity, and 94.49% precision.

In paper [87] the authors presented the hybrid adaptive cuckoo search-squirrel search (ACS-SS) method to find brain tumors. Brain tumor images are edge-extracted using optimal multi-level thresholding.

The method of extracting features is GLCM. T2-w brain MR images were used to train the approach. SSIM, FSIM, PSNR, and computation time are used to evaluate the efficacy of the hybrid approach.

An automatic brain tumor-segmented hybrid two-track U-Net was suggested by the authors [88]. (HTTU-Net). Batch normalisation and leaky Relu activation make up the suggested architecture. Two tracks have different layers and kernel sizes. To overcome the problem of class imbalance, focal loss, loss functions, and generalised dice (GDL) are used. The model was trained on BRATS 2018. The proposed scheme had an 86.5% dice coefficient and 99.9% specificity.

Table 3 shows the method, tool, advantages, disadvantages, and parameters analysed for different hybrid techniques for brain tumor detection.

Table 3. Brain tumor detection using Hybrid techniques

Reference No	Author and Year	Method used	Dataset used	Tool used for implementation	Advantage	Disadvantage	Parameters analysed
[77]	Montaha et al. [2022]	CNN-LSTM	BRATS 2018 BRATS 2019 BRATS 2020	-	The images are resized to decrease computational complexity	Some enhancement is required in the network model	Accuracy – 98.9% F1-score – 98.83% Precision – 98.95% Recall – 98.78%
[78]	Deb et al. [2021]	AFD-FLO AFS	BRATS	Matlab	Error minimisation strategy is used for accurate classification	Difficult to choose fitness function	Accuracy – 99.6% Sensitivity – 99.9% Specificity – 99.8% FPR – 0.0043 FNR – 0.543
[79]	Pitchai et al. [2021]	FKM-ANN	BRATS	Matlab 2017a	The learning model is fast	Ineffective algorithm to detect brain tumors	Accuracy – 94% Sensitivity – 98% Specificity – 99%

Continuation of Table 3

[80]	Deepak et al. [2021]	CNN-SVM	Figshare	Matlab 2018a	The hybrid approach is simple and powerful	Ineffective methods to detect and segment brain tumors	Accuracy – 95.82% Precision – 97.3% Recall – 98.6% Specificity – 99.3%
[81]	Ayadi et al. [2020]	SVM DSURF-HoG	Brain tumor MRI images	–	Used hybrid technique for feature extraction	Brain tumor classification is not accurate	Specificity – 77.55% Accuracy – 90.27% Precision – 77.55% Sensitivity – 84.89% F1-score – 81.05%
[82]	Narmatha et al. [2020]	FBSO	BRATS 2018	–	The method increases the robustness of detecting brain tumors	No preprocessing is done so that the input images are too noisy to process	Accuracy – 93.85% Precision – 94.77% Sensitivity – 95.77% F1-score – 95.42%
[83]	Kalaiselvi et al. [2020]	PR2G SVM	WBA BRATS	–	For the recognition of brain tumors, an efficient hybrid method is employed	The usage of a large dataset reduces the performance of the system	Accuracy – 97%
[84]	Cinar et al. [2020]	Resnet50-CNN	Kaggle	–	Simple and powerful	An inefficient hybrid method for brain tumor detection	Accuracy – 97.01% F1-score – 96.90% Specificity – 100% Sensitivity – 96.90%
[85]	Raja et al. [2020]	DAE-JOA WPTE BFC ST	BRATS 2015	Matlab	An optimisation is utilised to minimise the complexity of the network	Significantly less exactness in detecting brain tumors	Accuracy – 98.5% Sensitivity – 96% Specificity – 99.54% Precision – 96%

Continuation of Table 3

[86]	Hashemzahi et al. [2020]	CNN-NADE	3064 T1-weighted CE-MR images	Colab	CNN integrated with NADE helps to decrease processing time	No preprocessing is done to raise the image's quality	Accuracy – 95% Sensitivity – 94.64% Specificity – 97.42% Precision – 94.49%
[87]	Agarwal et al. [2020]	ACS-SS GLCM	T <sub>2</sub> -w brain MR images	Matlab	Optimised multi-level thresholding is done for edge information	Computationally expensive when compared to other approaches	SSIM – 96.84% FSIM – 99.21%
[88]	Nagwa et al. [2020]	HTTU-Net	BRATS 2018	Keras TensorFlow	The method overcomes the problem of class imbalance	Due to the hybridisation of two tracks, the complexity increases	Dice coefficient – 86.5% Specificity – 99.9%

**6. Open challenges and research directions.** It is evident from the systematic review that the authors are focusing more on DL, ML, and hybrid techniques due to their ability to detect brain tumors more precisely. Even though the computational intelligence of ML and DL systems is rising, they still deal with various issues, some of which are listed here.

*Collaboration and interoperability.* The authors use AI-based software and hardware to detect brain tumors. A producer's rules, interfaces, and regulations cannot match those of other producers of the same product with similar functionality. It brings up the interoperability issue. Manufacturers, scientists, and physicians must work together to improve brain tumor treatments.

*Privacy & security.* Medical and personal data must be secured and private. Data privacy, not security, should be addressed. Brain tumor patients have privacy rights. Medical data growth raised the issue of patient data security. Thus, authors must concentrate on creating secure and private algorithms.

*Resource efficient techniques.* The applications of DL and ML come with limitations in hardware. Computation processing of medical data exacerbates the issue. Eventually, more computation resources and memory are needed when the processing power increases. The input image's preprocessing is essential to image processing. Preprocessed photos take longer and take up more room, but the outcomes are much more accurate.



Nowadays, images can be processed without preprocessing or object identification. The authors can focus more on these techniques to reduce cost and overhead. Thus, DL and ML-based brain tumor identification necessitates a resource-efficiency assessment of current methods.

**7. Conclusion and future work.** The systematic review thoroughly summarises the methods used to identify brain cancers by DL, ML, and hybrid techniques. Recent research into detecting brain tumors has utilised DL and ML techniques in the medical domain, as highlighted by this review. Four main phases – preprocessing, feature extraction, selection, segmentation, classification, and detection – are essential to diagnose brain cancers using image processing. Authors from all over the world are actively working to improve these techniques by identifying multiple potential avenues. The most crucial element is raising the accuracy of classification. The training data must be increased to achieve this because additional data will lead to a more accurate answer. The most effective results are obtained by combining ML and DL techniques. Additionally, minuscule adjustments can sometimes result in an improvement. For instance, numerous authors omit preprocess techniques for removing image noise. While detecting brain tumors, this slight variation in the technique yields an inaccurate result. Based on the systematic review, the recognition accuracies of brain tumors vary depending on the feature extraction techniques and classifiers used in the models. This systematic review gives a succinct summary of the open research topics, which may be used to overcome the limitations of the present ML and DL-based techniques for diagnosing brain tumors. Integration of XAI strategies is necessary to improve AI systems in the medical domain. It will increase physicians' confidence in diagnosing and treating brain tumors. In addition, the quality of interoperability and training data are crucial elements in developing DL and ML-based solutions. It must address several additional concerns, such as security, privacy, and resource efficiency, to make the best DL and ML-based findings more accurate and useful. Researchers currently working in the area of medical & AI applications for ML and DL-based brain tumor diagnosis can significantly benefit from the proposed systematic review.

## References

1. Suresha D., Jagadisha N., Shrisha H.S., Kaushik K.S. Detection of brain tumor using image processing. 2020 Fourth International Conference on Computing Methodologies and Communication (ICCMC). IEEE, 2020. pp. 844–848.
2. Rehman A., Naz S., Razzak M.I., Akram F., Imran M. A deep learning-based framework for automatic brain tumors classification using transfer learning. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2020. vol. 39. pp. 757–775.

3. Shakeel P.M., Tobely T.E.E., Al-Feel H., Manogaran G., Baskar S. Neural network-based brain tumor detection using wireless infrared imaging sensor. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 5577–5588.
4. Gumaei A., Hassan M.M., Hassan M.R., Alelaiwi A., Fortino G. A hybrid feature extraction method with regularised extreme learning machine for brain tumor classification. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 36266–36273.
5. Sultan H.H., Salem N.M., Al-Atabany W. Multi-classification of brain tumor images using deep neural network. *IEEE Access*, 2019. vol. 7. pp. 69215–69225.
6. Zhou T., Ruan S., Guo Y., Canu S. A multi-modality fusion network based on attention mechanism for brain tumor segmentation. In *2020 IEEE 17th international symposium on biomedical imaging (ISBI) IEEE*, 2020. pp. 377–380.
7. Jemimma T.A., Vetharaj Y.J. Watershed algorithm-based DAPP features for brain tumor segmentation and classification. *2018 International Conference on Smart Systems and Inventive Technology (ICSSIT) IEEE*, 2018. pp. 155–158.
8. Birare G., Chakkarwar V.A. Automated detection of brain tumor cells using support vector machine. In *2018 9th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT) IEEE*, 2018. pp. 1–4.
9. Ge C., Gu I.Y.H., Jakola A.S., Yang J. Enlarged training dataset by pairwise GANs for molecular-based brain tumor classification. *IEEE Access*, 2020. vol. 8. pp. 22560–22570.
10. Nazir M., Khan M.A., Saba T., Rehman A. Brain tumor detection from MRI images using multi-level wavelets. *2019 international conference on Computer and Information Sciences (ICCIS) IEEE*, 2019. pp. 1–5.
11. Abd-Ellah M.K., Awad A.I., Khalaf A.A., Hamed H.F. Two-phase multi-model automatic brain tumor diagnosis system from magnetic resonance images using convolutional neural networks. *EURASIP Journal on Image and Video Processing*. 2018. vol. 2018. pp. 1-10. DOI: 10.1007/s10278-019-00276-2.
12. Sharma M., Purohit G.N., Mukherjee S. Information retrieves from brain MRI images for tumor detection using hybrid technique K-means and artificial neural network (KMANN). In *Networking Communication and Data Knowledge Engineering: Springer Singapore*. 2018. vol. 2. pp. 145–157.
13. Noreen N., Palaniappan S., Qayyum A., Ahmad I., Imran M., Shoaib M. A deep learning model based on concatenation approach for the diagnosis of brain tumor. *IEEE Access*, 2020. vol. 8. pp. 55135–55144.
14. Amin J., Sharif M., Raza M., Saba T., Sial R., Shad S.A. Brain tumor detection: a long short-term memory (LSTM)-based learning model. *Neural Computing and Applications*. 2020. vol. 32. pp. 15965–15973.
15. Swati Z.N.K., Zhao Q., Kabir M., Ali F., Ali Z., Ahmed S., Lu J. Content-based brain tumor retrieval for MR images using transfer learning. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 17809–17822.
16. Mzoughi H., Njeh I., Wali A., Slima M.B., BenHamida A., Mhiri C., Mahfoudhe K.B. Deep multi-scale 3D convolutional neural network (CNN) for MRI gliomas brain tumor classification. *Journal of Digital Imaging*. 2020. vol. 33. pp. 903–915.
17. Davis K.M., Ryan J.L., Aaron V.D., Sims J.B. PET and SPECT imaging of the brain: History, technical considerations, applications, and radiotracers. In *Seminars in Ultrasound, CT and MRI, WB Saunders*. 2020. vol. 41(6). pp. 521–529.
18. Russo C., Liu S., Di Ieva A. Spherical coordinates transformation preprocessing in Deep Convolution Neural Networks for brain tumor segmentation in MRI. *Medical & Biological Engineering & Computing*. 2022. vol. 60. pp. 121–134.
19. Taie S.A., Ghonaim W. CSO-based algorithm with support vector machine for brain tumor's disease diagnosis. *2017 IEEE International Conference on Pervasive*

- Computing and Communications Workshops (PerCom Workshops) IEEE, 2017. pp. 183–187.
20. Kao P.Y., Ngo T., Zhang A., Chen J.W., Manjunath B.S. Brain tumor segmentation and tractographic feature extraction from structural MR images for overall survival prediction. 4th International Workshop, BrainLes 2018, Held in Conjunction with MICCAI 2018. Granada, Spain: Springer International Publishing, 2019. vol. 4. pp. 128–141.
  21. Usman K., Rajpoot K. Brain tumor classification from multi-modality MRI using wavelets and machine learning. *Pattern Analysis and Applications*. 2017. vol. 20. pp. 871–881.
  22. Mathew A.R., Anto P.B. Tumor detection and classification of MRI brain image using wavelet transform and SVM. 2017 International Conference on signal processing and Communication (ICSPC) IEEE, 2017. pp. 75–78.
  23. Iqbal S., Khan M.U.G., Saba T., Rehman A. Computer-assisted brain tumor type discrimination using magnetic resonance imaging features. *Biomedical Engineering Letters*. 2018. vol. 8(1). pp. 5–28.
  24. Li Y., Shen L. Deep learning-based multimodal brain tumor diagnosis. Third International Workshop, BrainLes 2017, Held in Conjunction with MICCAI 2017. Quebec City, QC, Canada, Revised Selected Papers Springer International Publishing, 2018. vol. 3. pp. 149–158.
  25. Van de Lindt T.N., Fast M.F., Van Kranen S.R., Nowee M.E., Jansen E.P.M., Van der Heide U.A., Sonke J.J. MRI-guided mid-position liver radiotherapy: validation of image processing and registration steps. *Radiotherapy and Oncology*. 2019. vol. 138. pp. 132–140.
  26. Hagler Jr D.J., Hatton S., Cornejo M.D., Makowski C., Fair D.A., Dick A.S., Dale A.M. Image processing and analysis methods for the Adolescent Brain Cognitive Development Study. *Neuroimage*. 2019. vol. 202. pp. 116091.
  27. Jia X.Z., Wang J., Sun H.Y., Zhang H., Liao W., Wang Z., Zang Y.F. RESTplus: an improved toolkit for resting-state functional magnetic resonance imaging data processing. *Science Bulletin*. 2019. vol. 64(14). pp. 953–954.
  28. Alfaro-Almagro F., Jenkinson M., Bangerter N.K., Andersson J.L., Griffanti L., Douaud G., Smith S.M. Image processing and Quality Control for the first 10,000 brain imaging datasets from UK Biobank. *Neuroimage*. 2018. vol. 166. pp. 400–424.
  29. Toğaçar M., Cömert Z., Ergen B. Classification of brain MRI using hyper column technique with convolutional neural network and feature selection method. *Expert Systems with Applications*. 2020. vol. 149. pp. 113274.
  30. Vijayalakshmi S., Kavitha K.R., Hariharan S. Segmentation, feature extraction and classification of brain tumor through MRI image. *ICTACT J Image Video Process*. 2021. vol. 12(1). pp. 2517–2524.
  31. Vimal Kurup R., Sowmya V., Soman K.P. Effect of data preprocessing on brain tumor classification using capsuleNet. In *ICICCT 2019–System Reliability, Quality Control, Safety, Maintenance and Management: Applications to Electrical, Electronics and Computer Science and Engineering* Springer Singapore. 2020. pp. 110–119.
  32. Tushar F.I., Alyafi B., Hasan M.K., Dahal L. Brain tissue segmentation using neuroNet with different preprocessing techniques. Joint 8th International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV) and 3rd International Conference on Imaging, Vision & Pattern Recognition (icIVPR) IEEE. 2019. pp. 223–227.
  33. Khan A., Zubair S., Al Sabri M. An improved preprocessing machine learning approach for cross-sectional MRI imaging of demented older adults. In *2019 First International Conference of Intelligent Computing and Engineering (ICOICE) IEEE*, 2019. pp. 1–7.

34. Fong J.X., Shapiari M.I., Tiew Y.Y., Batool U., Fauzi H. Bypassing MRI Preprocessing in Alzheimer's Disease Diagnosis using Deep Learning Detection Network. In 2020 16th IEEE International colloquium on signal processing & its applications (CSPA) IEEE. 2020. pp. 219–224.
35. Setyawan R., Almahfud M.A., Sari C.A., Rachmawanto E.H. MRI image segmentation using morphological enhancement and noise removal based on fuzzy C-means. 2018 5th international conference on information technology, computer, and electrical engineering (ICITACEE) IEEE, 2018. pp. 99–104.
36. Divyarny D., Gopika S., Pradeeba S., Bhuvanawari M. Brain tumor detection from MRI images using Naive classifier. 2020 6th International Conference on Advanced Computing and Communication Systems (ICACCS) IEEE, 2020. pp. 620–622.
37. Chambers O., Milenkovic J., Tasic J.F. A preprocessing scheme for real-time registration of dynamic contrast-enhanced magnetic resonance images. *Journal of Real-Time Image Processing*. 2018. vol. 14(4). pp. 763–772.
38. Pugalenth R., Rajakumar M.P., Ramya J., Rajinikanth V. Evaluation and classification of the brain tumor MRI using machine learning technique. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*. 2019. vol. 21(4). pp. 12–21.
39. Rundo L., Tangherloni A., Cazzaniga P., Nobile M.S., Russo G., Gilardi M.C., Militello C. A novel framework for MR image segmentation and quantification by using MedGA. *Computer methods and programs in biomedicine*. 2019. vol. 176. pp. 159–172.
40. Usha R., Perumal K. SVM classification of brain images from MRI scans using morphological transformation and GLCM texture features. *International journal of computational systems engineering*. 2019. vol. 5(1). pp. 18–23.
41. Russo C., Liu S., Di Ieva A. Impact of spherical coordinates transformation preprocessing in deep convolution neural networks for brain tumor segmentation and survival prediction. 6th International Workshop, BrainLes 2020, Held in Conjunction with MICCAI 2020. Lima, Peru: Springer International Publishing, 2020. pp. 295–306.
42. Thaha M.M., Kumar K.P.M., Murugan B.S., Dhanasekaran S., Vijayakarthick P., Selvi A.S. Brain tumor segmentation using convolutional neural networks in MRI images. *Journal of medical systems*. 2019. vol. 43. pp. 1–10.
43. Khan M.A., Lali I.U., Rehman A., Ishaq M., Sharif M., Saba T., Akram T. Brain tumor detection and classification: A framework of marker-based watershed algorithm and multi-level priority features selection. *Microscopy research and technique*. 2019. vol. 82(6). pp. 909–922.
44. Sharif M.I., Li J.P., Khan M.A., Saleem M.A. Active deep neural network features selection for segmentation and recognition of brain tumors using MRI images. *Pattern Recognition Letters*. 2020. vol. 129. pp. 181–189.
45. Sharif M., Tanvir U., Munir E. U., Khan M.A., Yasmin M. Brain tumor segmentation and classification by improved binomial thresholding and multi-feature selection. *Journal of ambient intelligence and humanised computing*. 2018. pp. 1–20. DOI: 10.1007/s12652-018-1075-x.
46. Daimary D., Bora M.B., Amitab K., Kandar D. Brain tumor segmentation from MRI images using hybrid convolutional neural networks. *Procedia Computer Science*. 2020. vol. 167. pp. 2419–2428.
47. Zhou Z., He Z., Jia Y. AFPNet: A 3D fully convolutional neural network with atrous-convolution feature pyramid for brain tumor segmentation via MRI images. *Neurocomputing*. 2020. vol. 402. pp. 235–244.
48. Paul J., Sivarani T.S. Computer-aided diagnosis of brain tumor using novel classification techniques. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 7499–7509.

49. Assam M., Kanwal H., Farooq U., Shah S.K., Mehmood A., Choi G.S. An efficient classification of MRI brain images. *IEEE Access*. 2021. vol. 9. pp. 33313–33322.
50. Amin J., Sharif M., Raza M., Yasmin M. Detection of brain tumor based on features fusion and machine learning. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2018. pp. 1–17. DOI:10.1007/s12652-018-1092-9.
51. Maqsood S., Damasevicius R., Shah F.M. An efficient approach for the detection of brain tumor using fuzzy logic and U-NET CNN classification. 21st International Conference. Cagliari, Italy: Springer International Publishing, 2021. vol. 21. pp. 105–118.
52. Chen B., Zhang L., Chen H., Liang K., Chen X. A novel extended Kalman filter with support vector machine-based method for the automatic diagnosis and segmentation of brain tumors. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. vol. 200. pp. 105797.
53. Kumar D.M., Satyanarayana D., Prasad M.G. MRI brain tumor detection using optimal possibilistic fuzzy C-means clustering algorithm and adaptive k-nearest neighbor classifier. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12(2). pp. 2867–2880.
54. Srinivasa Reddy A., Chenna Reddy P. MRI brain tumor segmentation and prediction using modified region growing and adaptive SVM. *Soft Computing*. 2021. vol. 25. pp. 4135–4148.
55. Sheela C.J.J., Suganthi G. Accurate MRI brain tumor segmentation based on rotating triangular section with fuzzy C-means optimisation. *Sādhanā*. 2021. vol. 46(4). DOI: 10.1007/s12046-021-01744-8.
56. Gokulalakshmi A., Karthik S., Karthikeyan N., Kavitha M.S. ICM-BTD: improved classification model for brain tumor diagnosis using discrete wavelet transform-based feature extraction and SVM classifier. *Soft Computing*. 2020. vol. 24. pp. 18599–18609.
57. Sharath Chander P., Soundarya J., Priyadharsini R. Brain tumor detection and classification using K-means clustering and SVM classifier. *RITA 2018: Proceedings of the 6th International Conference on Robot Intelligence Technology and Applications Springer Singapore*. 2020. 49–63.
58. Hussain A., Khunteta A. Semantic segmentation of brain tumor from MRI images and SVM classification using GLCM features. In *2020 Second International Conference on Inventive Research in Computing Applications (ICIRCA) IEEE*. 2020. pp. 38–43.
59. Kumar D.M., Satyanarayana D., Prasad M.G. An improved Gabor wavelet transform and rough K-means clustering algorithm for MRI brain tumor image segmentation. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80. pp. 6939–6957.
60. Shahajad M., Gambhir D., Gandhi R. Features extraction for classification of brain tumor MRI images using support vector machine. 2021 11th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence) IEEE. 2021. pp. 767–772.
61. Krishnakumar S., Manivannan K. Effective segmentation and classification of brain tumor using rough K means algorithm and multi-kernel SVM in MR images. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 6751–6760.
62. Mehrotra R., Ansari M.A., Agrawal R. A Novel Scheme for Detection & Feature Extraction of Brain Tumor by Magnetic Resonance Modality Using DWT & SVM. 2020 International Conference on Contemporary Computing and Applications (IC3A) IEEE. 2020. pp. 225–230.
63. Sarkar A., Maniruzzaman M., Ahsan M.S., Ahmad M., Kadir M.I., Islam S.T. Identification and classification of brain tumor from MRI with feature extraction by support vector machine. 2020 international conference for emerging technology (INCET) IEEE. 2020. pp. 1–4.

64. Anaya-Isaza A., Mera-Jiménez L. Data augmentation and transfer learning for brain tumor detection in magnetic resonance imaging. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 23217–23233.
65. Musallam A.S., Sherif A.S., Hussein M.K. A new convolutional neural network architecture for automatic detection of brain tumors in magnetic resonance imaging images. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 2775–2782.
66. More S.S., Mange M.A., Sankhe M.S., Sahu S.S. Convolutional Neural Network-based Brain Tumor Detection. 2021 5th International Conference on intelligent computing and control systems (ICICCS). IEEE, 2021. pp. 1532–1538.
67. Le N., Yamazaki K., Quach K.G., Truong D., Savvides M. A multi-task contextual atrous residual network for brain tumor detection & segmentation. In 2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR) IEEE. 2021. pp. 5943–5950.
68. Ma L., Zhang F. End-to-end predictive intelligence diagnosis in brain tumor using lightweight neural network. *Applied Soft Computing*. 2021. vol. 111. pp. 107666.
69. Kesav N., Jibukumar M.G. Efficient and low complex architecture for detection and classification of Brain Tumor using RCNN with Two Channel CNN. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*. 2022. vol. 34(8). pp. 6229–6242.
70. Ottom M.A., Rahman H.A., Dinov I.D. Znet: deep learning approach for 2D MRI brain tumor segmentation. *IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine*. 2022. vol. 10. pp. 1–8.
71. Qader S.M., Hassan B.A., Rashid T.A. An improved deep convolutional neural network by using hybrid optimisation algorithms to detect and classify brain tumor using augmented MRI images. *Multimedia Tools and Applications*. 2022. pp. 1–28.
72. Sharif M.I., Khan M.A., Alhoussein M., Aurangzeb K., Raza M. A decision support system for multimodal brain tumor classification using deep learning. *Complex & Intelligent Systems*. 2021. pp. 1–14.
73. Chanu M.M., Thongam K. Computer-aided detection of brain tumor from magnetic resonance images using deep learning network. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 6911–6922.
74. Sethy P.K., Behera S.K. A data-constrained approach for brain tumor detection using fused deep features and SVM. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80(19). pp. 28745–28760.
75. Preethi S., Aishwarya P. An efficient wavelet-based image fusion for brain tumor detection and segmentation over PET and MRI image. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80(10). pp. 14789–14806.
76. Sharif M.I., Li J.P., Amin J., Sharif A. An improved framework for brain tumor analysis using MRI based on YOLOv2 and convolutional neural network. *Complex & Intelligent Systems*. 2021. vol. 7. pp. 2023–2036.
77. Montaha S., Azam S., Rafid A.R.H., Hasan M.Z., Karim A., Islam A. Time distributed-cnn-lstm: A hybrid approach combining CNN and lstm to classify brain tumor on 3d MRI scans performing ablation study. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 60039–60059.
78. Deb D., Roy S. Brain tumor detection based on hybrid deep neural network in MRI by adaptive squirrel search optimisation. *Multimedia tools and applications*. 2021. vol. 80. pp. 2621–2645.
79. Pitchai R., Supraja P., Victoria A.H., Madhavi M. Brain tumor segmentation using deep learning and fuzzy K-means clustering for magnetic resonance images. *Neural Processing Letters*. 2021. vol. 53. pp. 2519–2532.
80. Deepak S., Ameer P.M. Automated categorisation of brain tumor from MRI using CNN features and SVM. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 8357–8369.

81. Ayadi W., Charfi I., Elhamzi W., Atri M. Brain tumor classification based on hybrid approach. *The Visual Computer*. 2022. vol. 38(1). pp. 107–117.
82. Narmatha C., Eljack S.M., Tuka A.A.R.M., Manimurugan S., Mustafa M. A hybrid fuzzy brain-storm optimisation algorithm for the classification of brain tumor MRI images. *Journal of ambient intelligence and humanised computing*. 2020. 1–9.
83. Kalaiselvi T., Kumarashankar P., Sriramakrishnan P. Three-phase automatic brain tumor diagnosis system using patches based updated run length region growing technique. *Journal of digital imaging*. 2020. vol. 33. pp. 465–479.
84. Çinar A., Yildirim M. Detection of tumors on brain MRI images using the hybrid convolutional neural network architecture: medical hypotheses. 2020. vol. 139. pp. 109684.
85. Raja P.S. Brain tumor classification using a hybrid deep autoencoder with Bayesian fuzzy clustering-based segmentation approach. *Biocybernetics and Biomedical Engineering*. 2020. vol. 40(1). pp. 440–453.
86. Hashemzahi R., Mahdavi S.J.S., Kheirabadi M., Kamel S.R. Detection of brain tumors from MRI images base on deep learning using hybrid model CNN and NADE. *biocybernetics and biomedical engineering*. 2020. vol. 40(3). pp. 1225–1232.
87. Agrawal S., Samantaray L., Panda R., Dora L. A new hybrid adaptive cuckoo search-squirrel search algorithm for brain MR image analysis. In *Hybrid Machine Intelligence for Medical Image Analysis*. Singapore: Springer Singapore. 2019. pp. 85–117.
88. Aboelenen N.M., Songhao P., Koubaa A., Noor A., Afifi A. HTTU-Net: Hybrid Two Track U-Net for automatic brain tumor segmentation. *IEEE Access*. 2020. vol. 8. pp. 101406–101415.

**Kumar Sanjeet** — Assistant professor, Deen Dayal Upadhyaya College, University of Delhi. Research interests: programming language, data structures and algorithms, machine learning, deep learning. sanjuonline1@gmail.com; Azad Hind Fauj Marg, Dwarka Sector-3, Dwarka, Delhi, 110078, New Delhi, India; office phone: +91(11)2509-9380.

**Pilania Urmila** — Ph.D., Dr.Sci., Associate professor, Department of computer science and technology, Manav Rachna University. Research interests: computer vision, image processing, information security. The number of publications — 22. urmilapilania01@gmail.com; Aravali Hills, Faridabad, 121004, Haryana, India; office phone: +91(129)419-8000.

**Nandal Neha** — Ph.D., Associate professor, Gokaraju Rangaraju Institute of Engineering and Technology. Research interests: machine learning, deep learning, pattern recognition, data mining. The number of publications — 22. nehanandal012@gmail.com; Bachupally, Nizampet Rd, Kukatpally, Telangana, 500090, Hyderabad, India; office phone: +91(720)771-4441.

С. КУМАР, У. ПИЛАНИЯ, Н. НАНДАЛ  
**СИСТЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕТОДОВ  
ОБНАРУЖЕНИЯ ОПУХОЛЕЙ ГОЛОВНОГО МОЗГА НА  
ОСНОВЕ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА**

*Кумар С., Пилания У., Нандал Н. Систематическое исследование методов обнаружения опухолей головного мозга на основе искусственного интеллекта.*

**Аннотация.** Мозг считается одним из наиболее эффективных органов, контролирующих организм. Развитие технологий сделало возможным раннее и точное обнаружение опухолей головного мозга, что существенно влияет на их лечение. Применение искусственного интеллекта значительно возросло в области неврологии. В этом систематическом обзоре сравниваются последние методы глубокого обучения (DL), машинного обучения (ML) и гибридные методы для обнаружения рака мозга. Дается оценка 36 недавних статей, посвященных этим методам, с учетом наборов данных, методологии, используемых инструментов, достоинств и ограничений. Статьи содержат понятные графики и таблицы. Обнаружение опухолей головного мозга в значительной степени опирается на методы машинного обучения, такие как метод опорных векторов (SVM) и метод нечетких С-средних (FCM). Рекуррентные сверточные нейронные сети (RCNN), плотная сверточная нейронная сеть (DenseNet), сверточные нейронные сети (CNN), остаточная нейронная сеть (ResNet) и глубокие нейронные сети (DNN) — это методы DL, используемые для более эффективного обнаружения опухолей головного мозга. Методы DL и ML объединяются для разработки гибридных методов. Кроме того, приводится краткое описание различных этапов обработки изображений. Систематический обзор выявляет нерешенные проблемы и будущие цели для методов на основе DL и ML для обнаружения опухолей головного мозга. С помощью систематического обзора можно определить наиболее эффективный метод обнаружения опухолей головного мозга и использовать его для улучшения.

**Ключевые слова:** обработка изображений, машинное обучение, глубокое обучение, гибридные методы.

### Литература

1. Suresha D., Jagadisha N., Shrisha H.S., Kaushik K.S. Detection of brain tumor using image processing. 2020 Fourth International Conference on Computing Methodologies and Communication (ICCMC). IEEE, 2020. pp. 844–848.
2. Rehman A., Naz S., Razzak M.I., Akram F., Imran M. A deep learning-based framework for automatic brain tumors classification using transfer learning. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2020. vol. 39. pp. 757–775.
3. Shakeel P.M., Tobely T.E.E., Al-Feel H., Manogaran G., Baskar S. Neural network-based brain tumor detection using wireless infrared imaging sensor. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 5577–5588.
4. Gumaei A., Hassan M.M., Hassan M.R., Alelaiwi A., Fortino G. A hybrid feature extraction method with regularised extreme learning machine for brain tumor classification. *IEEE Access*. 2019. vol. 7. pp. 36266–36273.
5. Sultan H.H., Salem N.M., Al-Atabany W. Multi-classification of brain tumor images using deep neural network. *IEEE Access*, 2019. vol. 7. pp. 69215–69225.
6. Zhou T., Ruan S., Guo Y., Canu S. A multi-modality fusion network based on attention mechanism for brain tumor segmentation. In 2020 IEEE 17th international symposium on biomedical imaging (ISBI) IEEE, 2020. pp. 377–380.



7. Jemimma T.A., Vetharaj Y.J. Watershed algorithm-based DAPP features for brain tumor segmentation and classification. 2018 International Conference on Smart Systems and Inventive Technology (ICSSIT) IEEE, 2018. pp. 155–158.
8. Birare G., Chakkarwar V.A. Automated detection of brain tumor cells using support vector machine. In 2018 9th International Conference on Computing, Communication and Networking Technologies (ICCCNT) IEEE, 2018. pp. 1–4.
9. Ge C., Gu I.Y.H., Jakola A.S., Yang J. Enlarged training dataset by pairwise GANs for molecular-based brain tumor classification. IEEE Access, 2020. vol. 8. pp. 22560–22570.
10. Nazir M., Khan M.A., Saba T., Rehman A. Brain tumor detection from MRI images using multi-level wavelets. 2019 international conference on Computer and Information Sciences (ICCIS) IEEE, 2019. pp. 1–5.
11. Abd-Ellah M.K., Awad A.I., Khalaf A.A., Hamed H.F. Two-phase multi-model automatic brain tumor diagnosis system from magnetic resonance images using convolutional neural networks. EURASIP Journal on Image and Video Processing. 2018. vol. 2018. pp. 1–10. DOI: 10.1007/s10278-019-00276-2.
12. Sharma M., Purohit G.N., Mukherjee S. Information retrieves from brain MRI images for tumor detection using hybrid technique K-means and artificial neural network (KMANN). In Networking Communication and Data Knowledge Engineering: Springer Singapore. 2018. vol. 2. pp. 145–157.
13. Noreen N., Palaniappan S., Qayyum A., Ahmad I., Imran M., Shoaib M. A deep learning model based on concatenation approach for the diagnosis of brain tumor. IEEE Access, 2020. vol. 8. pp. 55135–55144.
14. Amin J., Sharif M., Raza M., Saba T., Sial R., Shad S.A. Brain tumor detection: a long short-term memory (LSTM)-based learning model. Neural Computing and Applications. 2020. vol. 32. pp. 15965–15973.
15. Swati Z.N.K., Zhao Q., Kabir M., Ali F., Ali Z., Ahmed S., Lu J. Content-based brain tumor retrieval for MR images using transfer learning. IEEE Access. 2019. vol. 7. pp. 17809–17822.
16. Mzoughi H., Njeh I., Wali A., Slima M.B., BenHamida A., Mhiri C., Mahfoudhe K.B. Deep multi-scale 3D convolutional neural network (CNN) for MRI gliomas brain tumor classification. Journal of Digital Imaging. 2020. vol. 33. pp. 903–915.
17. Davis K.M., Ryan J.L., Aaron V.D., Sims J.B. PET and SPECT imaging of the brain: History, technical considerations, applications, and radiotracers. In Seminars in Ultrasound, CT and MRI, WB Saunders. 2020. vol. 41(6). pp. 521–529.
18. Russo C., Liu S., Di Ieva A. Spherical coordinates transformation preprocessing in Deep Convolution Neural Networks for brain tumor segmentation in MRI. Medical & Biological Engineering & Computing. 2022. vol. 60. pp. 121–134.
19. Taie S.A., Ghonaim W. CSO-based algorithm with support vector machine for brain tumor's disease diagnosis. 2017 IEEE International Conference on Pervasive Computing and Communications Workshops (PerCom Workshops) IEEE, 2017. pp. 183–187.
20. Kao P.Y., Ngo T., Zhang A., Chen J.W., Manjunath B.S. Brain tumor segmentation and tractographic feature extraction from structural MR images for overall survival prediction. 4th International Workshop, BrainLes 2018, Held in Conjunction with MICCAI 2018. Granada, Spain: Springer International Publishing, 2019. vol. 4. pp. 128–141.
21. Usman K., Rajpoot K. Brain tumor classification from multi-modality MRI using wavelets and machine learning. Pattern Analysis and Applications. 2017. vol. 20. pp. 871–881.

22. Mathew A.R., Anto P.B. Tumor detection and classification of MRI brain image using wavelet transform and SVM. 2017 International Conference on signal processing and Communication (ICSPC) IEEE, 2017. pp. 75–78.
23. Iqbal S., Khan M.U.G., Saba T., Rehman A. Computer-assisted brain tumor type discrimination using magnetic resonance imaging features. *Biomedical Engineering Letters*. 2018. vol. 8(1). pp. 5–28.
24. Li Y., Shen L. Deep learning-based multimodal brain tumor diagnosis. Third International Workshop, BrainLes 2017, Held in Conjunction with MICCAI 2017. Quebec City, QC, Canada, Revised Selected Papers Springer International Publishing, 2018. vol. 3. pp. 149–158.
25. Van de Lindt T.N., Fast M.F., Van Kranen S.R., Nowee M.E., Jansen E.P.M., Van der Heide U.A., Sonke J.J. MRI-guided mid-position liver radiotherapy: validation of image processing and registration steps. *Radiotherapy and Oncology*. 2019. vol. 138. pp. 132–140.
26. Hagler Jr D.J., Hatton S., Cornejo M.D., Makowski C., Fair D.A., Dick A.S., Dale A.M. Image processing and analysis methods for the Adolescent Brain Cognitive Development Study. *Neuroimage*. 2019. vol. 202. pp. 116091.
27. Jia X.Z., Wang J., Sun H.Y., Zhang H., Liao W., Wang Z., Zang Y.F. RESTplus: an improved toolkit for resting-state functional magnetic resonance imaging data processing. *Science Bulletin*. 2019. vol. 64(14). pp. 953–954.
28. Alfaro-Almagro F., Jenkinson M., Bangerter N.K., Andersson J.L., Griffanti L., Douaud G., Smith S.M. Image processing and Quality Control for the first 10,000 brain imaging datasets from UK Biobank. *Neuroimage*. 2018. vol. 166. pp. 400–424.
29. Toğaçar M., Cömert Z., Ergen B. Classification of brain MRI using hyper column technique with convolutional neural network and feature selection method. *Expert Systems with Applications*. 2020. vol. 149. pp. 113274.
30. Vijayalakshmi S., Kavitha K.R., Hariharan S. Segmentation, feature extraction and classification of brain tumor through MRI image. *ICTACT J Image Video Process*. 2021. vol. 12(1). pp. 2517–2524.
31. Vimal Kurup R., Sowmya V., Soman K.P. Effect of data preprocessing on brain tumor classification using capsuleNet. In *ICICCT 2019–System Reliability, Quality Control, Safety, Maintenance and Management: Applications to Electrical, Electronics and Computer Science and Engineering* Springer Singapore. 2020. pp. 110–119.
32. Tushar F.I., Alyafi B., Hasan M.K., Dahal L. Brain tissue segmentation using neuroNet with different preprocessing techniques. *Joint 8th International Conference on Informatics, Electronics & Vision (ICIEV) and 3rd International Conference on Imaging, Vision & Pattern Recognition (icIVPR) IEEE*. 2019. pp. 223–227.
33. Khan A., Zubair S., Al Sabri M. An improved preprocessing machine learning approach for cross-sectional MRI imaging of demented older adults. In *2019 First International Conference of Intelligent Computing and Engineering (ICOICE) IEEE*, 2019. pp. 1–7.
34. Fong J.X., Shapi ai M.I., Tiew Y.Y., Batool U., Fauzi H. Bypassing MRI Preprocessing in Alzheimer's Disease Diagnosis using Deep Learning Detection Network. In *2020 16th IEEE International colloquium on signal processing & its applications (CSPA) IEEE*. 2020. pp. 219–224.
35. Setyawan R., Almahfud M.A., Sari C.A., Rachmawanto E.H. MRI image segmentation using morphological enhancement and noise removal based on fuzzy C-means. *2018 5th international conference on information technology, computer, and electrical engineering (ICITACEE) IEEE*, 2018. pp. 99–104.
36. Divyarnary D., Gopika S., Pradeeba S., Bhuvanewari M. Brain tumor detection from MRI images using Naive classifier. *2020 6th International Conference on Advanced Computing and Communication Systems (ICACCS) IEEE*, 2020. pp. 620–622.

37. Chambers O., Milenkovic J., Tasic J.F. A preprocessing scheme for real-time registration of dynamic contrast-enhanced magnetic resonance images. *Journal of Real-Time Image Processing*. 2018. vol. 14(4). pp. 763–772.
38. Pugalenth R., Rajakumar M.P., Ramya J., Rajinikanth V. Evaluation and classification of the brain tumor MRI using machine learning technique. *Journal of Control Engineering and Applied Informatics*. 2019. vol. 21(4). pp. 12–21.
39. Rundo L., Tangherloni A., Cazzaniga P., Nobile M.S., Russo G., Gilardi M.C., Militello C. A novel framework for MR image segmentation and quantification by using MedGA. *Computer methods and programs in biomedicine*. 2019. vol. 176. pp. 159–172.
40. Usha R., Perumal K. SVM classification of brain images from MRI scans using morphological transformation and GLCM texture features. *International journal of computational systems engineering*. 2019. vol. 5(1). pp. 18–23.
41. Russo C., Liu S., Di Ieva A. Impact of spherical coordinates transformation preprocessing in deep convolution neural networks for brain tumor segmentation and survival prediction. 6th International Workshop, BrainLes 2020, Held in Conjunction with MICCAI 2020. Lima, Peru: Springer International Publishing, 2020. pp. 295–306.
42. Thaha M.M., Kumar K.P.M., Murugan B.S., Dhanasekaran S., Vijayarathick P., Selvi A.S. Brain tumor segmentation using convolutional neural networks in MRI images. *Journal of medical systems*. 2019. vol. 43. pp. 1–10.
43. Khan M.A., Lali I.U., Rehman A., Ishaq M., Sharif M., Saba T., Akram T. Brain tumor detection and classification: A framework of marker-based watershed algorithm and multi-level priority features selection. *Microscopy research and technique*. 2019. vol. 82(6). pp. 909–922.
44. Sharif M.I., Li J.P., Khan M.A., Saleem M.A. Active deep neural network features selection for segmentation and recognition of brain tumors using MRI images. *Pattern Recognition Letters*. 2020. vol. 129. pp. 181–189.
45. Sharif M., Tanvir U., Munir E. U., Khan M.A., Yasmin M. Brain tumor segmentation and classification by improved binomial thresholding and multi-feature selection. *Journal of ambient intelligence and humanised computing*. 2018. pp. 1–20. DOI: 10.1007/s12652-018-1075-x.
46. Daimary D., Bora M.B., Amitab K., Kandar D. Brain tumor segmentation from MRI images using hybrid convolutional neural networks. *Procedia Computer Science*. 2020. vol. 167. pp. 2419–2428.
47. Zhou Z., He Z., Jia Y. AFPNet: A 3D fully convolutional neural network with atrous-convolution feature pyramid for brain tumor segmentation via MRI images. *Neurocomputing*. 2020. vol. 402. pp. 235–244.
48. Paul J., Sivarani T.S. Computer-aided diagnosis of brain tumor using novel classification techniques. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 7499–7509.
49. Assam M., Kanwal H., Farooq U., Shah S.K., Mehmood A., Choi G.S. An efficient classification of MRI brain images. *IEEE Access*. 2021. vol. 9. pp. 33313–33322.
50. Amin J., Sharif M., Raza M., Yasmin M. Detection of brain tumor based on features fusion and machine learning. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2018. pp. 1–17. DOI:10.1007/s12652-018-1092-9.
51. Maqsood S., Damasevicius R., Shah F.M. An efficient approach for the detection of brain tumor using fuzzy logic and U-NET CNN classification. 21st International Conference. Cagliari, Italy: Springer International Publishing, 2021. vol. 21. pp. 105–118.
52. Chen B., Zhang L., Chen H., Liang K., Chen X. A novel extended Kalman filter with support vector machine-based method for the automatic diagnosis and segmentation

- of brain tumors. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*. 2021. vol. 200. pp. 105797.
53. Kumar D.M., Satyanarayana D., Prasad M.G. MRI brain tumor detection using optimal possibilistic fuzzy C-means clustering algorithm and adaptive k-nearest neighbor classifier. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12(2). pp. 2867–2880.
54. Srinivasa Reddy A., Chenna Reddy P. MRI brain tumor segmentation and prediction using modified region growing and adaptive SVM. *Soft Computing*. 2021. vol. 25. pp. 4135–4148.
55. Sheela C.J.J., Suganthi G. Accurate MRI brain tumor segmentation based on rotating triangular section with fuzzy C-means optimisation. *Sādhanā*. 2021. vol. 46(4). DOI: 10.1007/s12046-021-01744-8.
56. Gokulalakshmi A., Karthik S., Karthikeyan N., Kavitha M.S. ICM-BTD: improved classification model for brain tumor diagnosis using discrete wavelet transform-based feature extraction and SVM classifier. *Soft Computing*. 2020. vol. 24. pp. 18599–18609.
57. Sharath Chander P., Soundarya J., Priyadharsini R. Brain tumor detection and classification using K-means clustering and SVM classifier. *RITA 2018: Proceedings of the 6th International Conference on Robot Intelligence Technology and Applications Springer Singapore*. 2020. 49–63.
58. Hussain A., Khunteta A. Semantic segmentation of brain tumor from MRI images and SVM classification using GLCM features. In *2020 Second International Conference on Inventive Research in Computing Applications (ICIRCA) IEEE*. 2020. pp. 38–43.
59. Kumar D.M., Satyanarayana D., Prasad M.G. An improved Gabor wavelet transform and rough K-means clustering algorithm for MRI brain tumor image segmentation. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80. pp. 6939–6957.
60. Shahajad M., Gambhir D., Gandhi R. Features extraction for classification of brain tumor MRI images using support vector machine. *2021 11th International Conference on Cloud Computing, Data Science & Engineering (Confluence) IEEE*. 2021. pp. 767–772.
61. Krishnakumar S., Manivannan K. Effective segmentation and classification of brain tumor using rough K means algorithm and multi-kernel SVM in MR images. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 6751–6760.
62. Mehrotra R., Ansari M.A., Agrawal R. A Novel Scheme for Detection & Feature Extraction of Brain Tumor by Magnetic Resonance Modality Using DWT & SVM. *2020 International Conference on Contemporary Computing and Applications (IC3A) IEEE*. 2020. pp. 225–230.
63. Sarkar A., Maniruzzaman M., Ahsan M.S., Ahmad M., Kadir M.I., Islam S.T. Identification and classification of brain tumor from MRI with feature extraction by support vector machine. *2020 international conference for emerging technology (INCET) IEEE*. 2020. pp. 1–4.
64. Anaya-Isaza A., Mera-Jiménez L. Data augmentation and transfer learning for brain tumor detection in magnetic resonance imaging. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 23217–23233.
65. Musallam A.S., Sherif A.S., Hussein M.K. A new convolutional neural network architecture for automatic detection of brain tumors in magnetic resonance imaging images. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 2775–2782.
66. More S.S., Mange M.A., Sankhe M.S., Sahu S.S. Convolutional Neural Network-based Brain Tumor Detection. *2021 5th International Conference on intelligent computing and control systems (ICICCS) IEEE*, 2021. pp. 1532–1538.

67. Le N., Yamazaki K., Quach K.G., Truong D., Savvides M. A multi-task contextual atrous residual network for brain tumor detection & segmentation. In 2020 25th International Conference on Pattern Recognition (ICPR) IEEE. 2021. pp. 5943–5950.
68. Ma L., Zhang F. End-to-end predictive intelligence diagnosis in brain tumor using lightweight neural network. *Applied Soft Computing*. 2021. vol. 111. pp. 107666.
69. Kesav N., Jibukumar M.G. Efficient and low complex architecture for detection and classification of Brain Tumor using RCNN with Two Channel CNN. *Journal of King Saud University-Computer and Information Sciences*. 2022. vol. 34(8). pp. 6229–6242.
70. Ottom M.A., Rahman H.A., Dinov I.D. Znet: deep learning approach for 2D MRI brain tumor segmentation. *IEEE Journal of Translational Engineering in Health and Medicine*. 2022. vol. 10. pp. 1–8.
71. Qader S.M., Hassan B.A., Rashid T.A. An improved deep convolutional neural network by using hybrid optimisation algorithms to detect and classify brain tumor using augmented MRI images. *Multimedia Tools and Applications*. 2022. pp. 1–28.
72. Sharif M.I., Khan M.A., Alhussein M., Aurangzeb K., Raza M. A decision support system for multimodal brain tumor classification using deep learning. *Complex & Intelligent Systems*. 2021. pp. 1–14.
73. Chanu M.M., Thongam K. Computer-aided detection of brain tumor from magnetic resonance images using deep learning network. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 6911–6922.
74. Sethy P.K., Behera S.K. A data-constrained approach for brain tumor detection using fused deep features and SVM. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80(19). pp. 28745–28760.
75. Preethi S., Aishwarya P. An efficient wavelet-based image fusion for brain tumor detection and segmentation over PET and MRI image. *Multimedia Tools and Applications*. 2021. vol. 80(10). pp. 14789–14806.
76. Sharif M.I., Li J.P., Amin J., Sharif A. An improved framework for brain tumor analysis using MRI based on YOLOv2 and convolutional neural network. *Complex & Intelligent Systems*. 2021. vol. 7. pp. 2023–2036.
77. Montaha S., Azam S., Rafid A.R.H., Hasan M.Z., Karim A., Islam A. Time distributed-cnn-lstm: A hybrid approach combining CNN and lstm to classify brain tumor on 3d MRI scans performing ablation study. *IEEE Access*. 2022. vol. 10. pp. 60039–60059.
78. Deb D., Roy S. Brain tumor detection based on hybrid deep neural network in MRI by adaptive squirrel search optimisation. *Multimedia tools and applications*. 2021. vol. 80. pp. 2621–2645.
79. Pitchai R., Supraja P., Victoria A.H., Madhavi M. Brain tumor segmentation using deep learning and fuzzy K-means clustering for magnetic resonance images. *Neural Processing Letters*. 2021. vol. 53. pp. 2519–2532.
80. Deepak S., Ameer P.M. Automated categorisation of brain tumor from MRI using CNN features and SVM. *Journal of Ambient Intelligence and Humanized Computing*. 2021. vol. 12. pp. 8357–8369.
81. Ayadi W., Charfi I., Elhamzi W., Atri M. Brain tumor classification based on hybrid approach. *The Visual Computer*. 2022. vol. 38(1). pp. 107–117.
82. Narmatha C., Eljack S.M., Tuka A.A.R.M., Manimurugan S., Mustafa M. A hybrid fuzzy brain-storm optimisation algorithm for the classification of brain tumor MRI images. *Journal of ambient intelligence and humanised computing*. 2020. 1–9.
83. Kalaiselvi T., Kumarashankar P., Sriramakrishnan P. Three-phase automatic brain tumor diagnosis system using patches based updated run length region growing technique. *Journal of digital imaging*. 2020. vol. 33. pp. 465–479.

84. Çinar A., Yildirim M. Detection of tumors on brain MRI images using the hybrid convolutional neural network architecture: medical hypotheses. 2020. vol. 139. pp. 109684.
85. Raja P.S. Brain tumor classification using a hybrid deep autoencoder with Bayesian fuzzy clustering-based segmentation approach. Biocybernetics and Biomedical Engineering. 2020. vol. 40(1). pp. 440–453.
86. Hashemzahi R., Mahdavi S.J.S., Kheirabadi M., Kamel S.R. Detection of brain tumors from MRI images base on deep learning using hybrid model CNN and NADE. biocybernetics and biomedical engineering. 2020. vol. 40(3). pp. 1225–1232.
87. Agrawal S., Samantaray L., Panda R., Dora L. A new hybrid adaptive cuckoo search-squirrel search algorithm for brain MR image analysis. In Hybrid Machine Intelligence for Medical Image Analysis. Singapore: Springer Singapore. 2019. pp. 85–117.
88. Aboelenen N.M., Songhao P., Koubaa A., Noor A., Afifi A. HTTU-Net: Hybrid Two Track U-Net for automatic brain tumor segmentation. IEEE Access. 2020. vol. 8. pp. 101406–101415.

**Кумар Санджит** — доцент, колледж Дин Дайал Упадхьяй, Университет Дели. Область научных интересов: язык программирования, структуры данных и алгоритмы, машинное обучение, глубокое обучение. sanjuonline1@gmail.com; Азад Хинд Фаудж Марг, сектор Дварка-3, Дварка, Дели, 110078, Нью-Дели, Индия; р.т.: +91(11)2509-9380.

**Пилания Урмила** — Ph.D., Dr.Sci., доцент, кафедра компьютерных наук и технологий, Университет Манав Рахна. Область научных интересов: компьютерное зрение, обработка изображений, информационная безопасность. Число научных публикаций — 22. urmilapilania01@gmail.com; Холмы Аравали, Фаридабад, 121004, Харьяна, Индия; р.т.: +91(129)419-8000.

**Нандал Неха** — Ph.D., доцент, Инженерно-технологический институт имени Гокараджу Рангараджу. Область научных интересов: машинное обучение, глубокое обучение, распознавание образов, интеллектуальный анализ данных. Число научных публикаций — 22. nehanandal012@gmail.com; Бачупалли, улица Низампет, Кукапалли, Телангана, 500090, Хайдарабад, Индия; р.т.: +91(720)771-4441.

Н.Г. ШИЛОВ, А.В. ПОНОМАРЕВ, А.В. СМИРНОВ  
**АНАЛИЗ МЕТОДОВ ОНТОЛОГО-ОРИЕНТИРОВАННОГО  
НЕЙРО-СИМВОЛИЧЕСКОГО ИНТЕЛЛЕКТА ПРИ  
КОЛЛАБОРАТИВНОЙ ПОДДЕРЖКЕ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

*Шилов Н.Г., Пономарев А.В., Смирнов А.В. Анализ методов онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта при коллаборативной поддержке принятия решений.*

**Аннотация.** Нейросетевой подход к ИИ, получивший особенно широкое распространение в последнее десятилетие, обладает двумя существенными ограничениями – обучение моделей, как правило, требует очень большого количества образцов (не всегда доступных), а получающиеся модели не являются хорошо интерпретируемыми, что может снижать доверие к ним. Использование символьных знаний как основы коллаборативных процессов с одной стороны и распространение нейросетевого ИИ с другой, обуславливают необходимость синтеза нейросетевой и символьной парадигм применительно к созданию коллаборативных систем поддержки принятия решений. В статье представлены результаты аналитического обзора в области онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта применительно к решению задач обмена знаниями при коллаборативной поддержке принятия решений. А именно, в ходе обзора делается попытка ответить на два вопроса: 1. как символьные знания, представленные в виде онтологии, могут быть использованы для улучшения ИИ-агентов, действующих на основе нейронных сетей (передача знаний от человека к ИИ-агентам); 2. как символьные знания, представленные в виде онтологии, могут быть использованы для интерпретации решений, принимаемых ИИ-агентами, и объяснения этих решений (передача знаний от ИИ-агента к человеку). В результате проведенного обзора сформулированы рекомендации по выбору методов внедрения символьных знаний в нейросетевые модели, а также выделены перспективные направления онтолого-ориентированных методов объяснения нейронных сетей.

**Ключевые слова:** нейро-символический ИИ, априорные знания, машинное обучение, глубокое обучение, объяснимый ИИ, ХАИ, онтологии.

**1. Введение.** Нейросетевой подход к ИИ в последнее десятилетие получил широкое распространение, искусственные нейронные сети активно используются для решения широкого спектра задач обработки информации (особенно, слабоструктурированной – видео, аудио, тексты). Вместе с тем, одним из значительных недостатков нейросетевого подхода к ИИ при принятии решений является то, что результат работы нейронной сети не всегда является легко интерпретируемым и объяснимым. Это, в частности, ограничивает доверие экспертов к результатам работы нейронных сетей и сдерживает их применение в ответственных областях. Данная проблема осознается научным сообществом – к настоящему времени предложен широкий спектр методов, ориентированных на интерпретацию и объяснение предсказаний, получаемых с помощью нейронных сетей [1], однако значительная часть таких

методов предназначена для экспертов в области машинного обучения и искусственного интеллекта, а не для экспертов проблемной области [2].

Коллаборативные системы поддержки принятия решений, основанные на взаимодействии людей (экспертов) и агентов, действующих на основе искусственного интеллекта (ИИ-агентов), являются одной из областей применения ИИ, в которых данный недостаток является весьма существенным. В таких системах команда, состоящая из разнородных участников, в ходе работы над заданной конечным пользователем проблемной ситуацией, осуществляет сбор и обработку информации, формирует и оценивает возможные альтернативы, позволяя конечному пользователю принять взвешенное и обоснованное решение. При этом распределение задач между участниками может быть как жестким, диктуемым заранее заданным сценарием, так и более гибким, когда участники процесса непрерывно анализируют текущее состояние решения проблемы и вносят вклад в соответствии со своими возможностями [3].

Основой коллаборативных процессов является обмен знаниями и взаимное обучение (перенос знаний как от человека к ИИ-агенту, так и наоборот). При этом коммуникативные процессы в широком смысле требуют наличия некоторой символической системы, обеспечивающей взаимодействие [4].

Использование символов как основы коллаборативных процессов с одной стороны и распространение нейросетевого ИИ с другой обуславливают необходимость синтеза нейросетевой и символической парадигм применительно к созданию коллаборативных систем поддержки принятия решений. Подобный синтез получил название нейро-символический искусственный интеллект [5]. Под нейро-символическим искусственным интеллектом понимается очень широкий спектр методов. В данной статье рассматривается одно из направлений подобной конвергенции, особенно важное в коллаборативных системах, а именно – перенос знаний от человека к ИИ-агенту (что позволяет использовать априорные символические знания для повышения качества работы нейросетевых ИИ-агентов) и от ИИ-агента к человеку (что позволяет объяснять результат работы ИИ-агента с помощью символов). При этом, в статье рассматривается лишь один из видов символического представления знаний – онтологии (рисунок 1). Актуальность использования онтологий как основы коммуникативной системы при коллаборативной поддержке принятия решений обусловлена двумя факторами:



1) Онтология представляет собой формализованное представление терминологии проблемной области, а значит и непротиворечивый язык, который понятен эксперту и может обрабатываться программно.

2) К настоящему моменту разработано большое количество онтологий для многих проблемных областей. Эти знания описаны с использованием стандартизованных языков (Semantic Web) и потенциально могут быть использованы в широком спектре конкретных приложений.

Таким образом, в статье представлены результаты аналитического обзора в области онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта применительно к решению задач обмена знаниями в коллаборативных системах поддержки принятия решений. А именно, в ходе обзора делается попытка ответить на два вопроса:

1) Как символьные знания, представленные в виде онтологий, могут быть использованы для улучшения ИИ-агентов, действующих на основе нейронных сетей (передача знаний от человека к ИИ-агентам).

2) Как символьные знания, представленные в виде онтологий, могут быть использованы для интерпретации решений, принимаемых ИИ-агентами, и объяснения этих решений (передача знаний от ИИ-агента к человеку).

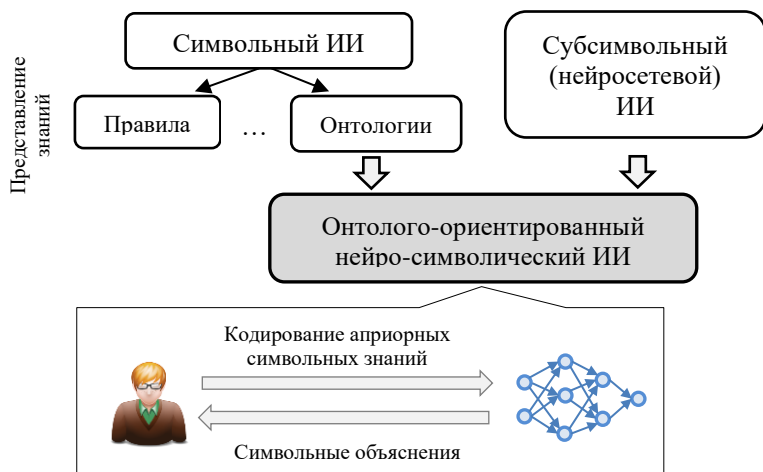


Рис. 1. Место рассматриваемых методов в общей палитре методов ИИ

## **2. Архитектуры интеграции символьных знаний в субсимвольные (нейросетевые) модели машинного обучения.**

При создании интеллектуальных систем с использованием методов машинного обучения и, в частности, нейронных сетей, комбинирование последних с символьными знаниями может осуществляться различными способами [6, 7]. В работе [8] выделены четыре различных подхода интеграции, названные «нейросетевое приближение» («neural approximative reasoning»), «нейросетевое рассуждение» («neural unification»), «интроспекция» («introspection») и «интегрированное получение знаний» («integrated knowledge acquisition»).

Под термином «нейросетевое приближение» понимаются методы, использующие нейронные сети для генерации приближенных выводов в интеллектуальных системах. Одним из наиболее очевидных путей для этого типа интеграции является реализация аппроксимирующей нейронной сети для имеющихся правил.

Подход «нейросетевое рассуждение» подразумевает повторение механизма, используемого для автоматического доказательства теорем, а именно выполнение последовательности логических утверждений, приводящих к подтверждению или опровержению исходного утверждения [9]. В нейронных сетях для этого используются методы кодирования знаний с использованием выделенных элементов сети и специальных типов связей для описания элементов утверждения. Рассуждение осуществляется на основе минимизации показателя «энергии» при обновлении состояния нейронной сети. Обучение таких сетей, как правило, выполняется с использованием «метаинтерпретатора», генерирующего обучающие шаблоны, например, посредством кодирования успешных доказательств на языке Prolog. Обученная на таких примерах доказательств нейронная сеть способна обобщать стратегию управления для выбора доводов при доказательстве утверждений.

Под «интроспекцией» понимаются методы и технологии, с помощью которых ИИ «наблюдает» за собственным поведением и улучшает свою работу. Этот подход может быть реализован с помощью нейронных сетей, которые «наблюдают» за последовательностью шагов, выполняемых ИИ при осуществлении логического вывода. Такой подход часто называют управляющим знанием (control knowledge). Когда наблюдаемое поведение ИИ закодировано соответствующим образом, нейронная сеть может научиться избегать ошибочных путей и быстрее приходить к своим выводам.

Подход «интегрированное получение знаний» основан на следующих предпосылках: а) ИИ в основном зависит от человека-эксперта, который формулирует знания в виде символьных утверждений (правил); б) эксперту практически невозможно описать свои знания в виде правил (в частности, очень трудно описать знания, приобретенные опытным путем). Поэтому, например, ИИ может оказаться не в состоянии поставить диагноз, который может поставить опытный врач [10]. Таким образом, основная проблема заключается в том, как извлечь знания из ограниченного набора примеров (малые данные) для использования ИИ. Модели машинного обучения расширяют возможности классического ИИ в области логического вывода за счет способности к обобщению и обработке неполных данных. То есть можно использовать алгоритмы обучения нейронной сети с учителем для извлечения закономерностей из примеров, а затем генератор символьных правил может преобразовать эти закономерности в правила, реализуемые, например, на языке Prolog. С другой стороны, наличие явных символьных знаний (правил) позволяет уменьшить объем обучающих данных для выявления неявных закономерностей. Сгенерированные правила и обученная нейронная сеть встраиваются в сервисы на основе ИИ в качестве базы знаний.

В работе [11] предложена классификация архитектур, объединяющих символьные знания и субсимвольные (нейросетевые) знания (называемые комбинированными нейронными системами). Данная классификация включает следующие типы архитектур (рисунок 2):

- Унифицированная архитектура: символьные знания непосредственно кодируются в нейронной сети.
  - Локальная коннекционистская архитектура (localist connectionist architecture): отдельные фрагменты нейронной сети направлены на кодирование символьных знаний.
  - Распределенная нейронная архитектура: символьные и нейросетевые знания кодируются невыделенными перекрывающимися фрагментами нейронной сети.
- Трансформационная архитектура (аналогична унифицированной архитектуре, но включает механизмы перевода (трансформации) субсимвольных представлений знаний в символьные и/или наоборот). Обычно, такая архитектура реализуется через механизмы извлечения символьных знаний (например, правил) из обученной нейронной сети.

Архитектуры интеграции символьных знаний в нейросетевые модели машинного обучения



Рис. 2. Архитектуры интеграции символьных знаний в нейросетевые модели машинного обучения

– Гибридная модульная архитектура: символьные и нейросетевые знания кодируются в отдельных модулях (модуль символьных знаний и модуль нейросетевых знаний).

- Свободно связанная: информация может передаваться от одного модуля к другому только в одном направлении. Как правило, в моделях с подобной архитектурой символьные знания используются либо для предобработки и/или дополнения данных перед их передачей в нейронную сеть, либо для постобработки выходных данных нейронной сети.
- Жестко связанная: обмен информацией осуществляется через общие структуры данных в любом направлении.
- Полностью интегрированная архитектура: модули взаимосвязаны по нескольким каналам или даже на основе их перекрывающихся фрагментов.

В работе [12] рассмотрены непосредственно модели представления знаний в рамках нейронных сетей. Авторы предлагают следующую классификацию.

– Пропозиционная логика / логика высказываний (propositional logic).

- Представление на основе правил. Работы по представлению символьных знаний в коннекционистских сетях направлены на адаптацию параметров моделей для установки эквивалентности между функцией отображения, представленной средствами нейросетевой модели, и правилами логического вывода. Было показано, что ограничение значений синаптических весов нейронной сети позволяет выполнять расчеты на основе алгоритма прямого распространения, способные точно имитировать поведение правил логического вывода.
- Представление на основе формул. Одна из проблем с представлением знаний на основе правил, например, в стиле KBANN (Knowledge-Based Artificial Neural Network / основанная на знаниях искусственная нейронная сеть) или CILP (Connectionist inductive learning and logic programming / программирование коннекционистского индуктивного обучения и логики), заключается в том, что дискриминационная структура искусственных нейронных сетей позволяет рассчитать только подмножество переменных (следствия формулы "если-то"), если только не

используются рекуррентные сети, а остальные переменные (предпосылки формулы "если-то") будут рассматриваться только как входы. Это не вполне соответствует поведению логических формул и не обеспечивает поддержку общего логического вывода, где может быть выведена любая переменная. Для решения этой проблемы можно использовать генеративные нейронные сети, поскольку они могут рассматривать все переменные как недискриминационные. В таком формульном подходе, обычно связанном с ограниченными машинами Больцмана в качестве строительного блока, основное внимание уделяется отображению логических формул на симметричные коннекционистские сети, каждая из которых характеризуется функцией энергии [13, 14].

- Логика первого порядка.
  - Пропозиционализация. Представление знаний в логике первого порядка в нейронных сетях является известной проблемой, но она может быть отчасти решена за счет изучения представления пропозициональной логики с помощью методов пропозиционализации [15]. Такие методы позволяют преобразовать базу знаний первого порядка в пропозиционную базу знаний с сохранением логических следствий. В нейро-символических вычислениях пропозиционализация конкретизированных высказываний (bottom clause propositionalisation) является популярным подходом, поскольку такие высказывания могут быть закодированы непосредственно в нейронных сетях как характеристики данных с сохранением семантики.
  - Тензоризация. Тензоризация – это класс подходов, которые ориентированы на встраивание таких символов логики первого порядка, как константы, факты и правила, в тензоры вещественных значений [16 – 18]. Обычно константы представляются в виде векторов (тензор первого порядка). Предикаты и функции представляются в виде матриц (тензор второго порядка) или тензоров более высокого порядка.
  - Темпоральная логика. Одной из самых ранних работ по темпоральной логике и нейронным сетям является подход на основе коннекционистской темпоральной логики (Connectionist Temporal Logic / CTL), в котором

используются ансамбли рекуррентных нейронных сетей для представления семантики возможного мира линейной временной логики [19]. С одним скрытым слоем и полулинейными нейронами сети могут вычислять семантику правил темпоральной логики с фиксированной точкой (fixed-point semantics). Другая работа по представлению временных знаний предложена в работе [20], представляющей последовательную коннекционистскую темпоральную логику (Sequential Connectionist Temporal Logic / SCTL), где CILP расширено для работы с нелинейной авторегрессионной моделью. В работе [21] нейросимволические когнитивные агенты представляют временные знания в рекуррентных темпоральных ограниченных машинах Больцмана. Здесь правила темпоральной логики моделируются в виде рекурсивных конъюнкций, представленных рекуррентными структурами. Встраивание темпоральных реляционных знаний было изучено и в тензорной рекуррентной нейронной сети с применением в вопросно-ответных системах [22].

Рассмотренные далее работы сгруппированы в соответствие с используемой архитектурой объединения символьных и субсимвольных знаний.

**2.1. Унифицированная архитектура.** В работе [23] предложено кодировать символьные правила либо путем добавления дополнительных скрытых (необучаемых) блоков (локальная коннекционистская архитектура), либо путем полного преобразования базы правил в нейронную сеть с помощью метода KBANN [24] (распределенная нейронная архитектура). Во втором случае блоки являются обучаемыми, то есть выполняется итеративное создание элементов скрытого слоя, описывающих разделяющую поверхность для конкретных примеров обучающей выборки. Представленные в статье эксперименты показывают значительное увеличение точности при интеграции правил, особенно при интеграции с помощью метода KBANN, когда правила корректируются в процессе обучения. Отличительной особенностью KBANN является его способность работать с приблизительными символьными знаниями, которые уточняются в процессе обучения.

**2.1.1. Локальная коннекционистская архитектура.** Отличительной особенностью некоторых подходов с унифицированной архитектурой является возможность уточнять

топологию нейронной сети и, таким образом, добавлять новые правила в (переформулированную) базу правил. Поэтому при использовании онтологий проблемной области, в которых отсутствуют правила, обобщение оказывается слабым, а обучение может испортить исходные правила – даже те, которые изначально были правильными. В статье [25] представлен алгоритм TopGen, расширяющий алгоритм KBANN, который эвристически ищет возможные расширения сети KBANN. В TopGen это достигается путем динамического добавления скрытых узлов к нейронному представлению онтологии проблемной области, что аналогично добавлению правил к базе знаний. Представленные в статье эксперименты показывают, что данный алгоритм способен эвристически находить эффективные места для добавления узлов в базы знаний. Алгоритм показал статистически значимое улучшение по сравнению с алгоритмом KBANN во всех представленных пяти областях применения.

Особенностью работы [26] является то, что в ней представлена схема, которая использует оценки функций «черного ящика» в сочетании с символьными выражениями, определяющими отношения между данными функциями. Авторы используют древовидные LSTM-сети для реализации структуры деревьев символьных выражений. Числа, присутствующие в данных оценки функций, представляются в виде десятичного представления в древовидной кодировке.

В работе [27] авторы используют символьные знания для повышения производительности графовых сверточных нейронных сетей (GCN), а также их обучения на меньших объемах обучающих данных. Авторы расширяют классические GCN посредством внедрения формул пропозиционной логики. Для создания семантически верных расширений разработаны методы распознавания неоднородности вершин и семантической регуляризации, которые включают структурные ограничения. Механизм встраивания формул проецирует логические графы, представляющие формулы, на все многообразие решений таким образом, чтобы результат логического вывода ассоциировался с расстоянием так, чтобы удовлетворяющие формуле значения находились бы ближе к встроенной формуле (рисунок 3). Такое пространство позволяет быстро проводить приблизительные проверки значений и используется для оценки функции логических потерь, которые регуляризируют нейронную сеть для решения целевой задачи.



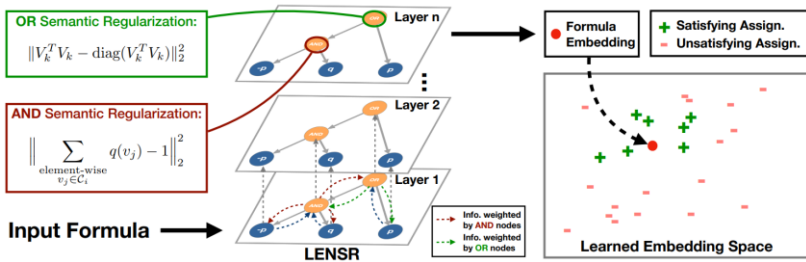


Рис. 3. Расширение классической GCN посредством внедрения формул пропозиционной логики [27]

**2.1.2. Распределенная нейронная архитектура.** В [28] представлена структура, которая объединяет глубокие нейронные сети с логическими правилами первого порядка, что позволило интегрировать человеческие знания и намерения в нейронные модели. В частности, предложена итеративная процедура, которая переносит структурированную информацию логических правил в веса нейронных сетей. Перенос осуществляется через обучающую сеть, построенную с использованием принципа апостериорной регуляризации. Используются две сети – учитель и ученик. Сеть-учитель сначала учится имитировать логические правила, заданные аналитически. Затем, сеть-учитель используется для обучения сети-ученика. На каждой итерации сеть-учитель обновляется путем проецирования сети-ученика в подпространство, ограниченное правилами, в результате чего она приобретает желаемые свойства. Сеть-ученик обновляется путем балансирования между аппроксимированием сети-учителя и предсказанием истинных результатов на обучающей выборке (рисунок 4).

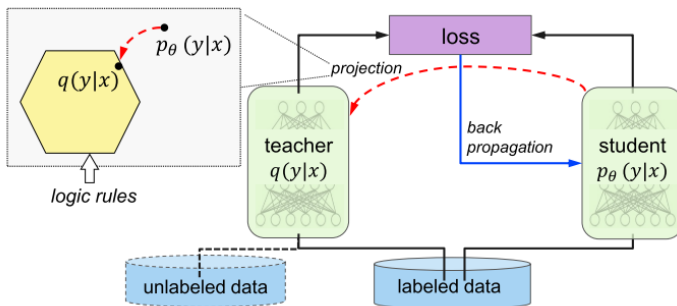


Рис. 4. Использование пары сеть-учитель – сеть-ученик для внедрения логических правил в нейронную сеть [28]

В работе [29] в качестве символьных знаний используются логические правила. Обучение выполняется в два этапа. Сначала модель машинного обучения, построенная на основе нейронной сети, обучается только на правилах, которые могут описывать требуемые закономерности довольно грубо (с вероятностью, отличной от 1). Затем, на этапе уточнения модель обучается «классическим» способом на примерах. Данный подход позволил авторам существенно ускорить сходимость модели в процессе обучения.

**2.2. Трансформационная архитектура.** Работа [30] представляет комплексную схему, объединяющую символьный и субсимвольный подходы, и объединяет результаты работы нескольких исследовательских групп. Эта схема (рисунок 5) рассматривает сочетание символьного и нейросетевого обучения как трехэтапный процесс: 1) введение символьной информации в нейронную сеть, тем самым (частично) определяя топологию и начальные весовые параметры сети; 2) уточнение этой сети с помощью численного метода оптимизации, такого как обратное распространение, возможно, под руководством символьных знаний; 3) извлечение символьных правил, которые точно представляют знания, содержащиеся в обученной сети. Хотя эти три компонента образуют полную картину: приблизительно правильная символьная информация на входе и более точная символьная информация на выходе, в то же время они могут изучаться независимо друг от друга.

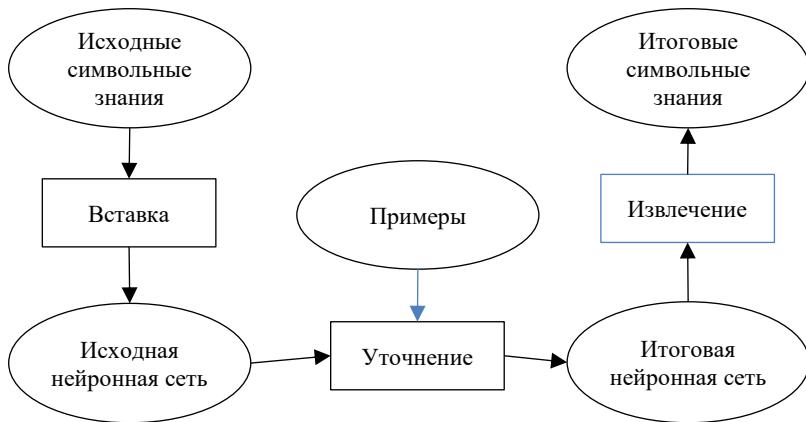


Рис. 5. Подход к объединению символьных и субсимвольных знаний

## 2.3. Гибридная модульная архитектура

**2.3.1. Свободно связанная архитектура.** В исследовании [31] предлагается совместная бустинговая система (Collaboratively Boosting Framework / CBF) для итеративного объединения модуля глубокого обучения и модуля онтологических рассуждений. Модуль глубокого обучения использует архитектуру глубокой нейронной сети для семантической сегментации (Deep Semantic Segmentation Network / DSSN) и принимает на вход интеграцию исходного изображения и логически выведенные знания (каналы логического вывода). Кроме того, модуль онтологических рассуждений состоит из внутритаксономических и внетаксономических рассуждений. Более конкретно – внутритаксономические рассуждения непосредственно исправляют неправильные классификации модуля глубокого обучения на основе знаний о проблемной области, что является ключом к улучшению эффективности классификации. Внетаксономические рассуждения направлены на создание каналов логического вывода за пределами текущей таксономии для улучшения характеристик DSSN в исходном пространстве изображений. С одной стороны, пользуясь ссылочными каналами из модуля онтологических рассуждений, модуль глубокого обучения, использующий интеграцию исходного изображения и указанных выше каналов, может достичь лучших результатов классификации, чем при использовании только исходного изображения. С другой стороны, лучшие результаты классификации, полученные с помощью модуля глубокого обучения, еще больше повышают эффективность работы модуля онтологических рассуждений.

Авторы статьи [32] рассматривают проблемы (например, проблему прогнозирования свойств химических соединений) со следующими характеристиками: 1) данные естественным образом представлены в виде графов; 2) объем доступных данных обычно невелик; и 3) имеются значительные знания о проблемной области, обычно выраженные в некоторой символической форме (правила, таксономии, ограничения и другие). В статье рассматриваются графовые нейронные сети (GNN), к которым применяется механизм «обогащения вершин» («vertex-enrichment»), а итоговый класс нейронных сетей называется VEGNN. В отличие от классических графов, в которых отношения связывают пары вершин, механизм обогащения позволяет связывать больше, чем просто пары вершин. Например, если молекулу представить в виде графа (с атомами в качестве вершин и ребром, обозначающим связь между парой вершин), то бензольное кольцо – это связь между шестью различными

вершинами, с некоторыми специфическими ограничениями на вершины и ребра. Представленные в статье результаты подтверждают следующие выводы: а) включение знаний о проблемной области путем обогащения вершин может значительно улучшить производительность GNN (производительность VEGNN значительно выше, чем GNN); б) включение специфических для домена отношений, построенных с помощью индуктивного логического программирования (Inductive Logic Programming / ILP), улучшает производительность VEGNN. В целом, полученные результаты свидетельствуют о том, что в GNN можно включить символичные знания о проблемной области, и что ILP может играть важную роль в обеспечении высокоуровневых отношений, которые нелегко обнаружить с помощью классических GNN.

В статье [33] описан основанный на правилах способ объединения нескольких искусственных нейронных сетей с символическими рассуждениями для работы с аннотированными картами местности (рисунок 6). Система управления транспортным средством на основе аннотированных карт отслеживает положение транспортного средства на карте и обновляет данные карт. Она предоставляет модулю «арбитр» символическую информацию о направлении, в котором нужно двигаться, чтобы следовать запланированному маршруту, и о местности, с которой автомобиль сталкивается в данный момент. Нейросетевые модули в основном задействованы для оценки обстановки и вождения транспортного средства.

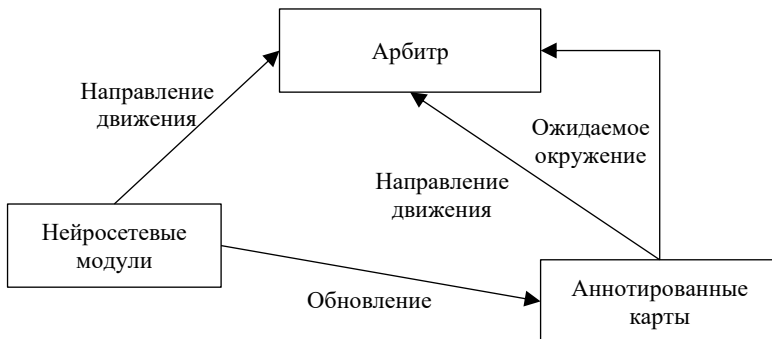


Рис. 6. Компоненты системы управления транспортным средством на основе аннотированных карт и их взаимодействие

В работе [34] предложена модель классификации функций цитирования, объединяющая онтологии со сверточными нейронными сетями. В модели онтологии используются для семантического представления характеристик автора и цитат. Это представление далее включено в нейросетевую модель для последующей классификации цитат.

В [35] описан схожий гибридный рекомендательный подход на основе онтологии и нейронной сети в области кино, который объединяет фильтрацию на основе контента и коллаборативную фильтрацию. Причем его модуль генерации рекомендаций может использовать их или по отдельности, или вместе. Показано, что подобный гибридный рекомендательный подход может решать традиционные проблемы рекомендующих систем, такие как извлечение признаков, предсказание интенсивности, разреженность матрицы и проблему холодного старта.

Еще одна похожая работа [36] ориентирована на классификацию патентов в области медицины. Исходными данными для модели машинного обучения являются ключевые слова, найденные в тексте патента, и соответствующие им фрагменты предварительно построенной онтологии проблемной области. В работе [37] выполняется кластеризация документов, основанная на том же принципе, в работе [38] – классификация воздействий лекарств, а в работе [39] – поиска и классификации отношений в текстах. Авторы работ показывают, что результаты обучения предложенных ими моделей превосходят существующие, а также требуют меньшего числа обучающих примеров.

Обратная схема используется в работе [40] – онтология используется на завершающем этапе классификации изображений. В данной работе сначала решается задача сегментации, результатом которой является набор обнаруженных на изображении объектов. Данные объекты соотносятся с концептами предварительно построенной онтологией, а затем выполняется подсчет наиболее вероятного класса, к которому может относиться рассматриваемое изображение. Подход позволил существенно уменьшить число обучающих примеров (например, для успешного распознавания баскетбольных и футбольных мячей авторы использовали набор данных всего из 15 изображений).

**2.3.2. Жестко связанная архитектура.** В работе [41] представлена методология использования символьных знаний в глубоком обучении, основанная на семантической функции потерь, которая устанавливает связь между векторами выходов нейронной

сети и логическими ограничениями. Эта функция потерь показывает, насколько близка нейронная сеть к удовлетворению ограничений на ее выходе. Экспериментальная оценка показывает, что она эффективно направляет обучаемую нейронную сеть на достижение (близких к лучшим) результатов в многоклассовой классификации. Более того, она значительно повышает способность нейронной сети предсказывать структурированные объекты, такие как ранжирования и пути. Такие дискретные понятия весьма сложны для обучения, и тесная интеграция глубокого обучения и методов символьных рассуждений позволяет существенно повысить его эффективность.

Авторы работы [42] предлагают архитектуру NeurASP, основанную на двух компонентах. Данный подход основан на ранее описанной идее [43], которая предлагает концепцию описания вероятностных логических моделей. Первый компонент – это нейронная сеть, которая выдает вероятности фактов, обрабатываемых вторым компонентом – машиной обработки правил / наборов ответов (rule (answer set) engine). Такая архитектура позволяет перенести нагрузку по обработке логических правил (символьных знаний) с нейронной сети на машинную обработку правил. В результате, модели машинного обучения, построенные на основе архитектуры NeurASP, демонстрируют очень быструю сходимость в процессе обучения, что позволяет обучать их на малых данных. Возможным недостатком данного подхода является то, что он ориентирован на логические знания и не может работать с алгебраическими выражениями (кроме самых простых).

В работе [44] представлены два подхода к решению проблемы абдукции (процесс поиска входных значений, которые приводят к вычислению определенного выходного значения) в нейронных сетях. В одном из них используется коннекционистская модальная логика и перевод положений Хорна в модальные положения для создания ансамбля нейронных сетей, который вычисляет абдуктивные объяснения по принципу «сверху вниз». Другой подход объединяет нейро-символьные системы и абдуктивное логическое программирование и предлагает нейронную архитектуру, которая выполняет более систематическое вычисление альтернативных абдуктивных объяснений «снизу вверх». Оба подхода используют стандартные архитектуры нейронных сетей, которые уже известны как высокоэффективные в практических приложениях для обучения. В отличие от других работ, данная работа ориентирована на усиление интеграции логического вывода и обучения так, чтобы нейронная сеть обеспечивала бы механизмы для когнитивных вычислений,

индуктивного обучения и гипотетических рассуждений, а логика обеспечивала бы строгость и возможность объяснения, облегчая взаимодействие с внешним миром. Авторы не смогли определить преимущество одного из подходов над другим.

**2.3.3. Полностью интегрированная архитектура.** В работе [45] представлена схема OnML, которая обучает интерпретируемую модель с помощью основанного на онтологии метода выборки, для объяснения агностических моделей предсказания (рисунок 7). В отличие от других алгоритмов, данный алгоритм учитывает контекстную корреляцию между словами, описанными в предметных онтологиях, для генерации семантических объяснений. Чтобы сузить пространство поиска объяснений, что является основной проблемой длинных и сложных текстовых данных, разработан обучаемый алгоритм формирования «якорей», позволяющий извлекать объяснения локально. Приведенные эксперименты на двух наборах данных показывают, что данный подход генерирует более точные и глубокие объяснения по сравнению с базовыми подходами.

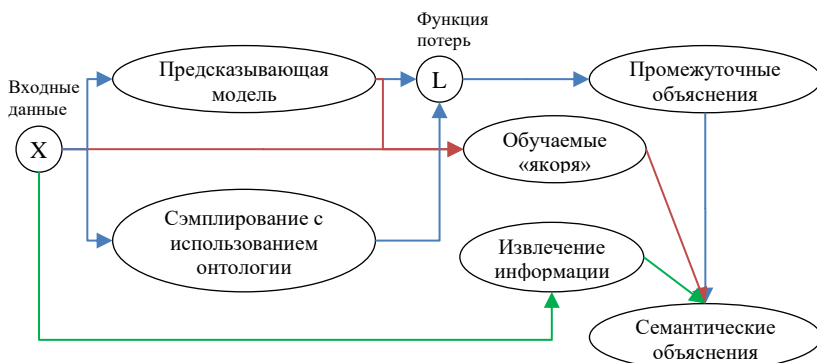


Рис. 7. Информационные потоки в схеме OnML

**3. Использование онтологий для объяснения результатов нейронных сетей.** Объяснимый искусственный интеллект является перспективным направлением исследований [46] и оказывается востребованным в различных прикладных областях – например, медицине [47], образовании [48]. Идет активная разработка методов объяснения нейронных сетей [1, 49] – значимым направлением при разработке методов объяснения является использование символических структур, понятных человеку (например, правил [50], причинно-следственных связей [51]). В данной статье акцент также сделан

на методах обеспечения объяснимости за счет использования символьных структур, однако в качестве таких структур рассматриваются онтологии проблемной области.

Основными задачами обзора является идентификация существующих методов онтолого-ориентированного объяснения и выявление основных технических и методологических проблем, связанных с подобным объяснением.

В исследовании поставлены следующие вопросы:

1. Какие существуют постановки (разновидности) задачи онтолого-ориентированного объяснения?

2. Как онтологии используются для формирования объяснений?

3. Как влияет использование онтологий на «понимаемость» объяснений (способность пользователя интерпретировать предложенное объяснение и делать выводы на его основе)?

4. Как измеряется качество методов объяснения?

5. Влияет ли объяснимость на точность предсказаний нейронной сети?

Данный раздел структурирован в соответствии с ответами на поставленные вопросы.

Помимо этого, отмечается, какие именно онтологии чаще всего используются в подобных публикациях, и в каких прикладных областях делается больше всего попыток обеспечить онтолого-ориентированную объяснимость.

Что касается используемых онтологий, то в большинстве случаев это небольшие онтологии, сконструированные авторами. Иногда эти онтологии составлены на языке OWL, но в большинстве случаев описываются просто как набор высказываний дескрипционной логики или иерархии понятий (которая является лишь основой онтологии). Широко известные онтологии используются лишь в нескольких работах – это Gene Ontology – GO [52, 53], ICD-9 [54] и иерархия понятий WordNet [55].

Среди областей практических применений (вполне ожидаемо) лидирует медицина [52 – 54, 56 – 58]. На втором месте – финансы [56 – 58]. В значительной части публикаций рассматриваются достаточно условные примеры, не имеющие выраженной практической направленности.

В целом, позиционировать онтолого-ориентированные методы объяснения нейронных сетей среди всех прочих методов можно следующим образом. В подавляющем большинстве методов объяснения нейронных сетей под объяснением понимают



идентификацию входов и частей модели (например, нейронов), в наибольшей степени «ответственных» за результат. В контексте некоторых задач (например, предсказание фенотипа по экспрессии генов) подобные методы не позволяют получить понятное объяснение. Объяснение должно быть дополнено знаниями проблемной области [52]. В ряде публикаций отмечается, что многие методы объяснений предназначены, в первую очередь, для специалистов по ИИ, а не для конечных пользователей [2], и цель интеграции нейросетевых моделей и символьных знаний заключается именно в повышении интерпретируемости для конечного пользователя.

При этом нужно помнить, что любой подход к достижению объяснимости исходит из того, что на некотором уровне абстракции уже не требуется дальнейших объяснений [59]. В этом смысле, онтолого-ориентированные методы и «классические» (например, градиентные (GradCAM) или методы, основанные на окклюзиях), занимают разные ниши (выбирают различные уровни абстракции, при которых объяснения не нужны). В большинстве онтолого-ориентированных методов предполагается, что задача нейронной сети может быть разбита на две подзадачи – 1) переход от «сырых» наблюдений (данных) к понятиям (символам), 2) получение конечного результата посредством манипуляции с понятиями (символами). При этом объясняемой частью является именно символьная, а первая подзадача – переход к символам – считается не требующей объяснений. В то время как в классических (и более распространенных) методах наличие символьной составляющей вообще игнорируется, и объяснение строится на основе исходных признаков задачи (входов нейронной сети), что имеет два следствия. Во-первых, указанное допущение в определенной степени ограничивает область применения онтолого-ориентированных методов – для того, чтобы их применение было целесообразным должна быть возможность действительно сформировать решение задачи как символьной (в частности, должен существовать адекватный набор символов, чтобы целевая переменная могла быть с их помощью выражена). Во-вторых, онтолого-ориентированные и классические методы могут достаточно эффективно дополнять друг друга, формируя объяснения на разных уровнях абстракции.

**3.1. Постановки задачи онтолого-ориентированного объяснения нейронных сетей.** В области объяснимых моделей машинного обучения (не обязательно онтолого-ориентированных) принято подразделять методы по двум критериям:

1. Характер взаимосвязи процессов получения результата модели и получения объяснения.

2. Характер объяснения – связано ли оно с одним образцом или общей логикой работы модели машинного обучения.

Оба эти критерия остаются вполне валидными и применительно к онтолого-ориентированным объяснениям – практически в каждом классе методов, порождаемом подобной классификацией, к настоящему моменту предложены и способы использования онтологий. Остановимся подробнее на этих классах.

По характеру взаимосвязи процесса получения результата модели и процесса получения объяснения разделяют самообъяснимые модели и так называемые *post-hoc* (ретроспективные) методы. В первом случае объяснение порождается одновременно с результатом модели и, в каком-то смысле, неотъемлемо от него. Для описания этого класса моделей иногда используют метафору *glass-box* («стеклянный ящик»), имея в виду, что логика принятия решения видна сквозь его «стенки». Во втором случае сам способ получения результата является менее понимаемым, и для его интерпретации требуется использование какой-то дополнительной инфраструктуры (модели, алгоритма и т.п.). Для описания подобных моделей часто используется метафора *black-box* («черный ящик»), а ретроспективный метод объяснения дает наблюдателю (всегда косвенное) представление о том, как такая модель может работать. Существует довольно популярная точка зрения [60], что для ответственных применений плохи не только традиционные «черные ящики», но и их ретроспективные объяснения, и настоящее доверие вызывают только самообъяснимые модели. В этом смысле использование «черных ящиков» и их ретроспективных объяснений является в какой-то мере компромиссом.

По характеру объяснения методы принято делить на локальные и глобальные. Глобальные методы позволяют объяснить всю логику работу модели (например, представить ее в виде понятного человеку алгоритма), а локальные – лишь объяснить, почему был получен тот или иной результат для конкретного образца (например, какие признаки внесли в это наибольший вклад).

**3.1.1. Самообъяснимые (*self-explainable*) модели.** Основной техникой, используемой в различных самообъяснимых нейросетевых моделях, является явное определение соответствия между (каждым) концептом онтологии и каким-либо элементом (либо целым фрагментом) нейронной сети.

При этом нейроны, соответствующие концептам, могут быть как внутренними узлами сети (например, в [52] нейронная сеть имеет иерархическую структуру, определяемую структурой онтологии), так и – этот вариант встречается наиболее часто – образовывать последний слой нейронной сети [53, 55, 59, 61, 62], при этом структура сети напоминает структуру, используемую при многозначной (multi-label) классификации.

Основным механизмом установления соответствия между нейронами и концептами является функция потерь. В простейшем случае, когда все нейроны, связанные с концептами, размещаются в последнем слое, функция потерь может быть обыкновенной (например, бинарная энтропия). Здесь соответствие достигается благодаря тому, что каждый образец обучающей выборки должен быть размечен всеми концептами, к которым он относится, соответственно, предсказание каждого из нейронов-концептов непосредственно учитываются в расчете значения функции потерь. Более сложный вариант – дополнительно отразить в функции потерь какие-то из логических ограничений, описанных в онтологии. Так, в [52] функция потерь содержит штраф на силу таких связей между нейронами (коэффициентов), которые не описаны в онтологии.

После идентификации концептов сам результат модели формируется с помощью какого-либо объяснимого метода (например, логистической регрессии [53, 55, 61, 62]) или машиной логического вывода [59]. Таким образом, полученный результат оказывается трактуем уже в терминах онтологии по способу своего получения. Однако связь с исходными признаками, как правило, оказывается за пределами уровня абстракции, рассматриваемого соответствующим методом (вводное замечание про различные уровни объяснений).

Схожие идеи могут использоваться и для дополнительной верификации предсказаний «черного ящика». Так, в [63] предлагается концепция объяснимой системы распознавания, в которой используется своего рода «двойная проверка» – помимо целевой модели классификации обучаются модели для каждого из важных (по определению) свойств объекта (определенных в онтологии), и если все предсказания оказываются согласованными, то пользователь может получить и сам результат классификации и его объяснение, иначе – предупреждение о несогласованности.

Менее распространенной техникой является модификация исходного признакового пространства, попытка сделать его более нагруженным семантически и за счет этого сделать стандартные

методы объяснения более понятными неспециалисту. Подобное решение предлагается, например, в [64].

### **3.1.2. Ретроспективные (post-hoc) методы объяснения.**

Основным подходом к построению ретроспективных онтолого-ориентированных методов объяснения является построение объяснимой аппроксимации (приближения) модели «черного ящика», то есть такой модели, которая будет давать приблизительно такие же результаты, что и модель «черный ящик». При этом аппроксимация может быть как глобальной (для любой области признакового пространства), так и локальной (для «окрестности» определенного образца).

В рамках этого подхода было найдено два метода (что характерно, в обоих методах в роли аппроксимирующей модели выступает дерево решений). В первом [56 – 58] – онтология используется при построении дерева решений для повышения его интерпретируемости. При оценке потенциальных разбиений (в ходе построения дерева решений) авторы метода учитывают общность концепта по его положению в онтологии, стараясь сначала использовать более общие. Во втором [54] – онтологии используются для формирования синтетической обучающей выборки для обучения аппроксиматора в окрестности объясняемого образца. В частности, онтологии позволяют: а) отобрать семантически близкие образцы (истории болезни, в которых есть близкие коды болезней), б) сформировать синтетические истории, вычеркивая семантически близкие состояния.

Одной из серьезных проблем, связанных с ретроспективным объяснением с помощью аппроксиматоров, является то, что аппроксиматор, в сущности, лишь косвенно связан с объясняемой моделью.

Принципиально иным подходом к онтолого-ориентированному ретроспективному объяснению нейронных сетей является подход, идея которого предложена в [65] и развивается в [66, 67]. В [65, 66] показано, что внутренние представления нейронной сети, обученной решению определенной задачи, при определенных условиях могут быть сопоставлены с концептами онтологии проблемной области. Это позволяет, в частности, определить набор концептов онтологии, связанных с образцом, обрабатываемым сетью, и сформировать объяснение как онтологический вывод на базе известного набора концептов. Одной из проблем здесь является поиск множества нейронов сети, активации которых наиболее информативны для

извлечения того или иного концепта. Алгоритмы для решения этой задачи предложены в работах [65] и [67].

**3.2. Использование онтологий для формирования объяснений.** Выявлено несколько способов использования онтологий для формирования самих объяснений.

Возможно, наиболее очевидный способ – это использование логических машин вывода. Сначала с помощью какого-либо способа (выходящего за рамки формируемых объяснений) выясняется набор концептов, связанных с образцом. Затем, считая образец анонимным индивидом онтологии, формируется набор высказываний, связывающих его с найденными концептами. Наконец, инициируется логический вывод, позволяющий на основе полученного таким образом описания образца и определений концептов, описанных в онтологии, получить факт принадлежности концепта целевому классу (классу, на определение которого обучена объясняемая модель). Совокупность аксиом, задействованных при этом, и правил вывода образуют объяснение. Такое объяснение, опирающееся на формальную логику, предлагается в работе [65]. Для небольших онтологий такая схема может быть существенно ускорена посредством подготовки специальных тензоров и производиться на GPU [59]. Следует заметить, что выделение связанных концептов зачастую является вероятностным, что может учитываться и машиной вывода. Объяснение также может формироваться как обобщение с помощью индуктивного логического программирования [68]. В [63] также используется вариация этого способа, только производится сравнение целевого класса, полученного с помощью вывода, и класса, полученного с помощью оригинальной модели (которую нужно объяснить) – если результаты различаются, то пользователь уведомляется о низкой уверенности системы классификации.

В ряде рассмотренных методов онтологии используются косвенно. Они позволяют получить набор некоторых признаков, хорошо понятных пользователю, а значит, делают любые методы объяснения, показывающие влияние признаков на итоговый результат модели, более понятными конечному пользователю. Сюда, например, можно отнести множество самообъяснимых моделей, в которых выделяется слой концептов, над которым определяется логистическая регрессия [55, 62], и некоторые другие [52, 69]. Поскольку многие самообъяснимые модели предполагают установление однозначной связи между нейроном и концептом, то методы, показывающие вклад нейрона в предсказание (например, Layer-wise relevance propagation), становятся более содержательными [52]. Похожий принцип

используется и в работе [64], где предлагается создание специальных легко интерпретируемых семантических признаков (атрибутов) классифицируемых объектов.

Еще более опосредованно онтологии используются в методах [56 – 58]. Здесь объяснения следуют из дерева решений (определяются путем в дереве от корня до листа), но узлы этого дерева упорядочены в соответствии с общностью терминов, определяемой онтологией, что потенциально делает его более интерпретируемым.

В [54] онтологии не используются для объяснений. Они используются для формирования синтетической обучающей выборки для обучения аппроксиматора в окрестности объясняемого примера.

Основные подходы к постановке задачи онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта и соответствующие методы формирования объяснений сведены в таблице 1.

Таблица 1. Основные классы методов онтолого-ориентированного объяснения нейросетевых моделей

Класс	Механизм объяснения	Работы
Самообъяснимая модель	Концепты соответствуют внутренним узлам сети	[52]
	Концепты соответствуют последнему слою, логистическая регрессия	[53, 55, 61, 62]
	Концепты соответствуют последнему слою, логический вывод	[59]
	Семантические входные признаки	[64]
Ретроспективный	Аппроксимация сети деревом решений	[56 – 58]
	Сети отображения (активаций нейронной сети в концепты)	[65, 67]

### 3.3. Влияние онтологий на понимаемость объяснений.

Несмотря на то, что «понижаемость» объяснений является одним из основополагающих вопросов, в подавляющем большинстве работ не приводится подобной оценки, авторы ограничиваются лишь общим тезисом о том, что использование понятных эксперту концептов делает объяснение более понимаемым. Поскольку никакой численной оценки обычно не проводится, то, очевидно, не сложилось и устоявшихся методик оценки подобного влияния.

Единственной работой (это цикл публикаций одних и тех же авторов, в которых излагается, в сущности, один и тот же алгоритм – TREPAN), где делается попытка экспериментально оценить

понимаемость онтолого-ориентированных объяснений, является [56 – 58]. Экспериментальное исследование основано на использовании наборов данных из области медицины и финансов. Испытуемым (не являющимся экспертами в области машинного обучения и анализа данных) после показа общего ролика о деревьях решений было предложено две задачи:

- классификация (демонстрируется объект и дерево решений, нужно осуществить классификацию, используя данное дерево);
- инспектирование (оценить истинность высказывания – например, «вы мужчина, ваш доход влияет на вероятность выдачи кредита»).

По задачам фиксировалась правильность ответа, уверенность, время, понятность дерева (по субъективной оценке испытуемого). Было показано, что построение деревьев решений с учетом онтологий действительно позволяет упростить работу с ними (и сделать их более понятными).

По всей видимости, подобный подход к оценке понимаемости, в рамках которого оценивается способность людей интерпретировать те или иные виды объяснений, является достаточно перспективным.

Достаточно опосредованной, но тем не менее потенциально полезной оценкой (применительно к некоторым видам объяснений) является структурная сложность. В частности, она оказывается хорошо применима к методам ретроспективного объяснения с помощью аппроксимации сети деревом решений [54].

**3.4. Оценка качества метода объяснений.** Помимо оценки понимаемости получаемых объяснений, которая, как отмечено выше, практически никем не проводится, методы формирования объяснений могут оцениваться по следующим характеристикам.

Для методов аппроксимации:

- достоверность (fidelity) – точность воспроизведения объяснимой моделью «черного ящика» на синтетических примерах, на которых обучается объясняющая модель (аппроксимация);
- попадание (hit) – совпадение предсказаний объяснимой аппроксимации и «черного ящика».

Для ретроспективных объяснений с помощью извлечения концептов важным оказывается точность выделения концептов. Соответственно, в [65] объясняющая модель оценивается по тому, использует ли объяснение только релевантные образцу концепты.

**3.5. Влияние объяснимости на точность предсказаний нейронной сети.** Ретроспективные методы объяснения не оказывают влияния на точность предсказаний нейронной сети (в этом

заключается один из существенных плюсов, связанных с их использованием).

Что касается самообъяснимых сетей, то ситуация не столь однозначна. В большинстве исследований привнесение в модель объяснимости приводило к небольшой деградации предсказательной силы (точности) [52, 55 – 58, 61, 63]. Насколько критична эта деградация по сравнению с приобретенным пониманием модели, очевидно, зависит от задач.

Тем не менее, в определенных случаях, онтолого-ориентированная объяснимость не вредит качеству предсказаний. Так, авторы [54] указывают, что качество предсказаний онтолого-ориентированной объяснимой модели оказалось хуже, чем неинтерпретируемой, однако лучше, чем интерпретируемой без использования онтологий. В [62] отмечается, что качество предсказаний модели такое же, как и у неинтерпретируемой модели, но обучение требует меньшего числа примеров. Наконец, в [53] качество оказалось даже лучше, чем в неинтерпретируемых моделях. Подобные внушающие оптимизм результаты связываются с тем, что в некоторых случаях объяснимость сопровождается переносом знаний, закодированных в виде онтологии, в нейронную сеть. Такой перенос способен как ускорить обучение, так и позволить добиться более качественных предсказаний.

**4. Заключение.** В обзоре представлены подходы к созданию интеллектуальных систем с использованием методов машинного обучения, архитектур, объединяющих символьные знания и субсимвольные (нейросетевые) знания, а также моделей представления символьных знаний в нейронных сетях с использованием онтологий.

Онтологическое моделирование применяется на разных уровнях. Так, выделяют базовые онтологии (или онтологии верхнего уровня), онтологии задач, онтологии проблемных областей. На настоящий момент, подавляющее большинство методов онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта ориентировано на использование онтологий проблемных областей – они применяются как в качестве априорных знаний для повышения качества чисто нейросетевых решений, так и для проблемно-ориентированных объяснений. Поскольку рассмотренные методы используют, в первую очередь, структуру онтологии, определяемую языком, на котором реализована онтология (и соответствующей дескрипционной логикой), это связано, по всей видимости, с тем, что использование концептов онтологии проблемной области является наиболее востребованным



(для эксперта), нежели с какими-то ограничениями самих методов. Так, онтология задач может оказаться востребованной при построении ИИ-агентов для классификации или формирования структур процессов.

Подходы к созданию интеллектуальных систем с использованием методов машинного обучения в большей степени ориентированы на различные макро-сценарии использования методов машинного обучения в интеллектуальных системах. Показано, что «нейросетевое приближение» в основном ориентировано на использование методов машинного обучения для аппроксимации имеющихся знаний с помощью нейронных сетей; «нейросетевое рассуждение» – на реализацию методов логического вывода и доказательства теорем; «интроспекция» – на обучение искусственных нейронных сетей в процессе «наблюдения» за другими моделями ИИ; а «интегрированное получение знаний» – на обучение искусственных нейронных сетей в процессе «наблюдения» за экспертами, что в наибольшей степени соответствует процессам, происходящим при коллаборативной поддержке принятия решений.

Архитектуры, объединяющие символьные знания и субсимвольные (нейросетевые) знания, в свою очередь, ориентированы именно на объединение указанных знаний в единые комбинированные модели не зависимо от сценариев их использования. На настоящий момент предложено достаточно много архитектур представления символьных знаний в нейронных сетях. Рассмотренные работы показывают более высокую эффективность моделей машинного обучения, комбинирующих символьные и субсимвольные (нейросетевые) знания, по сравнению с «классическими» нейросетевыми моделями по показателям точности. Кроме того, как правило, обучение таких комбинированных моделей требует существенно меньших объемов обучающих данных, что позволяет говорить о возможности их обучения на малых данных. Большинство из рассмотренных архитектур комбинированных моделей и моделей представления символьных знаний в них равно эффективны и их выбор в первую очередь определяется решаемой конкретной прикладной задачей (таблица 2).

Так, в случае наличия отдельных онтологий, описывающих знания проблемной области, которые являются динамичными (развивающимися), целесообразно применение гибридной модульной архитектуры, разделяющей символьные и нейросетевые знания, поскольку в этом случае символьные знания могут корректироваться в некоторой степени, не затрагивая нейросетевые. В противном случае

(работа со статичными знаниями), унифицированная и трансформационная архитектуры выглядят более привлекательно в силу гибкости и многообразия способов внедрения символьных знаний в нейросетевые модели.

В системах коллаборативной поддержки принятия решений, как правило, целесообразно использование нескольких онтологий [70], охватывающих различные аспекты проблемы, что обуславливает предпочтительность применения именно гибридной модульной архитектуры. При этом, необходимость двустороннего обмена знаниями между человеком и ИИ подразумевает применение ее полностью интегрированного варианта. Вопрос о выборе модели представления знаний в данном случае становится менее актуальным, поскольку знания не встраиваются напрямую в нейросетевые модели.

Таблица 2. Преимущества и недостатки архитектур, объединяющие символьные знания и нейросетевые знания

Архитектуры, объединяющие символьные знания и нейросетевые знания	Преимущества	Недостатки
Унифицированная	– Многообразие способов внедрения символьных знаний в нейросетевые модели.	– Существенная зависимость символьных и субсимвольных знаний друг от друга.
Трансформационная	– Многообразие способов внедрения символьных знаний в нейросетевые модели. – Способность извлечения символьных знаний из субсимвольных.	– Ограниченная область использования.
Гибридная модульная	– Символьные и субсимвольные знания в значительной степени независимы друг от друга.	– Ограниченные механизмы взаимодействия символьных и субсимвольных знаний.

Основные рекомендации по выбору методов объяснения, сформулированные в результате обзора, сведены в таблице 3. Преимуществом самообъяснимых сетей, как правило, является то, что

в них процесс формирования объяснения напрямую связан с получением результата, а значит, объяснение в большей степени описывает логику принятия решения сетью. Однако в таких моделях зачастую накладываются определенные ограничения на структуру сети, что может снижать ее качество (точность получаемых результатов). Преимуществом же ретроспективных методов является то, что они потенциально могут применяться к любым сетям (в том числе и к тем, процесс обучения которых не контролируется), однако между реальной логикой работы сети и ее онтолого-ориентированным объяснением возможно расхождение.

Одной из наиболее серьезных исследовательских проблем, выявленных в ходе обзора, является отсутствие принятой и широко используемой методики для оценки понимаемости объяснений и, в частности, влияния использования онтологий на понимаемость. В связи с этим целесообразным представляется проведение исследований, направленных на разработку такой методики, что потенциально может оказать интеграционный эффект на рассматриваемую область.

Таблица 3. Преимущества и недостатки подходов к онтолого-ориентированному объяснению нейронных сетей

Подход к объяснению	Преимущества	Недостатки
Самообъяснимая модель	– Процесс формирования объяснения напрямую связан с получением результата, а значит, объяснение в большей степени описывает логику принятия решения сетью.	– Накладываются определенные ограничения на структуру сети, что может снижать ее качество (точность получаемых результатов).
Ретроспективный	– Потенциально могут применяться к любым сетям (в том числе и к тем, процесс обучения которых не контролируется).	– Возможно расхождение между реальной логикой работы сети и ее объяснением.

Что касается конкретных методов онтолого-ориентированного объяснения нейронных сетей, то наиболее перспективными являются следующие направления:

1. Ретроспективные объяснения, построенные не на аппроксимации, а на исследовании внутренних представлений,

порождаемых глубокими нейронными сетями. Потенциально они применимы к любым сетям, гарантированно не ведут к деградации предсказаний и могут помочь избежать «разрыва» между предсказаниями «черного ящика» и аппроксиматора, характерного для объяснений через аппроксимацию.

2. Самообъяснимые модели, использующие знания проблемной области, закодированные в форме онтологий. Подобные разновидности самообъяснимых моделей могут обеспечивать качество предсказаний не хуже, чем у неинтерпретируемых моделей, однако при этом обеспечивают объяснимость в «наилучшем» варианте – когда сам процесс формирования решения и его объяснение совпадают. Подобные эффекты характерны, например, для вариантов гибридной модульной архитектуры использования априорных знаний (с учетом того, что объяснимой является только та часть результата, которая связана с работой машин вывода).

В целом, методы онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта ориентированы на решение преимущественно задач классификации, в которых используемые онтологии задают адекватную понятийную базу (если набор концептов, предусматриваемых онтологией, оказывается недостаточным для выражения правила классификации, то и ценность онтолого-ориентированного решения, скорее всего, окажется невысокой). Таким образом, ограничением для подобных методов них является наличие качественных, проработанных онтологий, а особенно перспективным представляется применение подобных методов в областях, где развитию и использованию онтологий уделяется большое внимание (например, биология и медицина).

Среди наиболее перспективных направлений развития методов онтолого-ориентированного нейро-символического интеллекта можно выделить следующие. Во-первых, преодоление основных ограничений (связанных с наличием качественных онтологий) посредством создания комплексных автоматизированных методов, обеспечивающих как извлечение концептов (и наполнение онтологий), так и их использование – одним из путей здесь может быть конвергенция с мощными языковыми моделями и исследование внутренних представлений нейросетевых классификаторов. Во-вторых, расширение области применения на более сложные задачи (за пределами классификации) – например, создание методов формирования объектов на основе генеративно-состязательных сетей с ограничениями, задаваемыми с помощью онтологий.

**Литература**

1. Burkart N., Huber M.F. A survey on the explainability of supervised machine learning // *J. Artif. Intell. Res.* 2021. vol. 70. pp. 245–317.
2. Futia G., Vetrò A. On the integration of knowledge graphs into deep learning models for a more comprehensible AI-Three challenges for future research // *Inf.* 2020. vol. 11. no. 2. DOI: 10.3390/info11020122.
3. Smirnov A., Ponomarev A. Human-Machine Collective Intelligence Environment for Decision Support: Conceptual and Technological Design // *27th Conference of Open Innovation Association, FRUCT.* 2020. pp. 330–336. DOI: 10.23919/FRUCT49677.2020.9211077.
4. Fernback J. *Symbolic Interactionism in Communication* // Communication. Oxford University Press, 2019.
5. Garcez A. d'Avila, Lamb L.C. *Neurosymbolic AI: The 3rd Wave.* 2020. 37 p. DOI: 10.48550/arXiv.2012.05876.
6. Радюш Д.В. Применение нейро-символьных моделей в разработке вопросно-ответных систем // *XI конгресс молодых учёных. Санкт-Петербург, 2022. Т. 2. С. 122–126.*
7. Каширин И.Ю. Нейронные сети, использующие модели знаний // *Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2021.* 2021. С. 9–13.
8. Ulsch A. The Integration of Neural Networks with Symbolic Knowledge Processing // *New Approaches in Classification and Data Analysis.* 1994. pp. 445–454.
9. Picco G. et al. Neural Unification for Logic Reasoning over Natural Language. Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP. 2021. pp. 3939–3950. DOI: 10.48550/arXiv.2109.08460.
10. Грибова В.В., Гельцер Б.И., Шахгельдян К.И., Петряева М.В., Шалфеева Е.А., Костерин В.В. Гибридная технология оценки рисков и прогнозирования в кардиологии // *Врач и информационные технологии.* 2022. № 3. С. 24–35. DOI: 10.25881/18110193\_2022\_3\_24.
11. Wermter S., Sun R. An Overview of Hybrid Neural Systems // *Lect. Notes Artif. Intell. Subseries Lect. Notes Comput. Sci.* Springer. 2000. vol. 1778. pp. 1–13.
12. Garcez A. d'Avila et al. Neural-Symbolic Computing: An Effective Methodology for Principled Integration of Machine Learning and Reasoning. 2019. vol. 6 no. 4. pp. 611–632. DOI: 10.48550/arXiv.1905.06088.
13. Tran S.N., d'Avila Garcez A.S. Deep Logic Networks: Inserting and Extracting Knowledge From Deep Belief Networks // *IEEE Trans. Neural Networks Learn. Syst.* 2018. vol. 29. no. 2. pp. 246–258.
14. Poon H., Domingos P. Sum-Product Networks: A New Deep Architecture. *IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCV Workshops).* 2012. DOI: 10.48550/arXiv.1202.3732.
15. Muggleton S. Inverse entailment and progol // *New Gener. Comput.* 1995. vol. 13. no. 3–4. pp. 245–286.
16. Dong H., Mao J., Lin T., Wang C., Li L., Zhou D. et al. Neural Logic Machines. *International Conference on Learning Representations.* 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1904.11694.
17. Evans R., Grefenstette E. Learning Explanatory Rules from Noisy Data. *Journal of Artificial Intelligence Research.* 2017. vol. 61. pp. 1–64. DOI: 10.48550/arXiv.1711.04574.
18. Gori M. *Machine Learning: A Constraint-Based Approach.* Morgan Kaufmann, 2017. 580 p.
19. Garcez A.S. d'Avila, Lamb L.C. Reasoning about time and knowledge in neural-symbolic learning systems // *NIPS'03: Proceedings of the 16th International Conference on Neural Information Processing Systems.* 2003. pp. 921–928.

20. Borges R.V., d'Avila Garcez A., Lamb L.C. Learning and Representing Temporal Knowledge in Recurrent Networks // *IEEE Trans. Neural Networks*. 2011. vol. 22. no. 12. pp. 2409–2421.
21. Penning L. de et al. A Neural-Symbolic Cognitive Agent for Online Learning and Reasoning // *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2011)*. 2011. pp. 1653–1658. DOI: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-278.
22. Palangi H. et al. Question-Answering with Grammatically-Interpretable Representations. *The Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-18)*. 2017. pp. 5350–5357.
23. Fletcher J., Obradovi Z. Combining Prior Symbolic Knowledge and Constructive Neural Network Learning // *Conn. Sci.* 1993. vol. 5. no. 3–4. pp. 365–375.
24. Towel G.G., Shavlik J.W., Noordewier M.O. Refinement of Approximate Domain Theories by Knowledge-Based Neural Networks // *Eighth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*. 1990. pp. 861–866.
25. Pitz D.W., Shavlik J.W. Dynamically adding symbolically meaningful nodes to knowledge-based neural networks // *Knowledge-Based Syst.* 1995. vol. 8. no. 6. pp. 301–311.
26. Arabshahi F., Singh S., Anandkumar A. Combining Symbolic Expressions and Black-box Function Evaluations in Neural Programs. *6th International Conference on Learning Representations*. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1801.04342.
27. Xie Y. et al. Embedding Symbolic Knowledge into Deep Networks // *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 2019. no. 32.
28. Hu Z. et al. Harnessing Deep Neural Networks with Logic Rules. 2016. pp. 2410–2420. DOI: 10.48550/arXiv.1603.06318.
29. Prem E. et al. Concept support as a method for programming neural networks with symbolic knowledge // *GWAI-92: Advances in Artificial Intelligence*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. 1992. pp. 166–175.
30. Shavlik J.W. Combining symbolic and neural learning // *Mach. Learn.* 1994. vol. 14. no. 3. pp. 321–331.
31. Li Y., Ouyang S., Zhang Y. Combining deep learning and ontology reasoning for remote sensing image semantic segmentation // *Knowledge-Based Syst.* 2022. vol. 243. pp. 108469.
32. Dash T., Srinivasan A., Vig L. Incorporating symbolic domain knowledge into graph neural networks // *Mach. Learn.* 2021. vol. 110. no 7. pp. 1609–1636.
33. Pomerleau D.A., Gowdy J., Thorpe C.E. Combining artificial neural networks and symbolic processing for autonomous robot guidance // *Eng. Appl. Artif. Intell.* 1991. vol. 4. no. 4. pp. 279–285.
34. Bakhti K. et al. Citation Function Classification Based on Ontologies and Convolutional Neural Networks // *Commun. Comput. Inf. Sci.* 2018. vol. 870. pp. 105–115.
35. Deng Y. et al. A Hybrid Movie Recommender Based on Ontology and Neural Networks // *2010 IEEE/ACM Int'l Conference on Green Computing and Communications & Int'l Conference on Cyber, Physical and Social Computing*. IEEE, 2010. pp. 846–851.
36. Trappey A.J.C. et al. Ontology-based neural network for patent knowledge management in design collaboration // *Int. J. Prod. Res.* 2013. vol. 51. no. 7. pp. 1992–2005.
37. Hung C., Wermter S. Neural Network Based Document Clustering Using WordNet Ontologies // *Int. J. Hybrid Intell. Syst.* 2005. vol. 1. no. 3–4. pp. 127–142.

38. Hinnerichs T., Hoehndorf R. DTI-Voodoo: machine learning over interaction networks and ontology-based background knowledge predicts drug–target interactions / ed. Wren J. // *Bioinformatics*. 2021. vol. 37. no. 24. pp. 4835–4843.
39. Lamurias A. et al. BO-LSTM: classifying relations via long short-term memory networks along biomedical ontologies // *BMC Bioinformatics*. 2019. vol. 20. no. 1. pp. 10.
40. Breen C., Khan L., Ponnusamy A. Image classification using neural networks and ontologies // *Proceedings. 13th International Workshop on Database and Expert Systems Applications. IEEE Comput. Soc, 2002*. pp. 98–102.
41. Xu J. et al. A Semantic Loss Function for Deep Learning with Symbolic Knowledge // *Proc. Mach. Learn. Res.* 2018. vol. 80. pp. 5502–5511.
42. Yang Z., Ishay A., Lee J. NeurASP: Embracing Neural Networks into Answer Set Programming // *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence. California: International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 2020*. pp. 1755–1762.
43. Lee J., Wang Y. Weighted Rules under the Stable Model Semantics // *Proceedings, Fifteenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2016)*. 2016. pp. 145–154.
44. Garcez A.S. d’Avila et al. Abductive reasoning in neural-symbolic systems // *Topoi*. 2007. vol. 26. no. 1. pp. 37–49.
45. Lai P. et al. Ontology-based Interpretable Machine Learning for Textual Data // *2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN)*. IEEE, 2020. pp. 1–10.
46. Аверкин А.Н. Объяснимый искусственный интеллект: итоги и перспективы // *Интегрированные модели и мягкие вычисления в искусственном интеллекте (ИММВ-2021)*. Сборник научных трудов X-й Международной научно-технической конференции. 2021. С. 153–174.
47. Карпов О.Э., Андриков Д.А., Максименко В.А., Храмов А.Е. Прозрачный искусственный интеллект для медицины // *Врач и информационные технологии*. 2022. № 2. С. 4–11. DOI: 10.25881/18110193\_2022\_2\_4.
48. Захарова И.Г., Воробьева М.С., Боганюк Ю.В. Сопровождение индивидуальных образовательных траекторий на основе концепции объяснимого искусственного интеллекта // *Образование и наука*. 2022. Т. 24. № 1. pp. 163–190.
49. Шевская Н.В. Объяснимый искусственный интеллект и методы интерпретации результатов // *Моделирование, оптимизация и информационные технологии*. 2021. Т. 9. № 2(33). pp. 22.
50. Аверкин А.Н., Ярушев С.А. Обзор исследований в области разработки методов извлечения правил из искусственных нейронных сетей // *Известия Российской академии наук. Теория и системы управления*. 2021. № 6. С. 106–121.
51. Шевская Н.В., Охримук Е.С., Попов Н.В. Причинно-следственные связи в объяснимом искусственном интеллекте // *Международная конференция по мягким вычислениям и измерениям*. 2022. С. 170–173.
52. Bourgeais V. et al. Deep GONet: self-explainable deep neural network based on Gene Ontology for phenotype prediction from gene expression data // *BMC Bioinformatics*. BioMed Central, 2021. vol. 22. pp. 1–24.
53. Ma T., Zhang A. Incorporating Biological Knowledge with Factor Graph Neural Network for Interpretable Deep Learning. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1906.00537.
54. Panigutti C., Perotti A., Pedreschi D. Doctor XAI An ontology-based approach to black-box sequential data classification explanations // *FAT\* 2020 – Proceedings of the 2020 Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*. 2020. pp. 629–639.
55. Daniels Z.A. et al. A framework for explainable deep neural models using external knowledge graphs / Ed. Pham T., Solomon L., Rainey K. // *Proc. SPIE 11413*,

- Artificial Intelligence and Machine Learning for Multi-Domain Operations Applications IISPIE, 2020. pp. 73.
56. Confalonieri R. et al. An Ontology-based Approach to Explaining Artificial Neural Networks. 2019.
57. Confalonieri R. et al. Trepan reloaded: A knowledge-driven approach to explaining black-box models // *Front. Artif. Intell. Appl.* 2020. vol. 325. pp. 2457–2464.
58. Confalonieri R. et al. Using ontologies to enhance human understandability of global post-hoc explanations of black-box models // *Artif. Intell.* Elsevier, 2021. vol. 296. pp. 103471.
59. Bourguin G. et al. Towards Ontologically Explainable Classifiers. *Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN 2021*. 2021. pp. 472–484. DOI: [10.1007/978-3-030-86340-1\\_38](https://doi.org/10.1007/978-3-030-86340-1_38).
60. Rudin C. Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead // *Nat. Mach. Intell.* 2019. vol. 1. no. 5. pp. 206–215.
61. Voogd J. et al. Using Relational Concept Networks for Explainable Decision Support // 3rd IFIP Cross Domain Conference for Machine Learning and Knowledge Extraction (CD-MAKE). 2019. pp. 78–93. DOI: [10.1007/978-3-030-29726-8\\_6](https://doi.org/10.1007/978-3-030-29726-8_6).
62. Fong A.C.M., Hong G. Ontology-Powered Hybrid Extensional-Intensional Learning // *Proceedings of the 2019 International Conference on Information Technology and Computer Communications (ITCC2019)*. New York, USA: ACM Press, 2019. pp. 18–23.
63. Bellucci M. et al. Ontologies to build a predictive architecture to classify and explain // *DeepOntoNLP Workshop @ESWC 2022*. 2022.
64. Martin T. et al. Bridging the gap between an ontology and deep neural models by pattern mining // *The Joint Ontology Workshops, JOWO*. 2020. vol. 2708.
65. De Sousa Ribeiro M., Leite J. Aligning Artificial Neural Networks and Ontologies towards Explainable AI // *Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence*. 2021. vol. 35. no. 6. pp. 4932–4940.
66. Agafonov A., Ponomarev A. An Experiment on Localization of Ontology Concepts in Deep Convolutional Neural Networks // *The 11th International Symposium on Information and Communication Technology*. NY, USA: ACM, 2022. pp. 82–87.
67. Ponomarev A., Agafonov A. Ontology Concept Extraction Algorithm for Deep Neural Networks // 2022 32nd Conference of Open Innovations Association (FRUCT). IEEE, 2022. pp. 221–226.
68. Sarker M.K. et al. Wikipedia Knowledge Graph for Explainable AI // *KGSWC 2020, CCIS 1232*. 2020. pp. 72–87.
69. Abbass H.A. et al. Machine Education: Designing semantically ordered and ontologically guided modular neural networks // *IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*. IEEE, 2019. pp. 948–955.
70. Smirnov A. et al. Multi-aspect Ontology for Interoperability in Human-machine Collective Intelligence Systems for Decision Support // *Proceedings of the 11th International Joint Conference on Knowledge Discovery, Knowledge Engineering and Knowledge Management*. SCITEPRESS – Science and Technology Publications, 2019. pp. 458–465.

**Шилов Николай Германович** — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник, лаборатория интегрированных систем автоматизации, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: искусственный интеллект, управление знаниями, управление онтологиями, моделирование и конфигурирование сложных систем, машинное обучение. Число научных публикаций — 300. [nick@iias.spb.su](mailto:nick@iias.spb.su); 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-8071.



**Пономарев Андрей Васильевич** — канд. техн. наук, доцент, старший научный сотрудник, лаборатория интегрированных систем автоматизации, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: коллективный интеллект, крауд-вычисления, рекомендательные системы, машинное обучение. Число научных публикаций — 70. [ponomarev@iias.spb.su](mailto:ponomarev@iias.spb.su); 14 линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-8071.

**Смирнов Александр Викторович** — д-р техн. наук, профессор, главный научный сотрудник, руководитель лаборатории, лаборатория интегрированных систем автоматизации, Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр Российской академии наук (СПб ФИЦ РАН). Область научных интересов: системы поддержки принятия решений, интеллектуальные системы, интеллектуальное управление конфигурациями виртуальных и сетевых организаций, логистика знаний. Число научных публикаций — 400. [smir@iias.spb.su](mailto:smir@iias.spb.su); 14-я линия В.О., 39, 199178, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-8071.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-11-00214).

N. SHILOV, A. PONOMAREV, A. SMIRNOV  
**THE ANALYSIS OF ONTOLOGY-BASED NEURO-SYMBOLIC  
INTELLIGENCE METHODS FOR COLLABORATIVE DECISION  
SUPPORT**

*Shilov N., Ponomarev A., Smirnov A. The Analysis of Ontology-Based Neuro-Symbolic Intelligence Methods for Collaborative Decision Support.*

**Abstract.** The neural network approach to AI, which has become especially widespread in the last decade, has two significant limitations – training of a neural network, as a rule, requires a very large number of samples (not always available), and the resulting models often are not well interpretable, which can reduce their credibility. The use of symbols as the basis of collaborative processes, on the one hand, and the proliferation of neural network AI, on the other hand, necessitate the synthesis of neural network and symbolic paradigms in relation to the creation of collaborative decision support systems. The article presents the results of an analytical review in the field of ontology-oriented neuro-symbolic artificial intelligence with an emphasis on solving problems of knowledge exchange during collaborative decision support. Specifically, the review attempts to answer two questions: 1. how symbolic knowledge, represented as an ontology, can be used to improve AI agents operating on the basis of neural networks (knowledge transfer from a person to AI agents); 2. how symbolic knowledge, represented as an ontology, can be used to interpret decisions made by AI agents and explain these decisions (transfer of knowledge from an AI agent to a person). As a result of the review, recommendations were formulated on the choice of methods for introducing symbolic knowledge into neural network models, and promising areas of ontology-oriented methods for explaining neural networks were identified.

**Keywords:** neuro-symbolic AI, domain knowledge, machine learning, deep learning, explainable AI, XAI, ontology.

## References

1. Burkart N., Huber M.F. A survey on the explainability of supervised machine learning. *J. Artif. Intell. Res.* 2021. vol. 70. pp. 245–317.
2. Futia G., Vetrò A. On the integration of knowledge graphs into deep learning models for a more comprehensible AI-Three challenges for future research. *Inf.* 2020. vol. 11. no. 2. DOI: 10.3390/info11020122.
3. Smirnov A., Ponomarev A. Human-Machine Collective Intelligence Environment for Decision Support: Conceptual and Technological Design. Conference of Open Innovation Association, FRUCT. 2020. pp. 330–336. DOI: 10.23919/FRUCT49677.2020.9211077.
4. Fernback J. Symbolic Interactionism in Communication. Communication. Oxford University Press, 2019.
5. Garcez A. d'Avila, Lamb L.C. Neurosymbolic AI: The 3rd Wave. 2020. 37 p. DOI: 10.48550/arXiv.2012.05876.
6. Radyush D.V. [Application of neuro-symbolic models in question-answer systems] XI kongress molodyh uchyonyh [The 11th congress of young scientists]. Sankt-Peterburg, 2022. vol. 2. pp. 122–126. (in Russ.).
7. Kashirin I.Yu. [Neural networks using knowledge models] *Sovremennye tekhnologii v nauke i obrazovanii – STNO-2021 [Modern technologies in science and education]*. 2021. pp. 9–13. (in Russ.).

8. Ultsch A. The Integration of Neural Networks with Symbolic Knowledge Processing. *New Approaches in Classification and Data Analysis*. 1994. pp. 445–454.
9. Picco G. et al. Neural Unification for Logic Reasoning over Natural Language. *Findings of the Association for Computational Linguistics: EMNLP*. 2021. pp. 3939–3950. DOI: 10.48550/arXiv.2109.08460.
10. Gribova V.V. et al. [Hybrid technology of risk assessment and forecasting in cardiology]. *Vrach i informacionnye tekhnologii – Doctor and information technologies*. 2022. no. 3. pp. 24–35. (in Russ.).
11. Wermter S., Sun R. An Overview of Hybrid Neural Systems. *Lect. Notes Artif. Intell. Subseries Lect. Notes Comput. Sci.* Springer. 2000. vol. 1778. pp. 1–13.
12. Garcez A. d’Avila et al. Neural-Symbolic Computing: An Effective Methodology for Principled Integration of Machine Learning and Reasoning. 2019. vol. 6 no. 4. pp. 611–632. DOI: 10.48550/arXiv.1905.06088.
13. Tran S.N., d’Avila Garcez A.S. Deep Logic Networks: Inserting and Extracting Knowledge From Deep Belief Networks. *IEEE Trans. Neural Networks Learn. Syst.* 2018. vol. 29. no. 2. pp. 246–258.
14. Poon H., Domingos P. Sum-Product Networks: A New Deep Architecture. *IEEE International Conference on Computer Vision Workshops (ICCV Workshops)*. 2012. DOI: 10.48550/arXiv.1202.3732.
15. Muggleton S. Inverse entailment and prolog. *New Gener. Comput.* 1995. vol. 13. no. 3–4. pp. 245–286.
16. Dong H., Mao J., Lin T., Wang C., Li L., Zhou D. et al. Neural Logic Machines. *International Conference on Learning Representations*. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1904.11694.
17. Evans R., Grefenstette E. Learning Explanatory Rules from Noisy Data. *Journal of Artificial Intelligence Research*. 2017. vol. 61. pp. 1–64. DOI: 10.48550/arXiv.1711.04574.
18. Gori M. *Machine Learning: A Constraint-Based Approach*. Morgan Kaufmann, 2017. 580 p.
19. Garcez A.S. d’Avila, Lamb L.C. Reasoning about time and knowledge in neural-symbolic learning systems. *NIPS’03: Proceedings of the 16th International Conference on Neural Information Processing Systems*. 2003. pp. 921–928.
20. Borges R.V., d’Avila Garcez A., Lamb L.C. Learning and Representing Temporal Knowledge in Recurrent Networks. *IEEE Trans. Neural Networks*. 2011. vol. 22. no. 12. pp. 2409–2421.
21. Penning L. de et al. A Neural-Symbolic Cognitive Agent for Online Learning and Reasoning. *Proceedings of the 22nd International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI 2011)*. 2011. pp. 1653–1658. DOI: 10.5591/978-1-57735-516-8/IJCAI11-278.
22. Palangi H. et al. Question-Answering with Grammatically-Interpretable Representations. *The Thirty-Second AAAI Conference on Artificial Intelligence (AAAI-18)*. 2017. pp. 5350–5357.
23. Fletcher J., Obradovi Z. Combining Prior Symbolic Knowledge and Constructive Neural Network Learning. *Conn. Sci.* 1993. vol. 5. no. 3–4. pp. 365–375.
24. Towel G.G., Shavlik J.W., Noordewier M.O. Refinement of Approximate Domain Theories by Knowledge-Based Neural Networks. *Eighth National Conference on Artificial Intelligence (AAAI)*. 1990. pp. 861–866.
25. Pitz D.W., Shavlik J.W. Dynamically adding symbolically meaningful nodes to knowledge-based neural networks. *Knowledge-Based Syst.* 1995. vol. 8. no. 6. pp. 301–311.

26. Arabshahi F., Singh S., Anandkumar A. Combining Symbolic Expressions and Black-box Function Evaluations in Neural Programs. 6th International Conference on Learning Representations. 2018. DOI: 10.48550/arXiv.1801.04342.
27. Xie Y. et al. Embedding Symbolic Knowledge into Deep Networks. *Adv. Neural Inf. Process. Syst.* 2019. no. 32.
28. Hu Z. et al. Harnessing Deep Neural Networks with Logic Rules. 2016. pp. 2410–2420. DOI: 10.48550/arXiv.1603.06318.
29. Prem E. et al. Concept support as a method for programming neural networks with symbolic knowledge. *GWAI-92: Advances in Artificial Intelligence*. Berlin/Heidelberg: Springer-Verlag. 1992. pp. 166–175.
30. Shavlik J.W. Combining symbolic and neural learning. *Mach. Learn.* 1994. vol. 14. no. 3. pp. 321–331.
31. Li Y., Ouyang S., Zhang Y. Combining deep learning and ontology reasoning for remote sensing image semantic segmentation. *Knowledge-Based Syst.* 2022. vol. 243. pp. 108469.
32. Dash T., Srinivasan A., Vig L. Incorporating symbolic domain knowledge into graph neural networks. *Mach. Learn.* 2021. vol. 110. no 7. pp. 1609–1636.
33. Pomerleau D.A., Gowdy J., Thorpe C.E. Combining artificial neural networks and symbolic processing for autonomous robot guidance. *Eng. Appl. Artif. Intell.* 1991. vol. 4. no. 4. pp. 279–285.
34. Bakhti K. et al. Citation Function Classification Based on Ontologies and Convolutional Neural Networks. *Commun. Comput. Inf. Sci.* 2018. vol. 870. pp. 105–115.
35. Deng Y. et al. A Hybrid Movie Recommender Based on Ontology and Neural Networks. 2010 *IEEE/ACM Int'l Conference on Green Computing and Communications & Int'l Conference on Cyber, Physical and Social Computing*. IEEE, 2010. pp. 846–851.
36. Trappey A.J.C. et al. Ontology-based neural network for patent knowledge management in design collaboration. *Int. J. Prod. Res.* 2013. vol. 51. no. 7. pp. 1992–2005.
37. Hung C., Wermter S. Neural Network Based Document Clustering Using WordNet Ontologies. *Int. J. Hybrid Intell. Syst.* 2005. vol. 1. no. 3–4. pp. 127–142.
38. Hinnerichs T., Hoehndorf R. DTI-Voodoo: machine learning over interaction networks and ontology-based background knowledge predicts drug–target interactions. *Bioinformatics.* 2021. vol. 37. no. 24. pp. 4835–4843.
39. Lamurias A. et al. BO-LSTM: classifying relations via long short-term memory networks along biomedical ontologies. *BMC Bioinformatics.* 2019. vol. 20. no. 1. pp. 10.
40. Breen C., Khan L., Ponnusamy A. Image classification using neural networks and ontologies. *Proceedings. 13th International Workshop on Database and Expert Systems Applications*. IEEE Comput. Soc, 2002. pp. 98–102.
41. Xu J. et al. A Semantic Loss Function for Deep Learning with Symbolic Knowledge. *Proc. Mach. Learn. Res.* 2018. vol. 80. pp. 5502–5511.
42. Yang Z., Ishay A., Lee J. NeurASP: Embracing Neural Networks into Answer Set Programming. *Proceedings of the Twenty-Ninth International Joint Conference on Artificial Intelligence*. California: International Joint Conferences on Artificial Intelligence Organization, 2020. pp. 1755–1762.
43. Lee J., Wang Y. Weighted Rules under the Stable Model Semantics. *Proceedings, Fifteenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2016)*. 2016. pp. 145–154.
44. Garcez A.S. d'Avila et al. Abductive reasoning in neural-symbolic systems. *Topoi.* 2007. vol. 26. no. 1. pp. 37–49.

45. Lai P. et al. Ontology-based Interpretable Machine Learning for Textual Data. 2020 International Joint Conference on Neural Networks (IJCNN). IEEE, 2020. pp. 1–10.
46. Averkin A.N. [Explainable AI: current results and future perspectives] *Integrirovannye modeli i myagkie vychisleniya v iskusstvennom intellekte (IMMV-2021): Sbornik nauchnyh trudov X-j Mezhdunarodnoj nauchno-tehnicheskoy konferencii [Integrated systems and soft computing in AI: Conference proceedings]*. 2021. pp. 153–174. (in Russ.).
47. Karpov O.E. et al. [Transparent AI for medicine]. *Vrach i informacionnye tekhnologii – Doctor and intofation technologies*. 2022. no 2. pp. 4–11. (in Russ.).
48. Zaharova I.G., Vorob'eva M.S., Boganyuk Yu.V. [Individual educational trajectories based on AI]. *Obrazovanie i nauka – Education and science*. 2022. vol. 24. no. 1. pp. 163–190. (in Russ.).
49. Shevskaya N.V. [Explainable AI and results intepretation]. *Modelirovanie, optimizaciya i informacionnye tekhnologii – Modelling, optimization and information technologies*. 2021. vol. 9. no. 2(33). pp. 22. (in Russ.).
50. Averkin A.N., Yarushev S.A. [Review of methods for rule extraction from neural networks]. *Izvestiya Rossijskoj akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya – Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Control theory and systems*. 2021. no. 6. pp. 106–121. (in Russ.).
51. Shevskaya N.V., Ohrimuk E.S., Popov N.V. [Causal relationships in explainable AI] *Mezhdunarodnaya konferenciya po myagkim vychisleniyam i izmereniyam [International conference on soft computing]*. 2022. pp. 170–173. (in Russ.).
52. Bourgeais V. et al. Deep GONet: self-explainable deep neural network based on Gene Ontology for phenotype prediction from gene expression data. *BMC Bioinformatics*. BioMed Central, 2021. vol. 22. pp. 1–24.
53. Ma T., Zhang A. Incorporating Biological Knowledge with Factor Graph Neural Network for Interpretable Deep Learning. 2019. DOI: 10.48550/arXiv.1906.00537.
54. Panigutti C., Perotti A., Pedreschi D. Doctor XAI An ontology-based approach to black-box sequential data classification explanations. *FAT\* 2020 – Proceedings of the 2020 Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*. 2020. pp. 629–639.
55. Daniels Z.A. et al. A framework for explainable deep neural models using external knowledge graphs. *Proc. SPIE 11413, Artificial Intelligence and Machine Learning for Multi-Domain Operations Applications IISPIE*, 2020. pp. 73.
56. Confalonieri R. et al. An Ontology-based Approach to Explaining Artificial Neural Networks. 2019.
57. Confalonieri R. et al. Trepan reloaded: A knowledge-driven approach to explaining black-box models. *Front. Artif. Intell. Appl.* 2020. vol. 325. pp. 2457–2464.
58. Confalonieri R. et al. Using ontologies to enhance human understandability of global post-hoc explanations of black-box models. *Artif. Intell.* Elsevier, 2021. vol. 296. pp. 103471.
59. Bourguin G. et al. Towards Ontologically Explainable Classifiers. *Artificial Neural Networks and Machine Learning – ICANN*. 2021. pp. 472–484. DOI: 10.1007/978-3-030-86340-1\_38.
60. Rudin C. Stop explaining black box machine learning models for high stakes decisions and use interpretable models instead. *Nat. Mach. Intell.* 2019. vol. 1. no. 5. pp. 206–215.
61. Voogd J. et al. Using Relational Concept Networks for Explainable Decision Support. *3rd IFIP Cross Domain Conference for Machine Learning and Knowledge Extraction (CD-MAKE)*. 2019. pp. 78–93. DOI: 10.1007/978-3-030-29726-8\_6.
62. Fong A.C.M., Hong G. Ontology-Powered Hybrid Extensional-Intensional Learning. *Proceedings of the 2019 International Conference on Information Technology and*

- Computer Communications (ITCC2019). New York, USA: ACM Press, 2019. pp. 18–23.
63. Bellucci M. et al. Ontologies to build a predictive architecture to classify and explain. DeepOntoNLP Workshop @ESWC 2022. 2022.
  64. Martin T. et al. Bridging the gap between an ontology and deep neural models by pattern mining. The Joint Ontology Workshops, JOWO. 2020. vol. 2708.
  65. De Sousa Ribeiro M., Leite J. Aligning Artificial Neural Networks and Ontologies towards Explainable AI. Proceedings of the AAAI Conference on Artificial Intelligence. 2021. vol. 35. no. 6. pp. 4932–4940.
  66. Agafonov A., Ponomarev A. An Experiment on Localization of Ontology Concepts in Deep Convolutional Neural Networks. The 11th International Symposium on Information and Communication Technology. NY, USA: ACM, 2022. pp. 82–87.
  67. Ponomarev A., Agafonov A. Ontology Concept Extraction Algorithm for Deep Neural Networks. 2022 32nd Conference of Open Innovations Association (FRUCT). IEEE, 2022. pp. 221–226.
  68. Sarker M.K. et al. Wikipedia Knowledge Graph for Explainable AI. KGSWC 2020, CCIS 1232. 2020. pp. 72–87.
  69. Abbass H.A. et al. Machine Education: Designing semantically ordered and ontologically guided modular neural networks. IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI). IEEE, 2019. pp. 948–955.
  70. Smirnov A. et al. Multi-aspect Ontology for Interoperability in Human-machine Collective Intelligence Systems for Decision Support. Proceedings of the 11th International Joint Conference on Knowledge Discovery, Knowledge Engineering and Knowledge Management. SCITEPRESS – Science and Technology Publications, 2019. pp. 458–465.

**Shilov Nikolay** — Ph.D., Associate Professor, Senior researcher, Laboratory of computer-aided integrated systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS). Research interests: artificial intelligence, knowledge management, ontology management, complex system modelling and configuration, machine learning. The number of publications — 300. nick@iias.spb.su; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-8071.

**Ponomarev Andrew** — Ph.D., Associate Professor, Senior researcher, Laboratory of computer-aided integrated systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS). Research interests: collective intelligence, crowd computing, recommender systems, applied machine learning. The number of publications — 70. ponomarev@iias.spb.su; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-8071.

**Smirnov Alexander** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Chief researcher, Head of laboratory, Laboratory of computer-aided integrated systems, St. Petersburg Federal Research Center of the Russian Academy of Sciences (SPC RAS). Research interests: decision support systems, intelligent systems, intelligent configuration management in virtual and network organizations, knowledge logistics. The number of publications — 400. smir@iias.spb.su; 39, 14-th Line V.O., 199178, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-8071.

**Acknowledgements.** This research is funded by the Russian Science Foundation (grant 22-11-00214).

Г.И. АЛГАЗИН, Д.Г. АЛГАЗИНА  
**СХОДИМОСТЬ ПО НОРМЕ ДИНАМИКИ КОЛЛЕКТИВНОГО  
ПОВЕДЕНИЯ В РЕФЛЕКСИВНОЙ МОДЕЛИ ОЛИГОПОЛИИ  
С ЛИДЕРАМИ**

*Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Сходимость по норме динамики коллективного поведения в рефлексивной модели олигополии с лидерами.*

**Аннотация.** Рассматривается модель олигополии с произвольным числом рациональных агентов, рефлексизирующих по Курно или Штакельбергу, в условиях неполной информации для классического случая линейных функций издержек и спроса. Исследуется проблема достижения равновесия на основе математического моделирования процессов принятия агентами решений. Работы в этом направлении являются актуальными ввиду значимости понимания процессов, происходящих на реальных рынках, и сближения с ними теоретических моделей. В рамках динамической модели рефлексивного коллективного поведения каждый агент в каждый момент времени корректирует свой объем выпуска, делая шаг в направлении выпуска, максимизирующего его прибыль при ожидаемом выборе конкурентов. Допустимая величина шага задается диапазоном. Ставится и решается задача поиска диапазонов допустимых шагов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость динамики к равновесию. Новизну исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от  $t$ -го к  $(t+1)$ -му моменту времени. Показано, что динамика сходится, если норма меньше единицы, начиная с некоторого момента времени, и невыполнение этого критерия особенно проявляется при разнонаправленном выборе, когда одни агенты выбирают «большие» шаги движения к своим текущим целям, другие, наоборот, – «малые» шаги. Невыполнение критерия также усиливается с ростом рынка. Установлены общие условия на диапазоны сходимости динамики для произвольного числа агентов и предложен метод построения максимальных таких диапазонов, что также составляет новизну исследования. Представлены результаты решения указанных задач для частных случаев олигополии, которые являются наиболее широко распространенными на практике.

**Ключевые слова:** олигополия, неполная информированность, коллективное поведение, рефлексия, норма матрицы, погрешности процесса, диапазоны сходимости.

**1. Введение.** В моделях олигополии используются различные предположения о поведении рациональных агентов и их взаимной информированности.

Традиционно выделяют поведение по Курно и поведение по Штакельбергу. Поведение по Курно предполагает, что агент с целью максимизации собственной прибыли устанавливает объем выпуска, считая неизменными объемы выпуска конкурентов, т.е. последним не выгодно менять выпуск для получения «мгновенной прибыли» [1]. Поведение по Штакельбергу заключается в том, что агент с целью максимизации собственной прибыли устанавливает объем выпуска, считая, что все остальные агенты действуют по Курно

и он точно знает их реакцию (объемы выпуска) на изменения его объема выпуска [2]. Такого агента называют лидером по Штакельбергу. Агента, действующего по Курно, называют ведомым. Потенциально, лидер имеет возможность получить большую прибыль и вполне оправдано, если рациональный агент стремится стать лидером. Поэтому для исследований представляют интерес модели не только с одним, но и с несколькими лидерами [3 – 12].

Канонической для теоретико-игровых моделей является концепция общего (полного или совершенного) знания, полагающая, что вся существенная информация и принципы принятия решений агентами всем им известны, всем известно, что всем это известно и т.д. до бесконечности [13]. Решение соответствующей игры в нормальной форме представляет собой статическое равновесие Нэша [14], которое достигается в результате однократного выбора агентами своих действий. Вместе с тем, многочисленные исследования свидетельствуют, что для конкурентных рынков условие о наличии общего знания, как правило, невыполнимо. В условиях конкуренции агенты часто не заинтересованы раскрывать другим агентам информацию, являющуюся существенной для принятия ими адекватных решений. Также достижению равновесия, предсказанного теорией, могут препятствовать такие факторы: ограниченность когнитивных возможностей агентов, необходимость уверенности каждого агента в том, что все остальные могут вычислить равновесие Нэша и сделают это, неполная информированность, наличие нескольких равновесий [15 – 20]. В соответствующих моделях равновесие достигается как исход итерационного процесса рефлексивного принятия агентами решений.

Для построения итерационного процесса в данной статье в качестве базовой выбрана индикаторная модель динамики коллективного поведения [21]. В пользу такого выбора можно привести следующие доводы:

– «<...> в теории коллективного поведения традиционно строятся и изучаются модели динамики <...> поведенческих компонент деятельности (внешне проявляемых, наблюдаемых) [11] субъектов (агентов) – их действий и/или результатов деятельности [10]» [22] (*примечание:* здесь и ниже в цитируемом тексте указываются авторские ссылки на свои первоисточники);

– «В отличие от теории игр теория коллективного поведения [4 – 6] занимается исследованием динамики поведения рациональных агентов при достаточно слабых предположениях относительно их информированности. Так, например, не всегда требуется наличие



среди агентов общего знания относительно множества агентов, множеств допустимых действий и целевых функций оппонентов [4 – 6]. Или считается, что агенты не всегда предсказывают поведение всех оппонентов, как это имеет место в теории игр. Более того, зачастую агенты, принимая решения, могут «не знать о существовании» некоторых других агентов или иметь о них «агрегированную информацию» [13];

– исследования моделей коллективного поведения «вплотную приближаются к постановке задач агентного имитационного моделирования и имеют с ними много общего. <...> Гипотеза индикаторного поведения является лишь одним из возможных вариантов описания коллективного поведения [32, 39, 41, 45], но ее использование уместно, так как, с одной стороны, ее свойства исследованы наиболее подробно по сравнению с другими процедурами, а с другой стороны – как показывают имитационные эксперименты [5, 45, 63], она достаточно адекватно описывает поведение людей в имитационных и деловых играх» [23];

– «Подходы теории коллективного поведения и теории игр согласованы в том смысле, что и та, и другая исследуют поведение рациональных агентов, а равновесия игры, как правило, являются и равновесиями динамических процедур коллективного поведения (например, равновесие Нэша является равновесием индикаторной модели динамики коллективного поведения)» [13].

Однако, равновесие динамики коллективного поведения не всегда достижимо даже в случае, когда в модели олигополии оно существует. Так для модели с линейными функциями затрат и спроса динамика коллективного поведения сходится к рыночному равновесию при любом числе агентов, если в каждый момент времени агенты корректируют свои предыдущие объемы выпуска малыми шагами. Известно, что диапазоны шагов, для которых динамика сходится, сужаются при увеличении числа агентов. Динамика также сходится для модели дуополии Курно, если каждый из двух агентов делает максимальный шаг, т.е. в каждый момент времени выбирает свой наилучший ответ на ожидаемый объем выпуска конкурента. Для модели рынка с числом агентов больше двух такая динамика расходится, динамика часто не сходится, если агенты выбирают большие шаги [9, 11, 21, 24].

Настоящее исследование посвящено проблеме определения диапазонов шагов, в рамках которых агенты, корректируя, независимо друг от друга, свои предыдущие объемы выпуска, приходят к равновесию. Актуальность проблемы определяется ее значимостью

для понимания и регулирования процессов коллективного принятия решений на современных конкурентных рынках и сближения с ними теоретических моделей. Для модели олигополии с произвольным числом агентов, действующих по Курно и/или Штакельбергу, решение данной проблемы не является завершённым даже для случая линейных функций затрат и спроса – основные успехи ограничены набором частных случаев с небольшим числом агентов [25 – 30].

Особенность исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от  $t$ -го к  $(t+1)$ -му моменту времени. Для линейной модели олигополии критерий сходимости по норме означает, что норма матрицы перехода должна быть меньше единицы, начиная с некоторого момента времени [31].

В проведенном исследовании поставлены и решены две основные задачи:

1) проверка выполнимости критерия сходимости динамики по норме для заданного диапазона шагов;

2) нахождение границ максимальных диапазонов шагов агентов, гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения.

**2. Постановка задач исследования.** Рассматривается модель олигополии, которая состоит из  $n$  конкурирующих объемами выпуска однородной продукции агентов. Считается, что спрос определен функцией вида (обратной функцией спроса в зависимости от совокупного выпуска агентов):

$$p(Q) = a - bQ, \quad (1)$$

где  $p(Q)$  – единая рыночная цена,  $Q = \sum_{i \in N} q_i$  – совокупный выпуск  $n$  агентов ( $i \in N = \{1, \dots, n\}$ ),  $q_i$  – выпуск  $i$ -го агента,  $a$  и  $b$  – параметры.

Параметр  $a$  характеризует максимально возможную цену товара, при которой объем спроса будет стремиться к нулю, а параметр  $b$  характеризует наклон кривой спроса.

Полные издержки агентов имеют вид:

$$\varphi_i(q_i) = c_i q_i + d_i, \quad (2)$$

где  $c_i, d_i$  – предельные и постоянные издержки  $i$ -го агента, соответственно.

Целевые функции агентов заданы выражением:

$$\Pi_i(p(Q), q_i) = p(Q)q_i - \varphi_i(q_i) \rightarrow \max_{q_i} \quad (3)$$

Полагается, что весь выпуск реализуется, ограничения мощности и коалиции отсутствуют.

Состояние рынка в момент времени  $t (t = 0, 1, 2, \dots)$  задается  $n$ -мерным вектором  $q^t = (q_1^t, \dots, q_i^t, \dots, q_n^t)$ .

Определим базовый процесс, когда смена состояний рынка удовлетворяет аксиоме индикаторного поведения [20] – в каждый момент времени  $(t+1)$  каждый агент наблюдает объемы выпуска всех агентов, выбранные ими в предыдущий момент времени  $t$ , и корректирует свой выпуск, делая шаг в направлении текущего положения цели  $x_i(q_{-i}^t)$  согласно следующей итерационной процедуре:

$$q_i^{t+1} = q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), \quad i \in N. \quad (4)$$

Здесь  $\gamma_i^{t+1} \in [0; 1]$  – параметр, независимо выбираемый каждым  $i$ -м агентом, определяет величину его шага к текущему положению своей цели. Агент может делать полный шаг, полагая  $\gamma_i^{t+1} = 1$ , тем самым выбирая свой наилучший ответ, «оставаться на месте», выбирая  $\gamma_i^{t+1} = 0$ , или делать «неполный шаг», если  $\gamma_i^{t+1} \in (0; 1)$ .

Текущее положение цели  $i$ -го агента  $x_i(q_{-i}^t)$  – такой его объем выпуска, который максимизировал бы собственную целевую функцию при условии, что в текущий момент времени остальные агенты выбрали бы те же объемы выпуска, что и в предыдущий [13]. Здесь  $q_{-i}^t = (q_1^t, \dots, q_{i-1}^t, q_{i+1}^t, \dots, q_n^t)$  – обстановка  $i$ -го агента, вектор объемов выпуска всех агентов в момент времени  $t$ , за исключением  $i$ -го агента.

Агент может реагировать на действия окружения одним из двух способов: 1) рефлексировать по Курно; 2) рефлексировать по Штакельбергу.

Обозначим:  $N_c$  – множество агентов с реакцией по Курно,  $N_s$  – множество агентов с реакцией по Штакельбергу;  $N_c \cup N_s = N$  и  $N_c \cap N_s = \emptyset, |N_c| = n_c, |N_s| = n_s, n_c + n_s = n$ .

Определим расчетные формулы для текущего положения цели  $x_i(q_{-i}^t)$  [9, 31].

Агент  $i \in N_c$  с рефлексией по Курно, точно зная выпуски  $q'_{-i}$  остальных агентов в предыдущий момент времени и не ожидая их изменения в текущий момент времени, рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле:

$$x_i(q'_{-i}) = \frac{h_i - Q'_{-i}}{2}. \quad (5)$$

Агент  $i \in N_s$  с рефлексией по Штакельбергу, зная выпуски  $q'_{-i}$  остальных агентов в предыдущий момент времени и ожидая в текущий момент времени от них поведения по Курно, полагает, что в точности знает реакцию остальных агентов на свои действия, и рассчитывает текущее положение цели (оптимальный отклик) по формуле:

$$x_i(q'_{-i}) = \frac{n(h_i - Q'_{-i})}{1 + n}. \quad (6)$$

Здесь обозначено:  $h_i = \frac{a - c_i}{b}$ ,  $Q'_{-i} = \sum_{j \neq i} q'_j$  – суммарный выпуск «окружением»  $i$ -го агента ( $i, j \in N$ ).

Поясним также отличие рефлексивной модели олигополии от классической игры Штакельберга, определяющее вывод формулы (6), и информированность агентов. Здесь выбор реальных действий всеми агентами осуществляется синхронно (одновременно). Подобный прием упрощает реальный процесс последовательных реакций и адекватен в случае, когда достигнутое равновесие стабильно [5, 11]. В игре Штакельберга лидер первым делает ход, который становится известен другим агентам. Здесь же агенты с реакцией по Курно не знают хода лидера, синхронного своему ходу. Более того, они не знают, что у них есть лидер (лидеры), полагая, что он, как и другие агенты, оставит свой объем выпуска неизменным (например, считая остальных агентов менее «интеллектуальными», чем они сами, или что оппоненты достигли равновесия и им не выгодно от него отклониться). Агенты, действующие по Курно, не знают, что другие такие агенты действуют так же.

Агенты, выбирающие действия по Курно, обладают низким («нулевым») рангом рефлексии. Лидеры обладают более высоким («первым») рангом рефлексии, считая всех остальных нерелексирующими (агентами с нулевым рангом рефлексии),

и в соответствии с этим предсказывают их выбор. Выбор лидеров будет ориентирован на наилучший ответ на ту обстановку, которая, по их мнению, должна сложиться. Предполагается, что все агенты не допускают существования агентов, имеющих такой же или более высокий ранг рефлексии, чем они сами [13].

Агенты точно знают собственные затраты и целевую функцию, собственную функцию реакции  $x_i(q_{-i}^l)$ , включая параметры спроса  $a$  и  $b$ , ранее произведенный выпуск другими агентами, но не располагают достоверной информацией относительно их ожидаемых объемов выпуска, множеств допустимых действий, функций затрат и целевых функций.

Предполагаем, что в модели олигополии (1)–(3), как в игре в нормальной форме, равновесие  $q^* = (q_1^*, \dots, q_i^*, \dots, q_n^*)$ , понимаемое как статическое равновесие Нэша, существует и все агенты конкурентоспособны в равновесии, т.е.  $q_i^* > 0 \quad \forall i \in N$ . В случае линейных издержек агентов и линейного спроса статическое равновесие существует и единственно.

Равновесие динамики коллективного поведения (4)–(6) является статическим равновесием  $q^*$  в модели олигополии (1)–(3), но не всегда достижимо. Условия сходимости динамики относятся к параметрам  $\gamma_i^{t+1}$ , числу агентов на рынке и начальным приближениям  $q^0 = (q_1^0, \dots, q_i^0, \dots, q_n^0)$ . Полагаем также, что  $q^0 > 0$ .

В данной работе обсуждаются новые аспекты подхода к исследованию сходимости моделей динамики коллективного поведения, основанного на использовании нормы матрицы перехода от  $t$ -го к  $(t+1)$ -му моменту времени в итерационном процессе (4)–(6). Для линейной модели олигополии подход дает простой критерий сходимости по норме: норма матрицы перехода должна быть меньше единицы, начиная с некоторого момента времени [31]. Когда агенты независимо друг от друга выбирают шаги в диапазоне  $[0; 1]$ , то критерий по норме, за исключением дуополии, не может быть выполнен. Основная задача статьи для изучаемой прикладной линейной модели олигополии с произвольным числом рациональных агентов – для заданного числа агентов получение диапазонов величин их шагов, при которых выполняется критерий по норме. Тогда при любых начальных приближениях  $q^0$  будет гарантирована сходимость модели динамики коллективного поведения (4)–(6) к равновесию, которое является статическим равновесием Нэша в модели олигополии

(1)–(3). Также не меньший интерес представляет решение задачи поиска максимальных таких диапазонов шагов.

**3. Методы исследования.** Следуя работе [31], для базовой модели олигополии (1)–(3) приведем формальные выражения для вычисления погрешностей итерационного процесса (4)–(6), а также результаты о его сходимости к равновесию Нэша, основанные на использовании норм матриц перехода погрешностей.

При переходе от  $t$ -го к  $(t+1)$ -му моменту времени погрешность итерационного процесса  $\varepsilon^{t+1} = (\varepsilon_1^{t+1}, \varepsilon_2^{t+1}, \dots, \varepsilon_n^{t+1})^T = (q_1^{t+1} - q_1^*, q_2^{t+1} - q_2^*, \dots, q_n^{t+1} - q_n^*)^T$  определяется матричным преобразованием  $\varepsilon^{t+1} = B^{t+1} \varepsilon^t$  ( $t = 0, 1, 2, \dots$ ), где  $B^{t+1}$  – матрица клеточного вида:

$$B^{t+1} = B(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} B_s^{t+1} & \vdots & 0 \\ \dots & \vdots & \dots \\ 0 & \vdots & B_c^{t+1} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Вдоль диагонали матрицы (7) идут квадратные подматрицы  $B_s^{t+1}$  и  $B_c^{t+1}$ , которые определяются как:

$$B_s^{t+1} = B_s(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_1^{t+1} & -n\gamma_1^{t+1}/(1+n) & \dots & -n\gamma_1^{t+1}/(1+n) \\ -n\gamma_2^{t+1}/(1+n) & 1 - \gamma_2^{t+1} & \dots & -n\gamma_2^{t+1}/(1+n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -n\lambda_{n_s}^{t+1}/(1+n) & -n\lambda_{n_s}^{t+1}/(1+n) & \dots & 1 - \gamma_{n_s}^{t+1} \end{pmatrix},$$

$$B_c^{t+1} = B_c(\gamma^{t+1}) = \begin{pmatrix} 1 - \gamma_{n_s+1}^{t+1} & -\gamma_{n_s+1}^{t+1}/2 & \dots & -\gamma_{n_s+1}^{t+1}/2 \\ -\gamma_{n_s+2}^{t+1}/2 & 1 - \gamma_{n_s+2}^{t+1} & \dots & -\gamma_{n_s+2}^{t+1}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_n^{t+1}/2 & -\gamma_n^{t+1}/2 & \dots & 1 - \gamma_n^{t+1} \end{pmatrix},$$

$$\gamma^{t+1} = (\gamma_1^{t+1}, \dots, \gamma_i^{t+1}, \dots, \gamma_n^{t+1}).$$

Здесь и далее, для определенности, полагаем, что первые  $n_s$  агентов действуют по Штакельбергу, остальные – по Курно и  $q^t = (q_1^t, \dots, q_{n_s}^t, q_{n_s+1}^t, \dots, q_n^t)$ .

Сходимость итерационного процесса (4)–(6) означает, что  $\varepsilon^t \rightarrow 0$  по евклидовой норме при  $t \rightarrow \infty$ , и полностью определяется матрицей  $B^{t+1}$ . Евклидова норма вектора  $\varepsilon$  определяется по формуле  $\varepsilon = \sqrt{\sum_{j=1}^n \varepsilon_j^2}$ . Последовательность векторов  $\{q^t\}_{t=0}^\infty$  сходится к равновесию  $q^*$  по норме при  $t \rightarrow \infty$ , будем записывать как  $q^t \rightarrow q^*$ . Норма вещественной матрицы  $B$ , имеющей  $n$  строк и  $n$  столбцов, является подчиненной евклидовой векторной норме и определяется как  $\|B\| = \max_{\|\varepsilon\|=1} \|B\varepsilon\|$ . Из определения нормы следует, что  $\|B\varepsilon\| \leq \|B\| \cdot \|\varepsilon\|$  для всех  $B, \varepsilon$  или  $\|B\varepsilon\| \leq \|B\|$  для всех  $B, \|\varepsilon\| = 1$  [32, 33].

Тогда:

$$\begin{aligned} \|B^{t+1}\| &= \max_{\|\varepsilon\|=1} \|B(\gamma^{t+1})\varepsilon\| = \\ &= \max_{\|\varepsilon\|=1} \sqrt{\sum_{i \in N_s} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right]^2}, \end{aligned} \quad (8)$$

где  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_i, \dots, \varepsilon_n)$  – произвольный единичный вектор. В (8) опущен верхний индекс « $t$ » для компонент вектора  $\varepsilon$ , как не влияющий на результат.

В терминах нормы матрицы  $B^{t+1}$  можно привести следующие результаты о сходимости итерационного процесса.

*Лемма 1. Для сходимости к равновесию процесса (4)–(6) при любом начальном приближении  $q^0$  достаточно, начиная с некоторого момента  $t_0$ , выполнения условия:*

$$\|B^{t+1}\| < 1. \quad (9)$$

Доказательство леммы приводится в [31].

Требование неотрицательности текущих выпусков агентов, возникающее, например, с точки зрения экономических ограничений, может быть реализовано процессом вида:

$$q_i^{t+1} = \begin{cases} q_i^t + \gamma_i^{t+1}(x_i(q_{-i}^t) - q_i^t), & x_i(q_{-i}^t) > 0; \\ 0, & x_i(q_{-i}^t) \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

*Утверждение 1. Если начиная с некоторого момента  $t_0$   $\|B^{t+1}\| < 1$ , то процесс (10), (5)–(6) сходится при любом начальном приближении  $q^0$ .*

Доказательство утверждения 1 приводится в [31].

По этому утверждению, если для процесса (4)–(6) норма матрицы перехода меньше единицы, то будет сходиться также и процесс (10), (5)–(6), в котором не допускаются отрицательные текущие выпуски.

Обозначим через  $f(\gamma^{t+1})$  подкоренное выражение в (8), т.е.:

$$f(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_s} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right]^2. \quad (11)$$

*Утверждение 2. Пусть векторы  $\gamma^{t+1}$ ,  $\underline{\gamma}^{t+1}$ ,  $\overline{\gamma}^{t+1}$  такие, что  $\gamma_i^{t+1} \in [\underline{\gamma}_i^{t+1}; \overline{\gamma}_i^{t+1}]$ ,  $[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \overline{\gamma}_i^{t+1}] \subseteq [0; 1]$ , и  $\gamma_i^{t+1} = \alpha_i^{t+1} \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}$ , где  $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$ ,  $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1$ ,  $i \in N$ .*

*Тогда функция  $f(\gamma^{t+1})$  удовлетворяет неравенствам (12) и (13):*

$$f(\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1} \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}, \dots, \alpha_n^{t+1} \underline{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \overline{\gamma}_n^{t+1}) \leq \sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \dots \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_n \cdot f(z_1^{t+1}, \dots, z_i^{t+1}, \dots, z_n^{t+1}), \quad (12)$$

где:

$$\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1], \quad \alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1, \quad z_i^{t+1} = \begin{cases} \underline{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \alpha_i^{t+1}, \\ \overline{\gamma}_i^{t+1}, & y_i = \beta_i^{t+1}, \end{cases}$$



$$\sum_{y_1 \in \{\alpha_1^{t+1}, \beta_1^{t+1}\}} \dots \sum_{y_i \in \{\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}\}} \dots \sum_{y_n \in \{\alpha_n^{t+1}, \beta_n^{t+1}\}} y_1 \cdot \dots \cdot y_i \cdot \dots \cdot y_n = 1;$$

$$\begin{aligned} & f\left(\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_1^{t+1}, \dots, \alpha_i^{t+1} \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}, \dots, \alpha_n^{t+1} \underline{\gamma}_n^{t+1} + \beta_n^{t+1} \overline{\gamma}_n^{t+1}\right) \leq \\ & \leq \sum_{i \in N_s} \alpha_i^{t+1} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \alpha_i^{t+1} \left[ \varepsilon_i - \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \\ & + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \left[ \varepsilon_i - \frac{\overline{\gamma}_i^{t+1} n}{1+n} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \right]^2 + \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \left[ \varepsilon_i - \frac{\overline{\gamma}_i^{t+1}}{2} \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (13)$$

Доказательство утверждения 3 приводится в [31].

В частности, неравенство (12) для случая  $n=2$  имеет вид:

$$\begin{aligned} & f\left(\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_1^{t+1} + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_1^{t+1}, \alpha_2^{t+1} \underline{\gamma}_2^{t+1} + \beta_2^{t+1} \overline{\gamma}_2^{t+1}\right) \leq \alpha_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} f\left(\underline{\gamma}_1^{t+1}, \underline{\gamma}_2^{t+1}\right) + \\ & + \beta_1^{t+1} \alpha_2^{t+1} f\left(\overline{\gamma}_1^{t+1}, \underline{\gamma}_2^{t+1}\right) + \alpha_1^{t+1} \beta_2^{t+1} f\left(\underline{\gamma}_1^{t+1}, \overline{\gamma}_2^{t+1}\right) + \beta_1^{t+1} \beta_2^{t+1} f\left(\overline{\gamma}_1^{t+1}, \overline{\gamma}_2^{t+1}\right). \end{aligned}$$

**4. Результаты исследования и их обсуждение.** Приведем идею подхода к решению задачи проверки сходимости динамики для заданного диапазона шагов.

Обозначим  $\gamma^{t+1}(\beta^{t+1}) = (\gamma_1^{t+1}(\beta_1^{t+1}), \dots, \gamma_i^{t+1}(\beta_i^{t+1}), \dots, \gamma_n^{t+1}(\beta_n^{t+1}))$ ,  $\gamma_i^{t+1}(\beta_i^{t+1}) = (1 - \beta_i^{t+1}) \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} \overline{\gamma}_i^{t+1}$  ( $i \in N$ ) и  $f^{t+1} = f(\gamma^{t+1}(\beta^{t+1}))$ .

Формула (13) преобразуется к неравенству вида  $f^{t+1} \leq 1 - f_s^{t+1} - f_c^{t+1}$ , где  $f_s^{t+1}(f_c^{t+1})$  – квадратичная форма от  $n_s$  ( $n_c$ ) переменных  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_s}$  ( $\varepsilon_{n_s+1}, \dots, \varepsilon_n$ ). Вначале проверяется выполнение этого неравенства для крайних точек  $n$ -мерного прямоугольного параллелепипеда  $[\underline{\gamma}_1^{t+1}, \overline{\gamma}_1^{t+1}; \dots; \underline{\gamma}_i^{t+1}, \overline{\gamma}_i^{t+1}; \dots; \underline{\gamma}_n^{t+1}, \overline{\gamma}_n^{t+1}]$ . Если для крайней точки  $f_s^{t+1}$  и  $f_c^{t+1}$  положительно определены, то для данной крайней точки  $f^{t+1} < 1$ . Если для всех крайних точек  $f^{t+1} < 1$ , то по неравенству (12) для любой внутренней точки параллелепипеда будет  $f^{t+1} < 1$ , а по (8) и (11) для нее также будет  $\|B^{t+1}\| \leq \max_{\|e\|=1} \sqrt{1 - f_s^{t+1} - f_c^{t+1}} < 1$ . Таким образом, для процесса (4)–(6) для

всех точек параллелепипеда  $[\underline{\gamma}_1^{t+1}, \bar{\gamma}_1^{t+1}; \dots; \underline{\gamma}_i^{t+1}, \bar{\gamma}_i^{t+1}; \dots; \underline{\gamma}_n^{t+1}, \bar{\gamma}_n^{t+1}]$

будет выполняться критерий сходимости (9).

Если у всех агентов с реакций по Штакельбергу одинаковые левые и правые границы диапазонов, а также одинаковые левые и правые границы диапазонов и у всех агентов с реакций по Курно, то трудоемкость решения данной задачи существенно уменьшается за счет сокращения числа анализируемых крайних точек с  $2^n$  до  $(n-2)$ .

К тому же, проверка на положительную определенность квадратичных форм, составляющая наиболее трудоемкую часть задачи, может быть легко выполнена с использованием современных инструментов компьютерной математики для форм практически любого размера.

Параллельно с этой задачей решается задача нахождения границ максимальных диапазонов шагов агентов (параллелепипеда максимального объема), гарантирующих сходимость к равновесию динамики коллективного поведения (4)–(6).

Перейдем к решению указанных задач.

Преобразуем (13) к виду:

$$f(\gamma^{t+1}) \leq \sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 - f_s(\gamma^{t+1}) + \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 - f_c(\gamma^{t+1}), \quad (14)$$

где:

$$f_s(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) - \sum_{i \in N_s} \left( \frac{\gamma_i^{t+1} n}{1+n} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 + \sum_{i \in N_s} \beta_i^{t+1} \frac{n}{1+n} (\bar{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1}) \left[ 2\varepsilon_i - \frac{n}{1+n} (\bar{\gamma}_i^{t+1} + \underline{\gamma}_i^{t+1}) \right] \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \quad (15)$$

$$f_c(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_c} \varepsilon_i \underline{\gamma}_i^{t+1} \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) - \sum_{i \in N_c} \left( \frac{\gamma_i^{t+1}}{2} \right)^2 \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right)^2 + \sum_{i \in N_c} \beta_i^{t+1} \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1}) \left[ 2\varepsilon_i - \frac{1}{2} (\bar{\gamma}_i^{t+1} + \underline{\gamma}_i^{t+1}) \right] \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \left( \varepsilon_i + \sum_{j \in N_c} \varepsilon_j \right) \quad (16)$$

*Утверждение 3. В модели олигополии (1)–(3) с агентами, рефлексирующими по Штакельбергу и Курно, процесс (4)–(6)*

сходится, если положительно определены квадратичные формы  $f_s(\gamma^{t+1})$  и  $f_c(\gamma^{t+1})$ .

*Доказательство.* Пусть положительно определены квадратичные формы  $f_s(\gamma^{t+1})$  и  $f_c(\gamma^{t+1})$ , т.е.  $f_s(\gamma^{t+1}) > 0$  для каждого набора действительных чисел  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n_s}$ , не все из которых равны нулю, и  $f_c(\gamma^{t+1}) > 0$  для  $\varepsilon_{n_s+1}, \dots, \varepsilon_n$ , не все из которых равны нулю. Тогда  $f(\gamma^{t+1}) < 1$  для каждого набора действительных чисел  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , такого что  $\sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 + \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 = 1$ . Тогда по (12) и (9)  $\|B^t(\lambda^{t+1})\| < 1$ . По лемме 1 процесс сходится при данных значениях параметров  $\underline{\gamma}_i^{t+1}, \bar{\gamma}_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}$ .

Утверждение 3 доказано.

*Утверждение 4.* В модели олигополии (1)–(3) с агентами, рефлексивными по Штакельбергу и Курно, процесс (4)–(6) сходится для диапазона шагов  $[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \bar{\gamma}_i^{t+1}]$ , если, начиная с некоторого момента времени  $t_0$ , положительно определены две подматрицы, элементы которых имеют вид:

$$f_{ii}^{t+1} = \frac{2(1+n)\mu_i^{t+1}}{n} - \frac{(1+2n)\eta_i^{t+1}}{n^2} - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1}, \tag{17}$$

$$f_{ij}^{t+1} = \left( \mu_i^{t+1} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n} \right) + \left( \mu_j^{t+1} - \frac{\eta_j^{t+1}}{n} \right) - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1}, \quad i, j \in N_s, i \neq j.$$

$$f_{ii}^{t+1} = 3(\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + \mu_i^{t+1} - \sum_{k \in N_c} \eta_k^{t+1},$$

$$f_{ij}^{t+1} = (\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N_c} \eta_k^{t+1}, \quad i, j \in N_c, i \neq j. \tag{18}$$

Здесь  $\beta_i^{t+1} \in [0; 1]$ ,  $i \in N$ ;

$$\mu_i^{t+1} = \frac{n}{1+n} \left[ \underline{\gamma}_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} (\bar{\gamma}_i^{t+1} - \underline{\gamma}_i^{t+1}) \right],$$

$$\eta_i^{t+1} = \left( \frac{n}{1+n} \right)^2 \left[ \left( \underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 + \beta_i^{t+1} \left( \left( \bar{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 - \left( \underline{\gamma}_i^{t+1} \right)^2 \right) \right], \quad i \in N_s;$$

$$\begin{aligned}\mu_i^{t+1} &= \left[ \gamma_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} (\bar{\gamma}_i^{t+1} - \gamma_i^{t+1}) \right] / 2, \\ \eta_i^{t+1} &= \left[ (\underline{\gamma}_i^{t+1})^2 + \beta_i^{t+1} \left( (\bar{\gamma}_i^{t+1})^2 - (\underline{\gamma}_i^{t+1})^2 \right) \right] / 4, \quad i \in N_c.\end{aligned}$$

*Доказательство.* Доказательство сводится к преобразованиям (14)–(16). Проведем их для ведущих агентов. Имеем:

$$\begin{aligned}f_s(\gamma^{t+1}) &= \sum_{i \in N_s} \frac{2n}{1+n} \varepsilon_i \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \left[ \gamma_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} (\bar{\gamma}_i^{t+1} - \gamma_i^{t+1}) \right] - \\ &- \sum_{i \in N_s} \left( \frac{n}{1+n} \right)^2 \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \left[ (\underline{\gamma}_i^{t+1})^2 + \beta_i^{t+1} \left( (\bar{\gamma}_i^{t+1})^2 - (\underline{\gamma}_i^{t+1})^2 \right) \right] = \\ &= \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right) \mu_i^{t+1} - \sum_{i \in N_s} \left( \frac{\varepsilon_i}{n} + \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} = \\ &= \sum_{i \in N_s} \frac{2(\varepsilon_i)^2}{n} \mu_i^{t+1} + \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \mu_i^{t+1} \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j - \sum_{i \in N_s} \frac{(\varepsilon_i)^2}{n^2} \eta_i^{t+1} - \sum_{i \in N_s} \frac{2\varepsilon_i \eta_i^{t+1}}{n} \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j - \\ &- \sum_{i \in N_s} \left( \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} = \sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 \left( \frac{2\mu_i^{t+1}}{n} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n^2} \right) + \\ &+ \sum_{i \in N_s} 2\varepsilon_i \left( \mu_i^{t+1} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n} \right) \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j - \sum_{i \in N_s} \left( \sum_{j \in N_s} \varepsilon_j \right)^2 \eta_i^{t+1} = \\ &= \sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 \left( \frac{2(1+n)\mu_i^{t+1}}{n} - \frac{(1+2n)\eta_i^{t+1}}{n^2} - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1} \right) + \\ &+ \sum_{i \in N_s} \sum_{j \in N_s \setminus \{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left[ \left( \mu_i^{t+1} - \frac{\eta_i^{t+1}}{n} \right) + \left( \mu_j^{t+1} - \frac{\eta_j^{t+1}}{n} \right) - \sum_{k \in N_s} \eta_k^{t+1} \right].\end{aligned}$$

Для ведомых агентов подобные преобразования дают:

$$f_c(\gamma^{t+1}) = \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 \left( 4\mu_i^{t+1} - 3\eta_i^{t+1} - \sum_{k \in N_c} \eta_k^{t+1} \right) + \sum_{i \in N_c} \sum_{j \in N_c \setminus \{i\}} \varepsilon_i \varepsilon_j \left[ (\mu_i^{t+1} - \eta_i^{t+1}) + (\mu_j^{t+1} - \eta_j^{t+1}) - \sum_{k \in N_c} \eta_k^{t+1} \right].$$

Если определители главных миноров подматриц (17) и (18) положительны, то квадратичные формы  $f_s(\gamma^{t+1})$  и  $f_c(\gamma^{t+1})$  являются положительно определенными [33] и по утверждению 3 процесс сходится при данных значениях параметров  $\underline{\gamma}_i^{t+1}, \bar{\gamma}_i^{t+1}, \beta_i^{t+1}$ .

Утверждение 4 доказано.

В [31] для олигополии Курно показано, что для решения вопроса о сходимости процессов на основе применения норм матриц, существенное значение имеет размах значений  $\underline{\gamma}_i^{t+1}$  и  $\bar{\gamma}_i^{t+1}$ . Когда агенты могут действовать разнонаправлено, выбирая «большие» шаги движения к своим текущим целям, или, наоборот, – «малые» шаги, то положительная определенность матрицы перехода погрешностей может не подтверждаться, вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя из научных источников известно, что процесс сходится. Так, для дуополии выбор агентами шагов в классическом диапазоне  $[\underline{\gamma}_i^{t+1}; \bar{\gamma}_i^{t+1}] = [0; 1]$  не гарантирует сходимость по норме динамики коллективного поведения  $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in (0; 1]$ , хотя известно, что она сходится [24, 27–29]. Для рынков с числом агентов больше двух и диапазона шагов  $[0; 1]$  не удастся подтвердить сходимость по норме динамики ни для одного набора параметров  $\beta^{t+1}$ .

С целью преодоления неопределенности в подтверждении гипотезы «процесс сходится» для олигополии Курно в [31] предложено ограничивать диапазоны выбора шагов агентами. При определении границ диапазонов исходили из того, что агенты, выбирая максимально допустимый шаг, выбирают свой наилучший ответ на ожидаемые действия конкурентов. Поэтому для них большие шаги часто являются предпочтительнее малых шагов и правые границы диапазонов желательно иметь как можно ближе к единице. Исходя из этих предпосылок, для дуополии Курно диапазон  $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in [0, 136; 1]$ , а для рынка с тремя агентами диапазон  $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1}, \gamma_3^{t+1} \in [0, 334; 1)$  определяют положительно определенные

переходные матрицы погрешностей, поэтому динамика сходится к равновесию.

Перейдем к задаче формирования границ диапазонов сходимости динамики.

В первую очередь рассмотрим правые границы. Эту задачу будем решать при предположениях: 1) единая правая граница  $\bar{\gamma}_s$  для всех агентов, действующих по Штакельбергу, и моментов времени  $t$ ; 2) единая правая граница  $\bar{\gamma}_c$  для всех агентов, действующих по Курно, и моментов времени  $t$ ; 3) правая граница максимально допустима, в случае ее превышения хотя бы одним агентом не гарантируется сходимость процесса.

Далее полезны будут лемма 2 и лемма 3.

*Лемма 2.* Пусть  $A$  квадратная матрица размера  $m \times m$  с элементами вида  $a_{ii} = a, a_{ij} = b, i, j \in M = \{1, \dots, m\}, i \neq j$ . Тогда

$$\det(A) = (a - b)^{m-1} [a + (m - 1)b].$$

*Доказательство.* Будут полезными свойства определителей: 1) определитель не изменится, если к элементам любой строки прибавить соответствующие элементы какой-либо другой, умноженные на одно и то же произвольное число, 2) определитель треугольной квадратной матрицы равен произведению его диагональных элементов.

Прибавлением к элементам каждой строки соответствующих элементов следующей строки, умноженных на  $(-1)$ , получаем:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ b & a & b & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-b & b-a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a-b & b-a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Затем, разложением по последней строке, с использованием формулы вычисления треугольных определителей, имеем

$$\det(A) = a(a - b)^{m-1} + (m - 1)b(a - b)^{m-1} = (a - b)^{m-1} [a + (m - 1)b].$$

Лемма 2 доказана.

*Лемма 3.* Матрицы (17) и (18) положительно определены при

$$\gamma_i^{t+1} = \bar{\gamma}_s^{t+1} < \frac{2(1+n)}{1+nn_s} \quad (i \in N_s), \quad \gamma_i^{t+1} = \bar{\gamma}_c^{t+1} < \frac{4}{1+n_c} \quad (i \in N_c).$$

*Доказательство леммы.* Доказательство проведем для матрицы (17), для матрицы (18) оно аналогично. Имеем  $\gamma_i^{t+1} = \bar{\gamma}_s^{t+1}$  при  $\beta_i^{t+1} = 1$

и по (17) 
$$\mu_i^{t+1} = \bar{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n}, \quad \eta_i^{t+1} = \left( \bar{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n} \right)^2,$$

$$f_{ii}^{t+1} = 2\bar{\gamma}_s^{t+1} - \frac{(1+2n+n^2n_s)}{(1+n)^2} (\bar{\gamma}_s^{t+1})^2,$$

$$f_{ij}^{t+1} = 2\bar{\gamma}_s^{t+1} \frac{n}{1+n} - \frac{(2+nn_s)}{1+n} (\bar{\gamma}_s^{t+1})^2, \quad i, j \in N_s, i \neq j.$$

Также:

$$a-b = \frac{\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left( 2 - \frac{\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right), \quad a+(n_s-1)b = \frac{(1+nn_s)\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left( 2 - \frac{(1+nn_s)\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right).$$

По лемме 2 определитель матрицы (17) равен  $\det(F_s(\bar{\gamma}_s^{t+1})) = \left( \frac{\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)^{n_s} \left( 2 - \frac{\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)^{n_s-1} (1+nn_s) \left( 2 - \frac{(1+nn_s)\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right)$ . Он

положителен при  $\bar{\gamma}_s^{t+1} < \frac{2(1+n)}{1+nn_s}$ . Покажем, что при выполнении

данного неравенства также положителен определитель  $k$ -го главного минора этой матрицы ( $k < n_s$ ). Имеем

$$a+(k-1)b = \frac{\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \left[ 2(1+nk) - \frac{(1+2nk+n^2n_s k)\bar{\gamma}_s^{t+1}}{1+n} \right]. \quad \text{При}$$

$$\bar{\gamma}_s^{t+1} = \frac{2(1+n)}{1+nn_s} \text{ будет } a+(k-1)b = \frac{2(n_s-k)n\bar{\gamma}_s^{t+1}}{(1+n)(1+nn_s)} > 0.$$

Лемма 3 доказана.

Для агентов с реакцией по Штакельбергу для случаев  $n_s = 1, 2$  процесс сходится, если правая граница диапазонов максимальна, т.е.  $\bar{\gamma}_s^{t+1} = 1$ . При  $n_s > 2$  правая граница для сходящихся процессов

не может быть максимальной, поскольку  $\frac{n}{1+n} > \frac{2n}{1+nn_s}$ . Так при

$n_s = 3$  и  $n = 5$  имеем  $\bar{\gamma}_s^{t+1} = 0,75$ .

Для агентов с реакцией по Курно по лемме 3 для случая  $n=2$  имеем  $\bar{\gamma}_c^{t+1} < \frac{4}{3}$ , поэтому процесс придет в равновесие, когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая  $n=3$  должно быть  $\bar{\gamma}_c^{t+1} < 1$ , поэтому не подтверждается сходимость процесса когда все агенты выбирают максимальные шаги, равные единице. Для случая  $n=4$  можно подтвердить сходимость процесса только когда шаги агентов не выходят за правую границу диапазона, равную  $\bar{\gamma}_c^{t+1} = 0,8$ .

Перейдем к формированию левых границ диапазонов. Эту задачу будем решать для агентов с реакцией по Штакельбергу при предположениях: 1) единая левая граница  $\underline{\gamma}_s$  для всех агентов и моментов времени  $t$ ; 2) в случае их нарушения хотя бы одним агентом не гарантируется сходимость процесса; 3) известны единые правые границы диапазонов  $\bar{\gamma}_s$ .

По левым границам диапазонов для агентов с реакцией по Курно будем использовать результаты работы [31].

Докажем утверждения 5 и 6.

*Утверждение 5. Если в олигополии (1)–(3) с одним агентом с реакцией по Штакельбергу и произвольным числом агентов с реакцией по Курно, начиная с некоторого момента времени  $t_0$ , ведущий агент выбирает шаги в диапазоне  $(0; 1]$ , а ведомый агент –*

*в диапазоне  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c]$ , то матрицы перехода погрешностей будут*

*положительно определены,  $\|B_s^{t+1}\| < 1 \wedge \|B_c^{t+1}\| < 1$ , и процесс (4)–(6)*

*сходится. В частности, для ведомых агентов по [31], если  $n=3$ ,*

*то  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c] = [0,136; 1]$ , если  $n=4$ , то  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c] = [0,334; 1]$ .*

*Доказательство.* На основании леммы 3 правую границу  $\bar{\gamma}_s$  диапазона следует взять равной единице. При этом  $f_s(\bar{\gamma}_s) = f_s(1) < 1$ .

По (17) при  $\beta_1^{t+1} = 0$  (помня, что ведущим является первый агент)

имеем, что  $\mu_1^{t+1} = \underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}$ ,  $\eta_1^{t+1} = \left(\underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}\right)^2$ ,  $f_{11}^{t+1} = 2\underline{\gamma}_s - (\underline{\gamma}_s)^2$ . Имеем



$f_s(\underline{\gamma}_s) < 1$  при  $\underline{\gamma}_s \neq 0$ . По (12) при  $\gamma_1^{t+1} \in (0; 1]$  будет  $f_s(\gamma_1^{t+1}) < 1$  и  $\|B_s^{t+1}\| < 1$ .

Утверждение доказано.

*Утверждение 6. Если в олигополии (1)–(3) с двумя агентами с реакцией по Штакельбергу и произвольным числом агентов с реакцией по Курно, начиная с некоторого момента времени  $t_0$ , ведущий агент выбирает шаги в диапазоне  $(\underline{\gamma}_s; 1]$ , а ведомый агент – в диапазоне  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c]$ , то матрицы перехода погрешностей будут положительно определены,  $\|B_s^{t+1}\| < 1 \wedge \|B_c^{t+1}\| < 1$ , и процесс (4)–(6) сходится. Для ведущих агентов  $\underline{\gamma}_s$  определяется как меньший корень*

*квадратного уравнения* 
$$\frac{1+2n}{(1+n)^2} - \frac{(1+2n)n^2\gamma^2}{(1+n)^4} - (1-\gamma)^2 = 0, \quad u,$$

*в частности, если  $n=4$ , то  $\underline{\gamma}_s = 0,44$ , если  $n=5$ , то  $\underline{\gamma}_s = 0,5$ .*

*Для ведомых агентов по [31], если  $n=4$ , то  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c] = [0,136; 1]$ , если  $n=5$ , то  $[\underline{\gamma}_c; \bar{\gamma}_c] = [0,334; 1]$ .*

*Доказательство.* Для ведущих (первых двух) агентов на основании леммы 3 правую границу  $\bar{\gamma}_s$  диапазона следует взять равной единице. При этом  $f_s(\bar{\gamma}_s, \bar{\gamma}_s) = f_s(1, 1) < 1$ . Также по лемме 3

$f_s(\underline{\gamma}_s, \underline{\gamma}_s) < 1$ , если  $\underline{\gamma}_s \neq 0$ . По (17) при  $\beta_1^{t+1} = 0$ ,  $\beta_2^{t+1} = 1$  и  $\bar{\gamma}_s = 1$

имеем, что  $\mu_1^{t+1} = \underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}$ ,  $\eta_1^{t+1} = \left(\underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}\right)^2$ ,  $\mu_2^{t+1} = \bar{\gamma}_s \frac{n}{1+n}$ ,

$\eta_2^{t+1} = \left(\bar{\gamma}_s \frac{n}{1+n}\right)^2 = 1$ ,  $f_{11}^{t+1} = 2\underline{\gamma}_s - (\underline{\gamma}_s)^2 - \left(\frac{n}{1+n}\right)^2$ ,  $f_{22}^{t+1} = 1 - \left(\underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n}\right)^2$ ,

$f_{12}^{t+1} = f_{21}^{t+1} = \underline{\gamma}_s \frac{n}{1+n} - (\underline{\gamma}_s)^2 \frac{n}{1+n}$ . Определитель полученной матрицы

и ее первого главного минора положительны, если  $\underline{\gamma}_s$  определяется как меньший корень квадратного уравнения

$\frac{1+2n}{(1+n)^2} - \frac{(1+2n)n^2\gamma^2}{(1+n)^4} - (1-\gamma)^2 = 0$ , В частности, если  $n=4$ , то

$\underline{\gamma}_s = 0,44$ , если  $n=5$ , то  $\underline{\gamma}_s = 0,5$ . Тогда  $f_s(\underline{\gamma}_s, 1) < 1$  и  $f_s(1, \underline{\gamma}_s) = f_s(\underline{\gamma}_s, 1) < 1$ . По (12) при  $\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1} \in (\underline{\gamma}_s; 1]$  будет  $f_s(\gamma_1^{t+1}, \gamma_2^{t+1}) < 1$  и  $\|B_s^{t+1}\| < 1$ . Процесс сходится.

Утверждение доказано.

*Пример.* Пусть на рынке четыре агента: первые два – ведущие, другие два – ведомые.

Вначале для ведущих агентов рассмотрим классический диапазон шагов  $[\underline{\gamma}_s; \bar{\gamma}_s] = [0; 1]$ . По (17)  $\mu_1^{t+1} = 0,8\beta_1^{t+1}$ ,  $\mu_2^{t+1} = 0,8\beta_2^{t+1}$ ,  $\eta_1^{t+1} = 0,64\beta_1^{t+1}$ ,  $\eta_2^{t+1} = 0,64\beta_2^{t+1}$ ,  $f_{11}^{t+1} = \beta_1^{t+1} - 0,64\beta_2^{t+1}$ ,  $f_{22}^{t+1} = \beta_2^{t+1} - 0,64\beta_1^{t+1}$ ,  $f_{12}^{t+1} = f_{21}^{t+1} = 0$ . Определители главных миноров матрицы с элементами  $f_{ij}^{t+1}$  положительны, если  $\beta_1^{t+1} - 0,64\beta_2^{t+1} > 0$ , и, по симметрии,  $\beta_2^{t+1} - 0,64\beta_1^{t+1} > 0$ . В частности, это так, когда  $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 1$ , т.е. каждый ведущий агент выбирает максимальный шаг, считая его наилучшим ответом на ожидаемые действия конкурентов. Когда ведущие агенты действуют разнонаправлено в выборе шагов, то указанные неравенства могут не выполняться и вопрос о сходимости по норме остается без ответа, хотя известно, что процесс сходится  $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in (0; 1]$ . Например, если  $\beta_1^{t+1} = 1, \beta_2^{t+1} = 0,1$ , то второе неравенство не выполняется.

Изменим нижнюю границу диапазона шагов.

Пусть  $[\underline{\gamma}_s; \bar{\gamma}_s] = [0,5; 1]$ . Имеем по (17), что:

$$\begin{aligned} \mu_1^{t+1} &= 0,4 + 0,4\beta_1^{t+1}, \mu_2^{t+1} = 0,4 + 0,4\beta_2^{t+1}, \eta_1^{t+1} = 0,16 + 0,48\beta_1^{t+1}, \\ \eta_2^{t+1} &= 0,16 + 0,48\beta_2^{t+1}, f_{11}^{t+1} = 0,59 + 0,25\beta_1^{t+1} - 0,48\beta_2^{t+1}, f_{22}^{t+1} = 0,59 - \\ &- 0,48\beta_1^{t+1} + 0,25\beta_2^{t+1}, f_{12}^{t+1} = f_{21}^{t+1} = 0,4 - 0,2\beta_1^{t+1} - 0,2\beta_2^{t+1}. \end{aligned}$$

Определитель первого главного минора матрицы (17) положителен  $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in [0; 1]$ . Определитель второго главного минора матрицы (16) также положителен  $\forall \beta_1^{t+1}, \beta_2^{t+1} \in [0; 1]$ , поскольку выражение  $f_{11}^{t+1} f_{22}^{t+1} - f_{12}^{t+1} f_{21}^{t+1}$  после преобразований сводится к выражению  $0,1881 + 0,0243(\beta_1^{t+1} + \beta_2^{t+1}) - 0,16(\beta_1^{t+1} + \beta_2^{t+1})^2 + 0,5329\beta_1^{t+1}\beta_2^{t+1}$ ,

которое больше нуля. По утверждению 4 условия сходимости процесса выполняются. А по утверждению 6 нижняя граница диапазона, гарантирующего сходимость по норме процесса, может быть уменьшена.

В завершении статьи предложим метод формирования максимальных диапазонов шагов, гарантирующих сходимость процессов коллективного поведения в линейной модели олигополии (1)–(3) с произвольным числом агентов, действующих по Курно и Штакельбергу, который был использован при доказательстве утверждений 5 и 6. Суть метода состоит в следующем:

п. 1. Определяются для всех моментов времени  $t$  единая для ведущих и единая для ведомых агентов правые границы  $\bar{\gamma}_s$  и  $\bar{\gamma}_c$ , соответственно, диапазонов выбора параметров  $\gamma_i^{t+1}$  ( $i \in N$ ).

По лемме 3 единая граница для ведущих агентов определяется из условия  $\bar{\gamma}_s = \min \left\{ \frac{2(1+n)}{1+nn_s}; 1 \right\}$ , для ведомых агентов – из условия

$$\bar{\gamma}_c = \min \left\{ \frac{4}{1+n_c}; 1 \right\}.$$

Так для ведущих агентов при  $n_s = 1, 2$  имеем максимально возможную границу  $\bar{\gamma}_s = 1$ , при  $n_s > 2$  правая граница не может быть максимальной, в частности, при  $n_s = 3$  и  $n = 5$  имеем  $\bar{\gamma}_s = 0,75$ .

Для ведомых агентов при  $n_c = 2$  имеем  $\bar{\gamma}_c = 1$ , при  $n_c = 3 - \bar{\gamma}_c = 1$  (*примечание:* здесь сама граница не включается в диапазон),  $n_c = 4 - \bar{\gamma}_c = 0,8$ ,  $n_c = 5 - \bar{\gamma}_c = 2/3$  и т.д.

Значение  $\bar{\gamma}_s$  определяет в диапазоне  $[0; 1]$  максимальное значение параметра, для которого положительно определена квадратичная форма (14)  $f_s(\gamma^{t+1})$ , если  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s$ . Также  $\bar{\gamma}_c$  определяет в диапазоне  $[0; 1]$  максимальное значение параметра, для которого положительно определена квадратичная форма (16)  $f_c(\gamma^{t+1})$ , если  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$ .

Тогда, если  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s$  и  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$ , то  $f(\lambda^{t+1}) < 1$  для каждого набора действительных чисел  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ , такого что  $\sum_{i \in N_s} (\varepsilon_i)^2 + \sum_{i \in N_c} (\varepsilon_i)^2 = 1$ .

п. 2. Определяются для всех моментов времени  $t$  единая для ведущих и единая для ведомых агентов левые границы  $\underline{\gamma}_s$  и  $\underline{\gamma}_c$ , соответственно, диапазонов выбора параметров  $\gamma_i^{t+1}$  ( $i \in N$ ). Для этого решаются  $(n_s - 1)$  задач на положительную определенность матриц для ведущих агентов и  $(n_c - 1)$  задач на положительную определенность матриц для ведомых агентов. Суть этих задач состоит в следующем.

Задача 1 для случая, когда один ведущий агент и один ведомый агент выбирают нижнюю границу, а остальные – верхнюю границу диапазона.

Задача 1 по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первый агент выбирает нижнюю границу. По (17) для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_2^{t+1} = \gamma_3^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s$ , положив  $\beta_1^{t+1} = 0$  и  $\beta_2^{t+1} = \beta_3^{t+1} = \dots = \beta_{n_s}^{t+1} = 1$ , определяем элементы матрицы. Пусть  $\underline{\gamma}_{s(c)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma}$ , при котором матрица положительно определена, а  $f_s$  – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при  $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(c)}$ .

Задача 1 по ведомым агентам. Пусть, для определенности,  $(n_s + 1)$ -й агент выбирает нижнюю границу. По (18) для набора параметров  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$ , положив  $\beta_{n_s+1}^{t+1} = 0$  и  $\beta_{n_s+2}^{t+1} = \beta_{n_s+3}^{t+1} = \dots = \beta_n^{t+1} = 1$ , определяем элементы матрицы. Пусть  $\underline{\gamma}_{c(c)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma}$ , при котором матрица положительно определена. Тогда при  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(c)}$  положительно определена квадратичная форма  $f_c$ , соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора  $\gamma_1^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(1)}, \gamma_2^{t+1} = \gamma_3^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s,$   
 $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(1)}, \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$  и  $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$  имеем по (13)  
 $f < 1 - f_s - f_c < 1.$

Такой же вывод имеет место, когда любой один агент выбирает нижнюю границу, а другие – верхнюю границу диапазона.

Задача 2 для случая, когда два ведущих и два ведомых агента выбирают нижнюю границу, а остальные – верхнюю границу диапазона.

Задача 2 по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первые два агента выбирают нижнюю границу. По (17) для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_3^{t+1} = \gamma_4^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s,$  положив  $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = 0$  и  $\beta_3^{t+1} = \beta_4^{t+1} = \dots = \beta_{n_s}^{t+1} = 1,$  определяем элементы матрицы. Пусть  $\underline{\gamma}_{s(2)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma},$  при котором матрица положительно определена, а  $f_s$  – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(2)}.$

Задача 2 по ведомым агентам. Пусть, для определенности,  $(n_s + 1)$ -й и  $(n_s + 2)$ -й агенты выбирают нижнюю границу. По (17) для набора параметров  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}, \gamma_{n_s+3}^{t+1} = \gamma_{n_s+4}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c,$  определяем элементы матрицы, положив  $\beta_{n_s+1}^{t+1} = \beta_{n_s+2}^{t+1} = 0$  и  $\beta_{n_s+3}^{t+1} = \beta_{n_s+4}^{t+1} = \dots = \beta_n^{t+1} = 1.$  Пусть  $\underline{\gamma}_{c(2)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma},$  при котором матрица положительно определена. Тогда при  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(2)}$  положительно определена квадратичная форма  $f_c,$  соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(2)}, \gamma_3^{t+1} = \gamma_4^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s,$   $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(2)},$   
 $\gamma_{n_s+3}^{t+1} = \gamma_{n_s+4}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$  и  $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$  имеем по (13)  
 $f < 1 - f_s - f_c < 1.$

Такой же вывод имеет место, когда любые два агента выбирают нижнюю границу, остальные – верхнюю границу диапазона.

Подобным образом определяются  $\underline{\gamma}_{s(3)}, \underline{\gamma}_{s(4)}, \dots, \underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$  и  $\underline{\gamma}_{c(3)}, \underline{\gamma}_{c(4)}, \dots, \underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$ . Рассмотрим задачи определения последних параметров в этих списках.

Задача  $(n_s - 1)$  по ведущим и задача  $(n_c - 1)$  по ведомым агентам, когда  $(n_s - 1)$  ведущих и  $(n_c - 1)$  ведомых агентов выбирают нижнюю границу, а один ведущий и один ведомый – верхнюю границу диапазона.

Задача  $(n_s - 1)$  по ведущим агентам. Пусть, для определенности, первые  $(n_s - 1)$  агентов выбирают нижнюю границу, а  $n_s$ -й агент – верхнюю границу. По (17) для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s-1}^{t+1} = \underline{\gamma}$ ,  $\lambda_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s$  определяем элементы матрицы, положив  $\beta_1^{t+1} = \beta_2^{t+1} = \dots = \beta_{n_s-1}^{t+1} = 0$  и  $\beta_{n_s}^{t+1} = 1$ . Пусть  $\underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma}$ , при котором матрица положительно определена, а  $f_s$  – положительно определенная квадратичная форма, соответствующая этой матрице при  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s-1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$ .

Задача  $(n_c - 1)$  по ведомым агентам. Пусть, для определенности, первые  $(n_c - 1)$  агентов выбирают нижнюю границу, а  $n$ -й агент – верхнюю границу. По (18) для набора параметров  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_{n-1}^{t+1} = \underline{\gamma}$ ,  $\gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$  определяем элементы матрицы, положив  $\beta_{n_s+1}^{t+1} = \beta_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \beta_{n-1}^{t+1} = 0$  и  $\beta_n^{t+1} = 1$ . Пусть  $\underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$  – минимальное значение параметра  $\underline{\gamma}$ , при котором матрица положительно определена. Тогда при  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_{n-1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$  положительно определена квадратичная форма  $f_c$ , соответствующая этой матрице.

Поэтому для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s-1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{s(n_s-1)}$ ,  $\gamma_{n_s}^{t+1} = \bar{\gamma}_s$ ,  $\gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_{n-1}^{t+1} = \underline{\gamma}_{c(n_c-1)}$ ,  $\gamma_n^{t+1} = \bar{\gamma}_c$  и  $\sum_{i \in N} (\varepsilon_i)^2 = 1$  имеем по (13)  $f < 1 - f_s - f_c < 1$ .

Такой же вывод имеет место, когда любые  $(n_s - 1)$  ведущих агентов и любые  $(n_c - 1)$  ведомых агентов выбирают нижнюю границу, а оставшиеся агенты – верхнюю границу диапазона.

п. 3. В случае, когда все агенты выбирают нижнюю границу  $\underline{\gamma}$  в своих диапазонах, матрицы с элементами (16) и (17) и соответствующие им квадратичные формы положительно определены, если  $\underline{\gamma} \neq 0$ . В этом легко убедиться повторяя доказательство леммы 3 для нижней границы. Тогда  $f < 1$  для набора параметров  $\gamma_1^{t+1} = \gamma_2^{t+1} = \dots = \gamma_{n_s}^{t+1} = \gamma_{n_s+1}^{t+1} = \gamma_{n_s+2}^{t+1} = \dots = \gamma_n^{t+1} = \underline{\gamma}$  при условии, что ноль не входит в единый диапазон.

п. 4. Единая нижняя граница диапазонов определяется для ведущих агентов из условия  $\underline{\gamma}_s = \max_i \{ \underline{\gamma}_{s(i)} ; i = \overline{1, (n_s - 1)} \}$ , для ведомых агентов из условия  $\underline{\gamma}_c = \max_i \{ \underline{\gamma}_{c(i)} ; i = \overline{1, (n_c - 1)} \}$ .

На основании неравенства (12) в утверждении 2 имеем, что для диапазонов  $[\underline{\gamma}_s ; \overline{\gamma}_s]$  и  $[\underline{\gamma}_c ; \overline{\gamma}_c]$ , параметров  $\alpha_i^{t+1}, \beta_i^{t+1} \in [0; 1]$  ( $\alpha_i^{t+1} + \beta_i^{t+1} = 1, i \in N$ ), а также векторов вида  $\gamma^{t+1} = (\alpha_1^{t+1} \underline{\gamma}_s + \beta_1^{t+1} \overline{\gamma}_s, \dots, \alpha_{n_s}^{t+1} \underline{\gamma}_s + \beta_{n_s}^{t+1} \overline{\gamma}_s, \alpha_{n_s+1}^{t+1} \underline{\gamma}_c + \beta_{n_s+1}^{t+1} \overline{\gamma}_c, \dots, \alpha_n^{t+1} \underline{\gamma}_c + \beta_n^{t+1} \overline{\gamma}_c)$  выполняется неравенство  $f(\gamma^{t+1}) < 1$ . Тогда по (8), (11)  $\|B^{t+1}(\gamma^{t+1})\| < 1$  и процесс (4)–(6) сходится.

**6. Заключение.** Настоящее аналитическое исследование посвящено проблеме выявления условий сходимости динамики коллективного поведения к равновесию Нэша на конкурентных рынках с произвольным числом агентов, действующих по Курно или Штакельбергу, для случая линейных функций затрат и спроса. Основное внимание уделяется поиску ограничений на диапазоны допустимых откликов агентов, которые формулируются как условия, гарантирующие сходимость динамики. Особенность исследования определяет использование в качестве критерия сходимости динамики нормы матрицы перехода погрешностей от  $t$ -го к  $(t+1)$ -му моменту времени.

Для любого числа лидеров и ведомых агентов на рынке поставлены и решены две основные задачи: проверка выполнимости критерия сходимости динамики по норме для заданного диапазона

шагов; нахождение границ максимальных диапазонов шагов агентов, гарантирующих сходимость динамики коллективного поведения к равновесию Нэша.

В рамках решения указанных задач показано, что невыполнение критерия по норме (если норма матрицы перехода погрешностей больше или равна единице) особенно проявляет себя при разнонаправленном выборе, когда одни агенты выбирают «большие» шаги движения к своим текущим целям, другие, наоборот, – «малые» шаги, а также усиливается с ростом числа агентов на рынке. Установлены общие для любого числа агентов условия на диапазоны сходимости динамик.

Предложен метод построения максимальных диапазонов сходимости по норме динамики. Показано, что максимальные диапазоны не зависят от параметров рынка и агентов, но зависят от числа агентов на рынке. Метод позволяет, фиксируя правую границу, находить нижнюю границу диапазона сходимости.

Представлены результаты решения указанных задач для частных случаев олигополии, которые являются наиболее широко распространенными на практике. В частности, для рынков с небольшим числом агентов по предложенному методу рассчитаны максимальные диапазоны шагов.

Показано также, что динамика (10), (5), (6), в которой в каждый момент времени выполнены условия конкурентоспособности агентов, будет сходиться, если сходится по норме базовый процесс (4)–(6).

Результаты исследования могут иметь теоретическое и прикладное значение для понимания, оперативного реагирования и регулирования коллективного поведения на современных конкурентных рынках. Для более глубокого изучения коллективного поведения особенно важным представляется развитие экспериментальных исследований, учитывающих меняющиеся ситуации по экономическим ограничениям и нелинейность связей, поиск рациональных решений и общих закономерностей на основе анализа результатов вычислительных экспериментов.

### **Литература**

1. Cournot A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth* // London: Hafner. 1960. 235 p.
2. Stackelberg H. *Market Structure and Equilibrium* / Transl. into English by Basin D., Urch L. & Hill. R. // New York, Springer. 2011. 134 p.
3. Zewde A.B., Kassa S.M. *Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints* // *Computational Management Science*. 2021. vol. 18(4). pp. 455–475.



4. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. vol. 320. pp. 240–250.
5. Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model // *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 6. pp. 1051–1072.
6. Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach // *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81 no. 9. pp. 1659–1678.
7. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders // *Artificial Intelligence*. 2021. vol. 300. DOI: 10.1016/j.artint.2021.103549.
8. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives // *RAIRO – Operations Research*. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
9. Алгазин Г.И., Алгазина Д.Г. Моделирование динамики коллективного поведения в рефлексивной игре с произвольным числом лидеров // *Информатика и автоматизация*. 2022. Т. 21. № 2. С. 339–375.
10. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information // *Reliability Engineering and System Safety*. 2020. vol. 195. DOI: 10.1016/j.res.2019.106695.
11. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader // *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
12. Скаржинская Е.М., Цуриков В.И. Влияние личностных качеств агентов на экзогенное формирование лидерства по Штакельбергу в модели коллективных действий // *Экономика и математические методы*. 2022. № 4. С. 113–122.
13. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. Reflexion and Control: Mathematical Models // Leiden: CRC Press. 2014. 298 p.
14. Nash J. Non-Cooperative Games // *Annals of Mathematics*. 1951. no. 54. pp. 286–295.
15. The Handbook of Experimental Economics / Ed. by Kagel J. and Roth A. // Princeton: Princeton University Press. 1995. 744 p.
16. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games // *Proceedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10)*. 2010. pp. 461–473.
17. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers // *Applied Mathematics and Computation*. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
18. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information // *Applied Mathematics and Computation*. 2021. vol. 393(3). DOI: 10.1016/j.amc.2020.125823.
19. Korgin N.A., Korepanov V.O. Nash Bargaining Solution as Negotiation Concept for Resource Allocation Problem: Analysis of Experimental Data // *Contributions to Game Theory and Management*. 2020. no. 13. pp. 207–217.
20. Fedyanin D.H. An Example of Reflexive Analysis of a Game in Normal Form / Ed. by Petrosyan L., Mazalov V., Zenkevich N. // *Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications*. Birkhäuser, Cham. 2019. pp. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-030-23699-1\_1.
21. Опойцев В.И. Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения // М.: Наука. 1977. 248 с.

22. Новиков Д.А. Модели динамики психических и поведенческих компонент деятельности в коллективном принятии решений // Управление большими системами: М. ИПУ РАН. 2020. № 85. С. 206–237.
23. Корепанов В.О. Модели рефлексивного группового поведения и управления // М.: ИПУ РАН. 2011. 127 с.
24. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty // Automation and Remote Control. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.
25. Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents' // Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 389–406.
26. Askar S.S., Elettreybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
27. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality // Applied Mathematics and Computation. 2019. vol. 362. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.049.124535.
28. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
29. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization // Applied Mathematics and Computation. 2017. vol. 294. pp. 253–263.
30. Al-Khedhairi A. Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. 2020. vol. 21. pp. 339–359.
31. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models // Automation and Remote Control. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 367–388.
32. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы // М.: Наука. 1989. 432 с.
33. Белицкий Г.Р., Любич Ю.И. Нормы матриц и их приложения // Киев: Наукова думка. 1984. 158 с.

**Алгазин Геннадий Иванович** — д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры, кафедра теоретической кибернетики и прикладной математики, Алтайский государственный университет. Область научных интересов: математическое моделирование социально-экономических процессов, теория игр, исследование операций, математическая концепция системного компромисса, информационное управление. Число научных публикаций — 180. [algaz46@yandex.ru](mailto:algaz46@yandex.ru); проспект Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: +7(385)229-81-51.

**Алгазина Дарья Геннадьевна** — канд. техн. наук, доцент кафедры, кафедра цифровых технологий и бизнес-аналитики, Алтайский государственный университет. Область научных интересов: моделирование конкурентных рынков, управление в организационных системах, цифровые технологии франчайзинга. Число научных публикаций — 40. [darya.algazina@mail.ru](mailto:darya.algazina@mail.ru); проспект Ленина, 61, 656049, Барнаул, Россия; р.т.: +7(385)229-65-47.

G. ALGAZIN, D. ALGAZINA  
**CONVERGENCE IN NORM OF COLLECTIVE BEHAVIOR  
DYNAMICS IN THE REFLEXIVE MODEL OF OLIGOPOLY WITH  
LEADERS**

*Algazin G., Algazina D. Convergence in Norm of Collective Behavior Dynamics in the Reflexive Model of Oligopoly with Leaders.*

**Abstract.** A model of oligopoly with an arbitrary number of rational agents that are reflexive according to Cournot or Stackelberg, under the conditions of incomplete information for the classical case of linear functions of costs and demand is considered. The problem of achieving equilibrium based on mathematical modeling agents' decision-making processes is investigated. Works in this direction are relevant due to the importance of understanding the processes in real markets and the convergence of theoretical models with them. In the framework of a dynamic model of reflexive collective behavior, each agent at each moment adjusts its output, making a step in the direction of output maximizing its profit under the expected choice of competitors. The permissible step value is set by the range. This article sets and solves the problem of finding the ranges of permissible steps of agents, which are formulated as conditions that guarantee the convergence of dynamics to equilibrium. The novelty of the study is determined by the use of the norm of the error transition matrix from the  $t$ -th to  $(t+1)$ -moment of time as a criterion of the dynamics convergence. It is shown that the dynamics converge if the norm is less than unity, starting at some point in time, and the failure to fulfill this criterion especially manifests itself in multidirectional choice, when some agents choose "big" steps towards their current goals, while others, on the contrary, choose "small" steps. Failure to meet the criterion also increases as the market grows. The general conditions for the ranges of convergence of dynamics for an arbitrary number of agents are established, and a method for constructing the maximum such ranges is proposed, which also constitutes the novelty of the study. The results of solving the above problems for particular cases of oligopoly, which are the most widespread in practice, are presented.

**Keywords:** oligopoly, incomplete awareness, collective behavior, reflexion, matrix norm, process errors, convergence ranges.

## References

1. Cournot A. *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*. London: Hafner, 1960. 235 p.
2. Stackelberg H. *Market Structure and Equilibrium* / Transl. into English by Basin D., Urch L. & Hill. R. New York, Springer, 2011. 134 p.
3. Zewde A.B., Kassa S.M. Multilevel Multi-Leader Multiple-Follower Games with Nonseparable Objectives and Shared Constraints. *Computational Management Science*. 2021. vol. 18(4). pp. 455–475.
4. Wu R., Van Gorder R.A. Nonlinear Dynamics of Discrete Time Multi-Level Leader-Follower Games. *Applied Mathematics and Computation*. 2018. vol. 320. pp. 240–250.
5. Geras'kin M.I. The Properties of Conjectural Variations in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model. *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 6. pp. 1051–1072.
6. Geras'kin M.I. Approximate Calculation of Equilibria in the Nonlinear Stackelberg Oligopoly Model: A Linearization Based Approach. *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 9. pp. 1659–1678.

7. Castiglioni M., Marchesi A., Gatti N. Committing to Correlated Strategies with Multiple Leaders. *Artificial Intelligence*. 2021. vol. 300. DOI: 10.1016/j.artint.2021.103549.
8. Zewde A.B., Kassa S.M. Hierarchical Multilevel Optimization with Multiple-Leaders Multiple-Followers Setting and Nonseparable Objectives. *RAIRO – Operations Research*. 2021. vol. 55(5). pp. 2915–2939.
9. Algazin G.I., Algazina D.G. [Modeling the dynamics of collective behavior in a reflexive game with an arbitrary number of leaders]. *Informatika i avtomatizatsiya – Informatics and automation*. 2022. vol. 21. no. 2. pp. 339–375. (In Russ.).
10. Alcantara-Jiménez G., Clempner J.B. Repeated Stackelberg Security Games: Learning with Incomplete State Information. *Reliability Engineering and System Safety*. 2020. vol. 195. DOI: 10.1016/j.res.2019.106695.
11. Algazin G.I., Algazina D.G. Reflexive Processes and Equilibrium in an Oligopoly Model with a Leader. *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 7. pp. 1258–1270.
12. Skarzhinskaya E.M., Tsurikov V.I. [The influence of the agents' personal qualities on the exogenous formation of Stackelberg leadership in a collective action model]. *Ekonomika i matematicheskiye metody – Economics and mathematical methods*. 2022. vol. 58. no. 4. pp. 113–122. (In Russ.).
13. Novikov D.A., Chkhartishvili A.G. *Reflexion and Control: Mathematical Models*. Leiden: CRC Press, 2014. 298 p.
14. Nash J. *Non-Cooperative Games*. *Annals of Mathematics*. 1951. no. 54. pp. 286–295.
15. *The Handbook of Experimental Economics*. Princeton: Princeton University Press, 1995. 744 p.
16. Wright J., Leyton-Brown K. Beyond Equilibrium: Predicting Human Behavior in Normal Form Games. *Proceedings of Conference on Associations for the Advancement of Artificial Intelligence (AAAI-10)*. 2010. pp. 461–473.
17. Askar S., Simos T. Tripoly Stackelberg Game Model: One Leader Versus Two Followers. *Applied Mathematics and Computation*. 2018. vol. 328. pp. 301–311.
18. Askar S. On Complex Dynamics of Cournot-Bertrand Game with Asymmetric Market Information. *Applied Mathematics and Computation*. 2021. vol. 393(3). DOI: 10.1016/j.amc.2020.125823.
19. Korgin N.A., Korepanov V.O. Nash Bargaining Solution as Negotiation Concept for Resource Allocation Problem: Analysis of Experimental Data. *Contributions to Game Theory and Management*. 2020. no. 13. pp. 207–217.
20. Fedyanin D.H. An Example of Reflexive Analysis of a Game in Normal Form. *Frontiers of Dynamic Games. Static & Dynamic Game Theory: Foundations & Applications*. Birkhäuser, Cham, 2019. pp. 1–11. DOI: 10.1007/978-3-030-23699-1\_1.
21. Opoitsev V.I. *Ravnovesiye i ustoychivost' v modelyakh kollektivnogo povedeniya [Equilibrium and Stability in Models of Collective Behavior]*. Moscow: Nauka, 1977. 248 p. (In Russ.).
22. Novikov D.A. [Dynamics Models of Mental and Behavioral Components of Activity in Collective Decision-Making]. *Upravleniye bol'shimi sistemami: Sb. nauch. tr. – Large-Scale Systems Control: Collected papers*. Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2020. no. 85. pp. 206–237. (In Russ.).
23. Korepanov V.O. *Modeli refleksivnogo gruppovogo povedeniya i upravleniya [Models of reflexive group behavior and management]*. Moscow: Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, 2011. 127 p. (In Russ.).
24. Algazin G.I., Algazina Yu.G. Reflexive Dynamics in the Cournot Oligopoly under Uncertainty. *Automation and Remote Control*. 2020. vol. 81. no. 2. pp. 345–359.

25. Geraskin M.I. Reflexive Analysis of Equilibria in a Triopoly Game with Linear Cost Functions of the Agents'. *Automation and Remote Control*. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 389–406.
26. Askar S.S., Elettreybc M.F. The Impact of Cost Uncertainty on Cournot Oligopoly Games. *Applied Mathematics and Computation*. 2017. vol. 312. pp. 169–176.
27. Ueda M. Effect of Information Asymmetry in Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality. *Applied Mathematics and Computation*. 2019. vol. 362. DOI: 10.1016/j.amc.2019.06.049.124535.
28. Long J., Huang H. A Dynamic Stackelberg-Cournot Duopoly Model with Heterogeneous Strategies through One-Way Spillovers. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2020. vol. 2. pp. 1–11.
29. Elsadany A.A. Dynamics of a Cournot Duopoly Game with Bounded Rationality Based on Relative Profit Maximization. *Applied Mathematics and Computation*. 2017. vol. 294. pp. 253–263.
30. Al-Khedhairi A. Dynamical Study of Competition Cournot-like Duopoly Games Incorporating Fractional Order Derivatives and Seasonal Influences. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 2020. vol. 21. pp. 339–359.
31. Algazin G.I., Algazina Yu.G. To the Analytical Investigation of the Convergence Conditions of the Processes of Reflexive Collective Behavior in Oligopoly Models. *Automation and Remote Control*. 2022. vol. 83. no. 3. pp. 367–388.
32. Samarskiy A.A., Gulin A.V. *Chislennyye metody* [Numerical methods]. Moscow: Nauka, 1989. 432 p. (In Russ.).
33. Belitskiy G.R., Lyubich Yu.I. *Normy matrits i ikh prilozheniya* [Norms of matrices and their applications]. Kyiv: Naukova dumka, 1984. 158 p. (In Russ.).

**Algazin Gennady** — Ph.D., Dr.Sci., Professor of the department, Department of theoretical cybernetics and applied mathematics, Altai State University. Research interests: mathematical modeling of socio-economic processes, game theory, operations research, the mathematical concept of systemic compromise, informational control. The number of publications — 180. [algaz46@yandex.ru](mailto:algaz46@yandex.ru); 61, Lenin Av., 656049, Barnaul, Russia; office phone: +7(385)229-81-51.

**Algazina Daria** — Ph.D., Associate professor of the department, Department of digital technologies and business analytics, Altai State University. Research interests: modeling of competitive markets, organizational control, digital technologies of franchising. The number of publications — 40. [darya.algazina@mail.ru](mailto:darya.algazina@mail.ru); 61, Lenin Av., 656049, Barnaul, Russia; office phone: +7(385)229-65-47.

N. DUDARENKO, N. VUNDER, V. MELNIKOV, A. ZHILENKOV  
**MINIMIZATION OF PEAK EFFECT IN THE FREE MOTION OF  
LINEAR SYSTEMS WITH RESTRICTED CONTROL**

*Dudarenko N., Vunder N., Melnikov V., Zhilenkov A.* **Minimization of Peak Effect in the Free Motion of Linear Systems with Restricted Control.**

**Abstract.** A peak effect minimization problem in the free motion of linear systems is considered in the paper. The paper proposes an iterative procedure for the peak effect minimization using a combination of the recently proposed gramian-based approach and the theory of using the condition number of an eigenvectors matrix for the upper bound estimations of the system state processes.

Minimization of control costs is based on the analysis of the singular value decomposition of a gramian of control costs, followed by the formation of major and minor estimations of the gramian. Minimization of peak effect in the trajectories of free movement of systems is carried out by minimizing the condition number of the eigenvectors matrix of the matrix of a stable closed-loop system, while the state matrix with the desired eigenvalues and eigenvectors is designed with the generalized modal control. The development of an iterative algorithm for the peak effect minimization in the trajectories of linear systems under any non-zero initial conditions with restricted control is based on an aggregated index. The index takes into account both the estimate of the gramian of control costs and the condition number of the eigenvectors matrix of the stable closed-loop system. Minimization of the aggregated index makes it possible to ensure minimal deviations in the trajectories of free movement of systems of the considered class.

The procedure is applied to a system of two satellites with restricted control, where peak effects in satellites relative trajectories are minimized. Two cases of peak affect minimization are considered. In the first case, the peak effect minimization in the trajectories of free movement of satellites is carried out only by minimizing the gramian of control costs. In the second case, the peak effect minimization is realized using the developed algorithm. The results illustrate the efficiency of the procedure and indicate the decrease of the peak effect for the satellites relative trajectories.

**Keywords:** condition number, control costs, restricted control, free motion, gramian, peak effect, satellites, upper bounds.

**1. Introduction.** In recent years, the peak effect problem is actively investigated [1 – 4]. Peak effects in the free motion of a linear system occur due to nonzero initial conditions in the absence of an exogenous input signal. The problem is not new. First of all, the relationship between system poles and the behaviour of the transition process of a system were investigated by A.A. Feldbaum in the paper [5], which initiated the research of the peak effect problem. Then, the problem of large deviations was continued in the works [6] and [7], where the relationship between the peak effect level and the transient attenuation rate was revealed. Later, the peak effect was also found in systems, where poles had a different location from the one that causes an increase in the attenuation rate of the transient process [8]. The problem was presented for switching systems in [9] and for cascade control systems in [8], where the result

of R.N. Izmailov was generalized to obtain estimations of the deviations for the outputs. Recent papers [3, 10] continued the study in that field for different values of system poles, and new results for estimations of the upper bound of deviations were obtained with the linear matrix inequality [3] and with the condition number of the eigenvectors matrix [10]. Also, it was investigated that the peak effect depends on a matrix representation.

The peak effect minimization problem is also relevant to fluid flow control. The scientists James F. Whidborne and John McKernan consider an equivalent problem to provide minimization of the transient energy growth [11], that is used actively nowadays in the fluid flow control field [12 – 15].

The peak minimization problem is actual for the stabilization systems [3] and the tracking systems [9]. In this paper, the problem of peak effect minimization for stabilization systems with restricted control is considered. The peak effect in the researched system appears due to nonzero initial conditions and restricted control. Therefore, the aim of this paper is to propose a procedure for the peak effect minimization for stabilization systems with restricted control. The procedure is based on a combination of the recently proposed gramian-based approach and the theory of the usage of the condition number of an eigenvectors matrix for the upper bound estimations of system processes. The proposed procedure is applied to a satellite system, where the effectiveness of the procedure is illustrated.

The paper is laid out as follows. In Section 2, the approach for the estimation of peak effect in the free motion of linear continuous-time systems based on the calculation of the condition number of the eigenvectors matrix is described. Then, the gramian-based method for the estimation of control costs is discussed in Section 3. An iterative procedure for the minimization of the peak effect in the free motion of linear continuous-time systems with input saturation is proposed in Section 4. Then, the system of the two satellites' relative motion is described in Section 5 and the modelling of the system is presented without taking into account restricted control. In Section 6 the proposed procedure is applied to the satellite system with restricted control to provide the peak effect minimization. The results are discussed and the paper is finished with some concluding remarks.

**2. Minimization of peak effect in linear continuous-time systems.** A procedure for the minimization of peak effect in a linear continuous-time system with restricted control includes the step, where the upper bound estimation of the free motion of the system should be obtained. For this purpose, the approach based on the calculation of the condition number of the eigenvectors matrix of the system state matrix is used and described in the section. The approach allows us to get the upper bound estimation of the process in dynamics.

Assume a linear continuous-time plant is given in the following form:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t); x(0), \\ y(t) &= Cx(t),\end{aligned}\tag{1}$$

where  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$  are the state vector, the input vector and the output vector, respectively;  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  is vector of nonzero initial conditions;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ,  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  are the state matrix, the input matrix and the output matrix of the corresponding dimensions, respectively. It is assumed the pair of matrices  $(A, B)$  is controllable matrix pair.

The control law is designed with the pole-placement technique in the form:

$$u(t) = -Kx(t),\tag{2}$$

where matrix  $K \in \mathbb{R}^{r \times n}$  consists of the coefficients of the controller provided the required spectrum of eigenvectors and eigenvalues of the state matrix  $F = (A - BK)$  of the closed-loop system (1). The feedback matrix  $K$  can be calculated with the Sylvester equation:

$$M\Lambda - AM = -BH, K = HM^{-1},\tag{3}$$

where  $\Lambda$  is  $n \times n$  matrix described the desired dynamics of the system, matrix  $M = \text{row}\{M_i; i = \overline{1, n}\}$  is the invertible square matrix of eigenvectors of matrix  $F$ , matrix  $H \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is chosen such that a pair  $(\Lambda, H)$  is observable. At the same time, the control input  $u$  is restricted and satisfies an inequality  $-u_{max} \leq u \leq u_{max}$ .

Then, the closed-loop system (1) can be described in the following state-space form:

$$\dot{x} = Fx(t); x(0) = x(t)|_{t=0},\tag{4}$$

where  $F \in \mathbb{R}^{n \times n}$  is a stable state matrix of the closed-loop system with the eigenvalues  $\lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$ . Note, if the original system (4) is unstable, it may not be possible to globally stabilize it under restricted control.

**Lemma 1:** For the linear system in the form (4) the upper bound estimation  $\sup\{\|x(t)\|\}$  for the process  $\|x(t)\|$  can be given as:

$$\|x(t)\| \leq \sup\{\|x(t)\|\} = C\{M\}e^{\lambda M t} \|x(0)\|,\tag{5}$$



where matrix  $M = \text{row}\{M_i; i = \overline{1, n}\}$  is the invertible square matrix of eigenvectors of matrix  $F$ ,  $C\{M\}$  is the condition number of matrix  $M$  [16, 17],  $\lambda_M$  is the maximum eigenvalue of matrix  $F$ , defining the degree of stability  $\eta$  of the system (4) according to the expression  $\eta = |\lambda_M|$ . The norm of initial conditions  $x(0)$  is fixed, that  $\|x(0)\| = \text{const}$ .

**Proof:** The corresponding assertion is proved in [10]. However, for completeness, we give the detailed proof. Assessment of the upper bound of large deviations in the free motion of the continuous-time system (4) is based on the representation of the state matrix  $F$  in the following form:

$$M\Lambda = FM, \quad (6)$$

where  $\Lambda$  is a diagonal matrix of eigenvalues,  $M$  is a square matrix whose columns are the  $n$  linearly independent eigenvectors of  $F$ . The solution of equation (4) takes the form:

$$x(t) = e^{Ft}x(0). \quad (7)$$

Using (7) and (6), we get:

$$x(t) = e^{Ft}x(0) = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}x(0). \quad (8)$$

Let us form an upper bound for the processes of  $x(t)$  in the following form:

$$\|x(t)\| = \|\exp(Ft)x(0)\| = \|M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}x(0)\| \leq \|M\| \cdot \|\text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\}\| \cdot \|M^{-1}\| \cdot \|x(0)\|. \quad (9)$$

Note, that  $C\{M\} = \|M\| \|M^{-1}\|$  is condition number [18], [16] of the matrix  $M$ . Then, expression (9) can be rewritten as:

$$\|x(t)\| \leq C\{M\} e^{-\eta t} \|x(0)\|, \quad (10)$$

where  $\eta$  is degree of stability of the system (4) defined as  $\eta = \max_i |\lambda_i|; i = \overline{1, n}$ .

Therefore, the degree of sufficiency of the upper bound of the process  $\|x(t)\|$  is defined by condition number  $C\{M\}$  of the eigenvectors matrix of matrix  $F$ .

**Remark 1:** The upper bound  $\sup\{\|x(t)\|\}$  of the process  $\|x(t)\|$  with minimum sufficiency satisfies the following equations:

$$\|x(t)\| \leq \sup\{\|x(t)\|\} = C\{\tilde{M}\} e^{\lambda_M t} \|x(0)\|, \quad (11)$$

where matrix  $\tilde{M}$  is a modified matrix of eigenvectors of matrix  $F$ , containing eigenvectors of unity norm [16, 17] in relation to the equality:

$$\tilde{M} = M \cdot \text{diag}\{(\|M_i\|_2)^{-1}; i = \overline{1, n}\}. \quad (12)$$

**Remark 2:** The upper bound  $\|x(t)\|$  of autonomous system process with the initial states  $\{\|x(0)\|, t = 0\}$  exceeds its value in  $C\{\tilde{M}\}$  times.

**Remark 3:** The upper bound is an exponential function. Therefore, the upper bound  $\sup\{\|x(t)\|\}$  covers the process  $\|x(t)\|$ , containing deviation at the asymptotic tendency to zero.

Therefore, the peak effect minimization in linear continuous-time systems can be realized with the minimum value of the condition number of the eigenvectors matrix  $C\{M\}$ . At the same time, the minimum condition number is provided by the assignment of the required structure of eigenvectors that can be described as:

$$C\{M\} = \min_{\xi_i} (C\{\text{row}(M_i = \xi_i)\} \& \|\xi_i\| = 1; i = \overline{1, n}). \quad (13)$$

It can be concluded, the peak effect minimization can be provided by the structure of the eigenvectors that delivers the minimum to the condition number of the eigenvectors matrix of the state matrix. The problem (13) is a nondifferentiable optimization problem, that can be solved using one of the nonlinear programming algorithms [19].

**3. Minimization of peak effect in linear continuous-time systems with restricted control.** In this section, the linear continuous-time system (1) is considered for the case of restricted control and defined as:

$$u(t) = -Kx(t), -u_{max} \leq u \leq u_{max}. \quad (14)$$

The gramian-based approach is used for the purpose to minimize the peak effect in the system. An appropriate gramian can be obtained on the functional basis of control costs [10, 20]. Thus, for the case of the control law:

$$u(t) = Kx(t) = Ke^{Ft}x(0), \quad (15)$$

for the system (1) can be proved the following Lemma.

**Lemma 2:** An upper bound and a lower bound of energy consumption [21] for the control (15) of the system (1) can be defined as:

$$\max \|U_\infty\| = \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\} \|x(0)\|, \quad (16)$$

and:

$$\min \|U_\infty\| = \alpha_{\min}^{1/2} \{W_U\} \|x(0)\|, \quad (17)$$

where  $\alpha_{\max}$  and  $\alpha_{\min}$  are the maximum and the minimum singular values of the gramian on control costs, respectively. The norm of initial conditions  $x(0)$  is fixed, that  $\|x(0)\| = \text{const}$ .

**Proof:** Let us assume the square of the Euclidean norm of the control vector as energy consumption  $E_u$  for the control of a system. Then, if we consider an element  $U_t = u_{[0,t]}$  of a linear function space  $L_T^2$ ,  $T = \{t : 0 \leq t < \infty\}$ , then for the square of the Euclidean norm of the element  $U_t$  of the functional space, we can write the following representation:

$$\begin{aligned} E_u &= \|U_t\|^2 = \int_0^t u^T(\tau)u(\tau)d\tau = \\ &= x^T(0) \int_0^t e^{F^T\tau} K^T K e^{F\tau} d\tau x(0), \end{aligned} \quad (18)$$

where  $\int_0^t e^{F^T\tau} K^T K e^{F\tau} d\tau = W_U(t)$  is called a gramian on control costs or a control costs gramian [20]. The gramian on control costs on infinite time interval satisfies the condition  $\lim_{t \rightarrow \infty} W_U(t) = W_U$  and it is the solution of the matrix Lyapunov equation:

$$F^T W_U + W_U F = -K^T K. \quad (19)$$

Then, if we consider the time function (18) in infinite time interval, we get:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_t\|^2 = x^T(0) \lim_{t \rightarrow \infty} W_U(t)x(0) = x^T(0)W_U x(0) = \|U_\infty\|^2, \quad (20)$$

where  $W_U \in R^{n \times n}$  is a solution of the equation (19).

Using singular value decomposition of the control costs gramian  $W_U$  we can estimate the upper and lower bounds of control costs on an initial state sphere  $x(0)$ :

$$\|U_\infty\| = (x^T(0)W_U x(0))^{1/2}, \quad (21)$$

$$\alpha_{\min}^{1/2} \{W_U\} \|x(0)\| \leq \|U_\infty\| \leq \alpha_{\max}^{1/2} \{W_U\} \|x(0)\|. \quad (22)$$

The Lemma is proved.

That means the gramian on control costs is an estimation of energy costs for the control law realization. The estimation of the control costs allows us to find the optimal pole placement for a closed-loop researched system using the upper bound (16) for the control cost minimization. The restriction to the control  $-u_{max} \leq u \leq u_{max}$  should be taken into account together with the upper bound (16) of the control cost. This allows us to take the following approach.

**Approach to the peak effect minimization.** The peak effect minimization for linear continuous-time systems with restricted control (1), (14) can be realized with the minimization of the condition number of the eigenvector matrix and the minimization of the upper bound of the control costs.

The approach to the peak effect minimization for linear continuous-time systems with restricted control is realised on the consideration of two indexes together, that are the upper bound of the control cost  $\alpha_{max}^{1/2}\{W_U\}$  and the condition number of the eigenvector matrix  $C\{M\}$ . That indexes can be aggregated together due to the property of the condition number changing within the interval  $1 \leq C\{*\} < \infty$ . Then, the aggregated index takes the form:

$$J(C, U) = \alpha_{max}^{1/2}\{W_U\}C\{M\}. \quad (23)$$

The index  $J(C, U)$  takes into account as condition number of the eigenvector matrix as the control costs. Then, it is reasonable to use the index as a mathematical tool for the peak effect minimization. It should be noted the functional  $J(C, U)$  is not convex and may have several minimums (local minimums).

**4. Procedure for the peak effect minimization.** The procedure for peak effect minimization in linear continuous-time systems with restricted control can be realized according to the following steps:

- 1) Define a continuous-time system in the form (1);
- 2) Form an aggregated index  $J(C, U)$  in the form (23):
  - specify initial eigenvalues  $\Lambda_0 = \text{diag}\{\lambda_{0i} \in [\lambda_{min}, 0); i = \overline{1, n}\}$  of the state matrix  $F$  of a closed-loop system (4), where  $\lambda_{min}$  provides the required stability degree of the system;
    - calculate a feedback matrix  $K$  with the Sylvester equation (3);
    - calculate the state matrix  $F = (A - BK)$  of a closed-loop system;
    - calculate the condition number  $C\{M\}$  of eigenvectors matrix and the gramian of control costs (19) to get the index  $J(C, U)$ ;

3) Find the minimum of above the specified index  $J(C, U)$  subject to  $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i \in [\lambda_{\min}, 0]; i = \overline{1, n}\}$  using one of nonlinear programming algorithms [19, 22];

4) Fix the results in the form of the coefficients  $k_i$  of the feedback matrix  $K$ , that provide the minimum of peak effect in the free motion of the system with control saturation;

5) Simulate the system and analyze the performances.

The combination of methods provides the peak effect minimization in the free motion of continuous-time systems with restricted control.

**5. Example.** As an example, the trajectory of the relative motion of two satellites moving in a circumcircle orbit in the central gravitational field of the Earth is considered [23]. The design is based on the linearized dynamic model of the satellite system. The behavior of the system with restricted control is considered.

The example section consists of two subsections. The first subsection describes the behaviour of the system for two cases: 1) the input saturation is not taken into account; 2) the input saturation is taken into account at the control design stage. It is illustrated, that limitation on control has a significant impact on the system's behavior and can lead the system to stability loss. The minimization problem of the peak effect for the satellites relative trajectories with the proposed procedure is considered in the second subsection. The simulation results demonstrate the efficiency of the procedure.

**5.1. Modelling of two satellites system.** The linearized equations of the relative motion of satellites are given in the state space form (1), where:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\omega & 3\omega^2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u = -\varphi(y).$$

Here,  $x = [x_{12} \ \dot{x}_{12} \ z_{12} \ \dot{z}_{12}]$  is the system state vector, where  $x_{12}$  denotes the difference in coordinates of the second and the first satellites,  $x_{12} = x_2 - x_1$ ,  $z_{12} = z_2 - z_1$ . The control input  $u$  is described by the saturation function  $\varphi(y) = \text{sat}(u_{\max})$  and satisfies an inequality  $-u_{\max} \leq u \leq u_{\max}$ ,  $u_{\max} = 2.4 \times 10^{-5} \text{ m/s}^2$ .

The averaged angular velocity  $\omega$  of the satellites in orbit satisfies the expression  $\omega = \sqrt{\mu/a^3}$ , where  $\mu = GM$ ,  $G$  is the gravitational constant,  $M$  is the mass of the central body, and  $a$  is the semimajor axis of the satellite's orbit. In this case, for the Earth,  $\mu = 398.603 \times 10^9 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$ ,  $\omega = 0.001172$ .

The control law is designed with the pole-placement technique in the form (2). The coefficients of the controller  $K = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ k_4]$  is assigned to provide the required spectrum of eigenvalues for the matrix of the closed-loop system  $F = A - BK$ . Note, the condition number of the eigenvectors matrix of the states matrix  $A$  is  $C(A) = 1.49 \times 10^{19}$ .

Consider the behavior of the satellites relative trajectories, when there is no restriction on control and control is designed in the form (2). The coefficients of the controller  $k_i$  are defined to minimize the condition number of the eigenvector matrix (13), which are  $K = [-0.0001 \ 0.1265 \ 0,0024 \ 1.2165]$ .

The simulation results for the satellite's coordinates  $x_{12}$  and  $z_{12}$  with the defined initial conditions  $x_{12}(0) = 200m$ ,  $\dot{x}_{12}(0) = 0.025m/s$ ,  $z_{12}(0) = -50m$ ,  $\dot{z}_{12}(0) = -0.025m/s$  and the satellites relative trajectories on the  $(x,z)$  plane are depicted in Figures 1 and 2, respectively. The simulation time is confined to  $t_{fin} = 54000s = 15h$ . Let us consider regulation time  $t_r$  when the relative trajectory on the  $(x,z)$  plane reaches the circle with given radius  $R$  and does not leave it then, therefore  $t_r = \max_t(\sqrt{x_{12}^2 + z_{12}^2} > R)$  [23]. It is assumed that collision is escaped within this circle.

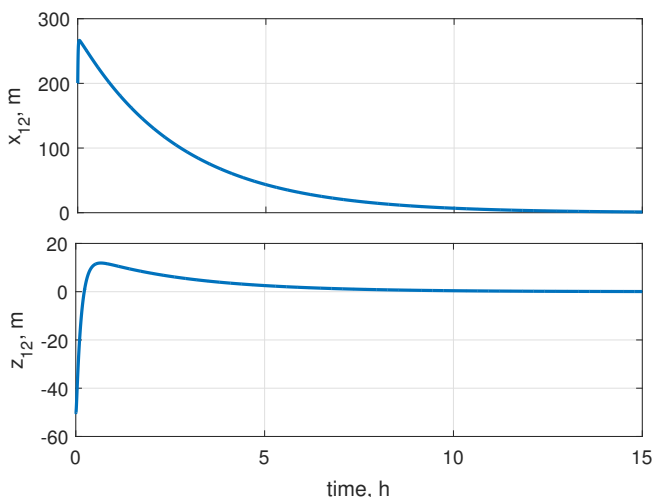


Fig. 1. Satellites relative trajectories  $x_{12}(t)$  and  $z_{12}(t)$  with nonzero initial conditions. The control  $u(t)$  is not restricted

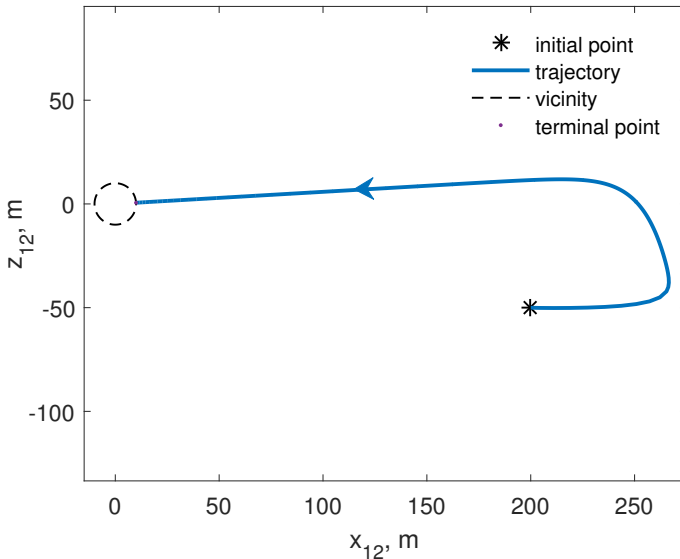


Fig. 2. Satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane with nonzero initial conditions. The control  $u(t)$  is not restricted

It can be observed that the peak effect exists in the stable satellites relative trajectories  $x_{12}(t)$  and  $z_{12}(t)$ . And it is about 270 m for the trajectories  $x_{12}(t)$ , and it is about 17 m for the trajectories  $z_{12}(t)$ . Here, the regulation time  $t_r = 33148s = 9.2h$ , and a minimum of the condition number  $C(M) = 1467$  of the eigenvectors matrix was found for  $\Lambda = \{-0.0996 \quad -0.0001 \quad -0.0248 \quad -0.002\}$ .

For the case of restricted control  $|u| \leq u_{\max}$  with the same feedback coefficients  $k_i$  the situation is changed. The closed-loop system becomes unstable. The behavior of the satellites relative trajectories takes the curves represented in Figures 3 and 4, respectively. Therefore, limitation on control has a significant impact on the system's behavior and can lead the system to stability loss.

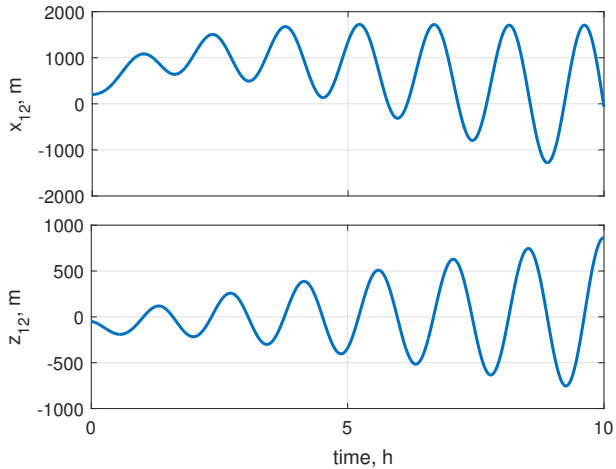


Fig. 3. Satellites relative trajectories  $x_{12}(t)$  and  $z_{12}(t)$  with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$

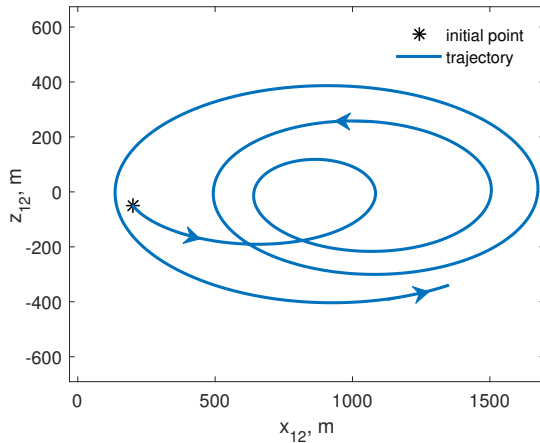


Fig. 4. Satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$

**5.2. Minimization of peak effect for the satellites relative trajectories.** In this section, the proposed iterative procedure for the peak



effect minimization is applied to the satellites system. It should be noted, an interval for the eigenvalues search is limited by the channels capacity [23] and the range of admissible algebraic spectrum of eigenvalues is varied within the interval  $\lambda_i \in [-1, 0)$ .

First of all, the case of minimization of control costs is considered. The coefficients of the controller  $k_i$  are defined to provide the condition (16), that are  $K = [ -9.12 \cdot 10^{-9} \quad 0.0018 \quad 3.24 \cdot 10^{-6} \quad -8.6 \cdot 10^{-5} ]$ .

The simulation results for the satellite's coordinates  $x_{12}$  and  $z_{12}$  with above defined initial conditions and the satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane are depicted in Figures 5 and 6, respectively. Here, the regulation time  $t_r = 31810s = 8.83h$ , and a minimum of the gramian on control costs  $W_u = 0.0317$  was found for  $\Lambda = \{-0.0004 \quad -0.0004 \quad -0.0004 \quad -0.0004\}$ .

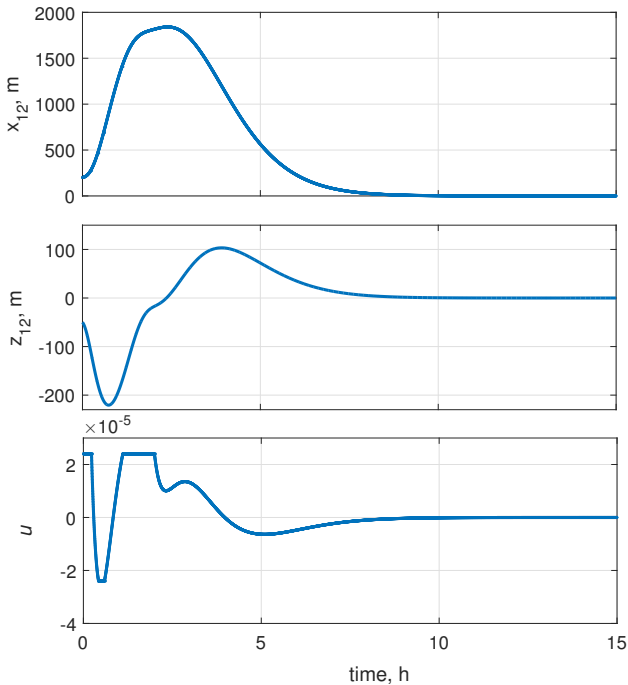


Fig. 5. Satellites relative trajectories  $x_{12}(t)$  and  $z_{12}(t)$  with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$ . Minimization of peak effect by the minimization of control costs

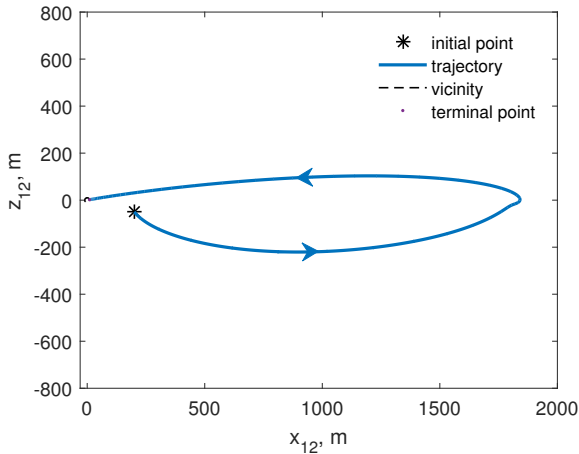


Fig. 6. Satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$ . Minimization of peak effect by the minimization of control costs

It can be seen, the researched system is stable and has a peak effect of about 1800 m for the satellite's coordinate  $x_{12}$  and it is about 220 m for the satellite's coordinate  $z_{12}$ .

Then, the case of peak effect minimization with the aggregated index  $J(C, U)$  in the form (23) is considered and minimization of the condition number of eigenvectors matrix together with the singular value of the gramian on the control costs is realized by the controller  $K = \begin{bmatrix} -9.65 \cdot 10^{-8} & 0.006 & 1.28 \cdot 10^{-5} & 0.004 \end{bmatrix}$ .

The simulation results for the satellite's coordinates  $x_{12}$  and  $z_{12}$  with above defined initial conditions and the satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane are depicted in Figures 7 and 8, respectively. Here, the regulation time  $t_r = 57765s = 16h$  and the minimum of the aggregated index  $J(C, U) = 804.11$  were found for  $\Lambda = \{-0.0006 \quad -0.0033 \quad -0.0021 \quad -0.0001\}$ . Obviously, the peak effect is minimized and reaches 1300m for the satellite's coordinate  $x_{12}$  and 190m for the satellite's coordinate  $z_{12}$ . But it should be noted, the peak effect minimization leads to the regulation time changing. So, the regulation time, in this case, was increased almost twice.

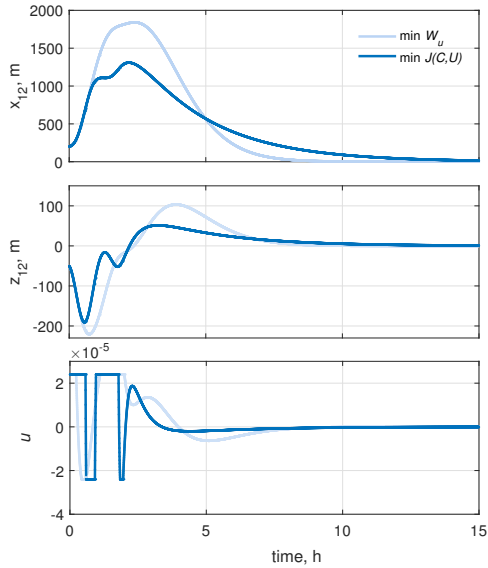


Fig. 7. Satellites relative trajectories  $x_{12}(t)$  and  $z_{12}(t)$  with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$ . Minimization of peak effect with the proposed procedure

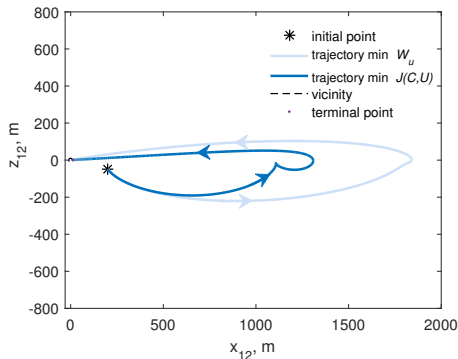


Fig. 8. Satellites relative trajectories on the  $(x, z)$  plane with nonzero initial conditions and the restricted control  $|u| \leq u_{\max}$ . Minimization of peak effect with the proposed procedure

Figure 9 illustrates the norm of the state vector  $\|x(t)\|$  and the restricted control  $u$  for different values of the controller coefficients  $K_i$ . The plots are presented for the cases of eigenvalues deviations from the proposed values  $\Lambda$  for 20% in one direction and in the other one. It can be seen, that the proposed controller allows us to find an optimal compromise between the control costs and the peak effect in the trajectories of the free movement of satellites.

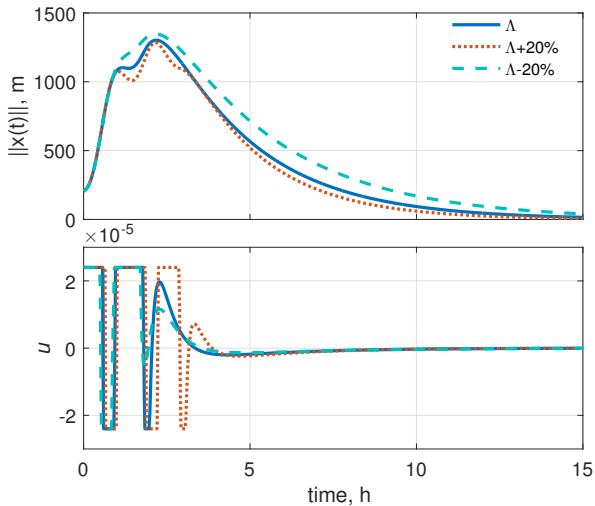


Fig. 9. Plots of the state vector  $\|x(t)\|$  and the restricted control  $u$  for different values of the controller coefficients  $K_i$

**6. Conclusion.** The aim of the paper was to minimize the peak effect in stabilization systems under any non-zero initial conditions with restricted control. The iterative procedure was suggested for the peak effect minimization problem. The procedure was based on a combination of the recently proposed gramian-based approach and the theory of using the condition number of the eigenvector matrix for the upper bound estimations of the system processes. It was established the correct structure of eigenvectors that delivers the minimum value to the condition number of the eigenvector matrix of the closed-loop system should be considered together with the maximum singular value of a gramian on control costs to provide the peak effect minimization to the system's behaviour.

The procedure was applied to the system of two satellites. Minimization of peak effect for the satellites relative trajectories was reached. The simulation results demonstrated the efficiency of the procedure.

As future work, it is supposed to consider the case of the system with restricted control and input additive uncertainties to study the peak effect in the system.

### References

1. Ahiyevich V.N., Parsegov S. E., Shcherbakov P.S. [Upper bounds on peaks in discrete-time linear systems]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and telemechanics*. 2018. vol. 79. no. 11. pp. 1976–1988. (In Russ.).
2. Dudarenko N., Vunder N., Grigoriev V. Large deviations in discrete-time systems with control signal delay. *Proceedings of 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics*. 2019. pp. 281–288.
3. Polyak B., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems. *Automatica*. 2016. no. 74. pp. 297–307.
4. Khlebnikov M. Upper estimates of the deviations in linear dynamical systems subjected to uncertainty. *15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision*. 2018. pp. 1811–1816.
5. Feldbaum A. [On the distribution of roots of characteristic equations of control systems]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and telemechanics*. 1948. no. 4. pp. 253–279. (In Russ.).
6. Polotskij V. [Estimation of the state of single-output linear systems by means of observers]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and telemechanics*. 1981. no. 41. pp. 1640–1648. (In Russ.).
7. Izmailov R. [The peak effect in stationary linear systems with scalar inputs and outputs]. *Avtomatika i Telemekhanika – Automation and telemechanics*. 1987. no. 48. pp. 1018–1024. (In Russ.).
8. Sussman H., Kokotovic P. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*. 1991. no. 36. pp. 461–476.
9. Vunder N., Dudarenko N. Analysis of system situations with a non-zero initial state in the task of pre-operational adjustment of the main reflector of a large full-rotary radio telescope. *Journal of Optical Technology*. 2018. no. 10. pp. 33–42.
10. Vunder N.A. [Analysis of deviations from monotonic convergence of free motion trajectories of continuous and discrete systems. Dissertation of candidate of engineering sciences]. St. Petersburg: ITMO University, 2018. 159 p. (In Russ.).
11. Whidborne J.F., McKernan J.C. On the Minimization of Maximum Transient Energy Growth. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2007. vol. 52. no. 9. pp. 1762–1767.
12. Yao H., Sun Y., Mushtaq T., Hemati M. Reducing Transient Energy Growth in a Channel Flow Using Static Output Feedback Control. *AIAA Journal*. 2022. vol. 60. no. 7. pp. 4039–4052.
13. Apkarian P., Noll D. Optimizing the Kreiss constant. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2020. vol. 58. no. 6. pp. 3342–3362.
14. Benyza J., Lamine M., Hifdi A. Transient energy growth of channel flow with cross-flow. *MATEC Web Conf*. 2019. vol. 286. pp. 07008.
15. Hemati M., Yao H. Advances in Output Feedback Control of Transient Energy Growth in a Linearized Channel Flow. *AIAA Scitech 2019 Forum*. 2019. pp. 0882.
16. Golub G., Van Loan C. *Matrix Computations*. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996. 723 p.
17. Wilkinson J. *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Oxford: Clarendon Press, 1995. 680 p.
18. Strang G. *Linear Algebra for Everyone*. Wellesley-Cambridge Press, 2020. 368 p.

19. Himmelblau D. Applied nonlinear programming. New York: McGraw-Hill, 1972. 416 p.
20. Biruykov D., Ushakov A. Gramian Approach for Control Costs Estimation. Proceedings of International Conference on Electrical, Control and Computer Engineering. 2011. pp. 94–96.
21. Brunton S.L., Kutz J.N. Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Cambridge University Press, 2019. 492 p.
22. Byrd R.H., Gilbert J. C., Nocedal J. A. Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming. Mathematical Programming. 2000. vol. 89. no. 1. pp. 149–185.
23. Andrievsky B., Fradkov A., Kudryashova E. Control of Two Satellites Relative Motion over the Packet Erasure Communication Channel with Limited Transmission Rate Based on Adaptive Coder. Electronics. 2020. no. 9. pp. 2032.

**Dudarenko Natalia** — Ph.D., Associate professor of faculty, Faculty of control systems and robotics, ITMO University. Research interests: analysis and operability diagnostics of multivariable dynamic systems, control system reconfiguration, stability of dynamic systems, mathematical modelling and analysis of multivariable dynamic systems with a human operator. The number of publications — 120. dudarenko@yandex.ru; 49, Kronverksky Av., 197101, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)595-4128.

**Vunder Nina** — Ph.D., employee, ITMO University. Research interests: application of modal control methods and the method of consecutive compensator, systems with uncertainties and delays, peak effect in the free motion of stable systems, control of multidimensional systems. The number of publications — 50. wunder.n@mail.ru; 49, Kronverksky Av., 197101, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)595-4128.

**Melnikov Vitaly** — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Professor of mechanics, Saint-Petersburg Mining University. Research interests: control, modelling and analysis of nonlinear systems, mechanical systems, modelling of robotic systems, identification methods for solid bodies. The number of publications — 85. Melnikov\_VG@pers.spmi.ru; 2, 21-st Line V.O., 199106, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)328-8282.

**Zhilentov Anton** — Ph.D., Associate Professor, Head of the department, Department of cyberphysical systems, State Marine Technical University. Research interests: navigation, modelling and control of robotic systems, robot motion planning, neural networks, robot vision. The number of publications — 110. zhilentovanton@gmail.com; 101, Lotsmanskaya St., 190121, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)753-5646.

Н.А. ДУДАРЕНКО, Н.А. ВУНДЕР, В.Г. МЕЛЬНИКОВ, А.А. ЖИЛЕНКОВ  
**МИНИМИЗАЦИЯ ОТКЛОНЕНИЙ В ТРАЕКТОРИЯХ  
СВОБОДНОГО ДВИЖЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С  
ОГРАНИЧЕНИЯМИ ПО УПРАВЛЕНИЮ**

*Дударенко Н.А., Вундер Н.А., Мельников В.Г., Жиленков А.А. Минимизация отклонений в траекториях свободного движения линейных систем с ограничениями по управлению.*

**Аннотация.** Рассматривается задача минимизации отклонений в траекториях свободного движения линейных систем с ограничениями по управлению. Предложен итеративный алгоритм для минимизации отклонений с использованием технологии системных грамианов и числа обусловленности матрицы собственных векторов устойчивой системы. Минимизация затрат на управление базируется на анализе сингулярного разложения грамиана затрат на управление с последующим формированием мажорантных и минорантных грамианов оценок. Минимизация отклонений в траекториях свободного движения систем осуществляется путем минимизации числа обусловленности матрицы собственных векторов матрицы состояния замкнутой системы, при этом матрица состояния с желаемыми спектрами собственных чисел и собственных векторов конструируется на основе обобщенного модального управления. В основе разработки итеративного алгоритма для минимизации отклонений в траекториях движения линейных систем при ненулевых начальных условиях с ограничениями по управлению лежит агрегированный показатель, позволяющий сформировать систему с минимальными отклонениями в траекториях ее свободного движения при минимальных затратах на управление. Данный показатель учитывает одновременно как оценку грамиана затрат на управление, так и число обусловленности матрицы собственных векторов устойчивой замкнутой системы. Минимизация агрегированного показателя позволяет обеспечить минимальные отклонения в траекториях свободного движения систем рассматриваемого класса. Алгоритм апробирован на примере системы с ограниченным входом, описывающей относительное движение двух спутников. Рассмотрено два случая минимизации отклонений. В первом случае минимизация отклонений в траекториях свободного движения спутников выполнена только за счет минимизации грамиана затрат на управление. Во втором случае минимизация отклонений осуществлена с применением разработанного алгоритма. Полученные результаты иллюстрируют эффективность предложенного алгоритма и уменьшение величины отклонений в траекториях относительного движения спутников.

**Ключевые слова:** число обусловленности, затраты на управление, ограничение по входу, свободное движение, грамиан, эффект всплеска, спутники, оценка сверху.

## Литература

1. Агиевич В.Н., Парсегов С.Э., Щербаков П.С. Верхние оценки всплеска в линейных дискретных системах. Автоматика и телемеханика. 2018. № 11. С. 32–46.
2. Dudarenko N., Vunder N., Grigoriev V. Large deviations in discrete-time systems with control signal delay. Proceedings of 16th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics. 2019. pp. 281–288.
3. Polyak B., Smirnov G. Large deviations for non-zero initial conditions in linear systems. Automatica. 2016. no. 74. pp. 297–307.

4. Khlebnikov M. Upper estimates of the deviations in linear dynamical systems subjected to uncertainty. 15th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision. 2018. pp. 1811–1816.
5. Фельдбаум А.А. О распределении корней характеристического уравнения систем регулирования. Автоматика и телемеханика. 1948. № 4. С. 253–279.
6. Полоцкий В.Н. Оценка состояния линейных систем с одним выходом при помощи наблюдающих устройств. Автоматика и телемеханика. 1980. № 12. С. 12–28.
7. Измайлов Р.Н. Эффект «всплеска» в стационарных линейных системах со скалярными входами и выходами. Автоматика и телемеханика. 1987. № 8. С. 56–62.
8. Sussman H., Kokotovic P. The peaking phenomenon and the global stabilization of nonlinear systems. IEEE Trans. Automat. Control. 1991. no. 36. pp. 461–476.
9. Вундер Н.А., Дударенко Н.А. Анализ системных ситуаций с ненулевым начальным состоянием в задаче предэксплуатационной юстировки главного рефлектора большого полноповоротного радиотелескопа. Оптический журнал. 2018. № 10. С. 33–42.
10. Вундер Н.А. Анализ отклонений траекторий свободного движения непрерывных и дискретных систем от монотонной сходимости: диссертация. СПб: Университет ИТМО, 2018. 159 с.
11. Whidborne J.F., McKernan J.C. On the Minimization of Maximum Transient Energy Growth. IEEE Transactions on Automatic Control. 2007. vol. 52. no. 9. pp. 1762–1767.
12. Yao H., Sun Y., Mushtaq T., Hemati M. Reducing Transient Energy Growth in a Channel Flow Using Static Output Feedback Control. AIAA Journal. 2022. vol. 60. no. 7. pp. 4039–4052.
13. Apkarian P., Noll D. Optimizing the Kreiss constant. SIAM Journal on Control and Optimization. 2020. vol. 58. no. 6. pp. 3342–3362.
14. Benyza J., Lamine M., Hifdi A. Transient energy growth of channel flow with cross-flow. MATEC Web Conf. 2019. vol. 286. pp. 07008.
15. Hemati M., Yao H. Advances in Output Feedback Control of Transient Energy Growth in a Linearized Channel Flow. AIAA Scitech 2019 Forum. 2019. pp. 0882.
16. Golub G., Van Loan C. Matrix Computations. Baltimore and London: Johns Hopkins University Press, 1996. 723 p.
17. Wilkinson J. The Algebraic Eigenvalue Problem. Oxford: Clarendon Press, 1995. 680 p.
18. Strang G. Linear Algebra for Everyone. Wellesley-Cambridge Press, 2020. 368 p.
19. Himmelblau D. Applied nonlinear programming. New York: McGraw-Hill, 1972. 416 p.
20. Biruykov D., Ushakov A. Gramian Approach for Control Costs Estimation. Proceedings of International Conference on Electrical, Control and Computer Engineering. 2011. pp. 94–96.
21. Brunton S.L., Kutz J.N. Data-Driven Science and Engineering: Machine Learning, Dynamical Systems, and Control. Cambridge University Press, 2019. 492 p.
22. Byrd R.H., Gilbert J. C., Nocedal J. A. Trust Region Method Based on Interior Point Techniques for Nonlinear Programming. Mathematical Programming. 2000. vol. 89. no. 1. pp. 149–185.
23. Andrievsky B., Fradkov A., Kudryashova E. Control of Two Satellites Relative Motion over the Packet Erasure Communication Channel with Limited Transmission Rate Based on Adaptive Coder. Electronics. 2020. no. 9. pp. 2032.



**Дударенко Наталия Александровна** — канд. техн. наук, доцент факультета, факультет систем управления и робототехники, Университет ИТМО. Область научных интересов: анализ и диагностика работоспособности многомерных систем, реконфигурация многомерных систем, математическое моделирование и анализ многомерных систем с человеком-оператором в своем составе, модальное управление, компенсация возмущающих воздействий. Число научных публикаций — 120. dudarenko@yandex.ru; Кронверкский проспект, 49, 197101, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)595-4128.

**Вундер Нина Александровна** — канд. техн. наук, сотрудник, Университет ИТМО. Область научных интересов: модальное управление и его приложения, метод последовательного компенсатора, системы с неопределенностями и задержками, отклонения в траекториях свободного движения устойчивых систем, управление многомерными системами. Число научных публикаций — 50. wunder.n@mail.ru; Кронверкский проспект, 49, 197101, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)595-4128.

**Мельников Виталий Геннадьевич** — д-р техн. наук, доцент, профессор механики, Санкт-Петербургский горный университет. Область научных интересов: управление, моделирование и анализ нелинейных систем, механические системы, моделирование робототехнических систем, методы идентификации для твердых тел. Число научных публикаций — 85. Melnikov\_VG@pers.spmi.ru; 21-я линия ВО, 2, 199106, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)328-8282.

**Жиленков Антон Александрович** — канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой, кафедра киберфизических систем, Санкт-Петербургский государственный морской технический университет. Область научных интересов: навигация, моделирование и управление робототехническими системами, планирование движения робота, нейронные сети, техническое зрение. Число научных публикаций — 110. zhilenkovanton@gmail.com; улица Лоцманская, 101, 190121, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)753-5646.

R. SHARMA, K. SHARMA, T. VARMA  
**DESIGNING OF 2D-IIR FILTER USING A FUSED ESMA-PELICAN  
OPTIMIZATION ALGORITHM (FEPOA)**

---

*Sharma R., Sharma K., Varma T. Designing of 2D-IIR Filter Using a Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA).*

**Abstract.** Many Digital Signal Processing (DSP) applications and electronic gadgets today require digital filtering. Different optimization algorithms have been used to obtain fast and improved results. Several researchers have used Enhanced Slime Mould Algorithm for designing the 2D IIR filter. However, it is observed that the Enhanced Slime Mould Algorithm did not achieve a better solution structure and had a slower convergence rate. In order to overcome the issue a fused ESMA-pelican Optimization Algorithm (FEPOA) is utilized for designing the 2D IIR filter which incorporates the pelican Optimization Algorithm with the Enhanced slime Mould Algorithm (ESMA). At first, the Chaotic Approach is utilized to initialize the population which provides the high-quality population with excellent population diversity, after that the position of population members is to identify and correct the individual in the boundary search region. After that, by the pelican Tactical Approach is to examine the search space and exploration power of the FEPOA, then the Fitness is calculated randomly, and the best solution will be upgraded and then moved towards the iterations. It repeats the FEPOA phases until the execution completes. Then the best solution gives the optimal solution, which enhances the speed of convergence, convergence accuracy and the performances of FEPOA. The FEPOA is then implemented in the IIR filter to improve the overall filter design. The results provided by FEPOA accomplish the necessary fitness and best solution for 200 iterations, and the amplitude response will achieve the maximum value for  $\approx 2,4,8$  as well as the execution time of 3.0158s, which is much quicker than the other Genetic Algorithms often used for 2D IIR filters.

**Keywords:** FEPOA, IIR filter, population member, FIR filter, Chaotic approach, Pelican's tactical approach.

---

**1. Introduction.** Digital filters are a fundamental component of digital systems because they filter recorded signals in DSP, which artefacts and sound might taint. DSP and allied fields like multimedia content analysis and digital transportation have extensively used and placed a high value on digital filters. On the other hand, the drawbacks and issues with creating such filters have prompted researchers to abandon conventional design methods in favor of time and money-saving, cost-effective solutions. The impulse response length often separates digital filtering into two categories: Finite Impulse Response (FIR) and Infinite Impulse Response (IIR). IIR filtering systems are used more frequently than analogous FIR systems because they have a smaller group delay, lower computational cost (less order), and considerably higher and better accuracy in satisfying the performance criteria [1]. On the other hand, because the IIR filter has feedback, the impulse response has an indefinite length [2]. Because its transfer function contains poles, the construction of an IIR filter has proven

to be difficult. An IIR transfer method's phase response becomes nonlinear, and its magnitude response drifts due to the quantized correlation coefficients of the denominator coefficients, which leads to instability. As a result, multiple efforts were undertaken to utilize various optimization techniques to provide the best possible filter response [3]. Dealing with their stability limitations is one of the key challenges in their optimal designs, as there are no needed and adequate convex stability situations for filters of a higher order [4]. Various scholars have described various algorithms in recent years to handle optimization challenges. Some of them have been given here in common. A population-based method called Harmony Search (HS), which draws inspiration from music, has effectively solved global optimization issues [5]. A hybrid optimization method, which integrates the Moth Flame Optimization (MFO) methodology, as well as the Variable Neighbor Search (VNS) heuristic, has also been developed for an Infinite Impulse Response (IIR) filter [6]. A hybrid technique called the P Norm Optimization and ANN are combined or integrated for Auto Adaptive IIR Filter [7]. Invasive Weed Optimization (IWO) is a meta-heuristic technique that is used in the research to construct an order eight high-pass filter with Infinite Impulse Response (IIR) [8]. A Differential Evolution technique that combines polar and rectangular coordinates has been used for IIR Filter [9]. A digital filter with IIR was created using the hybrid optimization methodology and employed with the Dynamic-Static Topology of Particle Swarm Optimization (DS-PSO) method [10]. The system of roughly linear-phase recursive digital filters is explored using a constrained optimization approach. The concept is based on limited optimization techniques for IIR digital filters with nearly linear stages [11]. A bio-inspired meta-heuristic Biogeography-Based Optimization (BBO) process is used for IIR Filter. This algorithm mimics various species' migration and mutation processes, allowing habitat structures. [12]. A new metaheuristic technique called Average Differential Evolution with Local Search (ADE-LS) has been developed and used to find unidentified IIR devices [13]. These are some of the algorithms used for the IIR filter design. Over the past few decades, the formulation and usage of metaheuristics to solve optimization problems have become prominent. A wide range of research investigations has been recently sparked by formulating practical optimization issues and their effective resolution using metaheuristic algorithms [14]. The Contribution of the Paper is enumerated as:

- The Pelican Optimization Method and ESMA are combined to create a hybrid algorithm, which improves performance by speeding up convergence, increasing convergence rate, and improving convergence precision.

– The population is initialized using a chaotic technique. Then using a pelican's tactical strategy, each member of the population is located and transported toward the area that was found to correct them to the boundary search region. Then all the updating and iteration processes are performed, and the Fitness is randomly determined and identified. The best candidate solution is finally presented as the best answer.

The remainder of the paper is structured as follows: The relevant studies in earlier technology are described in Section II, the design of the 2D IIR filter is shown in Section III, the proposed method is listed in Section IV, the outcomes are reviewed in Section V, and the study is ended in Section VI.

**2. Related works.** Several types of research have been carried out for IIR Filters in digital signal processing. Some of the research has been analyzed in the following literature survey.

In study [15] the authors developed a metaheuristic algorithm, ESMA (Enhanced Slime Mould Algorithm). ESMA is an enhanced strategy of SMA. The proposed ESMA's efficient and exceptional performance has achieved the initially anticipated improvement in SMA. Although ESMA has performed exceptionally well, it still has certain flaws. As an illustration, ESMA's convergence precision is not always optimum. There is still an opportunity for the development of convergence accuracy. On the one hand, innovative tactics for improving ESMA's performance should be considered in future work. On the other hand, the suggested approach might address more optimization issues in more areas.

Study [16] proposed a parallel-pipeline-created finite impulse response (FIR) filter. FPGA device is used to implement the suggested IIR design. So in terms of signal processing, FIR-based IIR architecture is more appealing than selective. However, the digital filter's operating speed drops as the word length increases.

According to paper [17], constructing adaptive finite impulse response filters is a linear optimization technique, whereas designing adaptive IIR filters in the appearance of observation noise is a nonlinear optimization challenge. A mean square technique and a multi-innovation least mean square method are created for the IIR filters with AR noise, and their convergence is analyzed.

In paper [18] the authors proposed the computation of the unknown IIR filter's parameters in this research using a cutting-edge optimization method called the dragonfly algorithm (DA). The implemented dragonfly method obtains the minimal MSE value and estimates the system coefficients close to the actual value. Compared to BA, CSO, and PSO, the simulated outcomes imitate the procedure's effectiveness. Future problems

involving identifying complicated and nonlinear systems can be solved using this technique.

Study [19] proposed the optimal design of IIR filters addressed in this study using two forms of ant colony optimization, the ant organization and the ant colony scheme. The pole positions utilizing optimal coefficients have demonstrated the stability of the developed filters. The lower MSE values are attained via the ACS algorithm.

In paper [20] the authors suggested a unique population-based optimization technique called the Firefly Algorithm (FA), which imitates the attraction and flashing behavior of fireflies, and has demonstrated promising results in treating global optimization issues. The empirical results demonstrate that IFA can stabilize global exploration with local exploitation. Compared to previous FA versions, it provides the best solutions – at least in terms of comparable outcomes for the bulk of the 12 global optimization issues. We also evaluate IFA's efficiency and efficacy by employing it to address well-known design problems with IIR filters. The experimental results and comparisons show that IFA outperforms various meta-heuristics in solution accuracy, resilience, and convergence rate.

In study [21] the authors proposed that Combining Joint Photographic Experts Group (JPEG) firmness is an adaptive approach. The ECG signal was fed through the approximately linear IIR filter to filter out noise from ECG measurements. The advantage of nearly-linear IIR filters over conventional IIR is that the pass-through signal filter is not distorted. With recent advancements, the JPEG compression method is now suitable for 1d signals with quality greater than 8 bits. It has also been optimized for microcontroller units (MCUs) with slow processing speeds. To reduce the degree of signal distortion after the filter, we can alter the number of overlap phases, although doing so would increase the delay and duration of the filter.

An analytical synthesis process creates lower zero/L2 sensitivity metrics relating to sparse standard state transformation function is suggested in this study for obtaining an ideal IIR state-space realization, or minimal pole-zero as well as pole-L2 sensitivity realizations, according to paper [22]. Strong robustness and a maximum of  $4n + 1$  multiplications per output sample are features of the proposed  $n$ th-order realization that help it maintain computational efficiency while preventing output distortion and instability. The suggested approach might incorporate adaptive IIR filter design, parallel signal processing, multidimensional signal processing, and multi-input and multi-output (MIMO) signal processing.

Study [23] proposed an evolutionary technique to create reliable IIR filters for binaural audio equalization. The filters' second-order sections (SOSs) are arranged in a cascade, and the gravitational search algorithm (GSA) is employed. IIR filter stability was added as a restriction in this study. The problem may be rewritten in the coming years to include steadiness as a penalty term within the fitness function. Additional limitations or penalties may be required to prevent straightforward solutions like those presented in this research. Because the offered procedures are heuristic, the hyperparameters search can potentially be expanded by starting many batch tests to find improved results.

A brand-new technique for creating a reliable digital IIR filter in the frequency domain was put out by the authors [24]. The technique uses the Quantum PSO with artificial bee colony (ABC) algorithms, which improve performance in passband and stopband regions. By employing the novel discovery and replacement process of the scout bee from the ABC algorithm, the suggested method modifies the QPSO methodology. Although there is a slight rise in processing complexity, efficiency in terms of fidelity parameters is much enhanced.

We anticipated some of the difficulties ahead based on the studies mentioned above, which are listed below. From the above analysis, ESMA still has shortcomings in Convergence accuracy. In Parallel-pipeline based FIR filter, the digital filter's operating speed drops as the word length increases. On the JPEG compression approach, we can modify the number of overlap models to decrease the amount of signal distortion after the filter, but doing so would lengthen the filter's delay and duration. In Gravitational Search Algorithm (GSA), the IIR filter's stability was added as a restriction. In the hybrid QPSO and ABC algorithm, effectiveness in terms of fidelity constraints is greatly improved, albeit at the expense of slightly more complicated computation. A more efficient method should be suggested to address the drawbacks above, which are enumerated in the below segment.

**3. Design of 2-D IIR filter.** The structure of the Nth order 2-D IIR filter with the Transfer function can be written as:

$$H(z_1, z_2) = H_0 \frac{\sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u_{ij} z_1^i z_2^j}{\prod_{k=1}^N (1 + v_k z_1 + w_k z_2 + x_k z_1 z_2)}, u_{00} = 1, \quad (1)$$

where  $\{u_{ij}, v_k, w_k, x_k\}$  are filter coefficients. Let the frequencies  $\omega_1, \omega_2 \in [-\pi, \pi], z_1 = e^{-j\omega_1}$ , and  $z_2 = e^{-j\omega_2}$ .

Identifying a transfer function  $H(z_1, z_2)$  similar to (1) is required for the design of 2D filters so that the magnitude function  $M(\omega_1, \omega_2) = H(e^{-j\omega_1}, e^{-j\omega_2})$  approximates the desired amplitude

response  $M_d(\omega_1, \omega_2)$  in some optimal sense. This approximation can be attained by reducing  $\phi$ , where:

$$\phi = \phi(u_{ij}, v_k, w_k, x_k, H_0) = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} [|M(\omega_1, \omega_2)| - M_d(\omega_1, \omega_2)]^\rho, \quad (2)$$

where  $\omega_1 = (\pi/N_1)n_1$ ,  $\omega_2 = (\pi/N_2)n_2$  and  $\rho$  is the positive integer. Therefore, minimizing the difference between the filter's real and desired amplitude response at the  $N_1 \times N_2$  grid points is the major objective. The stabilization criteria are met because the denominator only has elements of the first degree:

$$|v_k + w_k| - 1 < x_k < 1 - |v_k - w_k|, \text{ for } k = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

As a result, the restricted minimization issue described below can be used to describe the design challenge of 2D recursive filters: minimizing  $\phi = \sum_{n_1=0}^{N_1} \sum_{n_2=0}^{N_2} [|M(\omega_1, \omega_2)| - M_d(\omega_1, \omega_2)]^\rho$  while adhering to the limitations indicated in (3).

The transfer function of the second-order 2D filter is displayed below, assuming  $N=2$ :

$$H(z_1, z_2) = H_0(u_{00} + u_{01}z_2 + u_{02}z_2^2 + u_{10}z_1 + u_{20}z_1^2 + u_{11}z_1z_2 + u_{12}z_1z_2^2 + u_{21}z_1^2z_2 + u_{22}z_1^2z_2^2) \times ((1 + v_1z_1 + w_1z_2 + x_1z_1z_2) \times (1 + v_2z_1 + w_2z_2 + x_2z_1z_2))^{-1}. \quad (4)$$

Substitute  $z_1 = e^{-j\omega_1}$ , and  $z_2 = e^{-j\omega_2}$  in (4), then  $M(\omega_1, \omega_2)$  is given by:

$$M(\omega_1, \omega_2) = H_0[(u_{00} + u_{01}p_{01} + u_{02}p_{02} + u_{10}p_{10} + u_{20}p_{20} + u_{11}p_{11} + u_{12}p_{12} + u_{21}p_{21} + u_{22}p_{22}) \times (X)^{-1} - j(u_{01}g_{01} + u_{02}g_{02} + u_{10}g_{10} + u_{20}g_{20} + u_{11}g_{11} + u_{12}g_{12} + u_{21}g_{21} + u_{22}g_{22}) \times (X)^{-1}], \quad (5)$$

where:

$$X = [(1 + v_1p_{10} + w_1p_{01} + x_1p_{11}) - j(v_1g_{10} + w_1g_{01} + x_1g_{11})] \times [(1 + v_2p_{10} + w_2p_{01} + x_2p_{11}) - j(v_2g_{10} + w_2g_{01} + x_2g_{11})], \quad (6)$$

$$p_{ab} = \cos(a\omega_1 + b\omega_2),$$

$$g_{ab} = \sin(a\omega_1 + b\omega_2) \text{ for } a, b=0,1,2.$$

From (6),  $M(\omega_1, \omega_2)$  can be written as:

$$M(\omega_1, \omega_2) = H_0 \left( \frac{U_R - jU_I}{(V_{1R} - jV_{1I})(V_{2R} - jV_{2I})} \right), \quad (7)$$

where:

$$\begin{aligned} U_R &= (u_{00} + u_{01}p_{01} + u_{02}p_{02} + u_{10}p_{10} + u_{20}p_{20} + u_{11}p_{11} + \\ &u_{12}p_{12} + u_{21}p_{21} + u_{22}p_{22}), U_I = (u_{01}g_{01} + u_{02}g_{02} + u_{10}g_{10} + \\ &u_{20}g_{20} + u_{11}g_{11} + u_{12}g_{12} + u_{21}g_{21} + u_{22}g_{22}), V_{1R} = \\ (1 + v_1p_{10} + w_1p_{01} + x_1p_{11}), V_{1I} &= (v_1g_{10} + w_1g_{01} + x_1g_{11}), V_{2R} = \\ (1 + v_2p_{10} + w_2p_{01} + x_2p_{11}), V_{2I} &= (v_2g_{10} + w_2g_{01} + x_2g_{11}). \end{aligned} \quad (8)$$

The 2D IIR filter's magnitude response will be seen as follows:

$$|M(\omega_1, \omega_2)| = H_0 \frac{\sqrt{u_R^2 + u_I^2}}{\sqrt{(v_{1R}^2 + v_{1I}^2)(v_{2R}^2 + v_{2I}^2)}}. \quad (9)$$

The 2D IIR filter is now designed to mitigate prior technologies' drawbacks. The optimization algorithm applied in the 2D IIR filter will be seen in the next phase.

**4. Designing of 2d-IIR filter using a fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA).** Over the past few decades, metaheuristic algorithms (MA) have experienced tremendous progress and have found success in various domains. Many new MAs have been created to create IIR filters in recent years. Enhanced Slime Mould Algorithm (ESMA) is a metaheuristic procedure developed to overcome the shortcomings of the Slime Mould System for the application of IIR Filter design problems, but it still has some limitations. For the structure of the IIR filter, ESMA did not perform well compared to other algorithms. ESMA algorithm has a lower convergence speed and does not attain a better solution structure. Also, ESMA did not achieve a faster convergence rate and better convergence precision. ESMA's convergence accuracy is suboptimal and still has to be improved. Thus a new technique should be drawn to overcome the inadequacies.

We have suggested a new Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm to address these issues in the designed 2D IIR Filter. To increase the convergence speed, rate, and precision and get better performance, the Pelican Optimization Algorithm is combined with ESMA and made a hybrid algorithm. The first and foremost step in the optimization process is population initialization, done by the Chaotic approach. It creates a group of



a good standard with good starting population diversity, a high convergence rate, etc. After initialization, now the position of population members should be identified and corrected since there is a chance that some individuals can be beyond the boundary search region. By simulating the pelican's tactical approach, the scanning of the search space and the exploration power of the FEPOA may be improved. This approach identifies the population member's location and then moves towards the identified area to correct them to the boundary search region. Then the Fitness is calculated and identified at random. This procedure increases the local search and exploitation power. The program then repeats the following repetition, updating the top candidate answer (every population element represents a contender option) and repeating the different FEPOA stages until the entire execution is finished. The program repetitions' top candidate solution is offered as the best possible answer. From this, the convergence rate is enhanced. Overall the speed of convergence, convergence precision and convergence accuracy in the final solution is increased, and the performance of the proposed FEPOA is improved. The IIR Filter design is now using the proposed FEPOA technique.

The following Figure 1 shows the block diagram of the proposed work, designing a 2D-IIR Filter Using a Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA).

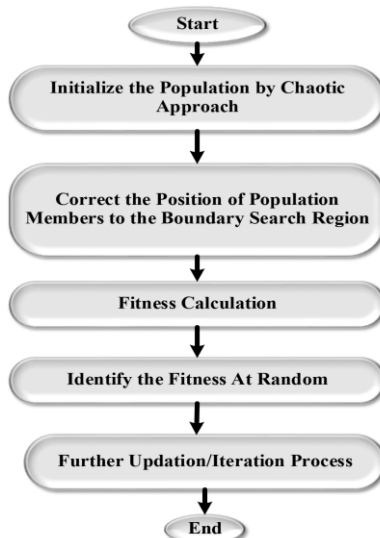


Fig. 1. Block Diagram of Designing 2D-IIR Filter Using a Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA)

**4.1. Chaotic approach for Population Initialization.** Ergodicity, pseudo-randomness, and sensitivity to beginning conditions are features of chaos. Chaos theory has thus been applied in numerous domains during the last few decades, including parameter optimization, feature selection, and chaotic control. The use of chaotic mapping to improve metaheuristic algorithms such as chaotic factor management, chaotic initiation, and chaotic local search has grown significantly in recent years. This study creates a chaotic sequence using the logistic chaos map. The logistic map has the following formulation and is one of the most straightforward and popular chaotic sequences:

$$a_{j+1} = \varphi \cdot a_j(1 - a_j), \quad (10)$$

where  $\varphi$  is the control parameter when  $\varphi = 4$ , the logic series emerges chaotic  $a_j$  indicates the chaotic sequence value of the  $j$ th slime mould,  $a_0 \in (0, 1)$ , and  $a_0$  is utilized to constitute a primary populace of slime mould.

The diversity of the inhabitants can be improved; convergence can happen faster, there is a lower danger of entering a tiny local number, and the quality of the solution is higher. The initial population for most metaheuristic algorithms is dispersed uniformly and randomly. This method might result in the methods entering a local minimum because of its slow convergence rate and low population characteristics. And previous research has shown that the community chaos initiation technique is superior to the initial solution. To boost the initial population variety, the first population in this section is formed using a logical chaotic value, and the chaotic disturbance is then added to it. The following equation describes below:

$$A_{j,k}^* = \mu_{j,k} \cdot A_{j,k}, \quad (11)$$

where  $\mu_{j,k}$  is the  $k$ th rate of the logistic series of the  $j$ th slime mould and  $A_{j,k}^*$  is the  $j$ th slime mould's situation with chaotic disturbance.

Equation (12) generates the population members statistically based on the situation's bottom and higher bound:

$$a_{j,k} = b_k + rand \cdot (h_k - b_k) \quad j = 1, 2, \dots, M, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (12)$$

where  $M$  is the number of members of a population,  $n$  is the number of issue variables, and the  $rand$  is a random variable in the range  $[0, 1]$ , and  $a_{j,k}$  is the value of the  $k$ th variable indicated by the  $j$ th candidate solution,

$b_k$  is the  $k$ th bottom bound, and  $h_k$  is the  $k$ th higher bound of problem variables.

**4.2. Pelican tactical approach.** A matrix known as the population matrix in equation (13) is used to identify the pelican population members in the FEPOA. In this matrix, each row denotes a candidate solution, and each column denotes a suggested value for each parameter in a dilemma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_M \end{bmatrix}_{M \times n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \dots & a_{j,k} & \dots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M,1} & \dots & a_{M,k} & \dots & a_{M,n} \end{bmatrix}_{M \times n}, \quad (13)$$

where  $A$  is the pelican population matrices and  $A_j$  is the  $j$ th pelican.

Every member of the population in the envisaged FEPOA is a pelican, a candidate fix for the issue. As a result, the optimal solution of the given scenario can be evaluated depending on the potential options. Equation (14) describes the use of a vector known as the objective function vector to forecast the parameters acquired for the objective function:

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ \vdots \\ G_j \\ \vdots \\ G_M \end{bmatrix}_{M \times 1} = \begin{bmatrix} G(A_1) \\ \vdots \\ G(A_j) \\ \vdots \\ G(A_M) \end{bmatrix}_{M \times 1}, \quad (14)$$

where  $G_j$  is the objective value of the function of the  $j$ th feasible solution, and  $G$  is the objective function vector. To improve candidate solutions, the suggested FEPOA resemble the actions and tactics used by pelicans during attacks and hunt determination. There are two steps to this pelican's tactical approach:

**4.2.1. Search stage.** During the initial stage, the pelicans locate the member's location and then hover toward it. Modelling this pelican's tactical approach allows for scanning of the search area and enables the proposed FEPOA to investigate new areas of the search area. The member's placement in the search space is produced randomly, which is a key aspect of FEPOA. It strengthens FEPOA's ability to conduct a precise search in the problem-solving domain. The ideas above and the pelican's approach to the member's location are statistically predicted in equation (15):

$$a_{j,k}^{S1} = \begin{cases} a_{j,k} + rand \cdot (m_j - I \cdot a_{j,k}), & G_s < G_j \\ a_{j,k} + rand \cdot (a_{j,k} - m_j), & else \end{cases}, \quad (15)$$

where  $a_{j,k}^{S1}$  depends on stage 1, the new position of the  $j$ th pelican in the  $k$ th level.  $I$  is a chance quantity that can either be one or two.  $m_j$  is the location of the member in the  $k$ th dimension, and  $G_s$  is its objective function value. The element  $I$  is a quantity that, at random, might be either 1 or 2. For each iteration and member, this parameter is chosen at random. When this parameter's value equals two, a member experiences more movement, which may take them to fresher regions of the search space. As a result, parameter  $I$  influences the FEPOA's ability to precisely examine the search area. If the value of the objective function at that site is enhanced, the new role for a pelican in the proposed FEPOA is accepted. The mechanism is stopped from moving to less-than-ideal locations in this type of updating, sometimes referred to as effective updating. Equation (16) provides a representation of this process:

$$A_j = \begin{cases} A_j^{S1}, & G_j^{S1} < G_j \\ A_j, & else \end{cases}, \quad (16)$$

where  $A_j^{S1}$  is the new status of the  $j$ th pelican and  $G_j^{S1}$  is its objective function value based on stage 1.

**4.2.2. Manipulation stage.** The pelicans distribute their location around the area in the second phase after they arrive to move the members upward before gathering them in their search area. Pelicans captured more people in the attacked region due to this tactic. The proposed FEPOA converges to select regional locations due to replicating this pelicans' behavior. This procedure improves FEPOA's capability for local search and exploitation. For the algorithm to converge to a better solution, it is necessary to investigate the locations near the pelican site mathematically. Equation (17) describes this pelican behavior as it is engaged in searching given below:

$$a_{j,k}^{S2} = a_{j,k} + X \cdot \left(1 - \frac{i}{I}\right) \cdot (2 \cdot rand - 1) \cdot a_{j,k}, \quad (17)$$

where  $a_{j,k}^{S2}$  is the innovative position of the  $j$ th pelican in the  $k$ th dimension based on Stage 2,  $X$  is a constant, which is equal to 0.2,  $X \cdot \left(1 - \frac{i}{I}\right)$  is the neighborhood radius of  $a_{j,k}$ . While  $i$  is the iteration counter,  $I$  is the maximum quantity of iterations. The radius of the population members'

local search areas to find a more effective solution is represented by the coefficient  $X \cdot \left(1 - \frac{i}{I}\right)$ . This coefficient can be used to increase the FEPOA's exploitation power and get the problem nearer to the optimal global solution. A bigger region around each member is taken into account in the beginning iterations since the value of this coefficient is high. The radius of each member's neighborhood gets smaller as the method replicates higher because the  $X \cdot \left(1 - \frac{i}{I}\right)$  coefficient diminishes. It allows us to survey the space about every person in the group with fewer but more accurate stages, allowing the FEPOA to converge to answers that are nearer to the worldwide (or even precisely worldwide) ideal depending on the usage paradigm. At this stage, the new pelican location has also been accepted or rejected through effective upgrading, which is given as equation (18):

$$A_j = \begin{cases} A_j^{S2}, & G_j^{S2} < G_j \\ A_j, & \text{else} \end{cases}, \quad (18)$$

where  $A_j^{S2}$  is the  $j$ th pelican's innovative position, then  $G_j^{S2}$  is depending on stage 2's objective function value. When several population members were already improved depending on the initial and second levels, the best candidate solution up to that point will be upgraded following the new population status as well as the variables of the goal component. The algorithm moves on to the following iteration, repeating the various phases of the suggested FEPOA based on Equations (15) – (18) until the full execution is complete. As a quasi-optimal response to the stated issue, the best candidate solution discovered through algorithm iterations is shown at the end. The suggested FEPOA's computational complexity depends on four concepts: algorithm initialization, fitness function calculation, generation of a member, and solution upgrading. The initialization of the algorithms has a computational complexity  $O(M)$ . Each population element evaluates the optimal solution in both phases in every iteration. Therefore, the evaluation of the fitness function has a  $O(2 \cdot I \cdot M)$  computational complexity. The computational complexity of generating members is  $O(I) + O(I \cdot n)$ , where the member is formed and evaluated at every repetition. The quantity of  $M$  population members with  $n$  dimensions during each cycle should be changed twice. Therefore, the computational difficulty of updating solutions is  $O(2 \cdot I \cdot M \cdot n)$ . As a result, the suggested FEPOA's overall computational complexity is equivalent to  $O(M + I \cdot (1 + n) \cdot (1 + 2 \cdot M))$ . The Figure 2 represents the Flow chart for the Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA) is given below.

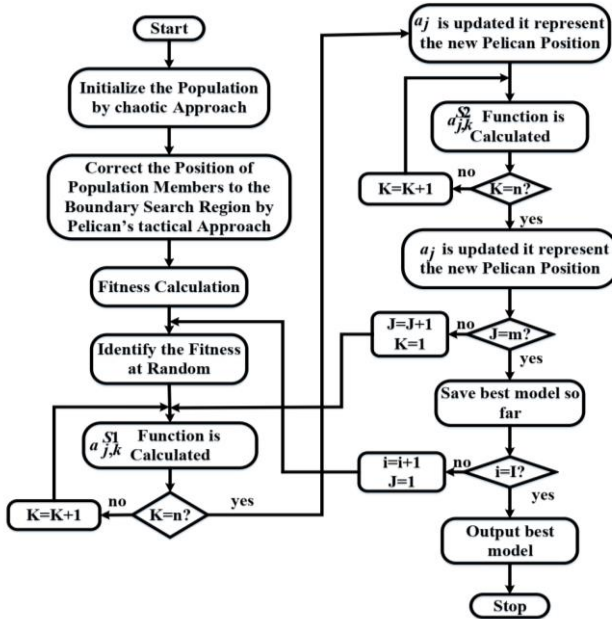


Fig. 2. Flow chart for the Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA)

**Algorithm 1. Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA)**

- Step 1: Start FEPOA
- Step 2: Input : optimization issue data
- Step 3: Initialize the position of the population members and correct the position
- Step 4: Calculate the fitness function and identify randomly
- Step 5: For i=1:I
- Step 6:     Originate the position of members at random
- Step 7:     For J=1:M
- Step 8:     Stage 1:Search Stage (migrate towards the members)
- Step 9:     For K=1:n
- Step 10:         Evaluate recent condition of the kth dimension using Eq.(13)
- Step 11:     End
- Step 12:     Upgrade the jth population member using Eq.(14)
- Step 13:     Stage 2:Manipulation Stage
- Step 14:     For K=1:n
- Step 15:         Evaluate recent condition of the kth dimension using Eq.(15)
- Step 16:     End
- Step 17:     Upgrade the jth population member using Eq.(16)
- Step 18:     End
- Step 19:     Upgrade best candidate Solution
- Step 20: End
- Step 21: Output: Best candidate solution attained by FEPOA
- Step 22: End FEPOA

As a result, the proposed FEPOA algorithm is applied to the IIR filter design. In that algorithm, the speed of convergence, convergence precision and convergence accuracy in the final solution is increased, and the performance is also increased in the overall filter design.

**5. Simulation results and discussion.** This part provides examples of the proposed technique's implementation outcomes with comparative findings. The Proposed method is simulated via MATLAB R2021a on Intel(R)core(TM)i5 10400 CPU@2.66 GHz, 4 GB RAM.

Figure 3 depicts the plot between the normalized Frequency Vs Magnitude. The graph reveals that if the normalized Frequency is zero, the magnitude will be high as well as if the normalized Frequency is increased, then the magnitude tends to decrease gradually. Also, it attains zero in magnitude when the normalized Frequency attains high.

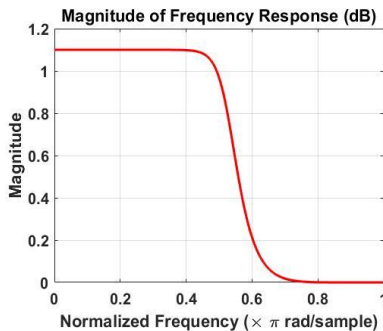


Fig. 3. Magnitude of Frequency Response in IIR Filter

Figure 4 reveals the passband group delay in the IIR filter design. In that graph, the group delay in the passband is between  $0.4\pi$  rad/sample to  $0.7\pi$  rad/sample.

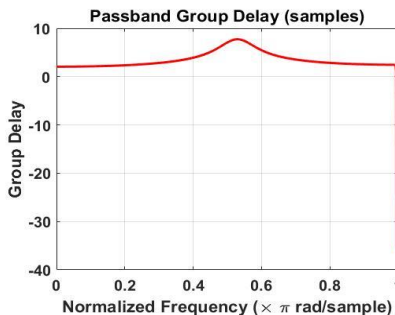


Fig. 4. Passband Group delay

Figure 5 reveals that the magnitude output will also increase when the normalized frequency increases. As in the pass band region, the normalized Frequency between  $0.38 \pi$  rad/sample to  $0.42 \pi$  rad/sample, the frequency response magnitude will attain a maximum of 55dB.

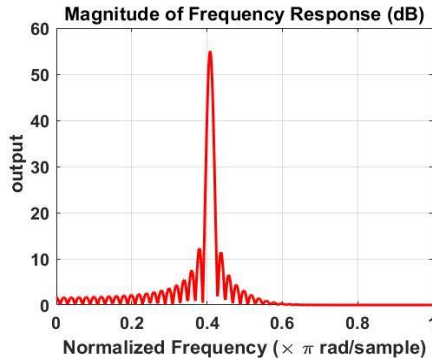


Fig. 5. Magnitude of Frequency Response with output

Figure 6 represents the fitness calculation of the Proposed FEPOA, considering the 200 iterations. In the initial stage, the Fitness will be high, which diminishes the convergence. If the iteration increases, the Fitness of the FEPOA will not enhance the convergence nor give the best candidate solution.

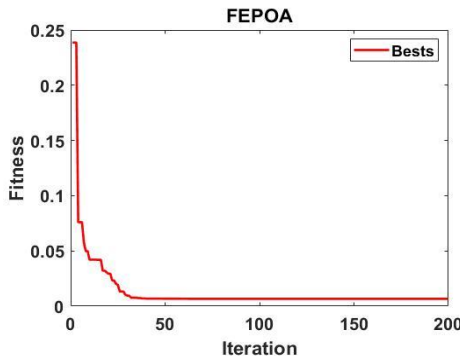


Fig. 6. Fitness calculation

Figure 7 reveals that the amplitude response that yields the proposed FEPOA has the best solution in the IIR filter design with a pass band that will attain 0.82 with  $\rho = 2$ .



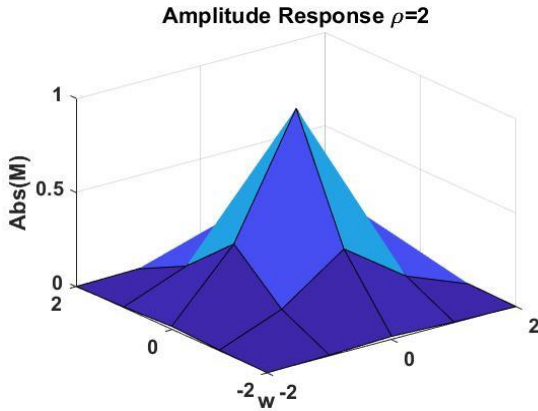


Fig. 7. Amplitude Response for the 2D IIR filter design with  $\rho = 2$

Figure 8 reveals that the amplitude response that yields the proposed FEPOA has the best solution in the IIR filter design with a pass band that will attain 0.9 with  $\rho = 4$ .

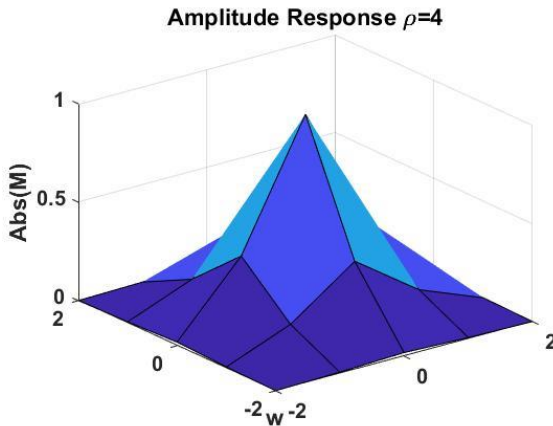


Fig. 8. Amplitude Response for the 2D IIR filter design with  $\rho = 4$

Figure 9 reveals that the amplitude response that yields the proposed FEPOA has the best solution in the IIR filter design with a pass band that will attain 0.98 with  $\rho = 8$ .

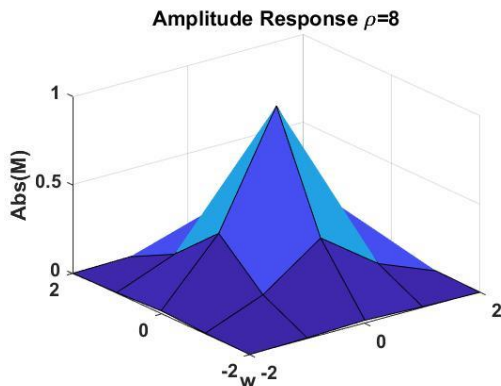


Fig. 9. Amplitude Response for the 2D IIR filter design with  $\rho = 8$

Table 1 describes the coefficients values compared with prior algorithms such as Genetic Algorithm (GA), Particle swarm Optimization (PSO), Simulated Annealing based Particle Swarm Optimization (SAPSO) with FEPOA gives the best results for 2D IIR filter.

Table 1. Best Results for 2D IIR filter coefficients for various approaches with  $\rho = 2$

Coefficients	GA [25]	PSO [26]	SAPSO [27]	FEPOA
u01	1.8162	1.8569	0.3069	0.2680
u02	-1.1060	1.5657	-0.9806	1.2145
u10	0.0712	-1.638	0.1681	-0.2460
u11	-2.5132	0.7365	-0.0431	0.0843
u12	0.4279	1.4300	-0.1820	-0.1653
u20	0.5926	0.6666	-0.7270	0.5127
u21	-1.3690	1.4897	-0.3249	0.2456
u22	2.4326	0.1710	1.6358	1.5628
v1	-0.8662	-0.6196	-1.4201	-1.2364
v2	-0.8907	-0.9312	-0.9178	-0.8952
w1	-0.8531	-0.6380	-0.6530	-0.6290
w2	-0.8388	-0.9328	-0.9127	-0.8910
x1	0.7346	0.3233	1.0081	0.9578
x2	0.8025	0.8829	0.8545	0.8321
H0	0.0009	0.0002	0.0022	0.0019
$\phi$	6.0276	3.0475	2.629	2.1153

Tables 2 and 3 depict the comparison of prior algorithms such as Genetic Algorithm (GA), Particle swarm Optimization (PSO), Simulated Annealing based Particle Swarm Optimization (SAPSO), Cuckoo Search Algorithm (CSA) and Improved Global Best Guided Cuckoo Search Algorithm (CSA) with proposed FEPOA in terms of the best and worst case as well as mean, variance and time. The computation time attained less when compared with the prior technique with the proposed FEPOA.

Table 2. Comparison table for various approaches in terms of the best and worst case with different  $\rho$  values

Algorithm	$\rho = 2$		$\rho = 4$		$\rho = 8$	
	Best	Worst	Best	Worst	Best	Worst
<b>GA</b>	3.1574	7.4938	0.2596	0.8510	0.0025	0.0145
<b>PSO</b>	2.7527	5.3467	0.1359	0.4566	6.34×10-04	7.2×10-03
<b>SAPSO</b>	2.629	5.6744	0.1309	0.3663	6.82×10-04	0.0044
<b>CSA [28]</b>	2.4831	4.6001	0.1672	0.3762	0.0031	0.0179
<b>IGCSA [29]</b>	2.4495	2.5869	0.1278	0.3481	5.42×10-04	3.97×10-03
<b>Proposed FEPOA</b>	2.1153	1.7893	0.1186	0.2784	4.23×10-04	2.18×10-03

Table 3. Comparison table for various approaches in terms of Mean, Variance and Average time

Algorithm	$\rho = 2$		$\rho = 4$		$\rho = 8$		Average time (s)
	Mean	VAR	Mean	VAR	Mean	VAR	
<b>GA</b>	4.6137	0.6160	0.4300	0.0688	0.0066	7.08×10-06	69.71
<b>PSO</b>	3.24	0.45611	0.236	0.00765	2.28×10-03	2.25×10-06	46.26
<b>SAPSO</b>	2.629	0.6296	0.230	0.00521	0.0027	1.25×10-06	30.07
<b>CSA</b>	3.08	0.382	0.2831	0.00378	0.00508	9.005×10-06	16.67
<b>IGCSA</b>	2.46	7.45×10-04	0.1766	3.92×10-03	0.00129	1.39×10-06	9.43
<b>Proposed FEPOA</b>	2.15	6.25×10-04	0.0956	2.18×10-03	0.000845	1.025×10-06	3.0518

**6. Conclusion.** In this paper, a fused ESMA-pelican Optimization Algorithm (FEPOA) is proposed to attain the convergence speed and precision and create the IIR Filter. In the Proposed FEPOA, initially, the 2D IIR filter is created, and FEPOA is applied in the IIR filter. At first, the

population initialization is done by the Chaotic approach which gives the population diversity, and position of the population is identified and corrected by the individual in the boundary search region. Then the pelican Optimization Algorithm is examined for the search space and exploration power, after that randomly calculated the fitness value. The best solution is updated before moving on to iterations, and the FEPOA phases are repeated until the execution is completed. The best solution gives the optimal solution for the proposed FEPOA, which enhanced the performances such as speed of convergence, convergence precision and convergence accuracy. The results obtained through FEPOA achieved desired fitness and best solution for 200 iterations, and the amplitude response attained the maximum value for  $\rho = 2,4,8$  as well as the execution time achieved with 3.0158s, which is significantly faster than the other Genetic Algorithms generally used for 2D IIR filters. Thus, the overall 2D IIR Filter design performance was enhanced.

### References

1. Mohammadi A., Zahiri S.H., Razavi S.M., Suganthan P.N. Design and modeling of adaptive IIR filtering systems using a weighted sum-variable length particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*. 2021. vol. 109. pp. 107529.
2. Stavrou V.N., Tsoulos I.G., Mastorakis N.E. Transformations for FIR and IIR filters' design. *Symmetry*. 2021. vol. 13. no. 4. pp. 533.
3. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K. Design of digital IIR filter: A research survey. *Applied Acoustics*. 2021. vol. 172. pp. 107669.
4. Lai X., Meng H., Cao J., Lin Z. A sequential partial optimization algorithm for minimax design of separable-denominator 2-D IIR filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2016. vol. 65. no. 4. pp. 876–887.
5. Shafaati M., Mojallali H. IIR filter optimization using improved chaotic harmony search algorithm. *Automatika: Journal for Control, Measurement, Electronics, Computing and Communications*. 2018. vol. 59. no. 3–4. pp. 331–339. DOI: 10.1080/00051144.2018.1541643.
6. Mittal T. A hybrid moth flame optimization and variable neighbourhood search technique for optimal design of IIR filters. *Neural Computing and Applications*. 2022. vol. 34. no. 1. pp. 689–704.
7. Pankaj L., Soni V. Design of Auto Adaptive IIR Filter Using Pth Optimization Algorithm and Artificial Neural Network Technique. *i-Manager's Journal on Digital Signal Processing*. 2021. vol. 9. no. 1. pp. 1.
8. Karthik V., Susmitha K., Saha S.K., Kar R. Invasive weed optimization-based optimally designed high-pass IIR filter and Its FPGA implementation. In *Evolutionary Computing and Mobile Sustainable Networks*. 2021. pp. 239–247.
9. Stubberud P. Digital IIR Filter Design Using a Differential Evolution Algorithm with Polar Coordinates. In *2022 IEEE 12th Annual Computing and Communication Workshop and Conference (CCWC)*. 2022. pp. 1029–1035.
10. Alsahlane A.T. Digital Filter Performance Based on Squared Error. In *2021 International Conference on Advanced Computer Applications (ACA)*. 2021. pp. 74–79.

11. Omar A., Shpak D., Agathoklis P. Improved Design Method for Nearly Linear-Phase IIR Filters Using Constrained Optimization. *Journal of Circuits, Systems and Computers*. 2021. vol. 30. no. 11. pp. 2150207.
12. Susmitha K., Karthik V., Saha S.K., Kar R. Biogeography-Based Optimization Technique for Optimal Design of IIR Low-Pass Filter and Its FPGA Implementation. In *Evolutionary Computing and Mobile Sustainable Networks*. 2021. pp. 229–237.
13. Kaur H., Saini S., Sehgal A. Optimal Designing of FIR Filter with Hybrid Bat Optimization Algorithm. In *Innovations in Electronics and Communication Engineering*. 2022. pp. 523–541.
14. Durmuş B. Infinite impulse response system identification using average differential evolution algorithm with local search. *Neural Computing and Applications*. 2022. vol. 34. no. 1. pp. 375–390.
15. Liang X., Wu D., Liu Y., He M., Sun L. An Enhanced Slime Mould Algorithm and Its Application for Digital IIR Filter Design. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2021. vol. 2021. pp. 1–23. DOI: 10.1155/2021/5333278.
16. Datta D., Dutta H.S. High performance IIR filter implementation on FPGA. *Journal of Electrical Systems and Information Technology*. 2021. vol. 8. no. 2. DOI: 10.1186/s43067-020-00025-4.
17. Wang Y., Ding F., Xu L. Some new results of designing an IIR filter with colored noise for signal processing. *Digital Signal Processing*. 2018. vol. 72. pp. 44–58.
18. Singh S., Ashok A., Kumar M., Rawat T.K. Optimal design of IIR filter using dragonfly algorithm. In *Applications of Artificial Intelligence Techniques in Engineering*. 2019. pp. 211–223.
19. Loubna K., Bachir B., Izeddine Z. Optimal digital IIR filter design using ant colony optimization. In *2018 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA)*. 2018. pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICOA.2018.8370500.
20. Liu A., Li P., Deng X., Ren L. A sigmoid attractiveness based improved firefly algorithm and its applications in IIR filter design. *Connection Science*. 2021. vol. 33. no. 1. pp. 1–25. DOI: 10.1080/09540091.2020.1742660.
21. Bui N.T., Nguyen T.M.T., Park S., Choi J., Vo T.M.T., Kang Y.H., Oh J. Design of a nearly linear-phase IIR filter and JPEG compression ECG signal in real-time system. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2021. vol. 67. pp. 102431.
22. Ko H.J., Tsai J.J. Robust and computationally efficient digital IIR filter synthesis and stability analysis under finite precision implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2020. vol. 68. pp. 807–1822.
23. Pepe G., Gabrielli L., Squartini S., Cattani L., Tripodi C. Gravitational search algorithm for IIR filter-based audio equalization. In *2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*. 2021. pp. 496–500.
24. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V. A new method for designing of stable digital IIR filter using hybrid method. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2019. vol. 38. no. 5. pp. 2187–2226.
25. Elkarami B., Ahmadi M. An efficient design of 2-D FIR digital filters by using singular value decomposition and genetic algorithm with canonical signed digit (CSD) coefficients. In *2011 IEEE 54th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS)*. 2011. pp. 1–4. DOI: 10.1109/MWSCAS.2011.6026659.
26. Chaker H., Kameche S. Hybrid Approach to Design of Two Dimensional Stable IIR Digital Filter. *Algerian Journal of Signals and Systems*. 2020. vol. 5. no. 3. pp. 148–152.
27. Kaddouri L., Adamou-Mitiche A.B., Mitiche L. Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filter Using Multi Particle Swarm Optimization Algorithm. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*. 2020. vol. 53. no. 4. pp. 559–566.

28. Kumar M., Rawat T.K. Optimal fractional delay-IIR filter design using cuckoo search algorithm. ISA transactions. 2015. vol. 59. pp. 39–54.
29. Dhabal S., Venkateswaran P. An improved global-best-guided cuckoo search algorithm for multiplierless design of two-dimensional IIR filters. Circuits, Systems, and Signal Processing. 2019. vol. 38. no. 2. pp. 805–826.

**Sharma Rakesh Kumar** — employee, Department of electronics and communication engineering, Malaviya National Institute of Technology Jaipur. Research interests: finite element analysis. 2018rec9034@mnit.ac.in; Malviya Nagar, Jawahar Lal Nehru Marg, Jhalana Gram, 302017, Jaipur, India; office phone: +91(141)252-9087.

**Sharma Krishan Kumar** — Professor, Department of electronics and communication engineering, Malaviya National Institute of Technology Jaipur. Research interests: signal and image processing, fractional transforms, electromagnetics, wireless communications. The number of publications — 111. kksharma.ece@mnit.ac.in; Malviya Nagar, Jawahar Lal Nehru Marg, Jhalana Gram, 302017, Jaipur, India; office phone: +91(141)252-9087.

**Varma Tarun** — Associate professor, Department of electronics and communication engineering, Malaviya National Institute of Technology Jaipur. Research interests: signal processing, computer networks, nano-electronic devices, MNEMS. The number of publications — 26. tarun@mnit.ac.in; Malviya Nagar, Jawahar Lal Nehru Marg, Jhalana Gram, 302017, Jaipur, India; office phone: +91(141)252-9087.

Р. ШАРМА, К. ШАРМА, Т. ВАРМА  
**ПРОЕКТИРОВАНИЕ 2D-БИХ-ФИЛЬТРА С  
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ОПТИМИЗАЦИИ FUSED  
ESMA-PELICAN OPTIMIZATION ALGORITHM (FEPOA)**

*Шарма Р., Шарма К., Варма Т. Проектирование 2D-БИХ-фильтра с использованием алгоритма оптимизации Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA).*

**Аннотация.** Многие приложения цифровой обработки сигналов (DSP) и электронные гаджеты сегодня требуют цифровой фильтрации. Для получения быстрых и улучшенных результатов использовались различные алгоритмы оптимизации. Некоторые исследователи использовали Enhanced Slime Mold Algorithm для разработки 2D БИХ-фильтра. Однако было замечено, что данный алгоритм не обеспечил лучшей структуры решения и имел более низкую скорость сходимости. Чтобы решить эту проблему, для разработки 2D БИХ-фильтра используется алгоритм оптимизации Fused ESMA-Pelican Optimization Algorithm (FEPOA), который объединяет Pelican Optimization Algorithm с Enhanced Slime Mould Algorithm (ESMA). Сначала для инициализации популяции используется хаотический подход, который обеспечивает высококачественную популяцию с превосходным разнообразием, после чего позиция членов популяции заключается в идентификации и корректировке особи в граничной области поиска. После этого с помощью тактического подхода пеликана (Pelican Tactical Approach) изучается пространство поиска и исследовательской мощности FEPOA, потом случайным образом вычисляется пригодность, и обновляется лучшее решение, а затем оно перемещается к итерациям. Фазы FEPOA повторяются до тех пор, пока не завершится выполнение. Далее лучшее решение дает оптимальное решение, которое повышает скорость сходимости, точность сходимости и производительность FEPOA. Затем FEPOA реализуется в БИХ-фильтре для улучшения общей конструкции фильтра. Результаты, предоставленные FEPOA, достигают необходимой пригодности и наилучшего решения для 200 итераций, а амплитудная характеристика достигает максимального значения для  $\omega = 2,4,8$ , а также время выполнения 3,0158 с, что намного быстрее, чем другие генетические алгоритмы, часто используемые для 2D БИХ-фильтров.

**Ключевые слова:** FEPOA, БИХ-фильтр, член популяции, КИХ-фильтр, хаотический подход, тактический подход Пеликана.

### Литература

1. Mohammadi A., Zahiri S.H., Razavi S.M., Suganthan P.N. Design and modeling of adaptive IIR filtering systems using a weighted sum-variable length particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*. 2021. vol. 109. pp. 107529.
2. Stavrou V.N., Tsoulos I.G., Mastorakis N.E. Transformations for FIR and IIR filters' design. *Symmetry*. 2021. vol. 13. no. 4. pp. 533.
3. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V., Singh G.K. Design of digital IIR filter: A research survey. *Applied Acoustics*. 2021. vol. 172. pp. 107669.
4. Lai X., Meng H., Cao J., Lin Z. A sequential partial optimization algorithm for minimax design of separable-denominator 2-D IIR filters. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2016. vol. 65. no. 4. pp. 876–887.
5. Shafaati M., Mojallali H. IIR filter optimization using improved chaotic harmony search algorithm. *Automatika: Journal for Control, Measurement, Electronics*,

- Computing and Communications. 2018. vol. 59. no. 3–4. pp. 331–339. DOI: 10.1080/00051144.2018.1541643.
6. Mittal T. A hybrid moth flame optimization and variable neighbourhood search technique for optimal design of IIR filters. *Neural Computing and Applications*. 2022. vol. 34. no. 1. pp. 689–704.
  7. Pankaj L., Soni V. Design of Auto Adaptive IIR Filter Using Pth Optimization Algorithm and Artificial Neural Network Technique. *i-Manager's Journal on Digital Signal Processing*. 2021. vol. 9. no. 1. pp. 1.
  8. Karthik V., Susmitha K., Saha S.K., Kar R. Invasive weed optimization-based optimally designed high-pass IIR filter and Its FPGA implementation. In *Evolutionary Computing and Mobile Sustainable Networks*. 2021. pp. 239–247.
  9. Stubberud P. Digital IIR Filter Design Using a Differential Evolution Algorithm with Polar Coordinates. In *2022 IEEE 12th Annual Computing and Communication Workshop and Conference (CCWC)*. 2022. pp. 1029–1035.
  10. Alsahlane A.T. Digital Filter Performance Based on Squared Error. In *2021 International Conference on Advanced Computer Applications (ACA)*. 2021. pp. 74–79.
  11. Omar A., Shpak D., Agathoklis P. Improved Design Method for Nearly Linear-Phase IIR Filters Using Constrained Optimization. *Journal of Circuits, Systems and Computers*. 2021. vol. 30. no. 11. pp. 2150207.
  12. Susmitha K., Karthik V., Saha S.K., Kar R. Biogeography-Based Optimization Technique for Optimal Design of IIR Low-Pass Filter and Its FPGA Implementation. In *Evolutionary Computing and Mobile Sustainable Networks*. 2021. pp. 229–237.
  13. Kaur H., Saini S., Sehgal A. Optimal Designing of FIR Filter with Hybrid Bat Optimization Algorithm. In *Innovations in Electronics and Communication Engineering*. 2022. pp. 523–541.
  14. Durmuş B. Infinite impulse response system identification using average differential evolution algorithm with local search. *Neural Computing and Applications*. 2022. vol. 34. no. 1. pp. 375–390.
  15. Liang X., Wu D., Liu Y., He M., Sun L. An Enhanced Slime Mould Algorithm and Its Application for Digital IIR Filter Design. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2021. vol. 2021. pp. 1–23. DOI: 10.1155/2021/5333278.
  16. Datta D., Dutta H.S. High performance IIR filter implementation on FPGA. *Journal of Electrical Systems and Information Technology*. 2021. vol. 8. no. 2. DOI: 10.1186/s43067-020-00025-4.
  17. Wang Y., Ding F., Xu L. Some new results of designing an IIR filter with colored noise for signal processing. *Digital Signal Processing*. 2018. vol. 72. pp. 44–58.
  18. Singh S., Ashok A., Kumar M., Rawat T.K. Optimal design of IIR filter using dragonfly algorithm. In *Applications of Artificial Intelligence Techniques in Engineering*. 2019. pp. 211–223.
  19. Loubna K., Bachir B., Izeddine Z. Optimal digital IIR filter design using ant colony optimization. In *2018 4th International Conference on Optimization and Applications (ICOA)*. 2018. pp. 1–5. DOI: 10.1109/ICOA.2018.8370500.
  20. Liu A., Li P., Deng X., Ren L. A sigmoid attractiveness based improved firefly algorithm and its applications in IIR filter design. *Connection Science*. 2021. vol. 33. no. 1. pp. 1–25. DOI: 10.1080/09540091.2020.1742660.
  21. Bui N.T., Nguyen T.M.T., Park S., Choi J., Vo T.M.T., Kang Y.H., Oh J. Design of a nearly linear-phase IIR filter and JPEG compression ECG signal in real-time system. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2021. vol. 67. pp. 102431.
  22. Ko H.J., Tsai J.J. Robust and computationally efficient digital IIR filter synthesis and stability analysis under finite precision implementations. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 2020. vol. 68. pp. 807–1822.



23. Pepe G., Gabrielli L., Squartini S., Cattani L., Tripodi C. Gravitational search algorithm for IIR filter-based audio equalization. In 2020 28th European Signal Processing Conference (EUSIPCO). 2021. pp. 496–500.
24. Agrawal N., Kumar A., Bajaj V. A new method for designing of stable digital IIR filter using hybrid method. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2019. vol. 38. no. 5. pp. 2187–2226.
25. Elkarami B., Ahmadi M. An efficient design of 2-D FIR digital filters by using singular value decomposition and genetic algorithm with canonical signed digit (CSD) coefficients. In 2011 IEEE 54th International Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS). 2011. pp. 1–4. DOI: 10.1109/MWSCAS.2011.6026659.
26. Chaker H., Kameche S. Hybrid Approach to Design of Two Dimensional Stable IIR Digital Filter. *Algerian Journal of Signals and Systems*. 2020. vol. 5. no. 3. pp. 148–152.
27. Kaddouri L., Adamou-Mitiche A.B., Mitiche L. Design of Two-Dimensional Recursive Digital Filter Using Multi Particle Swarm Optimization Algorithm. *Journal Européen des Systèmes Automatisés*. 2020. vol. 53. no. 4. pp. 559–566.
28. Kumar M., Rawat T.K. Optimal fractional delay-IIR filter design using cuckoo search algorithm. *ISA transactions*. 2015. vol. 59. pp. 39–54.
29. Dhabal S., Venkateswaran P. An improved global-best-guided cuckoo search algorithm for multiplierless design of two-dimensional IIR filters. *Circuits, Systems, and Signal Processing*. 2019. vol. 38. no. 2. pp. 805–826.

**Шарма Ракеш Кумар** — сотрудник, кафедра электроники и связи, Национальный технологический институт Малави в Джайпуре. Область научных интересов: анализ методом конечных элементов. 2018rec9034@mnit.ac.in; Малвья Нагар, Джавахар Лал Неру Марг, Джалана Грэм, 302017, Джайпур, Индия; р.т.: +91(141)252-9087.

**Шарма Кришан Кумар** — профессор, кафедра электроники и связи, Национальный технологический институт Малави в Джайпуре. Область научных интересов: обработка сигналов и изображений, дробные преобразования, электромагнетизм, беспроводная связь. Число научных публикаций — 111. kksharma.ecse@mnit.ac.in; Малвья Нагар, Джавахар Лал Неру Марг, Джалана Грэм, 302017, Джайпур, Индия; р.т.: +91(141)252-9087.

**Варма Тарун** — доцент, кафедра электроники и связи, Национальный технологический институт Малави в Джайпуре. Область научных интересов: обработка сигналов, компьютерные сети, наноэлектронные устройства, MNEMS. Число научных публикаций — 26. tarun@mnit.ac.in; Малвья Нагар, Джавахар Лал Неру Марг, Джалана Грэм, 302017, Джайпур, Индия; р.т.: +91(141)252-9087.

В.А. ВОЕВОДИН  
**МОДЕЛЬ ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
ЭЛЕМЕНТОВ ИНФОРМАЦИОННОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ ДЛЯ  
УСЛОВИЙ ВОЗДЕЙСТВИЯ МНОЖЕСТВА КОМПЬЮТЕРНЫХ  
АТАК**

*Воеводин В.А. Модель оценки функциональной устойчивости элементов информационной инфраструктуры для условий воздействия множества компьютерных атак.*

**Аннотация.** Приводятся сведения о новом подходе к приложению методов теории полумарковских процессов для решения прикладной задачи по оцениванию функциональной устойчивости элементов, входящих в состав информационной инфраструктуры, функционирующей в условиях воздействия множества компьютерных атак. Задача оценивания функциональной устойчивости сводится к задаче поиска функции живучести исследуемого элемента и определению ее экстремальных значений. Обосновывается актуальность исследования. В основе обоснования лежит предположение о том, что количественные методы исследования устойчивости технических систем, которыми оперирует теория надежности, не всегда могут быть применены для оценки живучести. Уточняются понятия «устойчивость» и «компьютерная атака». Формулируются вербальная и формальная постановки задач исследования. Новизна полученных результатов заключается в применении известных методов для решения практически значимой задачи в новой постановке с учетом ограничения на ресурс, выделенный для поддержания живучести исследуемого элемента, при условии принятия произвольных законов распределения случайных времен реализации компьютерных атак и времен восстановления функционала элемента. Приводятся рекомендации по формированию исходных данных, содержание укрупненных этапов моделирования и тестовый пример для демонстрации работоспособности модели. Приводятся результаты тестового моделирования в виде графиков функции живучести. Полученное приложение может быть использовано на практике для построения функции живучести при реализации до трех компьютерных атак, а также как инструмент для оценивания достоверности аналогичных статистических моделей. Ограничение объясняется прогрессивным возрастанием размерности аналитической модели и снижением возможности её содержательной интерпретации.

**Ключевые слова:** информационная инфраструктура, элемент информационной инфраструктуры, функциональная устойчивость, функция живучести, компьютерная атака, аудит информационной безопасности, полумарковские процессы, угрозы информационной безопасности.

**1. Введение.** Отношения в области обеспечения устойчивости функционирования информационной инфраструктуры (ИИ) в условиях компьютерных атак регулируются федеральными законами: а) от 27.07.2006 № 149-ФЗ «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» б) от 26.07.2017 № 187-ФЗ «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации» и сопутствующими им подзаконными актами.

Сведения о динамике компьютерных атак, которые сопровождают эти отношения, приведены в [1 – 3]. Эффективное регулирование таких отношений возможно, если органы управления обладают инструментом, позволяющим своевременно и достоверно оценить устойчивость функционирования соответствующей ИИ.

Такой инструмент может быть востребован:

1. Лицами, управляющими программой аудита информационной безопасности (ИБ), при разработке программы и методик аудита.

2. Органами управления ИБ при обеспечении устойчивости функционирования ИИ в условиях КА для:

а. выработки требований к устойчивости при взаимодействии с заказчиком;

б. прогнозирования обстановки, которая может сложиться в условиях воздействия угроз ИБ;

в. оценки эффективности системы восстановления функциональности ИИ;

г. обоснования решения при подготовке предложений по бюджетированию мер обеспечения ИБ.

3. Лицами, осуществляющими оценивание рисков ИБ с целью обоснования страховых тарифов (в перспективе).

Официального определения понятия «устойчивость» применительно к ИИ в нормативных правовых актах не приводится, поэтому за основу взято адаптированное определение, приведенное в [4]. Таким образом, под функциональной устойчивостью ИИ («функциональная устойчивость») понимается ее способность сохранять либо своевременно восстанавливать требуемую функциональность в различных условиях обстановки.

Также уточнено понятие «компьютерная атака» (КА) – воздействие угроз нарушения информационной безопасности на элементы информационной инфраструктуры объекта информатизации, направленное на уничтожение, раскрытие, изменение, блокирование, кражу, получение несанкционированного доступа к информации. Целью КА могут быть элементы различной природы, например технические средства, программные средства, человек, группы людей, которые в результате успешной атаки теряют требуемый функционал. Поэтому это понятие несколько шире по объему, чем приведенное в федеральном законе от 26.07.2017 г. № 187-ФЗ «О безопасности критической информационной инфраструктуры Российской Федерации», ст. 2, п. 4.

Для оценивания функциональной устойчивости ИИ в целом требуются исходные данные, содержащие оценки устойчивости функционала отдельных элементов, входящих в состав ИИ. Отдельные элементы ИИ (Элементы) рассматриваются без учета их внутренней структуры, физической природы и места в составе ИИ.

Для штатных условий имеется потенциальная возможность добыть репрезентативную статистику частных показателей устойчивости, что позволяет использовать для оценивания устойчивости Элементов количественные методы теории надежности. Другими словами, случайные явления, сопровождающие процесс применения, несут стохастическую неопределенность, что позволяет использовать асимптотические оценки соответствующих показателей. Зная оценки устойчивости отдельных Элементов в штатных условиях применения, представляется возможным оценить для этих же условий функциональную устойчивость ИИ в целом. Результаты фундаментальных исследований в области теории надежности сложных технических систем приведены в [5, 6]. Приложению методов теории надежности для оценки устойчивости технических систем, функционирующих в штатных условиях, посвящены публикации российских и зарубежных исследователей [7 – 13]. Таким образом, результаты ретроспективного анализа имеющейся литературы позволяют утверждать, что сегодня имеется достаточный научный задел для решения задачи оценивания функциональной устойчивости элементов ИИ для штатных условий ее применения.

Для условий нештатного применения репрезентативная статистика отсутствует в принципе, что порождает ряд особенностей при оценке функциональной устойчивости ИИ. Такая ситуация связана, прежде всего, с тем, что сами нештатные условия порождены воздействием угроз ИБ. Воздействия угроз можно позиционировать как редкие явления, их длительность непредсказуема, сама обстановка при нештатных условиях весьма нестабильна, а неопределенность часто носит поведенческий характер. В этих условиях процессы исследуемых событий нельзя принять ни стационарными, ни эргодическими, ни стохастическими. Названные особенности не позволяют в полной мере применить классические методы математической статистики и теории вероятностей. Для решения задачи требуется разработка специальных методов оценки функциональной устойчивости с учетом вышеназванных особенностей. Разработке специальных подходов к определению функциональной устойчивости случайных явлений нестохастической природы для оценивания устойчивости критической инфраструктуры

посвящены публикации [14 – 33]. Однако в названных публикациях при моделировании не учитываются ограничения на ресурс, который имеется для восстановления функциональности Элемента.

**2. Постановка задачи.** Пусть задана некая ИИ объекта информатизации, содержащая семейство взаимоувязанных Элементов. Информационная инфраструктура, в состав которой входят отдельные Элементы, подвергается КА. На этапе проектирования ИИ для каждого из Элементов были реализованы специальные меры, обеспечивающие некую их защищенность от КА. Более того, в ставе ИИ имеется система восстановления ее функционала, обладающая неким производственным потенциалом (ресурсом). Система восстановления реагирует на поражение ИИ посредством восстановления пораженных Элементов, в результате чего восстанавливается ее функционал. При этом расходуется соответствующий ресурс системы восстановления.

*Допущение.* Для решения задачи принято допущение, суть которого заключается в том, что функция устойчивости Элемента на заданном интервале времени  $(0, T]$  реализации КА представляется в виде композиции двух независимых функционалов. Эта композиция имеет вид:

$$v(t, u, \Delta T, \lambda, \mu, P) = K_{\text{ог}}(t, u, \Delta T)\varphi(t, \lambda, \mu, P), \quad (1)$$

где  $v(t, u, \Delta T, \lambda, \mu, P)$  – функция устойчивости Элемента;

$t$  – временной параметр оценки функции устойчивости;

$u$  – показатель безотказности и восстанавливаемости Элемента в штатных условиях применения,  $u = \{T_n, T_b\}$ , где  $T_n$  – средняя наработка на отказ Элемента в штатных условиях;  $T_b$  – среднее время восстановления работоспособности Элемента. Значения частных показателей возможно получить на основе обработки соответствующих статистических данных, полученных в штатных условиях применения или из эксплуатационной документации;

$\Delta T$  – период времени от начала до окончания воздействий КА;

$\lambda = \{F, n, T\}$  – характеристика КА, где  $F$  – совокупность функций распределения случайных интервалов времени  $\eta_i$  до очередной  $i$ -й КА,  $F = \{F_i(t)\}$ , где  $F_i(t)$  – функция распределения случайного  $\eta_i$  интервала времени до  $i$ -й КА,  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  – количество КА,  $T$  – момент времени окончания воздействий угроз информационной безопасности (КА);

$\mu$  – частный показатель живучести Элемента, характеризующий его способность восстанавливать нарушенный в результате успешных

КА функционал,  $\mu = \{T_B, G\}$ , где  $T_B = \{\tau_{bi}^H, \tau_{bi}^B\}$  – совокупность нижнего и верхнего интервалов времени восстановления функционала;

$G$  – совокупность функций распределения случайных интервалов времени восстановления функционала Элемента после  $i$ -й КА,  $G = \{G_i(t)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – число КА,  $\tau_{bi}^H$  – оценка нижнего интервала восстановления функционала после  $i$ -й КА,  $\tau_{bi}^B$  – оценка верхнего интервала восстановления функционала после  $i$ -й КА. Оценка параметров  $\{\tau_{bi}^H, \tau_{bi}^B\}$  осуществляется либо с помощью экспертных методов, либо в результате соответствующих учений, деловых игр или специальных исследований [34, 35];

$P$  – совокупность частных показателей живучести Элемента, характеризующая его защищенность, т.е. способность сохранять требуемый функционал в результате отражения КА. В качестве такого показателя принята совокупность вероятностей поражения Элемента при отражении КА,  $P = \{p_i\}$ , где  $p_i$  – вероятность поражения Элемента при  $i$ -й КА,  $i = 1, \dots, n$ ,  $n$  – число КА. Оценка вероятностей  $p_i$  осуществляется либо с помощью экспертных методов, либо добывается в результате соответствующих учений, деловых игр или статистического моделирования;

$K_{ог}(u, t) = K_{г}(u) P(t, \Delta T)$  – нестационарный коэффициент оперативной готовности Элемента, определяемый вероятностью его безотказной работы в течение времени реализации КА и устранения ее последствий,  $\Delta T = (0, T]$ , где  $K_{г}(u)$  – коэффициент готовности Элемента, рассчитанный для штатных условий его применения,  $P(t, \Delta T)$  – вероятность безотказной работы Элемента в течение периода времени  $\Delta T$ ;

$\varphi(t, \lambda, \mu, P)$  – функция живучести Элемента в условиях КА.

Для большинства практических случаев значение  $K_{ог}(u)$  на периоде времени  $\Delta T$  очень близко к единице, а значение функции живучести на этом же периоде неизмеримо меньше  $\varphi(t, \lambda, \mu, P) \ll K_{ог}(u)$  [17]. С учетом этого утверждения формулу (1) можно привести к виду:

$$v(t, \lambda, \mu, u, P) \approx \varphi(t, \lambda, \mu, P),$$

т.е. функция устойчивости Элемента, для условий КА, может быть приближенно заменена функцией живучести.

В качестве показателей, характеризующих функцию живучести, предлагается использовать показатели, характеризующие

экстремальные значения функции живучести, не зависящие от времени. Например, такими показателями могут быть:

а. наименьшее значение функции живучести Элемента на заданном интервале времени  $(0, T]$ ,  $\varphi_m = \min_{t \in (0, T]} \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P})$ ;

б. среднее значение функции живучести Элемента на заданном интервале времени  $(0, T]$ :  $\varphi_c = \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P}) dt$ ;

в. коэффициент живучести Элемента, характеризующий вероятность состояния «функционален» в любой произвольный момент времени  $t \in (0, T]$ :  $k_\varphi = \lim_{\substack{t \rightarrow T \\ n \rightarrow N}} \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P})$ , где  $T$  –

прогнозируемый максимальный момент времени реализации множества КА, который определяется с помощью экспертных методов;  $N$  – максимальное прогнозируемое число КА в составе множества, которое также определяется с помощью экспертных методов.

Ранее автором исследовалась возможность решения подобной задачи с помощью статистического моделирования методом Монте-Карло. Были получены положительные результаты, авторский подход к моделированию приведен в [32, 33]. При этом исходные данные для моделирования добывались экспертными методами. Кроме экспертных методов источником исходных данных могут быть результаты учений, деловых игр или специальные методы исследований [34]. Применение методов статистического моделирования весьма ресурсоемко с точки зрения времени. Время моделирования может быть сравнимо с периодом КА, что отрицательно сказывается на своевременности оценки, которая просто может потерять свою актуальность. Также проблемным является вопрос оценки достоверности получаемых результатов статистического моделирования, для этого требуются альтернативные методы оценивания.

В этой связи возникает резонный вопрос: а возможно ли построить аналитическую (математическую) модель, которая по добытым исходным данным позволила бы посредством математических расчетов получить оценку функции живучести Элемента для условий КА? Для получения ответа на этот вопрос была исследована возможность применения методов теории полумарковских процессов.

В [17, 30, 31] приведены фундаментальные основания для приложения общих марковских потоков событий, и показана их связь с марковскими аддитивными процессами и процессами марковского

восстановления, рассмотрены важные для их практических приложений частные случаи таких потоков. Анализ публикаций на обозначенную тему позволяет утверждать, что вопросам практического применения методов теории полумарковских процессов посвящено значительное число работ [37 – 43]. Результаты ретроспективного исследования названных публикаций позволяют утверждать, что в основном предлагается подход, основанный на асимптотических оценках устойчивости, что не может являться не спорным. Моделируемые процессы, без грубых допущений, нельзя принять стационарными, следовательно, усредненные исходные данные могут давать значительную погрешность в оценках устойчивости. Плюс к этому за пределами предмета публикаций осталась конкретизация методов теории полумарковских процессов для условий ограничения на ресурс, с помощью которого поддерживается сам полумарковский процесс. При этом не учитывается возможность перехода полумарковского процесса в невозвратное состояние по исчерпанию ресурса.

Уточненная задача оценивания живучести Элемента к КА с учетом имеющегося ресурса формулируется следующим образом: конкретизировать постановку задачи (1) с учетом ограничений на имеющийся, для обеспечения живучести Элемента, ресурс в условиях КА.

При уточнении, формальная постановка задачи (1) конкретизируется и приобретает вид:

$$v(t, \Delta T, u, \lambda, \mu, \mathbf{P}, \Pi_0, \Pi^{\text{Tr}}) = K_{\text{ог}}(t, \Delta T, u) \varphi(t, \lambda, \mu, \mathbf{P}, \Pi_0, \Pi^{\text{Tr}}),$$

где частный план восстановления функционала Элемента должен удовлетворять следующим ограничениям:

$$\Pi^* = \{\pi^*\} = \{\mathbf{R}^{\text{Tr}} \leq \mathbf{R}_0, \mathbf{D}^{\text{Tr}} \leq \mathbf{D}_0\},$$

где  $\Pi^* = \{\pi^*\}$  – совокупность альтернативных планов восстановления функционала Элемента, удовлетворяющих ограничениям на ресурс.

При этом:

а)  $\Pi_0$  – показатель, характеризующий требуемые производственные возможности подсистемы восстановления функционала:

$$\Pi_0 = \{\mathbf{R}_0, \mathbf{D}_0\},$$



где  $\mathbf{R}_0 = \{r_{0i}\}$  – совокупность типов расходуемого ресурса, имеющегося в составе системы восстановления функционала для восстановления Элемента,  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $m$  – число типов расходуемого ресурса (пример расходуемого ресурса – запасные части, расходный материал и т.п.);  $\mathbf{D}_0 = \{d_{0i}\}$  – совокупность типов возобновляемого ресурса, имеющегося в составе системы восстановления функционала,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $k$  – число типов возобновляемого ресурса (пример возобновляемого ресурса – люди, измерительные приборы и т.п., которые могут использоваться многократно);

б) показатель, характеризующий требуемые производственные возможности расчета восстановления:  $\Pi^{\text{Tp}} = \{\mathbf{R}^{\text{Tp}}, \mathbf{D}^{\text{Tp}}\}$ , показатель, характеризующий требуемые производственные возможности расчета восстановления, где  $\mathbf{R}^{\text{Tp}} = \{r_i^{\text{Tp}}\}$  – совокупность соответствующих единиц расходуемого ресурса каждого типа, требуемых для восстановления функционала Элемента после успешной КА,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $m$  – число требуемых типов расходуемого ресурса;  $\mathbf{D}^{\text{Tp}} = \{r_i^{\text{Tp}}\}$  – совокупность типов возобновляемого ресурса, требуемого для восстановления функционала,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $k$  – число требуемых типов возобновляемого ресурса.

Поставленная задача решалась в два этапа:

- 1) определение оператора  $A$ :  $\varphi(t) = A\{t, \Delta T, \mathbf{F}, \mathbf{G}, \mathbf{P}, n, \Pi_0, \Pi^{\text{Tp}}\}$ ;
- 2) определение минимума функционала

$$\varphi_m = \min_{t \in (0, T]} \varphi(t, \Delta T, \lambda, \mu, \mathbf{P}, \Pi_0, \Pi^{\text{Tp}}).$$

Наиболее сложным, неоднозначным и неформализуемым является этап обоснования выбора оператора для совокупности произвольных законов распределения  $\mathbf{F} = \{F_i(t)\}$  и  $\mathbf{G} = \{G_i(t)\}$  и различных вероятностей поражения Элемента при КА,  $\mathbf{P} = \{P_i\}$ .

Требования к обеспечению живучести нормированы в подзаконных актах к соответствующим федеральным законам и в соответствующих нормативных правовых документах. При моделировании учитывалось ограничение на имеющийся ресурс для восстановления функционала Элемента в условиях КА, для чего было введено понятие невозвратного состояния Элемента, в которое он может перейти из-за исчерпания ресурса, выделенного для восстановления его функционала.

Для моделирования процесс функционирования Элемента был представлен в виде иерархического ориентированного графа типа

дерева, содержащего одну начальную  $z_1$  и  $m$  конечных вершин (рисунок 1).

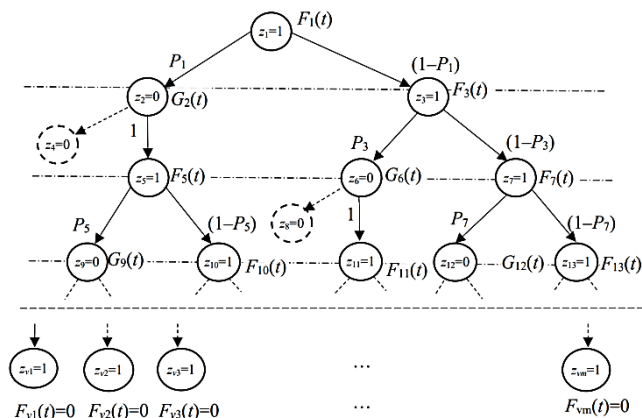


Рис. 1. Граф переходов процесса восстановления функционала Элемента для условий КА

Начальной вершине графа соответствует момент начала множества КА и состояние Элемента «функционален»:  $t_0 = 0, z_1 = 1$  («функционален»). Через случайный промежуток времени  $(t_0 + \eta_1)$ , распределенный по закону  $F_1(t) = P\{(t_0 + \eta_1) < t\}$ , Элемент подвергается КА. В результате КА он может быть поражен с вероятностью  $P_1$  или не поражен с вероятностью  $(1 - P_1)$ . Если КА была успешной, то Элемент в момент времени  $(t_0 + \eta_1)$  переходит в состояние  $z_2 = 0$  («не функционален») и начинается процесс восстановления его функционала, при этом расходуется соответствующий ресурс  $\Pi^{Tr} = \{R^{Tr}, D^{Tr}\}$ . В результате восстановления функциональности Элемента, через случайный период времени  $\tau_2$ , он возвращается в состояние «функционален». Случайный период времени  $\tau_2$  распределен по закону  $G_2(t) = P\{(t_0 + \eta_1 + \tau_2) < t\}$ , при этом расходуется соответствующий, фиксированный для каждого восстановления, ресурс  $\Pi^{Tr} = \{R^{Tr}, D^{Tr}\}$ .

В результате восстановления Элемент переходит в состояние  $z_5 = 1$  и вновь подвергается, через случайный период времени  $\eta_5$ , очередной КА. При этом случайный период времени  $\eta_5$  распределен по закону  $F_5(t) = P\{(t_0 + \eta_1 + \tau_2 + \eta_5) < t\}$  и т.д. Если Элемент в результате первой КА сохранит функциональность, он переходит

в новое состояние  $z_3 = 1$ , которое отличается от состояния  $z_1 = 1$  другой вероятностью поражения  $P_3$  или непоражения  $(1 - P_3)$ . При учете ограничений на ресурс случайный процесс может быть завершён невозвратными состояниями (на рисунке 1 это  $z_4$  и  $z_8$ ). Для восстановления функциональности Элемента требуется соответствующий ресурс:

$$\Pi^{\text{Тр}} = \left\{ \sum_{i \in M_+} r_{ij}^{\text{Тр}} \leq R_{0j}, \max_{i \in M_+} d_j^{\text{Тр}}(t) \leq d_{0j}(t) \right\}, \quad (2)$$

где  $M_+$  – множество успешных КА;  $r_{ij}^{\text{Тр}}$  – требуемый для восстановления функциональности Элемента расходуемый ресурс  $j$ -го вида, при  $i$ -й успешной КА;  $R_{0j}$  – имеющийся расходуемый ресурс  $j$ -го вида.

Таким образом, суммарный израсходованный ресурс  $\sum_{i \in M_+} r_{ij}^{\text{Тр}}$  не должен превышать имеющийся –  $R_{0j}$ , в противном случае процесс переходит в невозвратное состояние «не функционален» по исчерпанию ресурса.

Максимальная потребность в возобновляемом ресурсе в текущий момент времени  $\max_{i \in M_+} d_j^{\text{Тр}}(t)$  не должна превышать имеющийся на этот же момент времени возобновляемый ресурс  $d_{0j}(t)$ . Иными словами, один и тот же прибор или специалист не должен применяться в одно и то же время в разных местах. В противном случае процесс переходит в невозвратное состояние. В результате невозвратным вершинам могут соответствовать и промежуточные состояния полного графа (на рисунке 1 это  $z_4$  и  $z_8$ ), в которых Элемент так и останется в состоянии  $z_i = 0$ . Поэтому актуальными частными задачами при оценке живучести Элемента являются:

а. оценка вероятности того, что в момент времени  $t$  Элемент будет поражен, но не будет восстановлена его функциональность из-за исчерпания ресурса, определяемая неравенством (2);

б. оценка минимального значения функции живучести  $\varphi_m = \min_{t \in (0, T]} \varphi(t)$ , а также времени наступления этого минимума  $t_m$ .

Начальную вершину  $z_1$  и каждую конечную вершину  $z_{vi}$  соединяет путь, содержащий вершины, которым сопоставлены соответствующие состояния Элемента, а ребрам сопоставлены вероятности перехода в эти состояния. Каждому состоянию  $z_i$  соответствует функция распределения  $F_i(t)$  случайного времени реализации  $i$ -й КА –  $\eta_i$ . При этом с вероятностью  $P_i$ ,  $z_i = 0$ , если  $i$ -я КА была успешной, и  $(1 - P_i)$ ,  $z_i = 1$ , если  $i$ -я КА была неуспешной. Состояние  $z_{vi} = 1$ , где  $v$  – индекс конечной вершины и соответствует окончанию множества КА при условии, что имеющегося ресурса будет достаточно  $\Pi^{\text{Tp}} \geq \Pi_0$ .

Индексы  $j$  всех последующих состояний  $z_j = 1$  превышают индексы  $i$  предыдущих состояний,  $j > i$ . Число вершин графа соответствующих состояний Элемента будет однозначно зависеть от числа КА –  $n$ . При этом общее число возможных состояний Элемента  $M_0 = 3 \cdot 2^n - 2$  (выведено эмпирически без строгого доказательства). Число поглощающих состояний  $m = 2^n$ . Число  $k_+$  состояний  $z_i = 1$  и число  $k_-$  состояний  $z_i = 0$ , без учета поглощающих состояний, равны  $k_+ = k_- = 2^n - 1$ .

При поиске решения были приняты следующие допущения:

а. вероятность перехода  $\pi_{ij}$  из состояния  $z_i$  в состояние  $z_j$  на каждом пути зависит только от состояния  $z_i$  и не зависит от предыстории процесса, т.е. пути к состоянию  $z_i$ , т.е. принимаем, что процесс обладает свойством «без последствия»;

б. случайные величины  $\eta_i$  и  $\tau_i$  и их законы распределения независимы;

в. процесс восстановления завершается в случае, если закончился соответствующий ресурс (2), процесс переходит в невозвратное состояние и Элемент остается в состоянии  $z = 0$  (на рисунке 1 это состояния под номерами  $z_4$ ,  $z_8$ ). Из невозвратного состояния процесс может выйти только при получении дополнительного ресурса;

г. процесс переходит в поглощающее состояние с  $z_{vi} = 1$ , в силу прекращения КА.

Таким образом, для определения оператора  $A$  при произвольных законах распределения  $F_i(t)$  и  $G_i(t)$ , заданных вероятностях поражения  $P_i$  и ограничениях на ресурс (2) представляется возможным применить полумарковскую модель процесса восстановления функциональности Элемента в условиях ограничения на ресурс. Модель описывается ступенчатым случайным процессом, который задается:

а. вероятностями перехода  $\pi_{ij}$ ;

б. законами распределения времени пребывания процесса в каждом из состояний  $F_i(t)$  и  $G_i(t)$ ;

в. ограничением (2).

При моделировании следует учитывать особенности процесса:

1. Процесс не является эргодическим, т.к. он содержит множество невозвратных и поглощающих состояний, что не позволяет применить асимптотические оценки случайных величин  $\tau_i$  и  $\eta_i$ .

2. Длительность совокупности последовательных КА имеет конечное значение, что также препятствует применению асимптотических оценок для оценки живучести Элемента.

3. При построении графа учитываются ограничения на ресурс (2).

4. Вероятность перехода  $\pi_{ij}$  из состояния  $z_i$  в состояние  $z_j$  принимает следующие значения:

–  $\pi_{ij} = 0$ , если  $i \geq j$  или если  $z_i$  и  $z_j$  не являются смежными вершинами;

–  $\pi_{ij} = P_i$ , если  $z_i = 1$  и  $z_j = 0$ ;

–  $\pi_{ij} = 1 - P_i$ , если  $z_i = z_j = 1$ ;

–  $\pi_{ij} = 1$ , если  $z_i = 0$  и  $z_j = 1$ .

5. Условная функция распределения  $F_{ij}(t)$  времени пребывания процесса в любом  $i$ -м состоянии равна безусловной функции распределения времени пребывания процесса в этом состоянии. Действительно, состоянию  $z_i = 1$ , из которого возможен переход в состояние  $z_- = 0$  с вероятностью  $P_i$  при поражении Элемента или в состояние  $z_+ = 1$  с вероятностью  $(1 - P_i)$  при непоражении Элемента, соответствует безусловная функция распределения  $F_i(t)$ , определяемая с помощью известного [6, 17, 30] выражения  $F_i(t) = P_i F_{i-}(t) + (1 - P_i) F_{i+}(t)$ , где функция распределения  $F_{i-}(t)$  случайного времени перехода из состояний  $z_i$  в состояние  $z = 0$  при реализации  $i$ -й КА;  $P_i$  – вероятность поражения Элемента при реализации  $i$ -й КА;  $F_{i+}(t)$  – функция распределения случайного времени перехода из состояний  $z_i$  в состояние  $z = 1$  при реализации  $i$ -й КА. Учитывая, что закон распределения времени до  $i$ -й КА не зависит от поражения Элемента в результате предшествующих КА, справедливо равенство  $F_{i-}(t) = F_{i+}(t)$ , поэтому  $F_i(t) = F_{i-}(t)$ . Состоянию  $z_i = 0$  будет также соответствовать одна и та же функция распределения:  $G_i(t) = G_{i+}(t)$ , т.к. переход из этого состояния осуществляется с вероятностью  $\pi_{i+} = 1$ , за исключением случая, когда будет исчерпан ресурс для восстановления функциональности Элемента. В этом случае процесс перейдет в поглощающее состояние по исчерпанию ресурса.

**3. Решение задачи.** Для моделирования было выделено множество индексов  $N_+$  состояний элемента  $z_i = 1, i \in N_+$ , и множество индексов  $N_-$  состояний  $z_j = 0, j \in N_-$ . Очевидно, что функция живучести, характеризующая вероятность нахождения Элемента в состоянии «функционален» в момент времени  $t$ , будет равна сумме вероятностей  $P_{1i}(t)$  нахождения Элемента в состояниях, имеющих индексы  $N_+$ , при условии, что в начальный момент времени  $t_0 = 0$  он находился в состоянии  $z_i = 1$ , т.е.:

$$\varphi(t) = \sum_{\substack{i \in N_+ \\ \Pi^{1p} \leq \Pi_0}} P_{1i}(t), \quad (3)$$

где  $N_+$  – множество индексов  $N_+ = 2^{n+1} - 1$ , соответствующих состоянию Элемента «функционален».

Вероятности  $P_{1i}(t)$  позиционируются как интервально-переходные, которые определяются с помощью системы линейных интегральных уравнений. Сама идея математического моделирования для стационарных условий и при отсутствии ограничений на ресурс приведена в [17, 30]:

$$P_{1i}(t) = [1 - F_1(t)] \delta_{1i} + \sum_{k \in N_+} \pi_{1k} \int_0^t f_{1k}(\tau) g_{ki}(t - \tau) d\tau; \quad (4)$$

$$g_{ki}(t - \tau) = [1 - F_k(t)] \delta_{ki} + \sum_{r \in N_-} \pi_{kr} \int_0^t f_{kr}(\tau) g_{ri}(t - \tau) d\tau, \quad (5)$$

где  $i \in N_+; k, r \in N_-; \delta_{ki} = 1$  при  $k = i; \delta_{ki} = 0$  при  $k \neq i; f_{1k}(\tau)$  и  $f_{kr}(\tau)$  – условные плотности распределения случайного времени пребывания Элемента в состоянии  $z_1$  и  $z_k$  соответственно;  $N = N_+ \cup N_-$  – совокупность индексов всех возможных состояний Элемента. Значения  $g_{ki}(t - \tau)$  определяются по формуле (5).

Первый член в уравнении (4) определяет вероятность того, что Элемент останется в состоянии  $z_1$  до момента времени  $t$ . Второй член в (4) – вероятность последовательности событий перехода Элемента из  $z_1$  в  $z_k$  к моменту  $\tau$  и из состояния  $z_k$  в состояние  $z_i$  за оставшееся время  $(t - \tau)$ . Вероятности частных переходов суммируются по всем промежуточным состояниям  $z_k$ , в которые возможны переходы

из начального состояния  $z_1$ , и интегрируются по всем возможным временам перехода  $\tau$  между 0 и  $t$ .

Для снижения сложности процедуры определения функции живучести во временной шкале параметра функции применялось преобразование Лапласа. Таким образом, процедура определения оператора  $A$  включала следующие шаги:

1. определение совокупности возможных состояний Элемента  $Z = \{z_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, M_0$ ,  $M_0 = 1, 2, \dots, 3 \cdot 2^n - 2$  и построение полного графа переходов;
2. определение совокупности индексов  $N_+ = \{z_i = 1\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m_+$ , где  $m_+ = 2^{n+1} - 1$ ;
3. построение соотношений для интервально-переходных вероятностей  $P_{1i}(t)$ ,  $i \in N_+$  с использованием выражений, полученных в результате преобразований Лапласа и соответствующих таблиц преобразований;
4. определение общего выражения для функции живучести  $\varphi(t)$  с использованием формулы (3).

Для отображения самой предлагаемой идеи получения аналитического выражения функции живучести  $\varphi(t)$  ниже приводятся два тестовых примера ее выведения.

Процедура аналитического вычисления  $P_{1i}(t)$  весьма громоздкая, поэтому рекомендуется подходить к применению метода взвешенно в каждом конкретном случае при относительно небольшом числе воздействий. Для произвольного числа воздействий рекомендуется применять соответствующие программы для ЭВМ, реализующие числовые методы или методы статистического моделирования. Представляет интерес применение метода Монте-Карло. Идея и результат применения этого метода апробированы автором, результаты приведены в [32, 33].

**4. Тестовый пример.** Пусть число КА  $n = 1$ . Требуется определить функцию живучести Элемента  $\varphi(t)$ . Множество состояний Элемента и граф переходов представлен на рисунке 2.

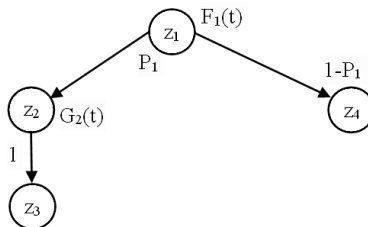


Рис. 2. Граф переходов при  $n = 1$

Семейство индексов состояний  $N_+ = \{1, 3, 4\}$ , в которых  $z_i = 1$ . В результате преобразований Лапласа получаем:

$$\tilde{P}_{11}(s) = \frac{1}{s} [1 - f_1(s)];$$

$$\tilde{P}_{13}(s) = \frac{1}{s} P_1 f_1(s) g_2(s);$$

$$\tilde{P}_{14}(s) = \frac{1}{s} (1 - P_1) f_1(s).$$

Вышеприведенное семейство формул, отражающих индексы состояний  $N_+$ , будет зависеть от имеющегося ресурса и ресурсоёмкости восстановительных работ.

В результате применения математической модели с применением преобразования Лапласа получаем результирующее выражение:

$$\tilde{\varphi}(s) = \sum_{i \in N_+} \tilde{P}_{1i}(s) = \frac{1}{s} [1 - f_1(s)] + \frac{1}{s} P_1 f_1(s) g_2(s) + \frac{1}{s} (1 - P_1) f_1(s).$$

Преобразовав, получаем:  $\tilde{\varphi}(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} P_1 f_1(s) g_2(s) - \frac{1}{s} P_1 f_1(s)$ .

Применяя обратное преобразование Лапласа, получаем:

$$\varphi(t) = 1 - P_1 F_1(t) + P_1 \int_0^t F_1(t - \tau) g_2(\tau) d\tau;$$

$$\varphi(t) = 1 - P_1 F_1(t) + P_1 F_1(t) * g_2(t), \quad (6)$$

где знак \* означает операцию свертки двух функций. При моделировании принимается допущение, что неравенство (2) выполняется. На текущем этапе исследования граф переходов и семейство индексов состояний формируются вручную. Построение алгоритма, позволяющего автоматизировать процесс, находится за рамками настоящего исследования. При поиске решения следует учитывать условие неравенства (2).



**5. Результаты моделирования.** Результаты моделирования приведены на рисунках 3–5.

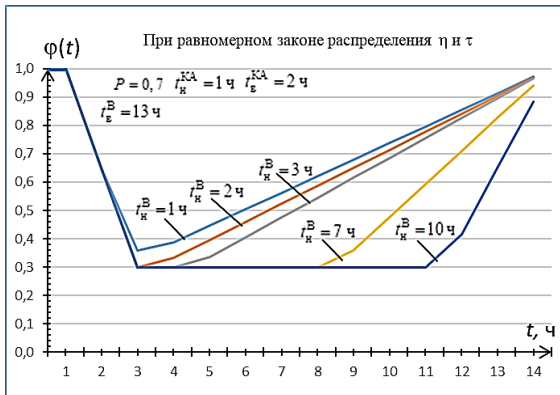


Рис. 3. Поведение функции живучести  $\varphi(t)$  при изменении нижней границы времени восстановления  $t_n^B$  функциональности Элемента

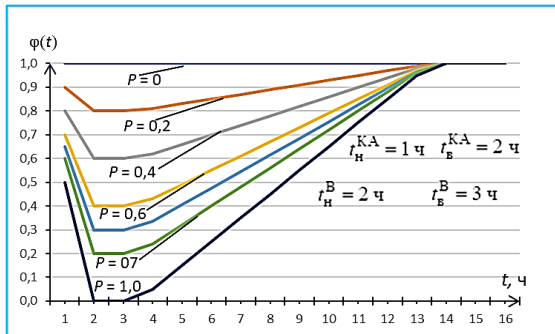


Рис. 4. Функция живучести  $\varphi(t)$  при изменении вероятности поражения Элемента

Первые два результата получены при аппроксимации функций распределения случайных времен до воздействия противника и восстановления функционала Элемента равномерным законом распределения. Анализ результатов позволяет утверждать, что вид функции  $\varphi(t)$ , в том числе и минимальное ее значение  $\varphi_m$  и время  $t_m$  зависят от вероятности поражения  $P$  (защищенности) Элемента (рисунок 4), характеристик КА, а также от производственной возможности системы восстановления функционала.

На рисунке 5 приведены результаты построения функции живучести при аппроксимации функций распределения случайных времен до воздействия противника и восстановления функционала Элемента экспоненциальным законом распределения.

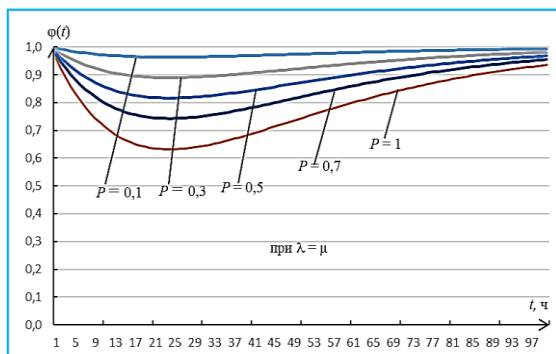


Рис. 5. Поведение функции живучести  $\varphi(t)$  при изменении вероятности поражения Элемента

Применение этого закона распределения позволяет получить более простую математическую модель в виде аналитической зависимости. При некоторых условиях такая замена приводит к незначительной погрешности и может быть вполне допустима. Исследование величины такой погрешности находится на стадии завершения, результаты будут приведены в другой публикации.

Из полученного соотношения (6) интуитивно выведены, на качественном уровне, следующие предельные свойства функции живучести:

1)  $\varphi(0) = 1$ , значение функции живучести в начальный момент времени равно 1;

2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 1$ , в отсутствии КА  $F_1(t) = 0$ , следовательно, предельное значение функции живучести Элемента в этом случае равно единице;

3)  $\varphi(t, P_i = 0) = 1$ , если вероятности поражения Элемента при КА равны нулю (это может быть в случае, если средства поражения противника слабы либо рубежи защиты Элемента сильны) значение функция живучести Элемента также равно единице. Перечисленные утверждения не противоречат логике вещей.

**6. Заключение.** Таким образом, результаты исследований позволяют утверждать, что для аудиторского оценивания

функциональной живучести элементов ИИ и построения соответствующей программы аудита возможно применение известных методов теории полумарковских процессов.

Исследование предмета теории полумарковских процессов показывает, что для решения поставленной задачи существенным является модификация полумарковской модели с целью учета ограничений на ресурс, который поддерживает реальный процесс функционирования Элемента в условиях КА.

Разработанный подход целесообразно применять при относительно небольшом количестве КА, как показал эксперимент, не больше трех. При увеличении числа КА выражения для функции живучести становятся весьма громоздкими и трудно интерпретируемыми, поэтому требуется автоматизация процесса моделирования.

Предлагаемый подход может быть применен для оценивания достоверности статистических моделей на выборках не больше трех и формирования заключения, по аналогии, о достоверности статистических моделей для больших  $n$ , что важно для практики.

### Литература

1. Отчет о сетевой безопасности и доступности в 2020 году. URL: [https://qrator.net/presentations/2021/QuatorLabs\\_Network\\_Security\\_Availability\\_in\\_2020\\_RU.pdf](https://qrator.net/presentations/2021/QuatorLabs_Network_Security_Availability_in_2020_RU.pdf). (дата обращения: 01.03.2023).
2. Data Breach Investigations Report. Available at: <https://enterprise.verizon.com/resources/reports/2021-data-breach-investigations-report.pdf>. (accessed 01.03.2023).
3. Attacks on Russian companies in the 3rd quarter of 2022. Rostelecom-Solar Report. Available at: <https://ict.moscow/research/ataki-na-rossiiskie-kompanii-v-iii-kvartale-2022-goda/?amp&amp>. (accessed 01.03.2023).
4. National Institute of Standards and Technology Special Publication 800-53A, Revision 1, Guide for Assessing the Security Controls in Federal Information Systems and Organizations: Building Effective Security Assessment Plans. Available at: <https://www.nist.gov/publications/guide-assessing-security-controls-federal-information-systems-and-organizations>. (accessed 01.03.2023).
5. Авдеевский В.С. Надежность и эффективность в технике. Справочник. Проектный анализ надежности. – М.: Машиностроение, 1989. Т. 5. 376 с.
6. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. М.: Наука, 1965. 524 с.
7. Кульба В.В., Сомов С.К., Шелков А.Б. Анализ влияния использования информационной избыточности на показатели надежности распределенных информационных систем // Надежность. 2022. № 1. С. 4–12. DOI: 10.21683/1729-2646-2022-22-1-4-12.
8. Карантаев В.Г., Карпенко В.И. Применение комбинированных методов оценки надежности ИЭУ РЗА ЦПС с учетом фактора влияния кибератак // Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики: Материалы 94-го заседания Международного научного семинара (г. Алуста, 19–23 сентября 2022 г.) // Иркутск: Федеральное государственное бюджетное

- учреждение науки Институт систем энергетики им. Л.А. Мелентьева Сибирского отделения Российской академии наук, 2022. С. 524–533.
9. Ефремов В.А., Мищенко В.И., Мищенко И.В. Полумарковская модель процесса функционирования средств измерений // Измерение. Мониторинг. Управление. Контроль. 2022. № 3(41). С. 29–38. DOI: 10.21685/2307-5538-2022-3-3.
  10. Зеленцов Б.П. Модель системы мониторинга объекта при недостоверном контроле // Надежность. 2020. Т. 20. № 4. С. 3–12. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-20-4-3-12.
  11. Obzherin Yu.E., Sidorov S.M., Fedorenko S.N. Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity // MATEC Web of Conferences. 2017. vol. 129. p. 03009. DOI: 10.1051/mateconf/201712903009.
  12. Xu X., Bishop M., Oikarinen D.G., Hao C. Application and modeling of battery energy storage in power systems // CSEE Journal of Power and Energy Systems. vol. 2. № 3. 2016. pp. 82–90.
  13. Привалов А.А., Бекбаев Г.А. Оценка устойчивости телекоммуникационной сети железнодорожной станции на основе схемы функциональной целостности // 72-я Всероссийская научно-техническая конференция, посвященная Дню радио: Труды конференции (г. Санкт-Петербург, 20–28 апреля 2017 г.). СПб: Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина). 2017. С. 293–295.
  14. Dorofeev A.V., Markov A.S. Conducting Cyber Exercises Based on the Information Security Threat Model // CEUR Workshop Proceedings. 2021. pp. 1–10.
  15. Марков А.С., Цирлов В.Л., Барабанов А.В. Методы оценки несоответствия средств защиты информации / под ред. А. С. Маркова // М.: Радио и связь, 2012. 192 с.
  16. Недосекин А.О., Виноградов В.В. Оценка динамическом функциональной живучести технической системы в условиях неопределенности // Мягкие измерения и вычисления. 2017. № 1(1). С. 58–64.
  17. Хохлачев Е.Н. Организация и технологии выработки решений при управлении системой и войсками связи. Часть 2. Выработка решений при восстановлении сетей связи. М.: ВА РВСН, 2009. 241 с.
  18. Гавдан Г.П., Иваненко В.Г., Рыбалко Э.П., Рыбалко Д.П. Устойчивость функционирования объектов критической информационной инфраструктуры // Безопасность информационных технологий. 2022. Т. 29. № 4. С. 53–66. DOI: 10.26583/bit.2022.4.05.
  19. Антонов С.Г., Анциферов И.И., Климов С.М. Методика инструментально-расчетной оценки устойчивости объектов критической информационной инфраструктуры при информационно-технических воздействиях. Надежность. 2020. Т. 20(4), pp. 35–41. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-20-4-35-41.
  20. Захарченко Р.И., Королев И.Д. Методика оценки устойчивости функционирования объектов критической информационной инфраструктуры, функционирующей в киберпространстве // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. 2018. Т. 10. № 2. С. 52–61. DOI: 10.24411/2409-5419-2018-10041.
  21. Privalov A., Titov D., Kotenko I., Saenko I., Evglevskaya N. Evaluating the functioning quality of data transmission networks in the context of cyberattacks // Energies. 2021. vol. 14. no. 16. DOI: 10.3390/en14164755.
  22. Милашевский А.В., Мякотин А.В., Привалов А.А., Чеботарев В.И. Факторы, влияющие на функциональную целостность и устойчивость функционирования подвижного узла связи специального назначения // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2020. № 11. С. 339–344.

23. Краснов А.Е., Мосолов А.С., Феоктистова Н.А. Оценивание устойчивости критических информационно-инфраструктур к угрозам информационной безопасности // Безопасность информационных технологий. 2021. Т. 28. № 1. С. 106–120. DOI: 10.26583/bit.2021.1.09.
24. Максимова Е.А., Садовникова Н.П. Оценка инфраструктурной устойчивости субъекта критической информационной инфраструктуры при деструктивных воздействиях // Известия ЮФУ. Технические науки. 2021. № 4(221). С. 155–165. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-4-155-165.
25. Ледовских Т.В., Щербакоева Е.Н. Требования к устойчивости сетей связи субъектов критической информационной инфраструктуры // Технологии информационного общества: Материалы XIII Международной отраслевой научно-технической конференции (г. Москва, 20–21 марта 2019 г.). М.: ООО «Издательский дом Медиа публицер», 2019. С. 55–57.
26. Linkov I., Eisenberg D.A., Plourde K., Seager T.P., Allen J., Kott A. Resilience metrics for cyber systems. *Environ Syst. Decis.* 2013. vol. 33. pp. 471–476. DOI: 10.1007/s10669-013-9485-y.
27. Kott A., Linkov I. To Improve Cyber Resilience, Measure It. *IEEE Computer.* 2021. vol. 54. no. 2. p. 80–85.
28. Лившиц И.И. К вопросу управления уязвимостями в компонентах АСУТП // Автоматизация в промышленности. 2022. № 8. С. 12–16. DOI: 10.25728/avtprom.2022.08.02.
29. Grusho A.A., Grusho N.A., Zabezhailo M.I., Timonina E.E. Localization of the Root Cause of the Anomaly // *Automatic Control and Computer Sciences.* 2021. vol. 55. no. 8. pp. 978–983. DOI: 10.3103/S0146411621080137.
30. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. М.: «Сов. радио», 1977. 488 с.
31. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. Учеб. для вузов // М.: Высш. Шк., 2006. 575 с.
32. Voevodin V.A., Burenok D.S., Cherniaev V.S. Technique for Detecting Computer Attacks on a Wi-Fi Networks. *Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus).* 2022. pp. 487–492. DOI: 10.1109/ElConRus54750.2022.9755703.
33. Voevodin V.A. Monte Carlo method for predicting the stability of the functioning of the informatization object in the conditions of massive computer attacks. *International Conference «Marchuk Scientific Readings 2021» (MSR-2021) Journal of Physics: Conference Series.* vol. 2099. 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012070.
34. Макаренко С.И. Аудит безопасности критической инфраструктуры специальными информационными воздействиями. СПб: Издательство «Наукоемкие технологии», 2018. 122 с.
35. Макаренко С.И., Смирнов Г.Е. Методика обоснования тестовых информационно-технических воздействий, обеспечивающих рациональную полноту аудита защищенности объекта критической информационной инфраструктуры // *Вопросы кибербезопасности.* 2021. № 6(46). С. 12–25. DOI: 10.21681/2311-3456-2021-6-12-25.
36. Мищенко Д.А., Львов А.А., Никифоров А.А., Раад Джихад А.А., Светлов М.С. Полумарковская модель телекоммуникационной сети с динамическим управлением // *Известия ЮФУ. Технические науки.* 2021. № 5(222). С. 49–60. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-5-49-60.
37. Песчанский А.И. Полумарковские модели профилактики ненадежной одноканальной системы обслуживания с потерями // ООО «Научно-издательский центр Инфра-М», 2022. 267 с. DOI: 10.12737/1870597.

38. Привалов А.А., Милашевский А.В. Подход к моделированию узла связи специального назначения, уязвимого к факторам деструктивного воздействия // Инновационная железная дорога. Новейшие и перспективные системы обеспечения движения поездов. Проблемы и решения: Сборник статей Международной научно-теоретической конференции (г. Санкт-Петербург, Петергоф, 18 мая 2021 г.). СПб, Петергоф: Военный институт (железнодорожных войск и военных сообщений), 2021. С. 308–315.
39. Yu S.-Z. *Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications*. Elsevier, 2015. 208 p.
40. Barbu V.S., Limnios N. *Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: their use in Reliability and DNA Analysis*. Springer, 2008. 226 p.
41. Hoek J., Elliott R.J. *Introduction to Hidden Semi-Markov Models*. Cambridge University Press, 2018. 185 p.
42. Grabski F. *Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance*. Elsevier, 2015. 255 p.
43. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. *Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures*. Elsevier, Academic Press, 2015. 212 p.

**Воеводин Владислав Александрович** — канд. техн. наук, доцент кафедры, кафедра информационной безопасности, Национальный исследовательский университет «Московский институт электронной техники». Область научных интересов: модели, методы и средства обеспечения аудита состояния объекта, находящегося под воздействием угроз нарушения его информационной безопасности, модели и методы оценки защищенности информации, в том числе в интересах страхования информационных рисков, методы оценки эффективности систем (комплексов) мер обеспечения информационной безопасности. Число научных публикаций — 50. vva541@mail.ru; улица Солнечная Аллея, 901, 124575, Москва, Россия; р.т.: +7(985)787-1344.

V. VOEVODIN  
**A MODEL FOR ASSESSING THE FUNCTIONAL STABILITY OF  
INFORMATION INFRASTRUCTURE ELEMENTS FOR  
CONDITIONS OF EXPOSURE TO MULTIPLE COMPUTER  
ATTACKS**

***Voevodin V. A Model for Assessing the Functional Stability of Information Infrastructure Elements for Conditions of Exposure to Multiple Computer Attacks.***

**Abstract.** Information is given about a new approach to the application of methods of the theory of semi-Markov processes to solve the applied problem of assessing the functional stability of elements that make up the information infrastructure, functioning under the influence of multiple computer attacks. The task of assessing functional stability is reduced to the task of finding the survivability function of the element under study and determining its extreme values. The relevance of the study is substantiated. The rationale is based on the assumption that quantitative methods of studying the stability of technical systems, which operate on the theory of reliability, cannot always be used to assess survivability. The concepts of «stability» and «computer attack» are being clarified. Verbal and formal statements of research tasks are formulated. The novelty of the results obtained lies in the application of well-known methods to solve a practically significant problem in a new formulation, taking into account the limitations on the resource allocated to maintain the survivability of the element under study, provided that arbitrary distribution laws are adopted for the random times of the implementation of computer attacks and the recovery times of the functional element. Recommendations on the formation of initial data, the content of the enlarged stages of modeling and a test case to demonstrate the performance of the model are given. The results of the test simulation are presented in the form of graphs of the survivability function. The resulting application can be used in practice to construct a survivability function when implementing up to three computer attacks, as well as a tool for evaluating the reliability of analogous statistical models. The limitation is explained by a progressive increase in the dimension of the analytical model and a decrease in the possibility of its meaningful interpretation.

**Keywords:** information infrastructure, information infrastructure element, functional stability, survivability function, computer attack, information security audit, semi-Markov processes, threats to information security.

### References

1. Otchet o setevoy bezopasnosti i dostupnosti v 2020 godu. [Report on Netshhork security and Availability in 2020]. Available at: [https://jarator.net/presentations/2021/JaratorLabs\\_Netshhork\\_Security\\_Availability\\_in\\_2020\\_RU.pdf](https://jarator.net/presentations/2021/JaratorLabs_Netshhork_Security_Availability_in_2020_RU.pdf). (accessed 01.03.2023). (In Russ.).
2. Data Breach Investigations Report. Available at: <https://enterprise.verizon.com/resources/reports/2021-data-breach-investigations-report.pdf>. (accessed 01.03.2023).
3. Attacks on Russian companies in the 3rd quarter of 2022. Rostelecom-Solar Report. Available at: <https://ict.moscow/research/ataki-na-rossiiskie-kompanii-v-iii-kvartale-2022-goda/?amp&amp&amp>. (accessed 01.03.2023).
4. National Institute of Standards and Technology Special Publication 800-53A, Revision 1, Guide for Assessing the Security Controls in Federal Information Systems and Organizations: Building Effective Security Assessment Plans. Available at:

- <https://www.nist.gov/publications/guide-assessing-security-controls-federal-information-systems-and-organizations>. (accessed 01.03.2023).
5. Авдучевский В.С. Nadezhnost' i jeffektivnost' v tehnike. Spravochnik. Proektnyj analiz nadezhnosti. [Reliability and efficiency in technology. Directory. Design reliability analysis]. Moscow: Mashinostroenie, 1989. 376 p. (In Russ.).
  6. Gnedenko B.V., Beljaev Ju.K., Solov'ev A.D. Matematicheskie metody v teorii nadezhnosti [Mathematical Methods in Reliability Theory]. Moscow: Nauka, 1965. 524 p. (In Russ.).
  7. Kul'ba V.V., Somov S.K., Shelkov A.B. [Analysis of the influence of the use of information redundancy on the reliability indicators of distributed information systems]. Nadezhnost' – Reliability. 2022. no. 1. pp. 4–12. DOI: 10.21683/1729-2646-2022-22-1-4-12. (In Russ.).
  8. Karantaev V.G., Karpenko V.I. [The use of combined methods for assessing the reliability of the IED RPA CPS, taking into account the influence of cyber attacks] Metodicheskie voprosy issledovanija nadezhnosti bol'shijh sistem jenergetiki: Materialy 94-go zasedanija Mezhdunarodnogo nauchnogo seminar [Methodological Issues of Researching the Reliability of Large Energy Systems: Proceedings of the 94th meeting of the International Scientific Seminar] Irkutsk: Federal'noe gosudarstvennoe bjuzhetnoe uchrezhdenie nauki Institut sistem jenergetiki im. L.A. Melent'eva Sibirskogo otdelenija Rossijskoj akademii nauk, 2022. pp. 524–533. (In Russ.).
  9. Efremov V.A. Mishhenko V.I., Mishhenko I.V. [Semi-Markov model of the process of functioning of measuring instruments]. Izmerenie. Monitoring. Upravlenie. Kontrol' – Measurement. Monitoring. Control. 2022. № 3(41). pp. 29–38. DOI: 10.21685/2307-5538-2022-3-3. (In Russ.).
  10. Zelencov B.P. [Model of the monitoring system of an object with unreliable control]. Nadezhnost' – Reliability. 2020. T. 20. № 4. p. 3–12. DOI: 10.21683/1729-2646-2020-20-4-3-12. (In Russ.).
  11. Obzherin Ju.E., Sidorov S.M., Fedorenko S.N. Analysis of the time reserve influence on the technological cell productivity. MATEC Web of Conferences. 2017. vol. 129. p. 03009. DOI: 10.1051/mateconf/201712903009.
  12. Xu X., Bishop M., Oikarinen D.G., Hao C. Application and modeling of battery energy storage in power systems. CSEE Journal of Power and Energy Systems. vol. 2. № 3. 2016. pp. 82–90.
  13. Privalov A.A., Bekbaev G.A. [Assessment of the stability of the telecommunications network of a railway station based on the scheme of functional integrity] 72-ja Vserossijskaja nauchno-tehnicheskaja konferencija, posvjashhennaja Dnju radio: Trudy konferencii [72nd All-Russian Scientific and Technical Conference dedicated to Radio Day], Sankt-Peterburg: Sankt-Peterburgskij gosudarstvennyj jelektrotehnicheskij universitet «LJeTI» im. V.I. Ul'janova (Lenina), 2017. pp. 293–295.
  14. Dorofeev A.V., Markov A.S. Conducting Cyber Exercises Based on the Information Security Threat Model. CEUR Workshop Proceedings. 2021. pp. 1–10.
  15. Markov A.S., Cirlov V.L., Barabanov A.V. Metody ocenki nesootvetstvija sredstv zashhity informacii [Methods for assessing the inconsistency of information security tools]. Moscow: Radio i svjaz', 2012. 192 p.
  16. Nedosekin A.O., Vinogradov V.V. [Assessment of the dynamic functional survivability of a technical system under conditions of uncertainty]. Mjagkie izmerenija i vychislenija – Soft measurements and calculations. 2017. № 1(1). pp. 58–64. (In Russ.).
  17. Hohlachev E.N. Organizacija i tehnologii vyrabotki reshenij pri upravlenii sistemoj i vojskami svjazi. Chast' 2. Vyrabotka reshenij pri vosstanovlenii setej svjazi [Organization and technologies for making decisions in the management of the system



- and signal troops. Part 2. Development of solutions for the restoration of communication networks]. Moscow: VA RVSN, 2009. 241 p. (In Russ.).
18. Gavdan G.P., Ivanenko V.G., Rybalko Je.P., Rybalko D.P. [Sustainability of functioning of objects of critical information infrastructure] *Bezopasnost' informacionnyh tehnologij – Information technology security*. 2022. vol. 29. no. 4. pp. 53–66. DOI: 10.26583/bit.2022.4.05. (In Russ.).
  19. Antonov S.G., Anciferov I.I., Klimov S.M. [Methodology for instrumental-calculative assessment of the stability of critical information infrastructure objects under information and technical impacts]. *Nadezhnost' – Reliability*. 2020. 20(4). pp. 35–41. DOI: 10.21683/1729-2646-2020- 20-4-35-41. (In Russ.).
  20. Zaharchenko R.I., Korolev I.D. [Methodology for assessing the sustainability of the functioning of objects of critical information infrastructure operating in cyberspace]. *Naukoemkie tehnologii v kosmicheskikh issledovanijah Zemli – Science-intensive technologies in space exploration of the Earth*. 2018. vol. 10. no. 2. pp. 52–61. DOI: 10.21683/1729-2646-2020- 20-4-35-41 10.24411/2409-5419-2018-10041. (In Russ.).
  21. Privalov A., Titov D., Kotenko I., Saenko I., Evglevskaya N. Evaluating the functioning quality of data transmission networks in the context of cyberattacks. *Energies*. 2021. vol. 14. no. 16. DOI: 10.3390/en14164755.
  22. Milashevskij A.V., Mjakotin A.V., Privalov A.A., Chebotarev V.I. [Factors affecting the functional integrity and stability of the operation of a special-purpose mobile communication center]. *Izvestija Tul'skogo gosudarstvennogo universiteta. Tehnicheskie nauki – News of the Tula State University. Technical science*. 2020. no. 11. pp. 339–344. (In Russ.).
  23. Krasnov A.E., Mosolov A.S., Feoktistova N.A. [Assessing the resilience of critical information infrastructures to information security threats] *Bezopasnost' informacionnyh tehnologij – Information technology security*. 2021. vol. 28. no. 1. pp. 106–120. DOI: 10.26583/bit.2021.1.09. (In Russ.).
  24. Maksimova E.A., Sadovnikova N.P. [Assessment of infrastructure stability of the subject of critical information infrastructure under destructive impacts]. *Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki. – Izvestiya SFedU. Technical science*. 2021. vol. 4(221). pp. 155–165. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-4-155-165. (In Russ.).
  25. Ledovskih T.V., Shherbakova E.N. [Requirements for the stability of communication networks of subjects of critical information infrastructure] *Tehnologii informacionnogo obshestva: Materialy XIII Mezhdunarodnoj otraslevoj nauchno-tehnicheskoy konferencii [Technologies of the Information Society: Proceedings of the XIII International Industry Scientific and Technical Conference]*. Moscow: OOO «Izdatel'skij dom Media publisher», 2019. pp. 55–57. (In Russ.).
  26. Linkov I., Eisenberg D.A., Plourde K. Seager T.P., Allen J., Kott A. Resilience metrics for cyber systems. *Environ Syst. Decis*. 2013. vol. 33. pp. 471–476. DOI: 10.1007/s10669-013-9485-y.
  27. Kott A., Linkov I. To Improve Cyber Resilience, Measure It. *IEEE Computer*. 2021. vol. 54. no. 2. p. 80–85.
  28. Livshic, I.I. [On the Issue of Vulnerability Management in APCS Components]. *Avtomatizacija v promyshlennosti – Automation in industry*. 2022. № 8. pp. 12–16. DOI: 10.25728/avtprom.2022.08.02. (In Russ.).
  29. Grusho A.A., Grusho N.A., Zabezhailo M.I., Timonina E.E. Localization of the Root Cause of the Anomaly. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2021. vol. 55. no. 8. pp. 978–983. DOI: 10.3103/S0146411621080137.
  30. Tihonov V.I., Mironov M.A. *Markovskie process [Markov processes]*. Moscow, «Sov. radio», 1977. 488 p. (In Russ.).
  31. Ventcel' E.S. *Teorija veroyatnostej. Ucheb. dlja vuzov [Probability Theory. Textbook for universities]*. Moscow, Vyssh. Shk., 2006. 575 p. (In Russ.).

32. Voevodin V.A., Burenok D.S., Cherniaev V.S. Technique for Detecting Computer Attacks on a Wi-Fi Networks. Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). 2022. pp. 487–492. DOI: 10.1109/EIConRus54750.2022.9755703.
33. Voevodin V.A. Monte Carlo method for predicting the stability of the functioning of the informatization object in the conditions of massive computer attacks. International Conference «Marchuk Scientific Readings 2021» (MSR-2021) Journal of Physics: Conference Series. vol. 2099. 2021. DOI: 10.1088/1742-6596/2099/1/012070.
34. Makarenko, S.I. Audit bezopasnosti kriticheskoy infrastruktury specialnymi informacionnymi vozdejstvijami [Security audit of critical infrastructure by special information impacts]. Sankt-Peterburg: Izdatel'stvo «Naukoemkie tehnologii», 2018. 122 p. (In Russ.).
35. Makarenko S.I., Smimov G.E. [Methodology for substantiating test information and technical impacts that ensure the rational completeness of the security audit of a critical information infrastructure object]. Voprosy kiberbezopasnosti – Cybersecurity Issues. 2021. № 6(46). pp. 12–25. DOI: 10.21681/2311-3456-2021-6-12-25. (In Russ.).
36. Mishhenko D.A., L'vov A.A., Nikiforov A.A., Raad Dzhihad A.A., Svetlov M.S. [Semi-Markov model of a telecommunications network with dynamic control]. Izvestija JuFU. Tehnicheskie nauki – Izvestiya SFedU. Technical science. 2021. № 5(222). pp. 49–60. DOI: 10.18522/2311-3103-2021-5-49-60. (In Russ.).
37. Peschanskij A.I. Polumarkovskie modeli profilaktiki nenadezhnoj odnokanalnoj sistemy obsluzhivaniya s poterjami [Semi-Markov prevention models for an unreliable single-channel queuing system with losses]. OOO «Nauchno-izdatel'skij centr Infra-M», 2022. 267 p. DOI: 10.12737/1870597. (In Russ.).
38. Privalov A.A., Milashevskij A.V. [An Approach to Modeling a Special-Purpose Communication Center Vulnerable to Destructive Impact Factors] Innovacionnaja zheleznaja doroga. Novejšie i perspektivnye sistemy obespechenija dvizhenija poezdov, problemy i reshenija: Sbornik statej Mezhdunarodnoj nauchno-teoreticheskoy konferencii [Innovative railway. The latest and promising systems for ensuring the movement of trains. Problems and Solutions: Collection of articles of the International Scientific and Theoretical Conference]. Sankt-Peterburg, Petergof: Voenyj institut (Zheleznodorozhnyh vojsk i voennyh soobshhenij), 2021. pp. 308–315. (In Russ.).
39. Yu S.-Z. Hidden Semi-Markov Models: Theory, Algorithms and Applications. Elsevier, 2015. 208 p.
40. Barbu V.S., Limnios N. Semi-Markov Chains and Hidden Semi-Markov Models toward Applications: their use in Reliability and DNA Analysis. Springer, 2008. 226 p.
41. Hoek J., Elliott R.J. Introduction to Hidden Semi-Markov Models. Cambridge University Press, 2018. 185 p.
42. Grabski F. Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance. Elsevier, 2015. 255 p.
43. Obzherin Yu.E., Boyko E.G. Semi-Markov Models: Control of Restorable Systems with Latent Failures. Elsevier, Academic Press, 2015. 212 p.

**Voevodin Vladislav** — Ph.D., Associate professor of the department, Department of information security, National Research University of Electronic Technology. Research interests: models, methods and means of auditing the condition of an object under the influence of threats to its information security, models and methods for assessing the security of information, including in the interests of information risk insurance, methods for evaluating the effectiveness of systems (complexes) measures to ensure information security. The number of publications — 50. vva541@mail.ru; 901, Sunny Alley St., 124575, Moscow-Zelenograd, Russia; office phone: +7(985)787-1344.

## Руководство для авторов

Взаимодействие автора с редакцией осуществляется через личный кабинет на сайте журнала «Информатика и автоматизация» <http://ia.spcras.ru/>. При регистрации авторам рекомендуется заполнить все предложенные поля данных. Подготовка статьи ведется с помощью текстовых редакторов MS Word 2007 и выше или LaTeX. Объем основного текста (до раздела Литература) - от 20 до 30 страниц включительно. Переносы разрешены. Номера страниц не проставляются. Основная часть текста статьи разбивается на разделы, среди которых являются обязательными: введение, хотя бы один «содержательный» раздел и заключение. Допускается также мотивированное содержанием и структурой материал а выделение подразделов. В основную часть опускается помещать рисунки, таблицы, листинги и формулы. Правила их оформления подробно рассмотрены на нашем сайте в разделе «Руководство для авторов».

## Author guidelines

Interaction between each potential author and the Editorial board is realized through the personal account on the website of the journal "Informatics and Automation" <http://ia.spcras.ru/>. At the registration the authors are requested to fill out all data fields in the proposed form. The submissions should be prepared using MS Word 2007, LaTeX. The text of the paper in the main part should not exceed 30 pages. Pages are not numbered; hyphenations are allowed. Certain figures, tables, listings and formulas are allowed in the main section, and their typography is considered in more detail at the journal web.

---

Signed to print 24.05.2023. Passed for print 01.06.2023.

Printed in Publishing center GUAP.

Address: 67 litera A, B. Morskaya, St. Petersburg, 190000, Russia

---

Founder and Publisher: SPC RAS.

Address: 39 litera A, 14th Line V.O., St. Peterburg, 199178, Russia.

The journal is registered in the Federal Service for Supervision of Communications, Information Technology, and Mass Media, Registration Certificate (registration number) ПИ № ФС77-79228 dated September 25, 2020 Subscription Index П5513, Russian Post Catalog

---

Подписано к печати 24.05.2023. Дата выхода в свет 01.06.2023.

Формат 60×90 1/16. Усл. печ. л. 13,6. Заказ № 234. Тираж 300 экз., цена свободная.

Отпечатано в Редакционно-издательском центре ГУАП.

Адрес типографии: Б. Морская, д. 67, лит. А, г. Санкт-Петербург, 190000, Россия

---

Учредитель и издатель: СПб ФИЦ РАН.

Адрес учредителя и издателя: 14-я линия В.О., д. 39, лит. А, г. Санкт-Петербург, 199178, Россия

Журнал зарегистрирован Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций, свидетельство о регистрации (регистрационный номер) ПИ № ФС77-79228 от 25 сентября 2020 г.

Подписной индекс П5513 по каталогу «Почта России»