

Д.В. ЕФАНОВ, В.В. САПОЖНИКОВ, ВЛ.В. САПОЖНИКОВ
**ДВУХМОДУЛЬНЫЕ ВЗВЕШЕННЫЕ КОДЫ С
СУММИРОВАНИЕМ В КОЛЬЦЕ ВЫЧЕТОВ ПО МОДУЛЮ $M=4$**

Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Двухмодульные взвешенные коды с суммированием в кольце вычетов по модулю $M=4$.

Аннотация. Представлены результаты исследования особенностей обнаружения ошибок в информационных векторах кодами с суммированием. В такой постановке задача актуальна, прежде всего, для использования кодов с суммированием при реализации контролепригодных дискретных систем и технических средств диагностирования их компонентов. Приводится краткий обзор работ в области построения кодов с суммированием и описание способов их построения. Выделены коды, для которых при формировании контрольного вектора единожды учитываются значения всех информационных разрядов путем операций суммирования их значений или значений весовых коэффициентов разрядов, а также коды, которые формируются при первоначальном разбиении информационных векторов на подмножества, в частности на два подмножества. Предложено расширение класса кодов с суммированием, получаемых за счет выделения двух независимых частей в контрольных векторах, а также взвешивания разрядов информационных векторов на этапе построения кода.

Приведен обобщенный алгоритм построения двухмодульных взвешенных кодов, а также описаны особенности некоторых из кодов, полученных при взвешивании неединичными весовыми коэффициентами по одному информационному разряду в каждом из подвекторов, по которым осуществляется подсчет суммарного веса. Особое внимание уделено двухмодульным взвешенным кодам с суммированием, для которых определяется суммарный вес информационного вектора в кольце вычетов по модулю $M=4$. Показано, что установление неравноправия между разрядами информационного вектора в некоторых случаях дает улучшение в характеристиках обнаружения ошибок по сравнению с известными двухмодульными кодами. Описываются некоторые модификации предложенных двухмодульных взвешенных кодов. Предложен способ подсчета общего числа необнаруживаемых ошибок в двухмодульных кодах с суммированием в кольце вычетов по модулю $M=4$ с одним взвешенным разрядом в каждом из подмножеств. Приведены подробные характеристики обнаружения ошибок рассматриваемыми кодами как по кратностям необнаруживаемых ошибок, так и по их видам (монотонные, симметричные и асимметричные ошибки). Проведено сравнение с известными кодами. Предложен способ синтеза кодеров двухмодульных кодов с суммированием на стандартной элементной базе сумматоров единичных сигналов. Дана классификация двухмодульных кодов с суммированием.

Ключевые слова: системы с обнаружением неисправностей; ошибки на выходах устройств; обнаружение ошибок; код с суммированием; двухмодульный код; необнаруживаемая ошибка; вид и кратность ошибки; свойства кода.

1. Введение. В процессе разработки систем и устройств автоматики и вычислительной техники требуется учесть возможность обнаружения неисправностей и коррекции их проявлений в виде неверных сигналов в отдельных блоках и схемных узлах. Для решения этих задач используются принципы помехозащищенного и помехоустойчивого кодирования [1, 2].

При решении проблем, связанных с необходимостью коррекции неверно вычисленных сигналов, применяются коды, ориентированные на исправление ошибок. Например, в [3] обсуждаются результаты оценки, корректирующей способности кодов Хэмминга и Хсяю, и связанные с этим аппаратные затраты на реализацию схем контроля и коррекции. В [4] рассматриваются вопросы применения избыточных кодов, в том числе корректирующих, при построении сбоеустойчивых дискретных систем, а также перспективы применения кодов с малой плотностью проверок на четность (LDPC-кодов, или кодов Галлагера [5]) для решения этих задач.

Следует отметить, что коды, ориентированные на коррекцию ошибок, могут использоваться и в тех приложениях, где требуется только обнаружение ошибок. Например, в [6, 7] обсуждается использование кодов Рида – Соломона при синтезе схем встроенного контроля логических устройств, в [8] установлены свойства классических и модифицированных кодов Хэмминга по обнаружению ошибок в устройствах, снабженных схемами контроля на их основе. В [9] описан систематический код, строящийся на основе функций Радемахера (спектральный R -код), а в [10, 11] обсуждаются вопросы его применения при синтезе схем встроенного контроля.

Наиболее часто при решении задач обнаружения ошибок, которые вызваны неисправностями компонентов дискретных систем, применяют коды, ориентированные на обнаружение ошибок, так как они имеют меньшую избыточность, чем коды, ориентированные на коррекцию ошибок. С целью снижения структурной избыточности и уменьшения числа дополнительных аппаратных средств, необходимых для обнаружения неисправностей в контролируемых компонентах дискретных систем, применяются коды с малой избыточностью. Известно большое число таких кодов. Наиболее распространенными с точки зрения применения в задачах организации контролепригодных структур устройств автоматики и их диагностического обеспечения являются разделимые коды – это коды, в кодовых словах которых могут быть выделены информационные и контрольные разряды (как правило, они объединены в информационный и контрольный векторы) [12-16]. Наряду с данными кодами применяют и неразделимые коды, например равновесные коды [17-20].

Большой класс разделимых кодов образуют разнообразные коды с суммированием. Такие коды получаются путем добавления к информационному вектору контрольного вектора, в который записывается эквивалент некоторого числа, полученного путем использования операций суммирования по заранее выбранным правилам определенных значений разрядов информационного вектора, весовых коэффици-

ентов единичных (или нулевых) разрядов, весовых коэффициентов переходов между разрядами. В [21] систематизировано многообразие способов построения кодов с суммированием. Выделяются коды с суммированием равноправных и неравноправных информационных разрядов, а также коды с суммированием, для которых разряды контрольного вектора могут и не могут быть однозначно сопоставлены с конкретными информационными разрядами.

Разнообразные коды с суммированием обладают различными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах как по их кратности (числу искажаемых разрядов), так и по их видам (совокупностям числа искаженных единичных и нулевых разрядов) [8]. При этом выбор того или иного кода при синтезе системы с обнаружением неисправностей определяется особенностями структур самих контролируемых объектов (в том числе наличием или отсутствием памяти) и элементной базы, на которой они реализованы. Например, если о структуре объекта автоматики ничего не известно, то наиболее эффективным для обнаружения ошибок на его выходах окажется применение простейших кодов с повторением (будет синтезирована система дублирования) [22]. В [23] показано, что в этом случае также эффективным может оказаться использование специального кода с суммированием взвешенных переходов с весовыми коэффициентами, образующими ряд последовательно возрастающих степеней числа два: $2^0, 2^1, \dots, 2^{m-1}$. Такой код имеет число контрольных разрядов, равное $m-1$. Если же известно, что структура объекта автоматики и особенности элементной базы, на которой он реализован, таковы, что неисправности могут повлечь за собой только однонаправленные искажения на его выходах (в информационных векторах), то для контроля таких неисправностей может быть применен классический код Бергера [24] или другие его модификации, ориентированные на обнаружение монотонных ошибок [8, 21].

Большое число кодов с суммированием может быть получено при разделении самого контрольного вектора на подвекторы, предназначенные для контроля конкретных подмножеств разрядов информационного вектора. Одним из вариантов построения таких кодов является разделение контрольного вектора на два подвектора, состоящих из различных разрядов. Как показано в [25], такой способ построения кодов с суммированием позволяет существенно повысить эффективность обнаружения ошибок в информационных векторах по сравнению с классическими кодами Бергера. При построении кода с суммированием информационные разряды разделены на два подмножества, для каждого из которых осуществляется подсчет специального контрольного числа и каждому из

которых соответствует своя часть контрольного вектора. Специальные контрольные числа каждого подмножества разрядов информационного вектора представляют собой наименьшие неотрицательные вычеты по заранее установленному модулю суммарного числа единичных разрядов. Данные коды определены как двухмодульные коды – первый и второй модули соответствуют первому и второму подмножествам разрядов информационного вектора.

Известные двухмодульные коды с суммированием единичных информационных разрядов обнаруживают гораздо большее количество ошибок, чем классические коды Бергера. Однако, как показывают исследования, возможно еще большее уменьшение числа необнаруживаемых двухмодульными кодами ошибок. Такая возможность достигается при первоначальном установлении неравноправия между разрядами информационного вектора с последующим построением двухмодульного кода с суммированием.

2. Двухмодульные коды и их модификации. Двухмодульные коды являются обобщением так называемых одномодульных кодов – таких кодов, для которых в разряды контрольного вектора записывается двоичное число, характеризующее разряды всего информационного вектора, равное наименьшему неотрицательному вычету суммы единичных или взвешенных разрядов (или переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационных векторах) по заранее установленному модулю.

Если вычет определяется для суммы единичных информационных разрядов, то речь идет о классических модульных кодах с суммированием (их также называют остаточными) [26, 27]. Если значение модуля $M=m+1$ (m – количество разрядов в информационном векторе), то строится классический код Бергера [24]. Если $M < m+1$, то строится модульный код. Коды с $M=4, 8$ и 12 в мировой литературе часто называют кодами Боуза – Лина [18]. Коды Бергера и Боуза – Лина часто применяют при синтезе систем автоматики и вычислительной техники с обнаружением неисправностей [28-30].

При построении кода на начальном этапе может быть установлено неравноправие между разрядами информационного вектора. Это делается путем взвешивания разрядов информационного вектора или переходов между разрядами, занимающими соседние позиции в информационном векторе (под переходом понимается значение коэффициента $t_{i,i+1} = f_i \oplus f_{i+1}$, где f_i и f_{i+1} – разряды информационного вектора, занимающие позиции i и $i+1$, $i \in \{1, 2, \dots, m-1\}$) [23]. Взвешивание может быть хаотичным или упорядоченным. Например, в [31, 32] весо-

вые коэффициенты подбираются под каждый разряд, а в [33, 34] приводятся примеры кода с весовыми коэффициентами, выбранными из некоторой установленной последовательности натуральных чисел.

Для каждого случая кода с единичными разрядами или с выбранными весовыми коэффициентами разрядов или переходов существует только один способ построения кода с заданным числом информационных разрядов. При этом контрольный вектор содержит двоичное число, эквивалентное значению суммарного веса.

Существенно большее число способов построения кода для выбранного конкретного значения числа разрядов в информационном векторе дает способ выделения двух частей в контрольном векторе, каждая из которых соответствует определенному подмножеству разрядов информационного вектора. Тогда для каждого из двух подмножеств разрядов информационного вектора может быть образован свой подвектор, для которого может быть определено значение суммарного веса по заранее выбранному модулю. При этом первоначально между разрядами может быть установлено неравноправие.

Обозначим через D полное множество разрядов информационного вектора, а D_1 и D_2 – множества разрядов первого и второго подвекторов соответственно. Двухмодульный код может быть построен для произвольного количества информационных разрядов в каждом из множеств D_1 и D_2 , удовлетворяющих, однако, условию $D_1 \cup D_2 = D$.

Первый вариант построения кода определяется следующими соотношениями: $D_1 \equiv D$ и $D_2 \supset D$ ($D_2 \neq D$). Для такого двухмодульного кода первая часть контрольного вектора предназначена для контроля всех разрядов информационного вектора, а вторая часть – для дополнительного контроля некоторого неполного множества разрядов информационного вектора. Такие двухмодульные коды при равноправии информационных разрядов и случаях $M_1 \in \{2^q\}$, $q = 1, 2, \dots, \lceil \log_2(m+1) \rceil - 1$, и $M_2 = 2$ (M_1 и M_2 – заранее установленные значения модулей для определения наименьших неотрицательных вычетов для каждого подмножества разрядов информационного вектора) детально описаны в [35]. В [36] описан двухмодульный код с суммированием, для которого $m-1$ разряд контролируется по модулю кода Бергера $M=m+1$ в $k-1$ контрольном разряде, а также в дополнительном контрольном разряде записывается значение бита четности для всего информационного вектора. В [37] описаны двухмодульные коды с произвольными значениями модуля M_1 , а в [25] – двухмодульные коды, для которых $M_1, M_2 \in \{2^q\}$, $q = 1, 2, \dots, \lceil \log_2(m+1) \rceil - 1$, и в частности коды, для которых $M_1 = M_2 = 4$.

Другим вариантом построения двухмодульного кода является получение значений разрядов контрольного вектора по неполным множествам информационных разрядов: $D_1 \supset D$ ($D_1 \neq D$) и $D_2 \supset D$ ($D_2 \neq D$) при обязательном выполнении условия $D_1 \cup D_2 = D$. В этом случае каждая часть контрольного вектора контролирует как минимум по одному различному информационному разряду, а остальные информационные разряды могут контролироваться в обеих частях контрольного вектора. В [38] исследованы двухмодульные коды с параметрами $M_1 \in \{2^q\}$, $q = 1, 2, \dots, \lceil \log_2(m+1) \rceil - 1$, и $M_2 = 2$ при обозначенных ранее соотношениях между подмножествами разрядов информационного вектора. В [39] приводится описание класса кодов с $M_1 = M_2 = 4$, сравнимых с классическими кодами Бергера при значениях длин информационных векторов $m = 8 \div 15$. Следует отметить, что особый случай для всех двухмодульных кодов с обозначенными ранее соотношениями между подмножествами разрядов информационного вектора составляют коды, для которых $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Для таких двухмодульных кодов каждый из разрядов информационного вектора контролируется единожды в одной из частей контрольного вектора [25].

Возможно построение кодов с большим числом подмножеств разрядов информационного вектора – полимодульных кодов с суммированием [21].

Во всех приведенных здесь вариантах построения двухмодульных кодов с суммированием в исследованиях ранее не использовалась возможность установления неравноправия между разрядами информационного вектора. Настоящая работа как раз и посвящена изложению особенностей обнаружения ошибок данным классом кодов – *двухмодульными взвешенными кодами с суммированием*, или *TMW(m,k)*-кодов (*two-modulus weight-based codes*), где m и k – число разрядов в информационном и контрольном векторах.

3. Принципы построения двухмодульных кодов с суммированием. Двухмодульные взвешенные коды могут быть построены множеством способов. Эти способы можно обобщить, сформулировав пункты следующего алгоритма.

Алгоритм 1. Определение значений контрольных разрядов TMW(m,k)-кодов:

1. Множество разрядов информационного вектора разбивается на два подмножества D_1 и D_2 , для которых выполняется необходимое условие: $D_1 \cup D_2 = D$ (D – полное множество разрядов информационного вектора).

2. Устанавливаются значения модулей M_1 и M_2 (модуль является натуральным числом $M_i \geq 2, i=1, 2$).

3. Назначаются весовые коэффициенты разрядов для каждого из подмножеств D_1 и D_2 , при этом для одноименных разрядов, находящихся в разных подмножествах, значения весовых коэффициентов могут быть различными.

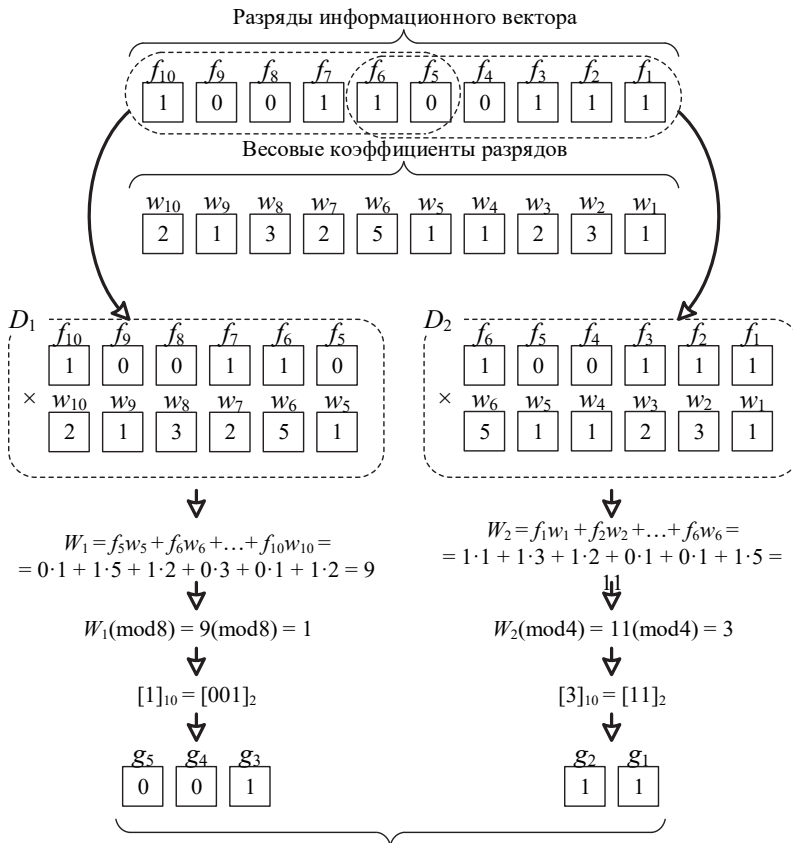
4. Для каждого подмножества D_1 и D_2 вычисляется значение наименьшего неотрицательного вычета суммы весовых коэффициентов единичных разрядов по соответствующему модулю M_1 и M_2 : числа $W_1 \pmod{M_1}$ и $W_2 \pmod{M_2}$.

5. Полученные числа $W_1 \pmod{M_1}$ и $W_2 \pmod{M_2}$ представляются в двоичном виде.

6. Число $W_1 \pmod{M_1}$ записывается в $k_1 = \lceil \log_2(W_1 \pmod{M_1}) \rceil$ старших разрядах контрольного вектора; число $W_2 \pmod{M_2}$ записывается в $k_2 = \lceil \log_2(W_2 \pmod{M_2}) \rceil$ младших разрядах контрольного вектора (запись $\lceil \dots \rceil$ обозначает целое сверху от вычисляемого значения).

На рисунке 1 приводится пример получения значений контрольного вектора для информационного вектора $\langle 1001100111 \rangle$ произвольного $TMW(m,k)$ -кода. Данный код строится для $m=10$ разрядов, подмножества разрядов D_1 и D_2 включают в себя по шесть разрядов, а вычеты определяются по модулям $M_1=8$ и $M_2=4$. Число контрольных разрядов такого кода, соответственно, равно $k=5$.

Число вариантов взвешивания разрядов при построении $TMW(m,k)$ -кодов бесконечным не является и ограничено для каждого из подмножеств разрядов. Ограничение это связано со значениями весовых коэффициентов разрядов: значение весового коэффициента какого-либо разряда может быть выбрано только из множества $w^i \in \{1, 2, \dots, M_i - 1\}$, $i = 1, 2$. Другими словами, число вариантов взвешивания одного разряда определяется величиной $M_i - 1$, $i = 1, 2$. Указанное обстоятельство объясняется достаточно просто. В кольце вычетов по модулю M_i существуют только значения вычетов из множества $\{0, 1, 2, \dots, M_i - 1\}$: все большие, чем M_i весовые коэффициенты будут давать значение вычета по модулю M_i , взятое из обозначенного множества, а весовой коэффициент, равный значению модуля, будет давать нулевой вычет (другими словами, не будет контролироваться в контрольных разрядах).



Разряды контрольного вектора

Рис. 1. Получение разрядов контрольных векторов $TMW(m,k)$ -кодов

Характеристики $TMW(m,k)$ -кодов, особенности синтеза контрольных схем кодеров, а также способы обеспечения самопроверяемости их структур существенно зависят от состава подмножеств D_1 и D_2 , значений модулей M_1 и M_2 и значений весовых коэффициентов разрядов. Рассмотрим далее класс двухмодульных взвешенных кодов с суммированием, для которых установлено ограничение: $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ и $M_1=M_2=4$.

4. Двухмодульные взвешенные коды с суммированием в кольце вычетов по модулю $M=4$. Рассмотрим особенности двухмодульных кодов со значениями модулей $M_1=M_2=4$, для которых при выборе подмножеств информационных разрядов используется принцип «половинно-разбиения». Это наиболее простой способ построения кода.

Алгоритм 2. Определение значений контрольных разрядов $TMW(m,k)$ -кодов с «половинным разбиением» разрядов информационного вектора:

1. Множество разрядов информационных векторов разбивается на два подмножества D_1 и D_2 , причем в подмножество D_1 включается

$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$ младших разрядов информационного вектора, а в подмножество

$D_2 - \left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ старших разрядов информационного вектора (записи $\lfloor \dots \rfloor$ и $\lceil \dots \rceil$ обозначают целое снизу и целое сверху от вычисляемых значений).

2. Устанавливаются и фиксируются значения модулей $M_1=M_2=4$.

3. В каждом из подмножеств D_1 и D_2 выбирается и взвешивается один из разрядов числом из множества $\{1, 2, 3\}$.

4. Для каждого подмножества D_1 и D_2 определяется значение наименьшего неотрицательного вычета суммы весовых коэффициентов единичных разрядов по соответствующему модулю $M_1=4$ и $M_2=4$ – числа $W_1(\text{mod}4)$ и $W_2(\text{mod}4)$.

5. Числа $W_1(\text{mod}4)$ и $W_2(\text{mod}4)$ представляются в двоичном виде и записываются в два старших и два младших разряда контрольного вектора соответственно.

Из значений величин выбранных модулей следует, что построенный по нему код будет всегда иметь $k=4$ контрольных разряда. По этому показателю $TMW(m,k)$ -код сравним с классическим кодом Бергера и рядом его известных модификаций [21] при длинах информационных векторов $m=8 \div 15$.

Так как при построении двухмодульного кода взвешиваются только по одному из разрядов в каждом из подмножеств D_1 и D_2 , удобно значение веса взвешенного разряда внести в обозначение кода – $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код, где w^1 и w^2 – значения взвешенных разрядов в каждом из подмножеств информационных разрядов.

При рассмотрении характеристик обнаружения ошибок $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодами рассматривается полное множество информационных векторов, а значит, абсолютно не важно, какой именно разряд в подмножестве взвешен, важно лишь значение весового коэффициента. Будем полагать далее, что разряды в подмножествах D_1 и D_2 объединяются в подвекторы, а взвешивается младший из них. Например, в таблице 1 приведены варианты взвешивания разрядов последовательностями из векторов $\langle W^1 \rangle$ и $\langle W^2 \rangle$. Знаком « \times » на пересечении строки и столбца таблицы показан допустимый вариант выбора последовательностей ве-

совых коэффициентов, а знаком « \leftrightarrow » – тот вариант, который в силу равнозначности подмножеств D_1 и D_2 при построении кода можно не рассматривать (к примеру, коды $TMW(8,4,1/3)$ и $TMW(8,4,3/1)$ будут иметь одинаковые характеристики обнаружения ошибок).

Таблица 1. Варианты взвешивания разрядов при построении $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов

$\langle W^1 \rangle$	$\langle W^2 \rangle$		
	$\langle 1, 1, \dots, 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 1, \dots, 1, 2 \rangle$	$\langle 1, 1, \dots, 1, 3 \rangle$
$\langle 1, 1, \dots, 1, 1 \rangle$	×	×	×
$\langle 1, 1, \dots, 1, 2 \rangle$	–	×	×
$\langle 1, 1, \dots, 1, 3 \rangle$	–	–	×

$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды фактически образованы из взвешенных кодов с суммированием по модулю $M=4$ с одним взвешенным разрядом. Распределения информационных векторов по контрольным группам, соответствующим суммарным весам W информационных векторов таких кодов, представлены в таблице 2 для примера кодов со значением $m=4$. Из алгоритма 2 ясно, что $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код может быть задан аналогичной, но расширенной таблицей, образованной путем объединения указанных таблиц. Например, в таблице 3 задан $TMW(8,4,2/3)$ -код. При получении таблицы распределения данного кода потребовалось увеличить число контрольных групп $M_1 \times M_2 = 4 \times 4 = 16$ и распределить в них $2^4 \times 2^4 = 16 \times 16 = 256$ информационных векторов. Таблица 3 образована по следующему принципу. Из таблицы 2 выделены две части, соответствующие векторам $\langle 1, 1, 1, 2 \rangle$ и $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$. Все столбцы таблицы 3 соответствуют парам чисел (W_1, W_2) . Причем, первые четыре столбца – парам $(0, \sim)$, следующие четыре – парам $(1, \sim)$, следующие четыре – парам $(2, \sim)$ и, наконец, последние четыре столбца – парам $(3, \sim)$. Так как первые числа соответствуют весу W_1 и вектору $\langle 1, 1, 1, 2 \rangle$, количество составляющих новой таблицы определяется исходя из распределения векторов в таблице 2 для данного вектора: каждому вектору из данной таблицы путем конкатенации последовательно приписаны все векторы из этой же таблицы для вектора $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$. Таким образом, всем подвекторам $\langle 0000 \rangle$, $\langle 0111 \rangle$, $\langle 1011 \rangle$ и $\langle 1101 \rangle$ приписаны по очереди векторы из распределения для вектора $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$ в таблице 2 и размещены в группы новой таблицы, соответствующие парам $(0, \sim)$; векторам $\langle 0010 \rangle$, $\langle 0100 \rangle$, $\langle 1000 \rangle$ и $\langle 1111 \rangle$ – те же векторы из распределения для вектора $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$ в таблице 2, но размещены они в группах, соответствующих парам $(2, \sim)$; и так далее.

Таблица 2. Распределения информационных векторов на контрольные группы при различных вариантах взвешивания разрядов

<i>W</i>			
0	1	2	3
<1, 1, 1, 1>			
0000	0001	0011	0111
1111	0010	0101	1011
	0100	0110	1101
	1000	1001	1110
		1010	
		1100	
<1, 1, 1, 2>			
0000	0010	0001	0011
0111	0100	0110	0101
1011	1000	1010	1001
1101	1111	1100	1110
<1, 1, 1, 3>			
0000	0010	0110	0001
0011	0100	1010	1110
0101	1000	1100	
1001	0111	1111	
	1011		
	1101		

Общее число необнаруживаемых $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодами ошибок может быть определено путем подсчета общего количества информационных векторов в каждой контрольной группе, вычисления общего количества двунаправленных переходов векторов одной группы друг в друга и последующим суммированием полученных чисел. В нижней части таблицы 3 приведены данные об общем числе необнаруживаемых ошибок в информационных векторах каждой контрольной группы $TMW(8, 4, 2/3)$ -кода. Суммируя каждое из чисел необнаруживаемых ошибок, получаем, что данным кодом не обнаруживается 4352 ошибки в информационных векторах. Для сравнения: классическим кодом Бергера с данными параметрами не обнаруживается 12614 ошибок в информационных векторах, а двухмодульным кодом с суммированием, полученным по алгоритму 2 без взвешивания разрядов, – 4928 [25]. Доля необнаруживаемых ошибок $TMW(8, 4, 2/3)$ -кодом от числа необнаруживаемых кодом Бергера ошибок равна 34,501%, а от числа необнаруживаемых двухмодульным невзвешенным кодом – 88,312%. Это говорит об улучшении общих характеристик обнаружения ошибок при взвешивании.

Таблица 3. Распределения информационных векторов на контрольные группы для ТМВ(8,4,2/3)-кода

(W_1, W_2)							
(0, 0)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 3)	(1, 0)	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
00000000	00000010	00000110	00000001	00100000	00100010	00100110	00100001
00000011	00000100	000001010	00001110	00100011	00100100	00101010	00101110
00000101	00000111	00001100		00100101	00100111	00101100	
00001001	00001000	00001111		00101001	00101000	00101111	
	00001101				00101011		
	00001011				00101101		
01110000	01110010	01110110	01110001	01000000	01000010	01000110	01000001
01110011	01110100	011101010	01111110	01000011	01000100	01001010	01001110
01110101	01110111	01111100		01000101	01000111	01001100	
01111001	01111000	01111111		01001001	01001000	01001111	
	01111101				01001011		
	01111011				01001101		
10110000	10110010	10110110	10110001	10000000	10000010	10000110	10000001
10110011	10110100	101101010	10111110	10000011	10000100	10001010	10001110
10110101	10110111	10111100		10000101	10000111	10001100	
10111001	10111000	10111111		10001001	10001000	10001111	
	10111101				10001011		
	10111011				10001101		
11010000	11010010	11010110	11010001	10000000	10000010	10000110	10000001
11010011	11010100	110101010	11011110	10000011	10000100	10001010	10001110
11010101	11010111	11011100		10000101	10000111	10001100	
11011001	11011000	11011111		10001001	10001000	10001111	
	11011101				10001011		
	11011011				10001101		
Число информационных векторов в каждой группе							
16	24	16	8	16	24	16	8
Число обнаруживаемых ошибок в каждой группе							
240	552	240	56	240	552	240	56
(W_1, W_2)							
(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
00010000	00010010	00010110	00010001	00110000	00110010	00110110	00110001
00010011	00010100	000101010	00011110	00110011	00110100	00111010	00111110
00010101	00010111	00011100		00110101	00110111	00111100	
00011001	00011000	00011111		00111001	00111000	00111111	
	00011101				00111011		
	00011011				00111101		
01100000	01100010	01100110	01100001	01010000	01010010	01010110	01010001
01100011	01100100	01101010	01101110	01010011	01010100	01011010	01011110
01100101	01100111	01101100		01010101	01010111	01011100	
01101001	01101000	01101111		01011001	01011000	01011111	
	01101101				01011011		
	01101011				01011101		
10100000	10100010	10100110	10100001	10010000	10010010	10010110	10010001
10100011	10100100	10101010	10101110	10010011	10010100	10011010	10011110
10100101	10100111	10101100		10010101	10010111	10011100	
10101001	10101000	10101111		10011001	10011000	10011111	
	10101101				10011011		
	10101011				10011101		

Продолжение таблицы 3.

(W_1, W_2)							
(2, 0)	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(3, 0)	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)
10101001	10101000	10101111		10011001	10011000	10011111	
	10101101				10011011		
	10101011				10011101		
11000000	11000010	11000110	11000001	11100000	11100010	11100110	11100001
11000011	11000100	11001010	11001110	11100011	11100100	11101010	11101110
11000101	11000111	11001100		11100101	11100111	11101100	
11001001	11001000	11001111		11101001	11101000	11101111	
	11001101				11101011		
	11001011				11101101		
Число информационных векторов в каждой группе							
16	24	16	8	16	24	16	8
Число обнаруживаемых ошибок в каждой группе							
240	552	240	56	240	552	240	56

Формализуем подсчет количества обнаруживаемых $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодами ошибок в информационных векторах.

Алгоритм 3. Подсчет общего количества обнаруживаемых $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодами ошибок:

1. Определяются мощности подмножеств D_1 и D_2 , а также фиксируются значения весовых коэффициентов w^1 и w^2 .

2. Определяется число информационных векторов в каждой из четырех контрольных групп для разрядов первого и второго подмножеств.

2.1. Определяется число вариантов получения различных значений суммарных весовых коэффициентов W_1 и W_2 для каждого из подмножеств D_1 и D_2 .

2.2. Определяется число вариантов получения различных значений вычетов $W_1(\text{mod}4)$ и $W_2(\text{mod}4)$ из множества $\{0, 1, 2, 3\}$ для каждого из подмножеств D_1 и D_2 .

2.3. Число одинаковых вычетов характеризует общее количество информационных векторов в каждой из четырех контрольных групп для каждого из подмножеств D_1 и D_2 .

3. Количество контрольных групп расширяется до 16: первые четыре соответствуют паре чисел $(W_1, W_2) = (0, \sim)$, вторые – $(W_1, W_2) = (1, \sim)$, третьи – $(W_1, W_2) = (2, \sim)$, четвертые – $(W_1, W_2) = (3, \sim)$.

4. В каждой «четверке» групп, соответствующих паре (W_1, \sim) , распределение информационных векторов подмножества D_2 повторяется столько раз, сколько раз повторяется число W_1 .

5. Для каждой из 16 групп определяется число обнаруживаемых ошибок:

$$N_{(w_1, w_2)} = A_{Q_{(w_1, w_2)}}^2 = \frac{Q_{(w_1, w_2)}!}{(Q_{(w_1, w_2)} - 2)!} = Q_{(w_1, w_2)} (Q_{(w_1, w_2)} - 1), \quad (1)$$

где $A_{Q_{(w_1, w_2)}}^2$ – количество размещений из $Q_{(w_1, w_2)}$ по 2, а $Q_{(w_1, w_2)}$ – число информационных векторов в группе (W_1, W_2) .

6. Определяется число необнаруживаемых кодом ошибок:

$$N_{m,k} = \sum_{(w_1, w_2)=(1,1)}^{(w_1, w_2)=(4,4)} N_{(w_1, w_2)} = \sum_{(w_1, w_2)=(1,1)}^{(w_1, w_2)=(4,4)} A_{Q_{(w_1, w_2)}}^2. \quad (2)$$

Приведем пример использования алгоритма 3 для подсчета числа необнаруживаемых ошибок в $TMW(8,4,1,3)$ -коде.

Шаг 1. Мощности подмножеств D_1 и D_2 равны 4, значения весовых коэффициентов $w^1=1$ и $w^2=3$.

Шаг 2. Число вариантов подсчета чисел W_1 и W_2 .

Весовые коэффициенты разрядов множества D_1 образуют вектор $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$, а множества D_2 – вектор $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$. Рассмотрим варианты получения числа W_1 . $W_{\min}=0$, $W_{\max}=4$. Число 0 получается одним вариантом C_4^0 . Число 1 получается C_4^1 вариантами. Число 2 получается C_4^2 вариантами. Число 3 получается C_4^3 вариантами. Число 4 получается C_4^4 вариантами. Для каждого из полученных чисел определим наименьшие неотрицательные вычеты по модулю $M_1=4$: $0(\bmod 4)=0$, $1(\bmod 4)=1$, $2(\bmod 4)=2$, $3(\bmod 4)=3$, $4(\bmod 4)=0$. Таким образом, контрольные группы для первого подмножества разрядов содержат по $C_4^0 + C_4^4$, C_4^1 , C_4^2 , C_4^3 информационных векторов. Аналогично для второго подмножества получаем: $W_{\min}=0$, $W_{\max}=6$. Число 0 получается C_4^0 вариантами. Число 1 – C_3^1 вариантами (имеется три разряда с единичными весовыми коэффициентами). Число 2 получается – C_3^2 вариантами (как сумма двух разрядов с единичными весовыми коэффициентами). Число 3 получается – $C_1^1 + C_3^3$ вариантами (как значение весового коэффициента первого разряда и как сумма трех разрядов с единичными весовыми коэффициентами). Число 4 – C_3^1 вариантами (сумма весов разрядов с единичным весовым коэффициентом и коэффициентом, равным трем). Число 5 – C_3^2

вариантами. Число $6 - C_3^3$ вариантами. Для каждого из полученных чисел определим наименьшие неотрицательные вычеты по модулю $M_2=4$: $0(\bmod 4)=0$, $1(\bmod 4)=1$, $2(\bmod 4)=2$, $3(\bmod 4)=3$, $4(\bmod 4)=0$, $5(\bmod 4)=1$, $6(\bmod 4)=2$. Подсчитаем состав контрольных групп: $C_4^0 + C_3^1$, $C_3^1 + C_3^2$, $C_3^2 + C_3^3$, $C_1^1 + C_3^3$.

Шаг 3. Расширяем число групп до $4 \times 4 = 16$ согласно третьему пункту алгоритма.

Шаг 4. Заполняем группы (W_1, \sim) распределениями для «четверок» подмножества D_2 .

Шаг 5. Определяем числа $N_{(W_1, W_2)}$.

Шаг 6. Вычисляем сумму полученных на предыдущем шаге чисел:

$$\begin{aligned} N_{m,k} &= \sum_{(W_1, W_2)=(1,1)}^{(W_1, W_2)=(4,4)} N_{(W_1, W_2)} = \sum_{(W_1, W_2)=(1,1)}^{(W_1, W_2)=(4,4)} A_{Q(W_1, W_2)}^2 = \\ &= 4 \cdot 3 + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 + 8 \cdot 7 + 8 \cdot 7 + 16 \cdot 15 + 24 \cdot 23 + 16 \cdot 15 + \\ &+ 12 \cdot 11 + 24 \cdot 23 + 36 \cdot 35 + 24 \cdot 23 + 8 \cdot 7 + 16 \cdot 15 + 24 \cdot 23 + 16 \cdot 15 = 4928. \end{aligned}$$

Табличная форма задания кода позволяет определить характеристики обнаружения им ошибок не только в целом, но и по каждой кратности и виду. *Кратность d* ошибки определяется числом искажаемых при ошибке разрядов и может принимать значение из множества $d \in \{1, 2, \dots, m\}$. Вид ошибки определяется особенностями сочетаний искажений нулевых и единичных разрядов при возникновении ошибки. Если искажаются только нулевые или только единичные разряды, то ошибка относится к виду *монотонных* ошибок. Если искажается равное количество нулевых и единичных разрядов, то ошибка является *симметричной* ошибкой. Если искажаются и нулевые, и единичные разряды, но количество искажений нулевых и единичных разрядов не равно, то ошибка является *асимметричной*.

Алгоритм 3, а также алгоритмы подсчета необнаруживаемых ошибок по видам и кратностями были автоматизированы, что позволило получить подробные характеристики обнаружения ошибок $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодами.

Количество необнаруживаемых ошибок по видам и кратностям не являются наглядными характеристиками, а только позволяют проанализировать полученные абсолютные значения. Для срав-

нения кодов между собой используются различные относительные характеристики, к которым относятся [8]: $\gamma_{m,k}$ – доля необнаруживаемых ошибок от общего их количества в информационных векторах; $\xi_{m,k}$ – доля необнаруживаемых ошибок от общего количества необнаруживаемых ошибок в коде с наименьшим общим количеством таковых для данных значений m и k ; $\beta_{m,d}$ – доля необнаруживаемых ошибок кратностью d от общего количества необнаруживаемых ошибок данной кратностью; $\nu_{m,k}$ – доля необнаруживаемых монотонных ошибок от общего количества необнаруживаемых кодом ошибок; $\sigma_{m,k}$ – доля необнаруживаемых симметричных ошибок от общего количества необнаруживаемых кодом ошибок; $\alpha_{m,k}$ – доля необнаруживаемых асимметричных ошибок от общего количества необнаруживаемых кодом ошибок; и другие показатели. Данные показатели удобно исчислять в %.

В таблице 4 приведены рассчитанные значения числа необнаруживаемых $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодами ошибок в диапазоне длин информационных векторов $m=8\div 15$, а также дано значение показателя $\gamma_{m,k}$. Для сравнения приведены данные и для классических кодов Бергера ($S(m,k)$ -кодов). $TMW(m,k,1/1)$ -код соответствует невзвешенному двухмодульному коду с суммированием.

В таблице 5 и на рисунке 2 приводятся рассчитанные данные для коэффициента $\xi_{m,k}$, показывающего, насколько близок рассматриваемый код к коду с наименьшим общим количеством необнаруживаемых ошибок при данных m и k .

Данные таблиц 4 и 5, а также графики, приведенные на рисунке 2, показывают преимущества использования взвешивания при построении двухмодульного кода как перед классическим кодом Бергера, так и перед двухмодульным невзвешенным кодом. $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды гораздо эффективнее обнаруживают ошибки, чем $S(m,k)$ -коды, коэффициент $\xi_{m,k}$ для которых не превышает и 50%. По сравнению с двухмодульными невзвешенными кодами $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды имеют улучшенные характеристики обнаружения ошибок. Графики зависимостей величин $\xi_{m,k}$ от значения m (см. рис. 2) показывают это улучшение. Для вариантов взвешивания числами 1/1, 1/3 и 3/3 значения количества необнаруживаемых ошибок совпадают, при иных вариантах взвешивания достигается улучшение характеристик. При этом для случая 2/2 достигается значение в 100%, что объясняется равномерностью распределения всех информационных векторов между всеми группами, соответствующим парам (W_1, W_2). Это следует из способа построения общей таблицы из образующих таблиц (см. табл. 2 и 3).

Таблица 4. Общие показатели обнаружения ошибок $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодами

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	4928	19072	72960	285184	1111040	4384768	17289216	68657152
		7,549 %	7,290 %	6,965 %	6,803 %	6,624 %	6,535 %	6,441 %	6,394
1	2	4352	17920	68608	268288	1077248	4251648	17022976	67600384
		6,667 %	6,849 %	6,549 %	6,400 %	6,422 %	6,336 %	6,342 %	6,296 %
1	3	4928	19072	72960	285184	1111040	4384768	17289216	68657152
		7,549 %	7,290 %	6,965 %	6,803 %	6,624 %	6,535 %	6,441 %	6,394 %
2	2	3840	15872	64512	260096	1044480	4186112	16760832	67076096
		5,882 %	6,067 %	6,158 %	6,204 %	6,227 %	6,239 %	6,244 %	6,247 %
2	3	4352	17920	68608	276480	1077248	4317184	17022976	68124672
		6,667 %	6,849 %	6,549 %	6,595 %	6,422 %	6,434 %	6,342 %	6,345 %
3	3	4928	19072	72960	285184	1111040	4384768	17289216	68657152
		7,549 %	7,290 %	6,965 %	6,803 %	6,624 %	6,535 %	6,441 %	6,394 %
$S(m,k)$ -код									
-	-	12614	48108	183732	703384	2699984	10392408	40100216	155084752
		19,323 %	18,388 %	17,539 %	16,778 %	16,097 %	15,488 %	14,939 %	14,444 %

Таблица 5. Значения коэффициента $\xi_{m,k}$

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	77,922 %	83,221 %	88,421 %	91,203 %	94,009 %	95,469 %	96,944 %	97,697 %
1	2	88,235 %	88,571 %	94,030 %	96,947 %	96,958 %	98,459 %	98,460 %	99,224 %
1	3	77,922 %	83,221 %	88,421 %	91,203 %	94,009 %	95,469 %	96,944 %	97,697 %
2	2	100,000 %	100,000 %	100,000 %	100,000 %	100,000 %	100,000 %	100,000 %	100,000 %
2	3	88,235 %	88,571 %	94,030 %	94,074 %	96,958 %	96,964 %	98,460 %	98,461 %
3	3	77,922 %	83,221 %	88,421 %	91,203 %	94,009 %	95,469 %	96,944 %	97,697 %
$S(m,k)$ -код									
-	-	30,442 %	32,992 %	35,112 %	36,978 %	38,685 %	40,28 %	41,797 %	43,251 %

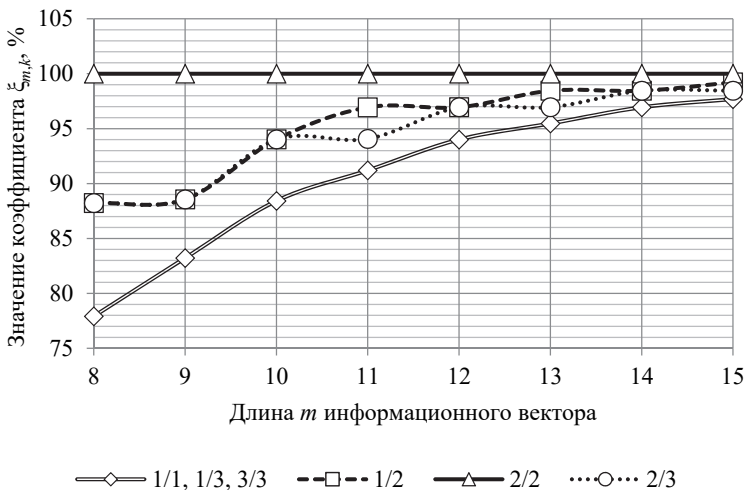


Рис. 2. Зависимости значений коэффициента $\xi_{m,k}$ от значения m

В таблице 6 для сравнения приведены отношения числа необнаруживаемых ошибок во взвешенных двухмодульных кодах к числу обнаруживаемых ошибок аналогичными невзвешенными кодами. Данные таблицы показывают эффективность взвешивания разрядов по отношению к использованию при построении кода единичных разрядов.

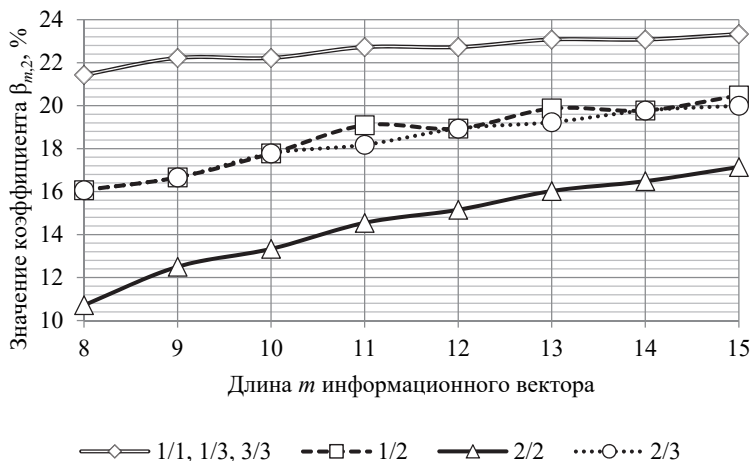
Таблица 6. Доля числа необнаруживаемых ошибок от числа обнаруживаемых ошибок в двухмодульных кодах с единичными разрядами

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	88,312%	93,96%	94,035%	94,075%	96,959%	96,964%	98,46%	98,461%
1	3	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%
2	2	77,922%	83,221%	88,421%	91,203%	94,009%	95,469%	96,944%	97,697%
2	3	88,312%	93,96%	94,035%	96,948%	96,959%	98,459%	98,46%	99,224%
3	3	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%	100,000%

Данные таблицы 7 и рисунка 3 характеризуют такие важные показатели кодов с суммированием, как показатели обнаружения двукратных ошибок. В таблице 7 приведены абсолютные величины, характеризующие число необнаруживаемых кодами двукратных ошибок, а также относительные величины $\beta_{m,2}$. $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды обнаруживают существенно большее количество двукратных ошибок, чем $S(m,k)$ -коды. При этом коды с соотношением взвешенных разрядов 2/2 имеют наилучшие характеристики обнаружения двукратных ошибок.

Таблица 7. Показатели обнаружения двукратных ошибок

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	1536	4096	10240	25600	61440	147456	344064	802816
		21,429 %	22,222 %	22,222 %	22,727 %	22,727 %	23,077 %	23,077 %	23,333 %
1	2	1152	3072	8192	21504	51200	126976	294912	704512
		16,071 %	16,667 %	17,778 %	19,091 %	18,939 %	19,872 %	19,780 %	20,476 %
1	3	1536	4096	10240	25600	61440	147456	344064	802816
		21,429 %	22,222 %	22,222 %	22,727 %	22,727 %	23,077 %	23,077 %	23,333 %
2	2	768	2304	6144	16384	40960	102400	245760	589824
		10,714 %	12,500 %	13,333 %	14,545 %	15,152 %	16,026 %	16,484 %	17,143 %
2	3	1152	3072	8192	20480	51200	122880	294912	688128
		16,071 %	16,667 %	17,778 %	18,182 %	18,939 %	19,231 %	19,780 %	20,000 %
3	3	1536	4096	10240	25600	61440	147456	344064	802816
		21,429 %	22,222 %	22,222 %	22,727 %	22,727 %	23,077 %	23,077 %	23,333 %
$S(m,k)$ -код									
—	—	3584	9216	23040	56320	135168	319488	745472	1720320
		50,000 %	50,000 %	50,000 %	50,000 %	50,000 %	50,000 %	50,000 %	50,000 %

Рис. 3. Зависимости значений коэффициента $\beta_{m,2}$ от значения m

Графики на рисунке 3 показывают постепенное увеличение значений $\beta_{m,2}$ с увеличением числа m .

В таблицах 8-10 приведены данные об обнаружении ошибок по видам – количество необнаруживаемых монотонных, симметричных и асимметричных ошибок, а также значения показателей $\nu_{m,k}$, $\sigma_{m,k}$ и $\alpha_{m,k}$.

Таблица 8. Показатели обнаружения монотонных ошибок

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	66	404	1480	6320	22560	84800	300160	1058096
		0,101 %	0,154 %	0,141 %	0,151 %	0,135 %	0,126 %	0,112 %	0,099 %
1	2	236	948	2824	10288	32480	117440	366256	1281170
		0,362 %	0,362 %	0,270 %	0,245 %	0,194 %	0,175 %	0,136 %	0,119 %
1	3	440	1328	3496	12272	32728	118256	336064	1179272
		0,674 %	0,508 %	0,334 %	0,293 %	0,195 %	0,176 %	0,125 %	0,110 %
2	2	456	1528	4680	14928	45600	144008	445474	1403420
		0,699 %	0,584 %	0,447 %	0,356 %	0,272 %	0,215 %	0,166 %	0,131 %
2	3	720	2224	5608	17552	45928	144986	409288	1292272
		1,103 %	0,850 %	0,535 %	0,419 %	0,274 %	0,216 %	0,152 %	0,120 %
3	3	1056	2672	6664	17684	46258	132776	375840	1153056
		1,618 %	1,021 %	0,636 %	0,422 %	0,276 %	0,198 %	0,140 %	0,107 %
$S(m,k)$ -код									
-	-	0	0	0	0	0	0	0	0
		0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %

Таблица 9. Показатели обнаружения симметричных ошибок

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	4646	17148	62680	232120	858392	3211024	12027232	45462032
		7,117 %	6,554 %	5,983 %	5,537 %	5,118 %	4,785 %	4,481 %	4,234 %
1	2	2544	9292	34296	127576	464240	1736096	6422048	24231472
		3,897 %	3,552 %	3,274 %	3,043 %	2,768 %	2,587 %	2,393 %	2,257 %
1	3	2544	9568	34296	127576	464240	1736096	6422048	24231472
		3,897 %	3,657 %	3,274 %	3,043 %	2,768 %	2,587 %	2,393 %	2,257 %
2	2	1488	5760	21720	82032	308320	1166080	4413672	16808112
		2,279 %	2,202 %	2,073 %	1,957 %	1,838 %	1,738 %	1,644 %	1,565 %
2	3	1344	5088	18584	68592	250720	928480	3433568	12844096
		2,059 %	1,945 %	1,774 %	1,636 %	1,495 %	1,384 %	1,279 %	1,196 %
3	3	1856	7136	26776	101232	380772	1444624	5482144	20950400
		2,843 %	2,727 %	2,556 %	2,415 %	2,270 %	2,153 %	2,042 %	1,951 %
$S(m,k)$ -код									
-	-	12614	48108	183732	703384	2699984	10392408	40100216	155084752
		19,323 %	18,388 %	17,539 %	16,778 %	16,097 %	15,488 %	14,939 %	14,444 %

Таблица 10. Показатели обнаружения асимметричных ошибок

w^1	w^2	m							
		8	9	10	11	12	13	14	15
$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код									
1	1	216	1520	8800	46744	1088944	1088944	4961824	22137024
		0,331 %	0,581 %	0,840 %	1,115 %	6,492 %	1,623 %	1,849 %	2,062 %
1	2	1572	7680	31488	130424	2398112	2398112	10234672	42087742
		2,408 %	2,935 %	3,006 %	3,111 %	14,297 %	3,574 %	3,813 %	3,920 %
1	3	1944	8176	35168	145336	2530416	2530416	10531104	43246408
		2,978 %	3,125 %	3,357 %	3,467 %	15,086 %	3,771 %	3,923 %	4,028 %
2	2	1896	8584	38112	163136	2876024	2876024	11901686	48864564
		2,904 %	3,281 %	3,638 %	3,891 %	17,147 %	4,286 %	4,434 %	4,551 %
2	3	2288	10608	44416	190336	3243718	3243718	13180120	53988304
		3,505 %	4,055 %	4,240 %	4,540 %	19,339 %	4,834 %	4,910 %	5,028 %
3	3	2016	9264	39520	166268	2807368	2807368	11431232	46553696
		3,088 %	3,541 %	3,773 %	3,966 %	16,737 %	4,184 %	4,259 %	4,336 %
$S(m,k)$ -код									
–	–	0	0	0	0	0	0	0	0
		0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %	0,000 %

Отметим, что $S(m,k)$ -коды обнаруживают любые монотонные и асимметричные ошибки и принадлежат к классу $UAED(m,k)$ -кодов (unidirectional and asymmetrical error-detection codes) [8]. $S(m,k)$ -кодами не обнаруживается 100% симметричных ошибок и, соответственно, примерно от 14 до 20% от общего количества ошибок в зависимости от значения m .

$TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды к классу $UAED(m,k)$ -кодов не относятся и во множестве необнаруживаемых ошибок имеют некоторую долю монотонных, симметричных и асимметричных ошибок. При этом существенная доля необнаруживаемых ошибок для большинства $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов – это асимметричные ошибки. Для кодов с $m=8 \div 11$ и $m=13 \div 15$ доля асимметричных необнаруживаемых ошибок от общего количества ошибок составляет 5% и менее. В основном менее 1% от общего числа ошибок являются монотонными необнаруживаемыми ошибками. $TMW(m,k,1/1)$ -коды отличаются от $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов тем, что у них наибольшее количество необнаруживаемых ошибок среди ошибок всех видов приходится на симметричные ошибки, тогда как операция взвешивания существенно снижает их количество. В целом $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды обладают на порядок лучшими характеристиками обнаружения симметричных ошибок, чем $S(m,k)$ -коды.

Все $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды внутри одного семейства кодов с одинаковым значением m обладают различными характеристиками

обнаружения ошибок по видам. Для примера в таблице 11 приведены значения количества необнаруживаемых $TMW(12,4,w^1/w^2)$ -кодами ошибок по их видам и кратностям. Таблица показывает частный случай, однако общие характеристики справедливы для всех значений m . $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодам присущи следующие особенности:

- коды с нечетными значениями весовых коэффициентов w^1/w^2 (1/1, 1/3, 3/3) обнаруживают любые ошибки с нечетными кратностями;

- коды со значениями весовых коэффициентов $w^1/w^2=1/1$ обнаруживают любые монотонные ошибки с кратностями $d<4$ и любые асимметричные ошибки с кратностями $d<6$;

- коды со значениями весовых коэффициентов $w^1/w^2=1/3$ и $w^1/w^2=3/3$ обнаруживают любые асимметричные ошибки с кратностями $d<4$;

- коды со значениями весовых коэффициентов $w^1/w^2=2/2$ обнаруживают любые монотонные ошибки с кратностями $d<3$.

Таблица 11. Распределение ошибок по видам и кратностям для $TMW(12,4,w^1/w^2)$ -кодов

Вид ошибок	d				
	2	3	4	5	6
$TMW(12,4,1/1)$ -код					
Монотонных	0	0	15360	0	0
Симметричных	61440	0	276480	0	348160
Асимметричных	0	0	0	0	116736
Всего	61440	0	291840	0	464896
$TMW(12,4,1/2)$ -код					
Монотонных	0	10240	10240	0	0
Симметричных	51200	0	184320	0	174080
Асимметричных	0	10240	0	163840	58368
Всего	51200	20480	194560	163840	232448
$TMW(12,4,1/3)$ -код					
Монотонных	10240	0	10240	0	9728
Симметричных	51200	0	184320	0	174080
Асимметричных	0	0	97280	0	281088
Всего	61440	0	291840	0	464896
$TMW(12,4,2/2)$ -код					
Монотонных	0	20480	5120	0	12800
Симметричных	40960	0	117760	0	102400
Асимметричных	0	20480	0	225280	89600
Всего	40960	40960	122880	225280	204800
$TMW(12,4,2/3)$ -код					
Монотонных	10240	10240	5120	12800	3328

Продолжение таблицы 11

Вид ошибок	<i>d</i>					
	2	3	4	5	6	
Симметричных	40960	0	117760	0	76800	
Асимметричных	0	10240	71680	151040	152320	
Всего	51200	20480	194560	163840	232448	
<i>TMW(12,4,3/3)</i> -код						
Монотонных	20480	0	17920	0	6656	
Симметричных	40960	0	130560	0	128000	
Асимметричных	0	0	143360	0	330240	
Всего	61440	0	291840	0	464896	
Вид ошибок	<i>d</i>					
	7	8	9	10	11	12
<i>TMW(12,4,1/1)</i> -код						
Монотонных	0	7200	0	0	0	0
Симметричных	0	156000	0	15840	0	472
Асимметричных	0	97920	0	14880	0	552
Всего	0	261120	0	30720	0	1024
<i>TMW(12,4,1/2)</i> -код						
Монотонных	9600	2400	0	0	0	0
Симметричных	0	52000	0	2640	0	0
Асимметричных	220800	32640	87040	2480	5120	0
Всего	230400	87040	87040	5120	5120	0
<i>TMW(12,4,1/3)</i> -код						
Монотонных	0	2400	0	120	0	0
Симметричных	0	52000	0	2640	0	0
Асимметричных	0	206720	0	27960	0	1024
Всего	0	261120	0	30720	0	1024
<i>TMW(12,4,2/2)</i> -код						
Монотонных	6400	800	0	0	0	0
Симметричных	0	40800	0	6400	0	0
Асимметричных	198400	86400	51200	19200	0	0
Всего	204800	128000	51200	25600	0	0
<i>TMW(12,4,2/3)</i> -код						
Монотонных	3200	800	160	40	0	0
Симметричных	0	15200	0	0	0	0
Асимметричных	227200	71040	86880	5080	5120	0
Всего	230400	87040	87040	5120	5120	0
<i>TMW(12,4,3/3)</i> -код						
Монотонных	0	1120	0	80	0	2
Симметричных	0	71200	0	9600	0	452
Асимметричных	0	188800	0	21040	0	570
Всего	0	261120	0	30720	0	1024

Сравним $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды с классическими кодами Бергера и некоторыми их модификациями. Классический $S(m,k)$ -код, не обнаруживая любые симметричные ошибки, не обнаруживает наибольшее количество ошибок в информационных векторах. Известная его модификация [35], обозначенная как $RS(m,k)$ -код, обладает практически вдвое улучшенным показателем обнаружения ошибок в целом при той же избыточности. При этом, однако, данными кодами не обнаруживается некоторая доля монотонных ошибок с кратностями $d = M = 2^{\lceil \log_2(m+1) \rceil - 1}$ и некоторая доля асимметричных ошибок $d = M + 2j, j = 1, 2, \dots, \left\lfloor \frac{m-M}{2} \right\rfloor$. Двухмодульные

невзвешенные коды, строящиеся при использовании единичных весовых коэффициентов по алгоритму 2, обладают еще более улучшенными характеристиками обнаружения ошибок в информационных векторах с длинами $m=8 \div 15$ [25]. Ценой улучшения характеристик обнаружения ошибок является наличие в классе необнаруживаемых монотонных ошибок с кратностями $M=4$. При этом показатели $\beta_{m,2}$ для данных кодов и $RS(m,k)$ -кодов идентичны. Как показано выше, $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -коды по показателю $\beta_{m,2}$ не хуже $RS(m,k)$ -кодов и невзвешенных двухмодульных кодов. При наличии хотя бы одного взвешенного четным числом разряда $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -код имеет приоритет по обнаружению двукратных ошибок перед всеми остальными кодами.

5. Синтез кодеров двухмодульных взвешенных кодов с суммированием. Кодеры $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов удобно синтезировать на основе элементной базы, включающей в себя полные сумматоры (FA), полусумматоры (HA) и четверть сумматоры, или сумматоры по модулю 2 (XOR) [39]. Данные элементы являются стандартными и входят во все базы средств автоматизированного проектирования логических устройств [40, 41].

Каждое из приведенных выше устройств выполняет функцию суммирования значений сигналов, поступающих на его входы. Полный сумматор предназначен для суммирования трех одноразрядных двоичных чисел и реализует следующие функции: $S = f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$ и $C = f_1 f_2 \vee f_1 f_3 \vee f_2 f_3$, где S и C – выходы суммы и переноса сумматора. Полусумматор – устройство сложения двух одноразрядных двоичных чисел и реализует функции: $S = f_1 \oplus f_2$ и $C = f_1 f_2$. Сумматор по модулю 2 – это устройство сложения двух одноразрядных чисел в кольце вычетов по модулю 2: $S = f_1 \oplus f_2$. Используя элемен-

ты FA , HA и XOR , можно синтезировать любые устройства суммирования двоичных чисел.

При реализации кодеров $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов используется структурная схема, приведенная на рисунке 4. В ней выделено два независимых сумматора двоичных чисел в кольце вычетов по модулю $M=4$ – сумматоры $\Sigma_1(\text{mod}4)$ и $\Sigma_2(\text{mod}4)$. Сумматоры являются независимыми, так как согласно алгоритму построения $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов подмножества разрядов D_1 и D_2 не пересекаются.

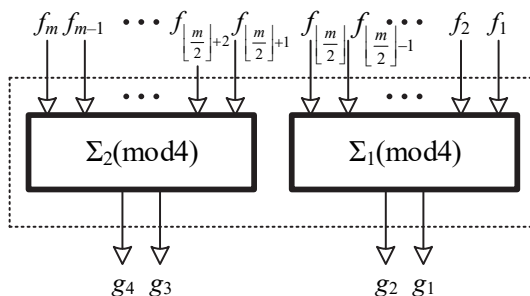


Рис. 4. Структурная схема кодера $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кода

Кодер в соответствии со структурной схемой, приведенной на рисунке 4, удобно синтезировать в следующей последовательности.

Алгоритм 4. Синтез кодеров $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов:

1. Определяются числа m_1 и m_2 – длины полученных при построении $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кода подвекторов, соответствующих подмножествам разрядов D_1 и D_2 .

2. Строится сумматор $\Sigma_1(\text{mod}4)$, соответствующий числу m_1 , с учетом значения весового коэффициента взвешенного разряда:

2.1. Если значение взвешенного разряда равно 1, то строится сумматор m_1 одноразрядных двоичных чисел.

2.2. Если значение взвешенного разряда равно 2 или 3, то сумматор строится в виде сумматора двух двоичных чисел, соответствующих сумме m_1-1 одноразрядных двоичных чисел и значениям весового коэффициента, представленного в двоичном виде.

2.3. Для получения суммы в кольце вычетов по модулю $M=4$ используются только два младших разряда полученного сумматора, а все выходы, соответствующие старшим разрядам, удаляются,

а сама структура оптимизируется за счет замены элементов FA и HA на элементы XOR .

3. Аналогично сумматору $\Sigma_1(\text{mod}4)$ строится сумматор $\Sigma_2(\text{mod}4)$, соответствующий числу m_2 .

На рисунке 5 приведен пример сумматоров по модулю $M=4$ для случая $m_1=4$. Из данных сумматоров строятся, например, кодеры $TMW(8,4,w^1/w^2)$ -кодов. Используется два представленных сумматора в зависимости от соотношения w^1/w^2 .

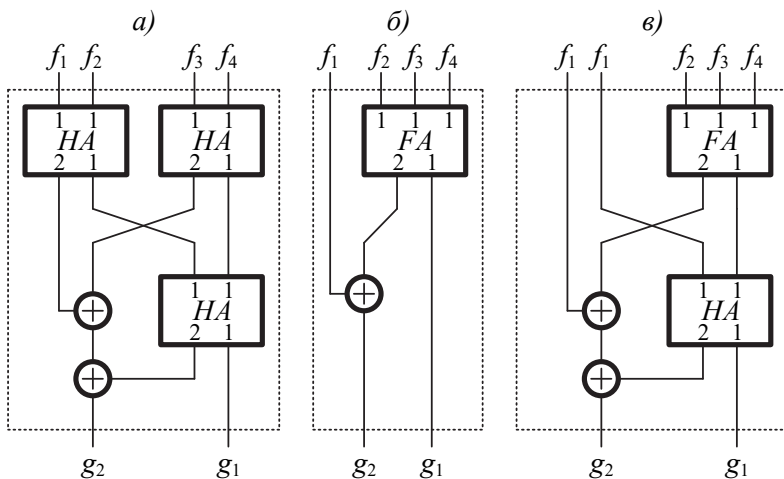


Рис. 5. Составляющие кодеров $TMW(8,4,w^1/w^2)$ -кодов: а) с весами $\langle 1, 1, 1, 1 \rangle$; б) с весами $\langle 1, 1, 1, 2 \rangle$; в) с весами $\langle 1, 1, 1, 3 \rangle$

На рисунке 6 для примера приведен кодер классического $S(8,4)$ -кода, также построенный в виде сумматора. Из сравнения рисунков 5 и 6 следует, что кодеры $TMW(8,4,w^1/w^2)$ -кодов получаются более простыми. В качестве некоторого измерителя можно использовать число входов внутренних логических элементов ($L_{XOR}=6$, $L_{HA}=6$, $L_{FA}=14$) [39]. Используя данный показатель, можно получить численные значения, характеризующие сложности реализации кодеров (табл. 12). Для сравнения в таблице приведены сложности кодеров L_{EN} для двухмодульных и классических кодов с суммированием, а также вычислено два относительных показателя: σ и τ – доли показателей сложности технической реализации кодера конкретного кода от сложности реализации кодера классического $S(m,k)$ -кода и двухмодульного невзвешенного кода с суммированием.

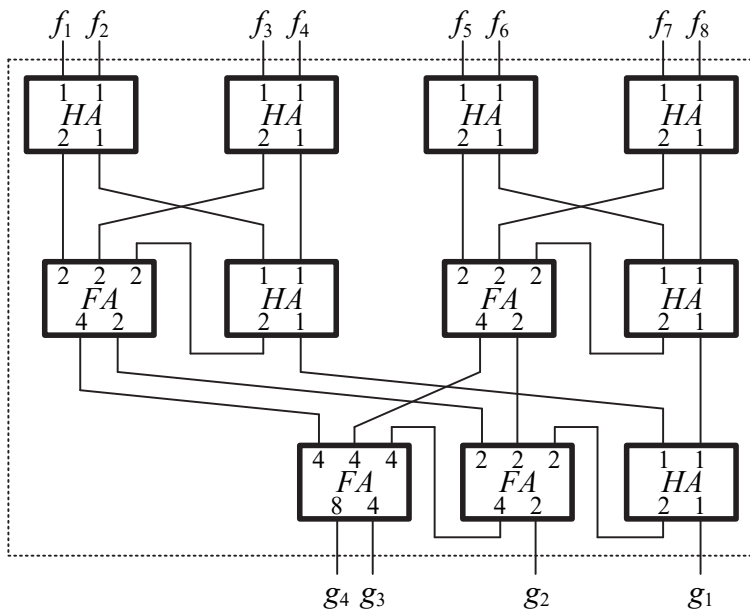
Таблица 12. Показатели сложности кодеров двухмодульных кодов с суммированием

Код	Число стандартных элементов			L_{EN}	$\sigma, \%$	$\tau, \%$
	FA	HA	XOR			
$m=8$						
$TMW(8,4,1/1)$	0	6	4	60	61,224	100,000
$TMW(8,4,1/2)$	1	3	3	50	51,020	83,333
$TMW(8,4,1/3)$	1	4	4	62	63,265	103,333
$TMW(8,4,2/2)$	2	0	2	40	40,816	66,667
$TMW(8,4,2/3)$	2	1	3	52	53,061	86,667
$TMW(8,4,3/3)$	2	2	4	64	65,306	106,667
$S(8,4)$	4	7	0	98	100,000	163,333
$m=9$						
$TMW(9,4,1/1)$	1	5	4	68	64,151	100,000
$TMW(9,4,1/2)$	2	2	3	58	54,717	85,294
$TMW(9,4,1/3)$	2	3	4	70	66,038	102,941
$TMW(9,4,2/2)$	1	3	4	56	52,830	82,353
$TMW(9,4,2/3)$	1	4	5	68	64,151	100,000
$TMW(9,4,3/3)$	1	5	6	80	75,472	117,647
$S(9,4)$	5	6	0	106	100,000	108,163
$m=10$						
$TMW(10,4,1/1)$	2	4	4	76	66,667	100,000
$TMW(10,4,1/2)$	1	5	5	74	64,912	97,368
$TMW(10,4,1/3)$	1	6	6	86	75,439	113,158
$TMW(10,4,2/2)$	0	6	6	72	63,158	94,737
$TMW(10,4,2/3)$	0	7	7	84	73,684	110,526
$TMW(10,4,3/3)$	0	8	8	96	84,211	126,316
$S(10,4)$	6	5	0	114	100,000	150,000
$m=11$						
$TMW(11,4,1/1)$	3	3	4	84	68,852	100,000
$TMW(11,4,1/2)$	2	4	5	82	67,213	97,619
$TMW(11,4,1/3)$	2	4	5	82	67,213	97,619
$TMW(11,4,2/2)$	1	5	6	80	65,574	95,238
$TMW(11,4,2/3)$	1	6	7	92	75,410	109,524
$TMW(11,4,3/3)$	1	7	8	104	85,246	123,810
$S(11,4)$	7	4	0	122	100,000	145,238
$m=12$						
$TMW(12,4,1/1)$	4	2	4	92	70,769	100,000
$TMW(12,4,1/2)$	3	3	5	90	69,231	97,826
$TMW(12,4,1/3)$	3	4	6	102	78,462	110,870
$TMW(12,4,2/2)$	2	4	6	88	67,692	95,652
$TMW(12,4,2/3)$	2	5	7	100	76,923	108,696
$TMW(12,4,3/3)$	2	6	8	112	86,154	121,739
$S(12,4)$	8	3	0	130	100,000	141,304

Продолжение таблицы 12

Код	Число стандартных элементов			L_{EN}	$\sigma, \%$	$\tau, \%$
	FA	HA	XOR			
$m=13$						
$TMW(13,4,1/1)$	5	1	4	100	64,935	100,000
$TMW(13,4,1/2)$	4	2	5	98	63,636	98,000
$TMW(13,4,1/3)$	4	3	5	104	67,532	104,000
$TMW(13,4,2/2)$	3	3	6	96	62,338	96,000
$TMW(13,4,2/3)$	3	4	6	102	66,234	102,000
$TMW(13,4,3/3)$	3	5	7	114	74,026	114,000
$S(13,4)$	8	6	1	154	100,000	154,000
$m=14$						
$TMW(14,4,1/1)$	6	0	4	108	64,286	100,000
$TMW(14,4,1/2)$	5	1	5	106	63,095	98,148
$TMW(14,4,1/3)$	5	2	6	118	70,238	109,259
$TMW(14,4,2/2)$	4	2	6	104	61,905	96,296
$TMW(14,4,2/3)$	4	3	7	116	69,048	107,407
$TMW(14,4,3/3)$	4	4	8	128	76,190	118,519
$S(14,4)$	9	6	1	168	100,000	155,556
$m=15$						
$TMW(15,4,1/1)$	3	7	8	132	75,000	100,000
$TMW(15,4,1/2)$	2	8	9	130	73,864	98,485
$TMW(15,4,1/3)$	2	9	10	142	80,682	107,576
$TMW(15,4,2/2)$	3	5	8	120	68,182	90,909
$TMW(15,4,2/3)$	3	6	9	132	75,000	100,000
$TMW(15,4,3/3)$	3	7	10	144	81,818	109,091
$S(15,4)$	10	5	1	176	100,000	133,333

Кодеры $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов имеют более простые структуры, чем кодеры $S(m,k)$ -кодов. Если сравнивать между собой кодеры двухмодульных взвешенных кодов и невзвешенных, то можно отметить следующую особенность: кодеры $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кодов хотя бы с одним весовым коэффициентом, представляющим собой четное число, имеют более простые структуры, чем кодеры невзвешенных двухмодульных кодов. Если оба числа w^1/w^2 являются нечетными числами, кодер $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кода становится сложнее кодера невзвешенного кода. Подобная особенность обусловлена спецификой реализации сумматоров двоичных чисел. Сравните, например, сумматоры на рисунках 5, б) и 5, а) и в). Сумматор для четырехразрядного вектора с вектором весовых коэффициентов $\langle 1, 1, 1, 2 \rangle$ имеет более простую реализацию, чем иные сумматоры. Наличие такого сумматора в составе кодера $TMW(m,k,w^1/w^2)$ -кода позволяет строить более простые устройства генерации контрольных разрядов, чем для всех остальных вариантов. Самый простой кодер будет у $TMW(m,k,2/2)$ -кода.

Рис. 6. Кодер $S(8,4)$ -кода

6. Модификации двухмодульных кодов с суммированием.

Рассмотренный вариант построения двухмодульного взвешенного кода (см. алгоритм 2) не является единственным. Опишем здесь несколько модификаций $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов и приведем их особенности.

Двухмодульный код, получаемый по алгоритму 2, строится путем выделения двух непересекающихся подмножеств информационных разрядов: $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Таким образом, значения информационных разрядов подмножеств D_1 и D_2 контролируются различными разрядами контрольного вектора. Может быть построено еще несколько модификаций $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов, для которых выполняется условие $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Алгоритм 2 подразумевает разбиение информационных векторов на непересекающиеся подмножества, включающие

$\left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$

и $\left\lceil \frac{m}{2} \right\rceil$ разрядов информационного вектора («половинное разбиение»).

Однако возможно увеличение одного из подмножеств D_1 (или D_2) и соответствующее уменьшение второго. В таблице 13 приведены все такие варианты для случая $M_1=M_2=4$.

Таблица 13. Варианты соотношений между мощностями подмножеств D_1 и D_2

m							
8	9	10	11	12	13	14	15
D_1/D_2							
4/4	5/4	5/5	6/5	6/6	7/6	7/7	8/7
5/3	6/3	6/4	7/4	7/5	8/5	8/6	9/6
6/2	7/2	7/3	8/3	8/4	9/4	9/5	10/5
		8/2	9/2	9/3	10/3	10/4	11/4
				10/2	11/2	11/3	12/3
						12/2	13/2

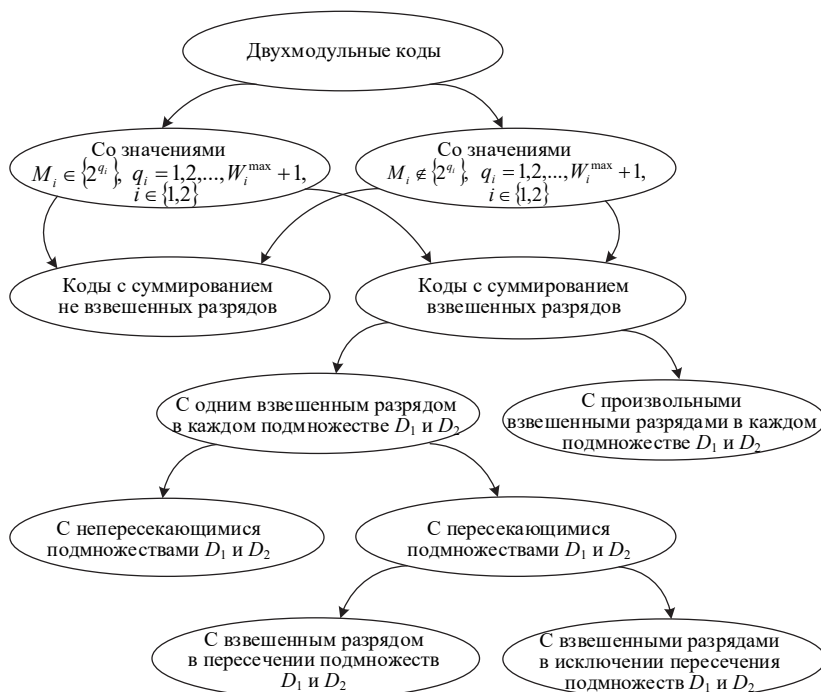
Еще одной модификацией $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кода является построение кода с условием наличия непустого подмножества, образующегося путем пересечения подмножеств D_1 и D_2 : $D_1 \cap D_2 = D_{12} \neq \emptyset$. В этом случае значения разрядов информационного вектора, попадающих в подмножество D_{12} , контролируются сразу же несколькими разрядами контрольного вектора. Число вариантов построения $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов для такого варианта существенно возрастает. При этом необходимо отметить, что на этапе построения кода взвешиваемые разряды могут быть выбраны такие, которые не попадают во множество D_{12} , или же будет взвешиваться один разряд, попадающий в это множество. В таблице 14 приводятся варианты построения $TMW(8, 4, w^1/w^2)$ -кодов. Сами способы построения кодов обозначены как: V_0 – с непересекающимися подмножествами D_1 и D_2 , V_1 и V_2 – с пересекающимися подмножествами D_1 и D_2 с взвешенными разрядами вне пересечения данных подмножеств и с взвешенным разрядом в пересечении соответственно. Число разрядов в подмножестве указано в виде вектора с номерами разрядов в информационном векторе. Следует отметить, что коды, строящиеся для случаев над выделенной диагональю, обладают аналогичными свойствами, что и симметричные относительно диагонали коды. Для случая нахождения всех информационных векторов в обоих подмножествах поставлен знак «–», так как такой код содержит избыточное количество контрольных разрядов, контролирующих те же свойства кода. Для случаев, когда не удовлетворяется условие $D_1 \cup D_2 = D$, также поставлен знак «–», так как контролируются не все информационные разряды, и код не является помехозащищенным.

Отметим также, что при построении кода могут быть выбраны как произвольные значения весовых коэффициентов, так и произвольные значения модулей. Данные коды в настоящей статье не освещены.

В заключение приведем здесь классификацию $TMW(m, k)$ -кодов (рис. 7).

Таблица 14. Варианты построения $TMW(8,4,w^1/w^2)$ -кодов

D_1	D_2						
	<12345678>	<2345678>	<345678>	<45678>	<5678>	<678>	<78>
<12345678>	–	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2
<1234567>	V_1, V_2	V_0	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2
<123456>	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0
<12345>	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0	V_1, V_2	V_0	–
<1234>	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0	–	–
<123>	V_1, V_2	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0	–	–	–
<12>	V_1, V_2	V_1, V_2	V_0	–	–	–	–

Рис. 7. Классификация $TMW(m,k)$ -кодов

В основе классификации лежит выделение модулей для каждого из подмножеств разрядов информационного вектора D_1 и D_2 . $TMW(m,k)$ -коды могут быть построены для случая, когда $M_i \in \{2^{q_i}\}$, $q_i = 1, 2, \dots, W_i^{\max} + 1$, $i \in \{1, 2\}$, и для случая, когда $M_i \notin \{2^{q_i}\}$,

$q_i = 1, 2, \dots, W_i^{\max} + 1, i \in \{1, 2\}$ (W_i^{\max} – сумма всех весовых коэффициентов разрядов подмножества $D_i, i \in \{1, 2\}$). Такое разделение кодов обусловлено особенностями записи в двоичном виде значений наименьших неотрицательных вычетов чисел по модулям M_1 и M_2 : для полного множества информационных векторов подсчет вычета по модулю, не являющемуся степенью числа два, не даст возможности формирования полного множества контрольных векторов.

На следующем уровне классификации можно выделить коды с суммированием не взвешенных и взвешенных разрядов. Коды с суммированием не взвешенных разрядов, по сути, это коды, каждому из разрядов которых приписаны единичные весовые коэффициенты. Данный класс кодов является более узким, чем взвешенные коды с суммированием.

Далее выделяются такие $TMW(m, k)$ -коды, при построении которых в каждом из подмножеств D_1 и D_2 неединичный весовой коэффициент имеет только один разряд (описанные выше $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -коды), и $TMW(m, k)$ -коды, при построении которых выбрана произвольная последовательность весовых коэффициентов. В свою очередь, $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -коды могут быть построены при условии, что $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, или $D_1 \cap D_2 = D_{12} \neq \emptyset$. Последние также классифицируются на коды, для которых взвешенный разряд попадает в пересечение D_{12} подмножеств, и на коды, для которых взвешенные разряды оказываются в исключении пересечения $(D_1 \cup D_2) \setminus D_{12} = D \setminus D_{12}$.

Представленная на рисунке 7 классификация двухмодульных кодов обобщает разнообразные способы их построения. Выбор способа построения кода зависит от специфики его приложения. Например, если речь идет об использовании кода при организации схемы контроля для комбинационной логической схемы, то для нее могут быть определены те выходы, значения на которых меняются наиболее часто при подаче на входы полного множества входных комбинаций. Такие разряды могут помещаться в различные подмножества D_1 и D_2 и взвешиваться. Это позволит отличать их от других разрядов каждого подмножества, значения которых меняются гораздо реже. Более общий способ выбора правил построения кода и конкретно взвешивания разрядов связан с первоначальным моделированием работы устройства, выявлением характера появления информационных векторов и последующим установлением взвешиваемых разрядов. Если при этом возможно моделирование неисправностей (из установленного класса) в устройстве, то выбор значений весовых коэффициентов и взвешиваемых

мых разрядов может быть более точным. При выборе значений коэффициентов следует, однако, учитывать влияние их абсолютных значений на сложность реализации контрольного оборудования для имеющейся элементной базы.

7. Заключение. Описанные двухмодульные взвешенные коды с суммированием обладают улучшенными характеристиками по сравнению с известными классическими кодами с суммированием (кодами Бергера) и двухмодульными кодами с суммированием с единичными весовыми коэффициентами разрядов. Приписывая весовые коэффициенты разрядам на этапе построения кода можно не только повысить число обнаруживаемых ошибок, но и существенно повлиять на характеристики обнаружения ошибок по видам и кратностям. В ходе исследований, например, установлено, что предложенные $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -коды, для которых весовые коэффициенты $w^1/w^2 = 1/2, 2/2, 2/3$ вне зависимости от длины информационного вектора (в диапазоне $m=8\div 15$) обнаруживают большее количество двукратных ошибок, чем коды Бергера и двухмодульные коды с суммированием с единичными весовыми коэффициентами разрядов.

В качестве недостатка $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов отметим наличие в классе необнаруживаемых всех видов ошибок – и монотонных, и симметричных, и асимметричных. Однако по сравнению с классическими кодами Бергера, не обнаруживающими все симметричные ошибки и обнаруживающими все монотонные и асимметричные ошибки, двухмодульные коды с суммированием обладают существенно лучшими характеристиками обнаружения симметричных ошибок, а доли монотонных и асимметричных ошибок от общего их количества не столь существенны. Могут быть выделены классы $TMW(m, k, w^1/w^2)$ -кодов с обнаружением монотонных и асимметричных ошибок до определенных кратностей.

$TMW(m, k, w^1/w^2)$ -коды могут быть использованы при синтезе систем с обнаружением неисправностей. При этом данные коды могут оказаться эффективными в работе систем с памятью и без таковой и применяться как на этапе проектирования исходной дискретной системы, так и на этапе синтеза средств технического диагностирования (тестового и рабочего диагностирования).

Литература

1. *Fujiwara E.* Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications // John Wiley & Sons. 2006. 720 p.
2. *Wang L.T., Wu C.W., Wen X.* VLSI Test Principles and Architectures: Design for Testability // Elsevier. 2006. 777 p.
3. *Tshagharyan G., Harutyunyan G., Shoukourian S., Zorian Y.* Experimental Study on Hamming and Hsiao Codes in the Context of Embedded Applications // 2017 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 25–28.

4. Гаерулов С.В. и др. Методы повышения сбоеустойчивости комбинационных ИМС методами избыточного кодирования // Прикладная математика и информатика. 2016. № 53. С. 93–102.
5. Астахов Н.В. и др. Верификация LDPC-кодов // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2017. Т. 13. № 1. С. 74–77.
6. Cardarilli G.C., Pontarelli S., Re M., Salsano A. Concurrent Error Detection in Reed Solomon Decoders // 2016 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2006. pp. 1–4.
7. Cardarilli G.C., Pontarelli S., Re M., Salsano A. Concurrent Error Detection in Reed-Solomon Encoders and Decoders // IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems. 2007. vol. 15(7). pp. 842–846.
8. Сапожников В.В., Сапожников В.В., Ефанов Д.В. Коды Хэмминга в системах функционального контроля логических устройств // СПб.: Наука. 2018. 151 с.
9. Гуров С.И. Спектральный R-код с проверками на чётность // Прикладная математика и информатика. 2017. № 55. С. 91–96.
10. Stepankovskiy A. et al. R-Code for Concurrent Error Detection and Correction in The Logic Circuits // 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). 2018. pp. 1430–1433.
11. Степанковский А.И. и др. Синтез схемы функционального контроля на основе спектрального R-кода с разбиением выходов на группы // Микроэлектроника. 2019. Т. 48. №4. С. 284–294.
12. Kubalík P., Kubátová H. Parity Codes Used for On-Line Testing in FPGA // Acta Polytechnica. 2005. vol. 45. no. 6. pp. 53–59.
13. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking // Springer Science & Business Media. 2008. 184 p.
14. Dutta A., Toubia N.A. Multiple Bit Upset Tolerant Memory Using a Selective Cycle Avoidance Based SEC-DED-DAEC Code // 25th IEEE VLSI Test Symposium (VTS'07). 2007. pp. 349–354.
15. Ostanin S. Self-Checking Synchronous FSM Network Design for Path Delay Faults // 2017 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 696–699.
16. Bliudov A., Nazarov I., Dmitriev V., Kovalyov K. Use of Systematic Code Based on Data Bits Weighing for Concurrent Error Detection Considering Error Structure Analysis // 2018 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 433–449.
17. Согомонян Е.С., Слабаков Е.В. Самопроверяемые устройства и отказоустойчивые системы // М.: Радио и связь. 1989. 208 с.
18. Piestrak S.J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes // 1997 IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. 1997. С. 119–127.
19. Butorina N. Simplification of the scheme of the self-tested detector (m, n)-code // Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015). 2015. pp. 347–350.
20. Butorina N., Burkatovskaya Y., Pakhomova E. Evaluation of Code-Word Subsets to Ensure the Self-Testing Property of a Checker // Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 786–791.
21. Ефанов Д., Сапожников В., Сапожников В. Generalized Algorithm of Building Summation Codes for the Tasks of Technical Diagnostics of Discrete Systems // Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 365–371.
22. Микони С.В. Общие диагностические базы знаний вычислительных систем // СПб.: СПИИРАН. 1992. 234 с.

23. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В., Дмитриев В.В. Новые структуры систем функционального контроля логических схем // Автоматика и телемеханика. 2017. № 2. С. 127–143.
24. Berger J.M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels // Information and Control. 1961. vol. 4. no. 1. pp. 68–73.
25. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.V. Two-Modulus Codes with Summation of One-Data Bits for Technical Diagnostics of Discrete Systems // Automatic Control and Computer Sciences. 2018. vol. 52. no. 1. pp. 1–12.
26. Слабаков Е.В., Согомонян Е.С. Самопроверяемые вычислительные устройства и системы (обзор) // Автоматика и телемеханика. 1981. № 11. С. 147–167.
27. Bose B., Lin D.J. Systematic Unidirectional Error-Detection Codes // IEEE Transaction on Computers. 1985. vol. 100. no. 11. pp. 1026–1032.
28. Lo J.C., Thanawastien S., Rao T.R.N., Nicolaidis M. An SFS Berger Check Prediction ALU and Its Application to Self-Checking Processor Designs // Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 1992. vol. 11. no. 4. pp. 525–540.
29. Das D., Toubia N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes // Journal of Electronic Testing: Theory and Applications. 1999. vol. 15. no. 1-2. pp. 145–155.
30. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose? // Proceedings of International Test Conference. 2000. pp. 985–994.
31. Das D., Toubia N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits // Proceedings of 17th IEEE VLSI Test Symposium. 1999. pp. 370–376.
32. Das D., Toubia N.A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes // Proceedings of the IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW). 2000. pp. 171–176.
33. Дмитриев В.В. О двух способах взвешивания и их влиянии на свойства кодов с суммированием взвешенных переходов в системах функционального контроля логических схем // Известия Петербургского университета путей сообщения. 2015. №3. С. 119–129.
34. Дмитриев В.В. Особенности синтеза генераторов кодов с суммированием взвешенных переходов при различной полноте информации о контролируемой логической схеме // Проблемы безопасности и надежности микропроцессорных комплексов. 2015. С. 158–166.
35. Блюдов А.А., Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. О кодах с суммированием единичных разрядов в системах функционального контроля // Автоматика и телемеханика. 2014. № 8. С. 131–145.
36. Черкасова Т.Х. Обнаружение ошибок в системах автоматики и вычислительной техники с помощью кодов Бергера и его модификаций // Проблемы безопасности и надежности микропроцессорных комплексов. 2015. С. 167–172.
37. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Коды с суммированием единичных информационных разрядов с произвольными модулями счета // Автоматика на транспорте. 2018. Т. 4. № 1. С. 106–130.
38. Сапожников В.В., Сапожников Вл.В., Ефанов Д.В. Эффективный способ модификации кодов с суммированием единичных информационных разрядов // Известия вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 11. С. 1020–1032.
39. Ефанов Д.В., Сапожников В.В., Сапожников Вл.В. Исследование двухмодульных кодов с суммированием единичных разрядов со счетом по модулю четыре // Электронное моделирование. 2018. Т. 40. №4. С. 29–54.
40. Sentovich E.M. et al. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization // Proceedings IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors. 1992. pp. 328–333.

41. *Harris D.M., Harris S.L. Digital Design and Computer Architecture // Morgan Kaufmann. 2012. 569 p.*

Ефанов Дмитрий Викторович — д-р техн. наук, доцент, профессор, кафедра автоматизи- ки, телемеханики и связи на железнодорожном транспорте, Российский университет транспорта (МИИТ); руководитель направления, направление комплексных систем управления, ООО «ЛокоТех-Сигнал». Область научных интересов: дискретная математика, надежность и техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 300. TrES-4b@yandex.ru; ул. Образцова, 9/9, 127994, Москва, Россия; р.т.: +7(911) 709-2164.

Сапожников Валерий Владимирович — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра автоматизи- ки и телемеханики на железных дорогах, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I. Область научных интересов: надежностный синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез само- проверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 600. port.at.pgups@gmail.com; Московский пр., 9, 190031, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)310-0788; факс: +7(812)457-8579.

Сапожников Владимир Владимирович — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра автоматизи- ки и телемеханики на железных дорогах, Петербургский государственный университет путей сообщения Императора Александра I. Область научных интересов: надежностный синтез дискретных устройств, синтез безопасных систем, синтез самопроверяемых схем, техническая диагностика дискретных систем. Число научных публикаций — 600. at.pgups@gmail.com; Московский пр., 9, 190031, Санкт-Петербург, Россия; р.т.: +7(812)310-0788; факс: +7(812)457-8579.

D. EFANOV, V. SAPOZHNIKOV, VL. SAPOZHNIKOV
**TWO-MODULE WEIGHT-BASED SUM CODE IN RESIDUE RING
MODULO $M=4$**

Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov Vl. Two-Module Weight-Based Sum Code in Residue Ring Modulo $M=4$.

Abstracts. The paper describes research results of features of error detection in data vectors by sum codes. The task is relevant in this setting, first of all, for the use of sum codes in the implementation of the checkable discrete systems and the technical means for the diagnosis of their components. Methods for sum codes constructing are described. A brief overview in the field of methods for sum codes constructing is provided. The article highlights codes for which the values of all data bits are taken into account once by the operations of summing their values or the values of the weight coefficients of the bits during the formation of the check vector. The paper also highlights codes that are formed when the data vectors are initially divided into subsets, in particular, into two subsets. An extension of the sum code class obtained by isolating two independent parts in the data vectors, as well as weighting the bits of the data vectors at the stage of code construction, is proposed.

The paper provides a generalized algorithm for two-module weighted codes construction, and describes their features obtained by weighing with non-ones weight coefficients for one of data bits in each of the subvectors, according to which the total weight is calculated. Particular attention is paid to the two-module weight-based sum code, for which the total weight of the data vector in the residue ring modulo $M = 4$ is determined. It is shown that the purpose of the inequality between the bits of the data vector in some cases gives improvements in the error detection characteristics compared to the well-known two-module codes. Some modifications of the proposed two-module weighted codes are described. A method for calculating the total number of undetectable errors in the two-module sum codes in the residue ring modulo $M = 4$ with one weighted bit in each of the subsets is proposed. Detailed characteristics of error detection by the considered codes both by the multiplicities of undetectable errors and by their types (unidirectional, symmetrical and asymmetrical errors) are given. The proposed codes are compared with known codes. A method for the synthesis of two-module sum encoders on a standard element base of the single signals adders is proposed. The classification of two-module sum codes is presented.

Keywords: Fault-Detection Systems; Device Output Errors; Error-Detection; Sum Code; Two-Module Code; Undetectable Error; Error Rate and Type; Code Properties.

Efanov Dmitry — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Professor, Department of Automation, Remote Control and Communication on Railway Transport, Russian University of Transport; Head of Division, Division of Integrated Control Systems, «LocoTech-Signal» LLC. Research interests: discrete mathematics, reliability and technical diagnostics of discrete devices. The number of publications — 300. TrES-4b@yandex.ru; 9/9, Obraztsova str., 127994, Moscow, Russia; office phone: +7 (911) 709-2164.

Sapozhnikov Valery — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of Automation and Remote Control on Railways, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University. Research interests: reliable synthesis of discrete devices, safe systems synthesis, self-checking systems synthesis, discrete systems technical diagnostics. The number of publications — 600. port.at.pgups@gmail.com; 9, Moskovsky pr., 190031, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)310-0788; fax: +7(812)457-8579.

Sapozhnikov Vladimir — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of Automation and Remote Control on Railways, Emperor Alexander I St. Petersburg State Transport University. Research interests: reliable synthesis of discrete devices, safe systems synthesis, self-checking systems synthesis, discrete systems technical diagnostics. The number of publications — 600. at.pgups@gmail.com; 9, Moskovsky pr., 190031, St. Petersburg, Russia; office phone: +7(812)310-0788; fax: +7(812)457-8579.

References

1. Fujiwara E. Code Design for Dependable Systems: Theory and Practical Applications. John Wiley & Sons. 2006. 720 p.
2. Wang L.T., Wu C.W., Wen X. VLSI Test Principles and Architectures: Design for Testability. Elsevier. 2006. 777 p.
3. Tshagharyan G., Harutyunyan G., Shoukourian S., Zorian Y. Experimental Study on Hamming and Hsiao Codes in the Context of Embedded Applications. 2017 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 25–28.
4. Gavrilov S.V. et al. [Methods for increasing the robustness of combinatorial integrated circuits using redundant coding]. *Prikladnaya matematika i informatika – Computational Mathematics and Modeling*. 2016. vol. 53. pp. 93–102. (In Russ.).
5. Astahov N.V. et al. [LDPC Codes Verification]. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta – Bulletin of Voronezh State Technical University*. 2017. Issue 13. vol. 1. pp. 74–77. (In Russ.).
6. Cardarilli G.C., Pontarelli S., Re M., Salsano A. Concurrent Error Detection in Reed Solomon Decoders. 2016 IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2006. pp. 1–4.
7. Cardarilli G.C., Pontarelli S., Re M., Salsano A. Concurrent Error Detection in Reed-Solomon Encoders and Decoders. *IEEE Transactions on Very Large Scale Integration (VLSI) Systems*. 2007. vol. 15(7). pp. 842–846.
8. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. *Kody Hemminga v sistemah funkcional'nogo kontrolya logicheskikh ustrojstv* [Hamming codes in concurrent error-detection systems of logical devices]. SPb.: Nauka. 2018. 151 p. (In Russ.).
9. *Gurov S.I.* [Spectral R code with parity checks]. *Prikladnaya matematika i informatika – Computational Mathematics and Modeling*. 2017. vol. 55. pp. 91–96. (In Russ.).
10. Stempkovskiy A. et al. R-Code for Concurrent Error Detection and Correction in The Logic Circuits. 2018 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). 2018. pp. 1430–1433.
11. Stempkovskiy A. et al. [Synthesis of a Functional Control Circuit Based on the Spectral R-Code with the Partitioning of Outputs into Groups]. *Mikroelektronika – Microelectronic*. Issue 48. vol. 4. pp. 284–294. (In Russ.).
12. Kubalík P., Kubátová H. Parity Codes Used for On-Line Testing in FPGA. *Acta Polytechnica*. 2005. vol. 45. no. 6. pp. 53–59.
13. Göessel M., Ocheretny V., Sogomonyan E., Marienfeld D. New Methods of Concurrent Checking. Springer Science & Business Media. 2008. 184 p.
14. Dutta A., Toubia N.A. Multiple Bit Upset Tolerant Memory Using a Selective Cycle Avoidance Based SEC-DED-DAEC Code. 25th IEEE VLSI Test Symposium (VTS'07). 2007. pp. 349–354.
15. Ostanin S. Self-Checking Synchronous FSM Network Design for Path Delay Faults. 2017 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 696–699.
16. Bliudov A., Nazarov I., Dmitriev V., Kovalyov K. Use of Systematic Code Based on Data Bits Weighing for Concurrent Error Detection Considering Error Structure Analysis. 2018 IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 433–449.

17. Sogomonyan E.S., Slabakov E.V. *Samoproveryaemye ustrojstva i otkazoustojchivye sistemy* [Self-checking devices and fault-tolerant systems]. Moscow: Radio i svyaz'. 1989. 208 p. (In Russ.).
18. Piestrak S.J. Design of Self-Testing Checkers for Unidirectional Error Detecting Codes. 1997 IEEE International Symposium on Defect and Fault Tolerance in VLSI Systems. 1997. C. 119–127.
19. Butorina N. Simplification of the scheme of the self-tested detector (m, n)-code. Proceedings of 13th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2015). 2015. pp. 347–350.
20. Butorina N., Burkatovskaya Y., Pakhomova E. Evaluation of Code-Word Subsets to Ensure the Self-Testing Property of a Checker. Proceedings of 16th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2018). 2018. pp. 786–791.
21. Efanov D., Sapozhnikov V., Sapozhnikov V. Generalized Algorithm of Building Summation Codes for the Tasks of Technical Diagnostics of Discrete Systems. Proceedings of 15th IEEE East-West Design & Test Symposium (EWDTS'2017). 2017. pp. 365–371.
22. Mikoni S.V. *Obschie diagnosticheskiye bazy znaniy vychislitelnykh sistem* [The general purpose knowledge bases of computer diagnostics]. SPb.: SPIIRAN. 1992. 234 p. (In Russ.).
23. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V., Dmitriev V.V. [New Structures of the Concurrent Error Detection Systems for Logic Circuits]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2017. vol. 2. pp. 127–143. (In Russ.).
24. Berger J.M. A Note on Error Detection Codes for Asymmetric Channels. *Information and Control*. 1961. vol. 4. no. 1. pp. 68–73.
25. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.V. Two-Modulus Codes with Summation of One-Data Bits for Technical Diagnostics of Discrete Systems. *Automatic Control and Computer Sciences*. 2018. vol. 52. no. 1. pp. 1–12.
26. Slabakov E.V., Sogomonyan E.S. [Self-checking computing devices and systems (review)]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 1981. vol. 11. pp. 147–167. (In Russ.).
27. Bose B., Lin D.J. Systematic Unidirectional Error-Detection Codes. *IEEE Transaction on Computers*. 1985. vol. 100. no. 11. pp. 1026–1032.
28. Lo J.C., Thanawastien S., Rao T.R.N., Nicolaidis M. An SFS Berger Check Prediction ALU and Its Application to Self-Checking Processor Designs. *Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*. 1992. vol. 11. no. 4. pp. 525–540.
29. Das D., Touba N.A. Synthesis of Circuits with Low-Cost Concurrent Error Detection Based on Bose-Lin Codes. *Journal of Electronic Testing: Theory and Applications*. 1999. vol. 15. no. 1-2. pp. 145–155.
30. Mitra S., McCluskey E.J. Which Concurrent Error Detection Scheme to Choose?. *Proceedings of International Test Conference*. 2000. pp. 985–994.
31. Das D., Touba N.A. Weight-Based Codes and Their Application to Concurrent Error Detection of Multilevel Circuits. Proceedings of 17th IEEE VLSI Test Symposium. 1999. pp. 370–376.
32. Das D., Touba N.A., Seuring M., Gossel M. Low Cost Concurrent Error Detection Based on Modulo Weight-Based Codes. Proceedings of the IEEE 6th International On-Line Testing Workshop (IOLTW). 2000. pp. 171–176.
33. Dmitriev V.V. [On the Two Weighing Methods and Their Influence on Properties of Sum Codes of Weighted Transitions in Functional Logical Scheme Control Systems]. *Izvestija Peterburgskogo universiteta putej soobshhenija – Proceedings of Petersburg Transport University*. 2015. vol. 3. pp. 119–129. (In Russ.).
34. Dmitriev V.V. [Features of Synthesis of Code Generators with Summation of Weighted Transitions at Various Completeness of Information on the Controlled Log-

- ic Circuit]. *Problemy bezopasnosti i nadezhnosti mikroprocessornykh kompleksov – Problems of safety and reliability of microprocessor complexes*. 2015. pp. 158–166.
35. Blyudov A.A., Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.V. [On Codes with Summation of Data Bits in Concurrent Error Detection Systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2014. vol. 8. pp. 131–145. (In Russ.).
36. Cherkasova T.H. [Error detection in automation and computer systems using Berger codes and its modifications]. *Problemy bezopasnosti i nadezhnosti mikroprocessornykh kompleksov – Problems of safety and reliability of microprocessor complexes*. 2015. pp. 167–172. (In Russ.).
37. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. [Codes with summation of one-bits with random modules of calculation]. *Avtomatika na transporte – Automation on Transport*. 2018. Issue 4. vol. 1. pp. 106–130. (In Russ.).
38. Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I., Efanov D.V. [Effective Method of Modifying Code with On-Bits Summation]. *Izvestiya vuzov. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 2017. Issue 60. vol. 11. pp. 1020–1032. (In Russ.).
39. Efanov D.V., Sapozhnikov V.V., Sapozhnikov V.I. [The research of two-modulus codes with summation of ones in data bits with calculation by modulo “four”]. *Jel-elektronnoe modelirovanie – Electronic Modeling*. 2018. Issue 40. vol. 4. pp. 29–54. (In Russ.).
40. Sentovich E.M. et al. Sequential Circuit Design Using Synthesis and Optimization. Proceedings IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers & Processors. 1992. pp. 328–333.
41. Harris D.M., Harris S.L. Digital Design and Computer Architecture. Morgan Kaufmann. 2012. 569 p.