

Ю.В. Доронина, А.В. Скатков  
**АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ  
СТАЦИОНАРНЫХ МАРКОВСКИХ МОДЕЛЕЙ**

*Доронина Ю.В., Скатков А.В. Анализ статистической устойчивости стационарных Марковских моделей.*

**Аннотация.** Предложен подход для оценки качества стационарных Марковских моделей без поглощающих состояний на основе меры статистической устойчивости: формулируется описание меры и определяются ее свойства. Показано, что оценки статистической устойчивости моделей описывались разными авторами либо как методологический аспект качества модели, либо в рамках других модельных свойств. При решении практических задач имитационного моделирования, например на основе Марковских моделей, возникает выраженная проблема обеспечения размерности требуемых выборок. На основе введенных формулировок предложен конструктивный подход к решению задач оптимизации объема выборки и анализа статистической волатильности Марковской модели к возникающим аномалиям при ограничениях на точность результатов, что обеспечивает требуемую достоверность и исключение нефункциональной избыточности.

Для анализа вида переходов в матрице переходов введена мера ее дивергенции (нормированная и центрированная). Эта мера не обладает полнотой описания и используется в качестве иллюстративной характеристики моделей определенного свойства. Оценка дивергенции матриц переходов может быть полезна при исследовании моделей с высокой чувствительностью обнаружения исследуемых свойств объектов. Сформулированы ключевые этапы подхода, который связан с исследованием квазиоднородных моделей.

На примере моделирования реального технического объекта с отказами, восстановлениями и профилактикой предложены количественные оценки статистической устойчивости и статистической волатильности модели. Показана эффективность предлагаемых подходов при решении задачи анализа статистической устойчивости в задачах квалиметрического анализа квазиоднородной модели сложных систем. На основе предложенного конструктивного подхода получен оперативный инструмент принятия решений по параметрической и функциональной настройке сложных технических объектов на долгосрочную и краткосрочную перспективы.

**Ключевые слова:** статистическая устойчивость, квазиоднородная модель, статистическая волатильность, случайное блуждание, цепь Маркова, сложная техническая система, точность, вероятность перехода, число реализаций процесса, дивергенция модели.

**1. Введение.** Исследование процесса функционирования сложных системотехнических комплексов в большинстве случаев сталкивается с рядом объективных проблем: неопределенность состояний, размерность моделей, отсутствие возможности натурных испытаний, высокая стоимость получения данных, невозможность мониторинга состояния вследствие сложных условий функционирования системы и тому подобное. В этих случаях модельно-ориентированный подход в рамках имитационного моделирования оказывается единственно возможным средством исследования системы [1, 2].

Область задач имитационного моделирования включает четыре основных направления: моделирование динамических систем, дискретно-событийное моделирование, моделирование системной

динамики, агентное моделирование. В каждом из этих направлений может быть применена Марковская модель (ММ) (в агентном моделировании косвенно) в форме представления и анализа Марковских событий, Марковской последовательности или Марковского случайного процесса (МСП) [3, 4].

Анализ процесса функционирования СТО должен быть соотнесен с этапами жизненного цикла системы: на начальных этапах и на этапе деградации оценки свойств СТО могут значительно отличаться. Применение ММ к анализу надежности и прогнозированию временных характеристик СТО широко распространено [5-7], но не во всех случаях результаты оказываются достоверными, в связи с этим целесообразно развивать механизмы решения задач анализа функционирования СТО с учетом оценки качества решений в рамках ММ (таблица 1).

Таблица 1. Некоторые задачи и модели исследования СТО

Задача	Учет статистической устойчивости, метрики, ссылки
Из теории надежности: для нормального функционирования изучаемой системы нужно, чтобы параметры, характеризующие систему во время ее работы, не выходили за некоторые пределы.	Исследуются границы выхода Марковского процесса за заданные границы ( $y+dy$ ) с точностью $o(dy)$ [8].
Закон распределения времени пребывания МСП в заданной области.	1. Если за начальный момент времени взят момент пересечения значениями случайного процесса (СП) границы допустимой области, то устанавливается закон распределения времени пребывания значений этого СП в допустимой области. 2. Устанавливается закон распределения времени выброса значений рассматриваемого СП за уровень «снизу вверх» [8].
Определение среднего числа выбросов значений МСП в единицу времени (время пребывания вне допустимой области).	Сводится к решению соответствующих задач в рамках уравнений Колмогорова.
Анализ надежности систем с определением вероятностей пребывания в состояниях для различных режимов работы системы: стационарный, нестационарный.	Определяются финальные вероятности, находится распределение вероятностей до стационарного режима [9, 10].
Задачи оценки параметров восстановления и обслуживания систем.	Нахождение параметров эффективности СМО; распределение времен пребывания в состояниях, показатели надежности систем [11].

Известно, что вопросам оценки результатов имитационного моделирования уделялось много внимания, использовались критерии Стьюдента, Фишера, Манна — Уитни, Вилкоксона и другие. Но в существующих исследованиях недостаточно проработаны вопросы устойчивости моделей. В то же время устойчивость — это фундаментальное свойство динамических систем, которое исследуется обычно в двух плоскостях: как реакция системы на внешние возмущения динамического характера, так и изменение параметров в ответ на эти возмущения. В представленном исследовании предложен некоторый подход к оценке статистической устойчивости (СУ) ММ в задачах анализа системной динамики, в котором не детализируется источник возникновения неустойчивости, а анализируются свойства модели в ее выходных характеристиках. Предложенный подход отличается конструктивизмом, позволяя исследователю формулировать некоторые оценки СУ, в том числе на основе внешней монотонности ММ и модельной волатильности.

**2. Обзор исследований статистической устойчивости моделей.** Основные результаты связаны с анализом качества моделей в рамках квалиметрии моделей. Как отдельный показатель качества модели, статистическая устойчивость позволяет исследовать статистики (функций выборки), в том числе стабильности частоты (относительной частоты) массовых событий и средних величин (т.е. слабой их зависимости от объема данных) [13, 14]. В работе [14] предложено выполнять сопоставление модели объекту по целостному свойству через измерение расстояния  $\rho(M, ob)$  между соответствующими точками в  $n$ -мерном пространстве элементарных свойств объекта. В качестве аргумента в соответствующих функционалах рассматривают величину разности выходных состояний объекта  $y_j(Ob)$  и модели  $y_j(M)$ . В этом случае условие адекватности  $|y_j(Ob) - y_j(M)| \leq \varepsilon$  по  $n$  свойствам обобщается в условие  $\rho(M, ob) \leq \varepsilon, \varepsilon > 0$ . Для измерения расстояния  $\rho(M, ob)$  могут использоваться различные метрики. Эти величины рекомендовано использовать для оценки моделей по адекватности.

В монографии [12] отражено, что не всегда случайные модели в полной мере отражают специфику реальных событий, и на больших интервалах наблюдения спекавали, что гипотеза идеальной статистической устойчивости не находит экспериментального подтверждения. На больших объемах данных уровень флуктуаций реальных статистик практически не изменяется или возрастает. Это связано с тем, что не удастся обеспечить повторяемость условий экспериментов.

Исследования авторов [15, 16] связаны с процедурой многокритериального структурно-функционального синтеза комплекса разнотипных моделей, описывающих с различной степенью детализации разные аспекты функционирования системы проактивного управления группировкой СТО в динамически изменяющейся обстановке, задаваемой как стохастическими и интервальными исходными данными, так и данными, имеющими нечетко-возможностный характер; позволившая на конструктивном уровне количественно оценить робастность и устойчивость программ проактивного управления СТО на основе построения и аппроксимации областей достижимости логико-динамических моделей, которые описывают структурную динамику рассматриваемых СТО.

Таким образом, вопросы оценки статистической устойчивости моделей поднимались разными авторами либо как методологический аспект качества модели, либо в рамках других модельных свойств. Однако в практических задачах имитационного моделирования, например на основе ММ, возникает выраженная проблема размерности выборки.

Всюду далее рассматривается ММ без поглощающих состояний в рамках стационарного (квазистационарного) режимов,  $S_0$  — стартовое состояние системы;  $S_n$  —  $n$ -ое состояние, в котором оказывается система после  $n$ -ого перехода; символом " $\xrightarrow{M_x}$ " будем обозначать отображение, осуществляемое имитационной моделью  $M_x$ ;  $M_x, M_v, M_m$  — обозначения имитационных моделей соответственно: общее обозначение имитационной модели, модель с результатом в виде вектора, модель с результатом в виде матрицы.

Обобщая опыт, который был накоплен при ММ сложных систем, и учитывая предложенную в [17] классификацию математических схем моделирования, выделим три основных способа построения таких моделей (видов математических схем моделирования):

$$schema P_v : \left\| P_{ij} \right\| \xrightarrow{M_v} \langle S_0, S_1, \dots, S_n \rangle; \quad (1)$$

$$schema P_m : \langle S_0, S_1, \dots, S_n \rangle \xrightarrow{M_v} \left\| P_{ij} \right\| \xrightarrow{M_m} \left\| P_{ij}^k \right\|; \quad (2)$$

$$schema A : schema P_v \xrightarrow{M_x} schema P_m; \quad (3)$$

$$schema A : \left\| P_{ij} \right\| \xrightarrow{M_v} \left\| P_{ij}^{M_x} \right\| \xrightarrow{M_m} \left\| \theta \right\|,$$

где  $P_v$  — дискретно-стохастическая модель ( $P$ -схема), модель с ожидаемым результатом в виде вектора;  $P_m$  — дискретно-стохастическая модель ( $P$ -схема), модель с ожидаемым результатом в виде матрицы;  $A$  — комбинированная модель ( $A$ -схема);  $\|P_{ij}\|$  — матрица переходов ММ;  $\langle S_0, S_1, \dots, S_n \rangle$  — последовательность состояний ММ;  $k$  — число запусков модели, за которое система из первоначального состояния перейдет в терминальное состояние, описываемое матрицей  $\|P_{ij}^k\|$ ;  $\|P_{ij}^{Mm}\|$  — «восстановленная» матрица переходных вероятностей, содержащая статистические оценки  $P_{ij}$ , (именно эта матрица будет использована для анализа статистической устойчивости модели  $M_x$ );  $\|\theta\|$  — матрица результатов моделирования, (например: финальные вероятности переходов; некоторая мера отклонения числа совпавших элементов  $\|P_{ij}\|$  и  $\|P_{ij}^{Mm}\|$  и т.п.).

Схему  $P_v$  рекомендуется использовать в случаях, когда необходимо изучить динамику системных состояний в форме марковских переходов  $\langle S_0, S_{i-1}, S_i, S_{i+1} \dots \rangle$ , где  $S_i$  — одно из состояний, в которое система может перейти из состояния  $S_{i-1}$ . Схема  $P_m$  позволяет на основе известной динамики системы получить оценку случайных величин — вероятностей переходов. Схема С реализуется на основе агрегации схемы  $P_v$  и схемы  $P_m$  и ее удобно использовать для исследования процессов сходимости процессов моделирования.

Вопросы планирования экспериментов исследовались многими авторами, один из возможных подходов будем использовать в следующем виде. Планы имитационных экспериментов по приведенным схемам  $P_v$ ,  $P_m$ ,  $A$  (1)-(3) ММ могут быть представлены в виде кортежа  $\Pi \langle n, l, k, \theta \rangle$ , где  $n$  — скаляр, задающий число сгенерированных цепочек ММ в выражении (1),  $n = |N|$ ;  $l_m$  — длина  $m$ -ой цепи Маркова,  $l = |L|$ ;  $k$  — кратность запусков модели,  $k = |K|$ ;  $\theta_{n,l,k}$  — многомерная матрица, которая может содержать результаты первичной статистики, на основе которой будет оценена статистическая устойчивость. Таким образом, если обозначить  $D$  — множество допустимых планов ( $J = |D|$ ), то  $\Pi_j \langle n_j, l_j, k_j, \theta_j \rangle$  — реализуемый план.

Использование формализации (1)-(3) позволит алгоритмизировать процесс анализа статистической устойчивости квазиоднородной стационарной ММ без поглощающих состояний. Введем некоторые определения и нотации на основе имеющегося опыта и существующих исследований.

**3. Основные определения.** Под качеством модели будем понимать совокупность свойств и характеристик модели, определяющих его способности удовлетворять обусловленные или предполагаемые потребности субъекта, использующего модель [18, 19]. В различных источниках различают несколько аспектов понятия «устойчивость». Устойчивость модели по отношению к изменениям ее параметров означает сохранение аппарата моделирования, основных связей между переменными, типов ограничений в некотором интервале ее параметров [20, 21].

Другим аспектом устойчивости является устойчивость решения задачи (результатов) моделирования (обнаруженных свойств, сценариев, траекторий, состояний) по отношению к изменениям параметров модели или начальных условий. Если зависимость от параметров и начальных условий является регулярной, то малые ошибки в исходных данных приведут к небольшому изменению результата. Тогда, решая, например, задачу выбора по приближенному данным, можно обоснованно говорить о нахождении приближенного решения. Иногда устойчивость является целью практического моделирования. В частности — поиск алгоритмов деятельности человека без разрушения природной экосистемы [10]. Практически устойчивость статистик трактуется исследователем самым различным образом, как правило, используются оценки повторяемости и монотонное уменьшение длины доверительного интервала по мере роста числа реализаций при фиксированной доверительной вероятности.

Планы экспериментов  $\Pi$  по схемам  $P_v, P_m, A$  (1)-(3) порождают вариативность процессов исследования моделей, и, как следствие, значительный разброс статистических оценок, особенно при решении задач со сложной системной динамикой.

Мера *статистической устойчивости (СУ)* модели  $M_x$  может быть определена различными способами в зависимости от целей исследования и типа исследуемого объекта. В качестве оценочного параметра примем (как оценку текущей статистики модели  $M_x$ ), представляющего интерес для исследования статистики по полученным результатам экспериментов в виде вектора  $\theta$ . Пусть  $\tilde{\gamma}$  — заданная ЛППР оценка статистики модели  $M_x$ ;  $\Delta_\gamma$  — мера близости текущей и заданной оценок статистики модели  $M_x$ ;  $k$  — число запусков модели;  $\varepsilon$  — точность модели;  $p$  — доверительная вероятность оценки параметров.

*Определение 1.* Модель  $M_x$ , реализованная в рамках одной из видов математических схем моделирования  $P_v, P_m, A$  (1)–(3) является статистически устойчивой, если для квалитметрической оценки ее устойчивости, начиная с некоторых  $n_i \geq n_0, l_i \geq l_0, k_i \geq k_0$ , будет выполняться условие:

$$\left| \gamma^{M_x}(\theta(n_i, l_i, k_i)) - \tilde{\gamma} \right|_{\varepsilon, p} \leq \Delta\gamma \quad (4)$$

с учетом условия сходимости по статистической вероятности.

Следовательно, модель  $M_x$  может быть определена в общем случае как  $k$  — статистически устойчивая ( $n-, l-, \varepsilon-, p$  — статистически устойчивая) на основе заданного плана экспериментов  $\Pi(n, l, k, \theta)$  согласно определению 1, (4).

Таким образом, если при исследовании СТО на основе ММ по схеме: *schema A*:  $\|P_{ij}\| \xrightarrow{M_v} \|P_{ij}^{M_x}\| \xrightarrow{M_m} \|\theta\|$  отклонение  $\|P_{ij}^{M_m}\|$  в модели  $M_m$  не превысит заданную ЛПР величину  $\tilde{\theta}$ , то для плана экспериментов  $\Pi(n, l, k, \theta)$  модель  $M_x$  будет считаться  $\theta(k-, \varepsilon-, p-)$  — статистически устойчивой и обозначаться  $\gamma_k^{M_x}, \gamma_\varepsilon^{M_x}, \gamma_p^{M_x}$ .

Формализуем основные свойства меры статистической устойчивости в задачах анализа квазиоднородной Марковской модели сложных систем.

*Свойство 1. Внешняя частная монотонность (ВЧМ) модели по  $k$ -экспериментальным наблюдениям.* Модель  $M_1$  обладает свойством 1, если  $k_1^{M_1}, k_2^{M_1}$  — кратность повторов в плане экспериментов  $\Pi(n, l, k, \theta)$  модели  $M_1$  и с учетом неравенства  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$  выполняется  $\Delta\gamma_{k_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{k_2}^{M_1}$ , следовательно, справедливо:

$$\Delta\gamma_{k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \quad (5)$$

и модель  $M_1$  будем считать  $k$  — статистически устойчивой ( $\Delta\gamma_k^{M_i}$ ) и монотонной по  $k$  — запуском модели ( $k$  — ВЧМ).

Свойство ВЧМ позволяет сравнивать модели в смысле эффективности оценок. Согласно определению плана экспериментов

свойство 1 может быть сформулировано для  $(n, l)$  параметров ММ. Модель  $M_1$  обладает свойством 1, если с учетом неравенства  $n_1^{M_1} > n_2^{M_1}$  или неравенства  $l_1^{M_1} > l_2^{M_1}$  выполняется  $\Delta\gamma_{n_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{n_2}^{M_1}$  или  $\Delta\gamma_{l_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{l_2}^{M_1}$ , следовательно, справедливо:

$$\Delta\gamma_{n_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{n_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \quad (6)$$

$$\Delta\gamma_{l_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{l_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}). \quad (7)$$

Причем  $N^{M_1}$  и  $L^M$  определяются возможностями программных средств моделирования. Свойство ВЧМ (6) описывает ( $n$  — ВЧМ), для (7)-( $l$  — ВЧМ) соответственно.

Для Марковской модели  $M_1$ , реализованной по схеме С, предполагается исследование влияния длины цепи Маркова  $l^{M_1}$ , числа сгенерированных цепочек ММ  $n^{M_1}$ , а также числа запусков модели  $k^{M_1}$  на качество модели с точки зрения точности  $\varepsilon$  и оценки доверительного интервала  $p$ .

Таким образом, свойством 1 (выражения (5)-(7)) формулируют условия частной монотонности модели по  $n, l, k$  — экспериментальным данным. Сформулируем следствие 1 из свойства 1.

*Следствие из свойства 1. Внешняя полная монотонность (ВПМ) модели.* Пусть  $k_1^{M_1}, k_2^{M_1}$  — кратность запусков в плане экспериментов  $\Pi(n, l, k, \theta)$  модели  $M_1$ ,  $n_i \geq n_0$ ,  $l_i \geq l_0$ . С учетом неравенства  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$  и с учетом неравенств  $n_1^{M_1} > n_2^{M_1}$ ,  $l_1^{M_1} > l_2^{M_1}$  выполняется  $\Delta\gamma_{n_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{n_2}^{M_1}$  и  $\Delta\gamma_{l_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{l_2}^{M_1}$  соответственно, а также выполняется  $\Delta\gamma_{k_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{k_2}^{M_1}$ , следовательно справедливо:

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{n_1, l_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) &> \Delta\gamma_{n_1, l_1, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}); \\ \Delta\gamma_{n_1, l_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) &> \Delta\gamma_{n_2, l_1, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}); \\ \Delta\gamma_{n_1, l_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) &> \Delta\gamma_{n_1, l_2, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \end{aligned} \quad (8)$$



и модель  $M_1$  будем считать полностью монотонной по  $n, l, k$  – экспериментальным наблюдениям (обладающей ВПМ).

Аналогичным образом сформулируем свойство СУ по плану  $\Pi(n, l, k, p)$  для доверительных вероятностей оценивания параметров модели.

*Свойство 2. Монотонность модели по доверительной вероятности оценивания параметров.* Модель  $M_1$  обладает свойством 2, если сформулировано условие для определения доверительной вероятности  $p$  оценивания параметров модели, то для схемы сравнения мер СУ  $\Delta\gamma_{p_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{p_2}^{M_1}$  справедливо:

$$\Delta\gamma_{p_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{p_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } 0 < p^{M_1} < 1. \quad (9)$$

Свойство 2 может быть распространено на случай, когда сравниваются модели для одинаковых доверительных вероятностей  $p_1^{M_1}$ , но при  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$ . Тогда (9) будет иметь вид:

$$\Delta\gamma_{p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{p_1, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } 0 < p^{M_1} < 1. \quad (10)$$

В исследовании рассматривается в качестве примера  $p_1^{M_1}$  для математического ожидания  $\tilde{m}_x$ .

*Свойство 3. Монотонность модели по точности.* Модель  $M_1$  обладает свойством 3, если  $\varepsilon_1^{M_1}, \varepsilon_2^{M_1}$  — точность результатов экспериментов в плане  $\Pi(n, l, k, \theta)$  модели  $M_1$  и с учетом неравенства  $\varepsilon_1^{M_1} > \varepsilon_2^{M_1}$  выполняется  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1}^{M_1} > \Delta\gamma_{\varepsilon_2}^{M_1}$ , следовательно, справедливо:

$$\Delta\gamma_{\varepsilon_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\varepsilon_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } 0 < \varepsilon_1^{M_1} < \varepsilon_0^{M_1}, \quad (11)$$

где  $\varepsilon_0^{M_1}$  — критическое значение точности для модели  $M_1$ .

Свойство 4 может быть распространено на два случая, когда сравниваются модели для одинаковых  $p_1^{M_1}$ , но при  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$ ; и на случай, когда для фиксированного  $k^{M_1}$  исследуются различные  $p^{M_1}$ . Тогда (11), может быть, будет распространено на два случая.

*Случай 3.1. Монотонность модели по точности для фиксированного значения доверительной вероятности  $p^{M_1}$ :*

$$\Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } 0 < \varepsilon_1^{M_1} < \varepsilon_0^{M_1},$$

$$0 < p^{M_1} < 1. \quad (12)$$

*Случай 3.2. Монотонность модели по точности для фиксированного значения числа запусков модели  $k^{M_1}$ :*

$$\Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_2, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } 0 < \varepsilon_1^{M_1} < \varepsilon_0^{M_1},$$

$$0 < p^{M_1} < 1. \quad (13)$$

Вариативный характер погрешности  $\varepsilon$  формирует свойство модели при  $\delta$  — отклонении числа репликаций модели оставаться в пределах заданного диапазона:  $\varepsilon_{\min} < \varepsilon < \varepsilon_{\max}$ . При этом варианты  $\delta$ -отклонений числа запусков модели, например:  $10 \pm \delta k$ ;  $\delta = k$ ;  $20 \pm \delta k$ , могут быть определены как макроуровни анализа систем:  $10 \pm \delta k$  — незначительное отклонение числа запусков модели;  $10\delta k$  — десятикратное отклонение числа запусков модели;  $\delta = k$  — фиксированное число запусков модели. Таким образом, сформулируем свойство, связанное с инвариантностью оценок качества модели к отклонению числа запусков (при больших объемах данных).

*Свойство 4. Классификация оценок моделей по числу их запусков (расширение свойства 1).* Свойство 1, отражающее сравнимость оценок СУ при  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$  для  $\Delta\gamma_{k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , на больших пространствах параметров МСИ и планах  $\Pi(n, l, k, \theta)$  может быть сформулировано как ряд свойств моделей и планов:

*Свойство 4.1.  $\delta$ -мультипликативная ВЧМ модели по  $k$ -экспериментальным наблюдениям:*

$$\Delta\gamma_{\delta k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\delta k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } k_1^{M_1}, k_2^{M_1} \in K^{M_1}, \delta \leq \tilde{\delta}_0. \quad (14)$$

*Свойство 4.2.  $\delta$ -аддитивная ВЧМ модели по  $k$  — экспериментальным наблюдениям:*

$$\Delta\gamma_{\delta\pm k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\delta\pm k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } k_1^{M_1}, k_2^{M_1} \in K^{M_1}, \delta \leq \tilde{\delta}_0. \quad (15)$$

*Свойство 4.3.*  $\delta$  — 10% -мультипликативная ВЧМ модели по  $k$  — экспериментальным наблюдениям:

$$\gamma_{10\delta k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \gamma_{10\delta k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}), \text{ при } k_1^{M_1}, k_2^{M_1} \in K^{M_1}, \delta \leq \tilde{\delta}_0. \quad (16)$$

Исходя из особенностей моделирования, ЛПР может предложить некоторые другие  $\delta$  — свойства СУ моделей.

*Определение 2.* Модель  $M_x$  с учетом свойства 4, соответственно (14)-(16), считается  $(\delta k)$ -,  $(\delta \pm k)$  или  $(10\delta k)$  – статистически устойчивой и обозначается как  $\Delta\gamma_{\delta k}^{M_x}, \Delta\gamma_{(\delta \pm k)}^{M_x}, \Delta\gamma_{10\delta k}^{M_x}$ .

Например, при 1000 реализациях отклонение объема выборки на  $\delta = 5$  по мнению ЛПР не вносит значительную погрешность в статистику и модель  $M_1$  может быть  $(\delta \pm k = 5 \pm 1000)$  — устойчивой  $\Delta\gamma_{(\delta \pm k)}^{M_x}$ .

Особенностью представленного исследования, в том числе является и то, что СТО рассматривается в рамках квазистационарного режима, при котором стационарность может наблюдаться не на всем исследуемом временном отрезке, а на ограниченных его участках, что позволит учесть особенности функционирования СТО.

Актуальность постановки задачи связана с вопросами практического характера, когда результаты анализа функционирования СТО оказываются нерепрезентативными и недостоверными, либо для достижения положительных исходов моделирования требуется избыток ресурсов. Четкая методологическая оценка макропоказателей и рычаги управления ресурсами на основе снижения размерности данных, варьирования точности, снижения статистической неопределенности, безусловно, важны как для развития методик МСИ, так и принятия решений в разных областях системного анализа.

**4. Постановка задачи и описание модели.** Пусть  $R$  — вектор рабочих режимов СТК;  $R_N$  — вектор номинального режима СТО,  $N$  — конечное множество номинальных режимов. Примем  $|R_N - R_t| < \varepsilon$  как меру отклонения вектора текущего режима от номинального, причем это расстояние не превышает некоторую заданную величину  $\varepsilon > 0$ . Таким образом,  $R_t$  характеризует мгновенный «снимок» текущего режима СТО.

При статистических испытаниях для достижения наилучшего результата предполагается целесообразным проведение достаточного количества запусков модели [23-24]. Возникает необходимость определения достаточности выборки. Таким образом, рассматривается множество векторов  $R_N^i, i = \overline{1, I}$ , где  $I$  — количество реализаций исследуемого процесса. ММ строится по *schema A*:  $\|P_{ij}\| \rightarrow \|P_{ij}^{Mm}\|$  в следующем фазовом пространстве состояний системы:  $S = \{S_0, S_1, S_2, S_3, S_4\}$ , где  $S_0$  — рабочее состояние,  $S_1$  — состояние отказа,  $S_2$  — состояние восстановления системы после отказа,  $S_3$  — состояние профилактики (в модели не фиксируется, работает или простаивает система в момент профилактики),  $S_4$  — состояние сбоя. Это состояние, из которого может быть осуществлен переход в состояние отказа, после чего требуется восстановление, либо в начальное состояние без восстановления. Таким образом,  $S_4$  — это состояние, при котором восстановление системы не требуется.

В модели присутствуют виртуальные переходы вида  $S_{ii}$ , исходя из того, что модель строилась в предположении, что  $P_{ij} \approx 1/l$  где  $l = \overline{1, L}$ ,  $L$  — полное множество переходов ММ [25]. На рисунке 1 приведен граф переходов сложного технического объекта, в таблице 1 — исходные вероятности переходов для имитационного моделирования.

Предложенный пример носит универсальный характер и показателен для анализа различных аспектов функционирования СТО, например принятия решений в области учащения профилактических работ или увеличения ресурса на восстановление СТО после отказа.

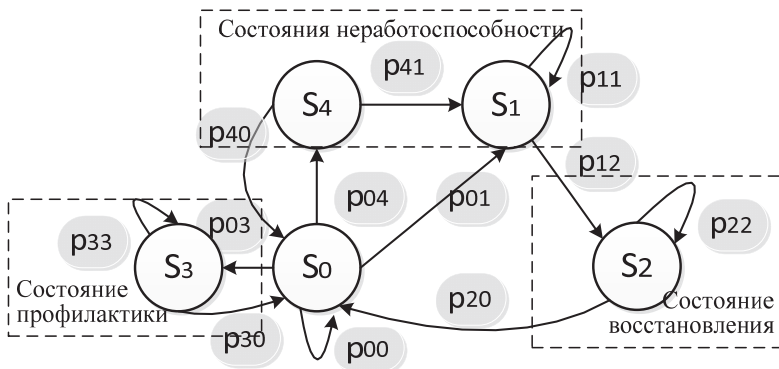


Рис. 1. Граф переходов в состояния системы со сбоями, восстановлениями и профилактикой

Зададим для примера значения исходной матрицы вероятностей переходов  $\|P_{ij}\|$  с учетом  $P_{ij} \approx 1/l$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.35 & 0.25 & 0 & 0.20 & 0.20 \\ 0 & 0.50 & 0.50 & 0 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0.45 & 0 & 0 \\ 0.55 & 0 & 0 & 0.45 & 0 \\ 0.55 & 0.45 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Для анализа вида переходов в матрице  $\|P_{ij}\|$  введена мера дивергенции данных как соотношение:

$$\text{div}\|P_{ij}\| = \frac{\min P_{ij}}{\max P_{ij}}. \quad (18)$$

Выражение (18) отражает дивергенцию значений исходной матрицы переходов  $\|P_{ij}\|$ . В некоторых случаях целесообразно применять центрированный показатель  $\text{div}\|P_{ij}\|$ :

$$\text{div}\|P_{ij}^{M_i}\|_c = \frac{\left(\frac{P_{ij}}{L}\right) - \min(P_{ij}^{M_i})}{\max(P_{ij}^{M_i}) - \min(P_{ij}^{M_i})}. \quad (19)$$

Эта мера не обладает полнотой описания и используется в качестве иллюстративной характеристики моделей определенного свойства с малым разбросом значений переходных вероятностей:  $P_{ij} \approx 1/l$ , где  $l = \overline{1, L}$ ,  $L$  — полное множество переходов ММ. Мера  $\text{div}\|P_{ij}^{M_x}\|_c$  может быть полезна при исследовании моделей с высокой чувствительностью обнаружения исследуемых свойств объектов.

На рисунке 2 приведены зависимости сравнения дивергенции  $\|P_{ij}^{M_i}\|$  для планов  $\Pi_1(1..110, 1..100, \theta)$  и  $\Pi_2(1..110, 1..200, \theta)$  с учетом свойства 1,  $l$  — ВЧМ.

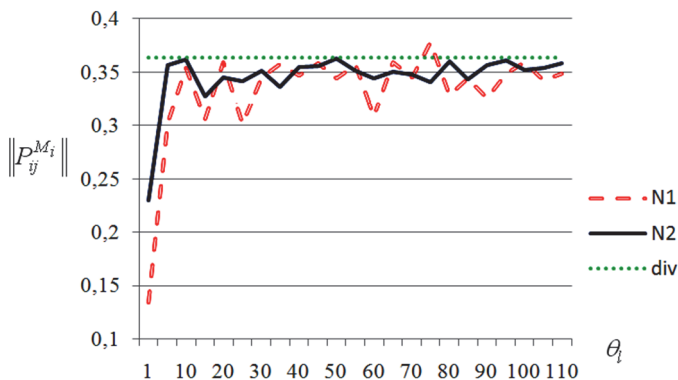


Рис. 2. Дивергенция значений матрицы  $\|P_{ij}^{M_i}\|$  в зависимости от кратности сгенерированных цепочек ММ:  $N1=100$ ,  $N2=200$ ,  $div$  – дивергенция исходной матрицы

На рисунке 3 приведены зависимости сравнения дивергенции  $div\|P_{ij}^{M_x}\|_c$  для планов  $\Pi_1(1..110,1..100,\theta)$  и  $\Pi_2(1..110,1..200,\theta)$  с учетом свойства 1,  $l$  — ВЧМ. Визуализация значений  $div\|P_{ij}^{M_x}\|$  на рисунке 2, как и центрированная величина, рисунок 3 отражает процесс, сходящийся к исходной  $div\|P_{ij}\|$  (верхняя точечная линия), начиная с  $n=15$ , причем для кратности реплицированных переходов  $n=200$  сходимость более заметна, чем для  $n=100$  (пунктирная линия).

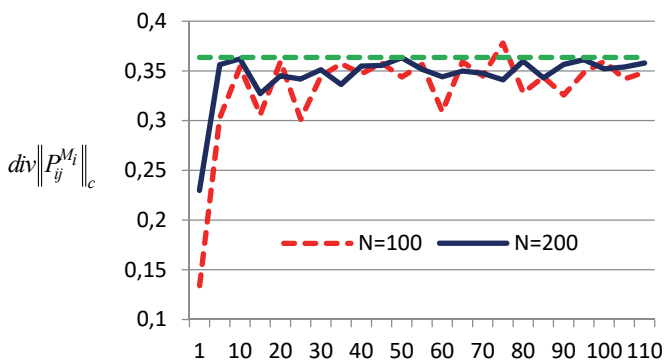


Рис. 3. Дивергенция значений матрицы  $div\|P_{ij}^{M_i}\|_c$  в зависимости от кратности сгенерированных цепочек ММ

Для исследования СУ  $M_1$ , представленной на рисунке 1, будем использовать следующие некоторые планы экспериментов, удовлетворяющих свойствам 1-4, по выражениям (5) – (16).

1. План  $\Pi(1..100, 1..110, \theta)$ ,  $\theta = \varepsilon$ ,

$\Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_2, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , свойство 3, определения (11), (13)

для схемы модели А.

2. Планы  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$ ,  $\Pi_2(1..200, 1..110, \theta)$  для схемы модели А,  $\Delta\gamma_{n_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{n_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , свойство 1, ВЧМ, определение (6).

3. План имитационного эксперимента  $\Pi_1(50, 100, \theta)$ , где  $\theta = k = 20$ ,  $k_1^{M_1} > k_2^{M_1}$ ,  $\Delta\gamma_{k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , свойство 1, ВЧМ, определение (5) для схемы модели А.

4. Планы  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$ ,  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$ , для схемы модели А,  $\Delta\gamma_{p_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{p_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , свойство 2, определение (9) и  $\Delta\gamma_{p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) > \Delta\gamma_{p_1, k_2}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , свойство 2, определение (10) с уточнением  $p_1^{M_1}$  на основе показателя статистической волатильности  $\theta = \vartheta$ .

**5. Реализация имитационной модели.** Имитационное моделирование проводилось с помощью созданного веб-ориентированного программного комплекса ПКМ, состоящего из трех модулей: модуль 1 — реализация процесса случайного блуждания по заданной матрице переходов  $\|P_{ij}\|$  (схема  $P_v$ ), модуль 2 (схема  $P_m$ ), модуль 3 (схема А). Для визуализации используется графическая библиотека graphviz. Динамическое взаимодействие с пользователем реализовано средствами фреймворка Vue.js. Генератор случайных чисел используется встроенный криптостойкий с равномерным распределением значений от 0 до 1. Ресурсоёмкие операции выполняются асинхронно, что позволяет минимально затрагивать взаимодействие с интерфейсом. ПКМ имеет функции получения данных для статистических оценок параметров функционирования СТО различных размерностей и видов. На рисунке 4 приведен элемент интерфейса ПКМ с результатами восстановления модели с кратностью реплицированных переходов  $n = 200$ .

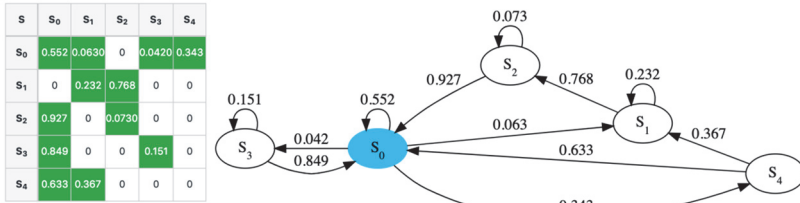


Рис. 4. Элемент интерфейса имитационного комплекса ПККАМ

Результаты имитации процесса функционирования СТО отражаются в виде одной или нескольких матриц  $\|P_{ij}^{Mi}\|$ , значения  $P_{ij}$  закрашиваются в зеленый или красный цвета при  $\epsilon$ -различиях  $\|P_{ij}^{Mi}\|$ , параметры моделирования на рисунке 5:  $k = 20, n = 200, l = 10$ .

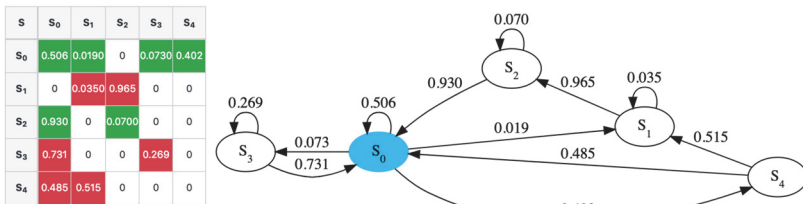


Рис. 5. Восстановление модели с кратностью сгенерированных цепочек ММ  $n = 50$

ПККАМ имеет возможность регулировать точность вычислений, что позволяет оценить требуемые характеристики системы и условия ее стабильного функционирования. Таким образом, регулируя точность вычисления, можно изменить допустимые среднеквадратичные отклонения, принимать решения относительно полученных результатов в виде  $\|\theta\|$  и дальнейшего их анализа в форме  $\Delta\gamma_{\epsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ .

**6. Результаты анализа данных имитационного моделирования.** Получение данных для анализа проходило по агрегированной схеме  $A$ . На основе свойства 2, рассмотрим диапазон:  $\epsilon \in [0.01, 0.015, 0.02, 0.025, 0.03]$ . На рисунке 6 приведены графики, отражающие результаты имитационного моделирования процесса случайного блуждания, состоящие в оценке количества  $\epsilon$ -различных



элементов матрицы переходов  $\|P_{ij}^{M_i}\|$  относительно  $\|P_{ij}\|$ , то есть отображены  $\Delta\gamma_{\varepsilon, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$  для плана  $\Pi(1..100, 1..110, \theta)$ , где  $\theta = \varepsilon$ .

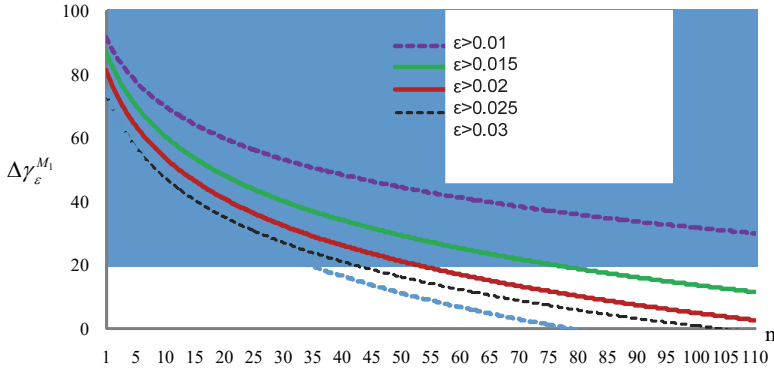


Рис. 6. Аппроксимирующие кривые для  $\Delta\gamma_{\varepsilon}^{M_1}$  для план  $\Pi(1..100, 1..110, \theta)$  для схемы  $A$  при различных пороговых значениях  $\varepsilon$

На графиках показаны аппроксимирующие кривые на основе логарифмического тренда, построенного по  $\Delta\gamma_{\varepsilon, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ .

Средняя величина достоверности построенных аппроксимирующих кривых для  $\Delta\gamma_{\varepsilon, p_1, k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$  составляет  $R^2 = 0.622$ . Можно видеть, что при увеличении порога точности требование к числу переходов возрастает. Так для  $\varepsilon = 0.01$  (верхняя кривая) значение  $\Delta\gamma_{\varepsilon}^{M_1}$  для  $n = 110$  находится на уровне 0.3, а для  $\varepsilon = 0.03$  (нижняя кривая) значение  $\Delta\gamma_{\varepsilon}^{M_1} = 0.3$  достигается при  $n = 23$ .

Для комплексной оценки однородности модели найдем среднее значение доли не совпавших значений в модели по схеме  $A$ . На рисунке 7 показаны вероятности  $\varepsilon$ -различных элементов матрицы  $\|P_{ij}^{M_m}\|$  для  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$  и  $\Pi_2(1..200, 1..110, \theta)$  (св. 1).

Приведенные на рисунке 7 кривые отражают снижение меры  $\Delta\gamma_{\varepsilon, p_1, n}^{M_1}$  неустойчивости модели при увеличении  $\varepsilon$  для  $n = 200$

относительно  $n=100$ . Так, для  $\varepsilon=0.03$  (верхняя кривая)  $\Delta\gamma_{\varepsilon, P_1, 100}^{M_1} \approx 0.18$ , (нижняя кривая)  $\Delta\gamma_{\varepsilon, P_1, 200}^{M_1} \approx 0.1$ .

*Определение 3.* Мера неустойчивости процедуры восстановления матрицы переходов как модельный параметр ( $\varepsilon$ -различие  $\|P_{ij}^{M_i}\|$ ) по схеме  $A$  определяется как *статистическая волатильность* на множестве из  $n$ -реализаций с учетом стандартного отклонения  $s$ :  $\mathcal{G} = s \cdot \sqrt{n}$ .

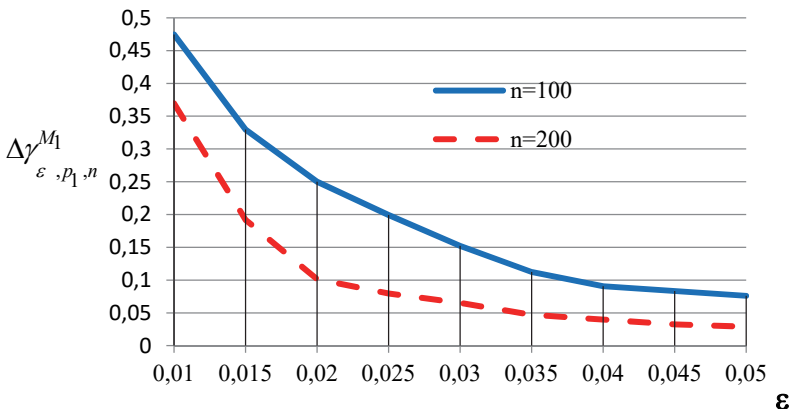


Рис.7. Эмпирические оценочные кривые  $\Delta\gamma_{\varepsilon, P_1, n}^{M_1}$  по всем переходам

при  $\varepsilon$ -различии  $\|P_{ij}\|$  и  $\|P_{ij}^{M_m}\|$

Выражение для  $\mathcal{G}$  позволяет по аналогии с финансовой волатильностью [21] оценить степень неустойчивости статистик (нестационарности статистик) в зависимости от объема повторных запусков модели. Для моделей больших размерностей и переменным числом запусков этот показатель позволит получить числовую меру верификации модели с точки зрения устойчивости (неустойчивости) статистик.

На рисунке 8 представлены оценки статистической волатильности ММ, построенные по планам:  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$  и  $\Pi_2(1..200, 1..110, \theta)$ , где  $\theta = \mathcal{G}$ . То есть модель рассматривается в диапазоне параметров  $n_1 = 1..100, n_2 = 1..200, l = 1..110$ .

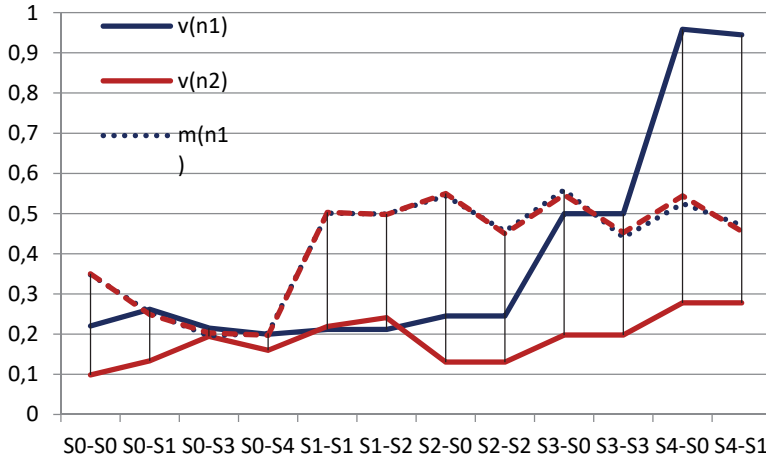


Рис. 8. Оценки величины статистической волатильности ММ, построенные для планов  $\Pi_1(1..110, 1..100, \theta)$  и  $\Pi_2(1..110, 1..200, \theta)$  при  $n1=100, n2=200$

Можно отметить существенное повышение неустойчивости модели (волатильности) относительно математического ожидания при уменьшении кратности запусков модели в два раза.

Для оценки доверительного интервала в простейшем случае используем статистику Стьюдента

$$t = S_{n-1} = \frac{\Gamma(n/2)}{\sqrt{(n-1)\pi \cdot \Gamma((n-1)/2)}} \left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{n/2}. \text{ С учетом ввода переменных}$$

$$T = \frac{\tilde{m}_x - m_x}{\sqrt{\tilde{D}/n}} \in S_{n-1}, \text{ где } S_{n-1} \text{ — распределение по закону Стьюдента;}$$

$\tilde{m}_x$  — оценка математического ожидания;  $\tilde{D}$  — оценка дисперсии распределения, получим:

$$\frac{\varepsilon}{\sigma_{\tilde{m}_x} \cdot \sqrt{2}} = S^{-1}(\beta), \quad \varepsilon = \sqrt{\frac{\tilde{D}}{n}} S^{-1}(\beta). \quad (20)$$

Таким образом, для планов  $\Pi_1(1..100, 1..110, \theta)$  и  $\Pi_2(1..200, 1..110, \theta)$  получим для вероятностей  $\beta_1 = 0,9$  и  $\beta_2 = 0,99$  соответственно:  $S^{-1}(\beta_1) = 1,65$ ;  $S^{-1}(\beta_2) = 2,61$ . Тогда  $\varepsilon_1 = 0,021$ ,

$\varepsilon_2 = 0,033$ , отсюда получим интервалы оценки для вероятности перехода:  $p_{00} (\tilde{m}_x = 0,35)$ :  $\gamma_1 = 0,33$ ;  $\gamma_2 = 0,37$  для  $\beta_1 = 0,9$  и  $\gamma_1 = 0,31$ ;  $\gamma_2 = 0,38$  для  $\beta_2 = 0,99$  с учетом свойства 2. На рисунке 9 отражены оценки доверительных интервалов для  $\tilde{m}_x$ , построенные для модели  $M_x$  по плану:  $\Pi_1(50,100,\theta)$ , где  $\theta_i : \langle k_i, \tilde{m}_x, p_i, v_i \rangle$ ;  $k = 20$ ,  $v_i$  — статистическая волатильность модели.



Рис. 9. Вероятность и доверительные интервалы для оценки  $\tilde{m}_x$  вероятности по  $\Pi_1(50,100,20)$  с учетом  $v_i$

Вероятность  $p$ , с которой оцениваются доверительные интервалы СВ в приведенной схеме, зависят от размера выборки  $N$ . Очевидно, что чем больше  $N$ , тем доверительная вероятность  $p$  выше. Но не для всех инженерных задач возможно получить репрезентативную выборку, в связи с чем целесообразно применять уточненные доверительные интервалы. На рисунке 10 приведена гистограмма распределения оценки СВ  $\|P_{ij}^{Mm}\|$  (переход  $S_0 \rightarrow S_0$ ) и доверительные интервалы для оценки  $\tilde{m}_x$  для переходных вероятностей (вертикальные пунктирные линии) с учетом показателя волатильности модели (вертикальные отрезки). Очевидно, распределение оценки СВ несимметрично, имеет следующие статистические оценки: асимметрия:  $-0,32$ , эксцесс:  $-0,39$ , медиана:  $0,355$ , мода:  $0,347$ .

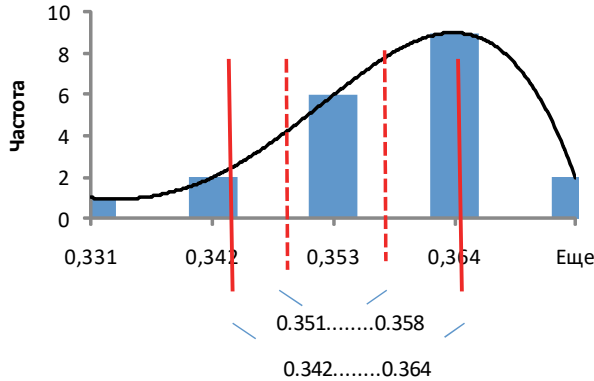


Рис. 10. Гистограмма распределения оценки СВ вероятности перехода  $S_0 \rightarrow S_0$  и доверительные интервалы для  $\Pi_1(50,100,20)$

На рисунке 11 приведена гистограмма распределения оценки случайной величины (СВ)  $\|P_{ij}^{Mm}\|$  (переход  $S_0 \rightarrow S_4$ ). В отличие от ранее рассмотренного виртуального перехода  $S_0 \rightarrow S_0$  распределение оценки СВ более симметрично (асимметрия: -0,15, эксцесс: -0,67, медиана: 0,195, мода: 0,199).

С учетом статистической волатильности модели для перехода  $S_0 \rightarrow S_0$  доверительный интервал изменился с 0,0035 до 0,0091 (рисунки 6 и 7); для перехода  $S_0 \rightarrow S_4$  доверительный интервал изменился с 0,003 до 0,0064 (рисунок 8).

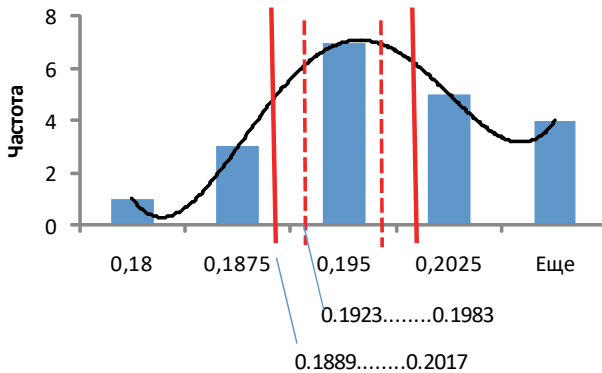


Рис. 11. Гистограмма распределения оценки СВ вероятности перехода  $S_0 \rightarrow S_4$  и доверительный интервал для  $\Pi_1(50,100,20)$

Таким образом, согласно случаю 3.2 (свойство 3)  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1 \cdot p_1 \cdot k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1}) < \Delta\gamma_{\varepsilon_1 \cdot p_2 \cdot k_1}^{M_1}(\Pi_j, \theta_1^{M_1})$ , где  $p_1^{M_1} \pm \nu \rightarrow p_2^{M_1}$ . Это показывает, что существующие статистические оценки в определенных случаях вносят существенную погрешность в анализе качества моделей функционирования СТО.

На рисунке 12 приведена гистограмма распределения оценки  $C \|P_{ij}^{M_m}\|$  (переход  $S_0 \rightarrow S_4$ ) для плана  $\Pi_1(60, 100, 20)$  с учетом свойства 4.

Статистическая характеристика распределения СВ симметрична (асимметрия: 0,59, эксцесс: 1,36, медиана: 0,2215, мода: 0,223). В планах  $\Pi_1(60, 100, 20)$  относительно  $\Pi_2(50, 100, 20)$ , согласно свойству 4.2, имеет место ситуация  $\delta$ -аддитивности ВЧМ модели с параметрами  $\delta = 10$ ,  $k = 60$  и показателями волатильности и СКО для этого случая:  $\nu_1 = 0.064, s = 0.0014$  и  $\nu_2 = 0.023, s = 0.0005$  соответственно.

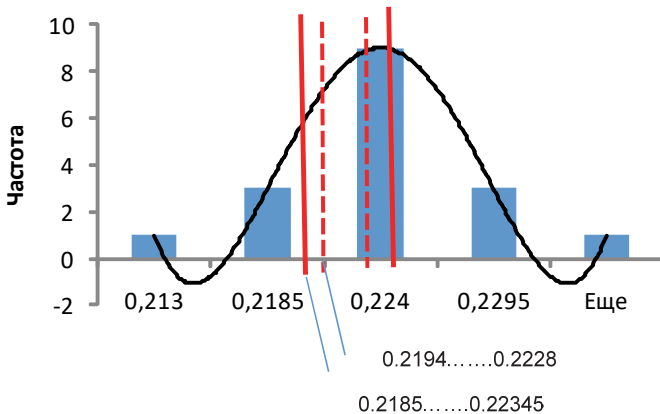


Рис. 12. Гистограмма распределения оценки СВ вероятности перехода  $S_0 \rightarrow S_4$  и доверительный интервал для  $\Pi_1(60, 100, 20)$

Анализ модели, приведенной на рисунке 1, показал, что для принятия решений по процессу функционирования СТО целесообразно иметь рычаги управления режимами в рамках заданных условий  $|R_N - R_r| < \varepsilon$ . На рисунке 13 изображены результаты моделирования по плану  $\Pi(100, 15..70, 9)$  для перехода  $S_0 \rightarrow S_1$  (переход в состояние отказа) с учетом рассчитанных доверительных интервалов.

Отметим, что для промежутка  $l = 35..55$  фактические значения вероятности перехода выходят за пределы рассчитанных стандартным способом интервалов доверия, тогда как учет статистической волатильности модели (красная кривая) уточнил ожидаемый показатель.

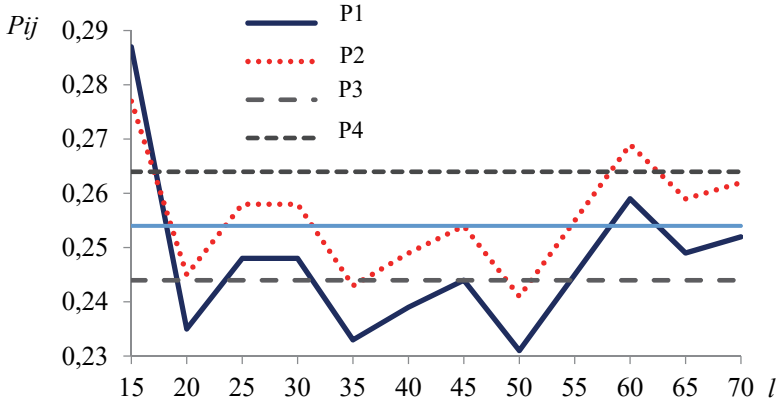


Рис. 13. Результаты моделирования  $\|P_{ij}^{M,m}\|$  по плану П(100,15..70,9) для перехода  $S_0 \rightarrow S_1$  с учетом доверительных интервалов и оценки статистической волатильности: p1 – при  $n=100$ , p2 – с учетом волатильности модели, p3 – доверительная граница (max), p4 – доверительная граница (min)

При наличии у ЛПП требований к точности оценке показателей режимов СТО  $|R_N - R_t| < \varepsilon$  в диапазоне  $\varepsilon = 0.01..0.025$  и ресурса, позволяющего проводить не более  $k = 20$  запусков модели при изменении числа сгенерированных цепочек ММ от 100 до 200, на рисунке 14 схематически показан принцип, позволяющий принимать решения по дополнительному проведению профилактических работ.

Для  $\varepsilon = 0.015$  оценка СУ по мере  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1, P_1, k_1}^{M_1}$  колеблется от 0,67 до 0,81, что весьма существенно при принятии решений о наличии проблемной ситуации при исследовании перехода в состояние отказа. Если требования к ресурсам не позволяют проводить дополнительные запуски модели в увеличить число переходов, то модель может считаться  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1, P_1, k_1}^{M_1}$  устойчивой при  $\varepsilon = 0.015, n = 100, k = 20$ .

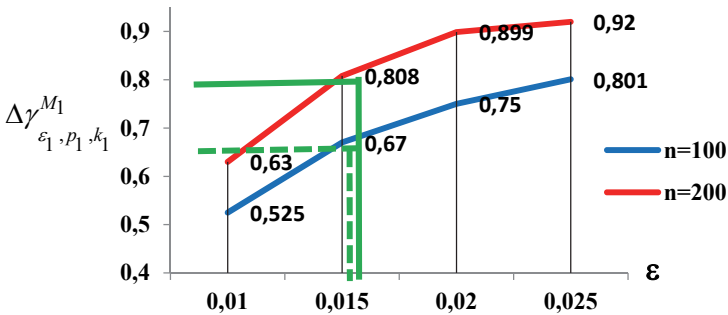


Рис. 14. Оценки СУ  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}$  при изменении числа реплицированных переходов

Ввиду того, что для проверки гипотез о статистической устойчивости и статистической волатильности моделей требуется довольно большой объем расчетных процедур, целесообразна автоматизация этого процесса в форме системы поддержки принятия решений, что является темой для дальнейших исследований авторов.

**7. Заключение.** Исследование статистической устойчивости в задачах анализа квазиоднородной модели сложных систем в частности и процессов функционирования СТО в целом, особенно на границе изменения этапов их жизненного цикла, например при переходе к режиму деградиционных изменений, режиму устаревания или, напротив, совершенствования, сопряжено с рядом принципиальных особенностей, которые могут ограничить использование принятых статистик. Существующие исследования направлены в основном на изучение обширной области оценки качества моделей в рамках существующих мер.

В связи с многомерностью планов экспериментов, сложностью задач квалиметрического анализа моделей, рассмотрение статистической устойчивости в общем виде не представляется возможным. Перспективным является конструктивный подход к определению мер СУ. Такой подход был реализован для СТО. Приведенные в исследовании статистическая устойчивость и статистическая волатильность позволили получить информацию о качестве модели с точки зрения понимания устойчивости модели как фактора принятия решений в области анализа и синтеза систем. Предложенные формальные описания и свойства, характеризующие СУ моделей, могут быть полезны для специалистов в области анализа сложных технических объектов, в том числе в рамках Марковских моделей.



Вычисленные оценки для приведенного примера показали, что, например, для  $\varepsilon = 0.015$  оценка СУ  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1}$  колеблется от 0,67 до

0,81  $\left( 0 < \Delta\gamma_{\varepsilon_1, p_1, k_1}^{M_1} < 1 \right)$  при различных размерностях выборок. Это

существенно при принятии решений о наличии проблемной ситуации при исследовании перехода в состояние отказа.

С учетом введенных определений и свойств СУ в примере модель может считаться  $\Delta\gamma_{\varepsilon_1, k_1, m_1}^{M_1}$  -устойчивой при  $\varepsilon = 0.015, n = 100, k = 20$ .

Дальнейшие исследования предполагается вести в направлении расширения группы мер валидации моделей, а также создания системы поддержки и принятия решений по рабочим режимам в области практического применения полученных результатов для исследования функционирования СТО, в том числе в критических условиях и на этапе деградации их свойств, а также в направлении учета временных параметров имитации процесса функционирования СТО на основе полумарковской модели.

### Литература

1. *Herniter M.E.* Introduction to Model-Based System Design // Rose Hulman Institute of Technology. 2010. URL: [http://wiki.ece.rosehulman.edu/herniter/images/8/8d/MBSD1\\_Lecture\\_Notes\\_Complete\\_Winter09-10.pdf](http://wiki.ece.rosehulman.edu/herniter/images/8/8d/MBSD1_Lecture_Notes_Complete_Winter09-10.pdf) (дата обращения: 20. 06. 2018).
2. *Panella I., Hardwick G.* Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems // International Conference Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. 2017. pp. 55–76.
3. *Боев В. Д.* Исследование адекватности GPSS World и AnyLogic при моделировании дискретно-событийных процессов: Монография // СПб: ВАС. 2011. 404 с.
4. *Скатков А.В., Балакирева И.А.* Обеспечение функциональной устойчивости операционных характеристик систем мониторинга окружающей среды при произвольном входном потоке данных // Системы контроля окружающей среды. 2017. № 8(28). С. 47–54.
5. *Laaksonen O., Peltoniemi M.* The essence of dynamic capabilities and their measurement // International Journal of Management Reviews. 2018. vol. 20(2). pp. 184–205.
6. *Langville A.N., Meyer C.D.* Updating Markov chains with an eye on Google's PaGeRank // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2006. vol. 27(4). pp. 968–987.
7. *Мусаев А.А., Скворцов М.С.* Методы параметрической оптимизации надежности структур но-сложных технических систем // Труды СПИИРАН. 2008. Вып. 6. С. 44–50.
8. *Li Y.F., Zio E.* A multi-state model for the reliability assessment of a distributed generation system via universal generating function // Reliability Engineering & System Safety. 2012. vol. 106. pp. 28–36.

9. *Chen N., Majda A.* Conditional Gaussian systems for multiscale nonlinear stochastic systems: prediction, state estimation and uncertainty quantification // *Entropy*. 2018. vol. 20. no. 7. pp. 1–80.
10. *Кондрашков А.В., Пичугин Ю.А.* Идентификация и статистическая проверка устойчивости модели Вольтерры // *Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Физико-математические науки*. 2014. № 1(189). С. 124–135.
11. *Garza-Reyes J.A. et al.* A PDCA-based approach to Environmental Value Stream Mapping (E-VSM) // *Journal of Cleaner Production*. 2018. vol. 180. pp. 335–348.
12. *Gorban I.I.* The Statistical Stability Phenomenon // *Springer*. 2017. 361 p.
13. *Mishura I.S.* Stochastic Calculus for Fractal Brownian Motion and Related Processes // *Springer*. 2008. 393 p.
14. *Микони С.В., Соколов Б.В. Юсупов Р.М.* Квалиметрия моделей и полимодельных комплексов: монография // М.: РАН. 2018. 314 с.
15. *Sokolov B.V., Yusupov R.M.* Information Fusion Models' Quality Estimation And Models' Quality Control Theory // VI ISTC Scientific Advisory Committee Seminar Science and Computing. 2003. pp. 102–104.
16. *Ростовцев Ю.Г., Юсупов Р.М.* Проблема обеспечения адекватности субъектно-объектного моделирования // *Известия вузов. Приборостроение*. 1991. Т. 24. № 7. С. 7–14.
17. *Советов Б.Я. и др.* Имитационное моделирование систем // Петродворец: ВУНЦ ВМФ. 2010. 343 с.
18. *Dolgui A., Ivanov D., Sokolov B.* Scheduling of recovery action in the supply chain with resilience analysis consideration // *International Journal of Production Research*. 2018. vol. 56. no. 19. pp. 6473–6490.
19. *Zhao Y. et al.* Fast noisy image quality assessment based on free-energy principle // *Communications in Computer and Information Science*. 2018. vol. 815. pp. 290–299.
20. *Okhtilev M.Yu. et al.* Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions // *Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW*. 2018. pp. 282–284.
21. *Sokolov B. et al.* Logic Dynamic Model And Algorithms Of Operation Complex // *European Modeling & Simulation Symposium (EMSS-2018)*. 2018. pp. 59–67.
22. *Degiannakis S., Floros C.* Methods of Volatility Estimation and Forecasting. In: *Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data* // *Palgrave Macmillan*. 2015. pp. 58–109.
23. *Gerasimova D.S., Sayapin A.V., Palukhin A.A., Katsura A.V.* Application of the bootstrap method for statistical characteristics assessment of aircraft components' small samples // *Сибирский журнал науки и технологий*. 2018. № 3. С. 482–488. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/application-of-the-bootstrap-method-for-statistical-characteristics-assessment-of-aircraft-components-small-samples> (дата обращения: 24.03.2019).
24. *Park K.I.* Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications // *Springer International Publishing*. 2018. 273 p.
25. *Tien I., Der Kiureghian A.* Algorithms for bayesian network modeling and reliability assessment of infrastructure systems // *Reliability Engineering & System Safety*. 2016. vol. 156. pp. 134–147.

**Доронина Юлия Валентиновна** — д-р техн. наук, доцент, профессор, кафедра информационных систем института информационных технологий и управления в технических системах, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: системный анализ и синтез, реинжиниринг информационных систем, моделирование организационных процессов. Число научных публикаций — 100.

juvado@yandex.ru; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Российская Федерация;  
р.т.: +7 (8692) 435-138.

**Скатков Александр Владимирович** — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра информационных технологий и компьютерных систем института информационных технологий и управления в технических системах, Севастопольский государственный университет (СевГУ). Область научных интересов: системный анализ, критические инфраструктуры, гарантоспособные сервисы, распределенные системы. Число научных публикаций — 300. vm1945@mail.ru; ул. Университетская, 33, 299053, Севастополь, Российская Федерация; р.т.: +7 (8692) 435-173.

YU.V. DORONINA, A.V. SKATKOV  
**STATISTICAL STABILITY ANALYSIS OF STATIONARY  
MARKOV MODELS**

*Doronina YuV., Skatkov A.V. Statistical Stability Analysis of Stationary Markov Models.*

**Abstract.** An approach is proposed to assess the quality of stationary Markov models without absorbing states on the basis of a measure of statistical stability: the description is formulated and its properties are determined. It is shown that the estimates of statistical stability of models were raised by different authors, either as a methodological aspect of the model quality, or within the framework of other model properties. When solving practical problems of simulation, for example, based on Markov models, there is a pronounced problem of ensuring the dimension of the required samples. On the basis of the introduced formulations, a constructive approach to solving the problems of sample size optimization and statistical volatility analysis of the Markov model to the emerging anomalies with restrictions on the accuracy of the results is proposed, which ensures the required reliability and the exclusion of non-functional redundancy.

To analyze the type of transitions in the transition matrix, a measure of its divergence (normalized and centered) is introduced. This measure does not have the completeness of the description and is used as an illustrative characteristic of the models of a certain property. The estimation of the divergence of transition matrices can be useful in the study of models with high sensitivity of detection of the studied properties of objects. The key stages of the approach associated with the study of quasi-homogeneous models are formulated.

Quantitative estimates of statistical stability and statistical volatility of the model are proposed on the example of modeling a real technical object with failures, recovery and prevention. The effectiveness of the proposed approaches in solving the problem of statistical stability analysis in the problems of qualimetric analysis of quasi-homogeneous models of complex systems is shown. On the basis of the offered constructive approach the operational tool of decision-making on parametric and functional adjustment of difficult technical objects on long-term and short-term prospects is received.

**Keywords:** Statistical Stability, Quasi-Homogeneous Model, Statistical Volatility, Random Walk, Markov Chain, Complex Technical System, Accuracy, Transition Probability, Number of Process Implementations, Model Divergence.

**Doronina Julia Valentinovna** — Ph.D., Dr.Sci., Associate Professor, Professor, Department Information Systems of Institute of Information Technologies and Management in the Technical Systems, Sevastopol State University (SEVGU). Research interests: system analysis and synthesis, reengineering of information systems, modeling of organizational processes. The number of publications — 100. [juvado@yandex.ru](mailto:juvado@yandex.ru); 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russian Federation; office phone: +7 (8692) 435–138.

**Skatkov Aleksander Vladimirovich** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, Professor, Department of information technologies and computer systems of Information Technologies and Management in the Technical Systems, Sevastopol state University (SevSU). Research interests: system analysis, critical infrastructure, dependable services, distributed systems. The number of publications — 300. [vm1945@mail.ru](mailto:vm1945@mail.ru); 33, Universitetskaya str., 299053, Sevastopol, Russian Federation; office phone: +7 (8692) 435-173.

## References

1. Hermiter M.E. Introduction to Model-Based System Design // Rose Hulman Institute of Technology. 2010. Available at: <http://wiki.ece.rosehulman.edu/>

- hermiter/images/8/8d/MBSD1\_ Lecture\_ Notes\_ Complete\_ Winter09-10.pdf (accessed: 20.06.2018).
2. Panella L., Hardwick G. Model Oriented System Design Applied to Commercial Aircraft Secondary Flight Control Systems. International Conference Simulation and Modeling Methodologies, Technologies and Applications. 2017. pp. 55–76.
  3. Boev V.D. *Issledovanie adekvatnosti GPSS World i AnyLogic pri modelirovanii diskretno-sobytnykh processov: Monografiya* [Study of the adequacy of GPSS World and AnyLogic in the modeling of discrete-event processes]. SPb: VAS. 2011. 404 p. (In Russ.).
  4. Skatkov A.V., Balakireva I.A. [Ensuring functional stability of operating characteristics of environmental monitoring systems at arbitrary input data flow]. *Sistemy kontrolja okruzhajushhej sredy – Monitoring systems of environment*. 2017. vol. 8(28) pp. 47–54. (In Russ.).
  5. Laaksonen O., Peltoniemi M. The essence of dynamic capabilities and their measurement. *International Journal of Management Reviews*. 2018. vol. 20(2). pp. 184–205.
  6. Langville A.N., Meyer C.D. Updating Markov chains with an eye on Google's PaGeRank. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*. 2006. vol. 27(4). pp. 968–987.
  7. Musaev A.A., Skvorcov M.S. [Methods of parametric optimization of reliability of structurally complex technical systems]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2008. vol. 6. pp. 44–50. (In Russ.).
  8. Li Y.F., Zio E. A multi-state model for the reliability assessment of a distributed generation system via universal generating function. *Reliability Engineering & System Safety*. 2012. vol. 106. pp. 28–36.
  9. Chen N., Majda A. Conditional Gaussian systems for multiscale nonlinear stochastic systems: prediction, state estimation and uncertainty quantification. *Entropy*. 2018. vol. 20. no. 7. pp. 1–80.
  10. Kondrashkov A.V., Pichugin Ju.A. [Identification and statistical verification of Volterra model stability]. *Nauchno-tehnicheskie ведомosti SpbGPU. Fiziko-matematicheskie nauki – St. Petersburg Polytechnic University Journal. Physics and Mathematics*. 2014. vol. 1(189). pp. 124–135. (In Russ.).
  11. Garza-Reyes J.A. et al. A PDCA-based approach to Environmental Value Stream Mapping (E-VSM). *Journal of Cleaner Production*. 2018. vol. 180. pp. 335–348.
  12. Gorban I.I. *The Statistical Stability Phenomenon*. Springer. 2017. 361 p.
  13. Mishura I.S. *Stochastic Calculus for Fractional Brownian Motion and Related Processes*. Springer. 2008. 393 p.
  14. Mikoni S.V., Sokolov B.V., Jusupov R.M. *Kvalimetrija modelej i polimodel'nykh kompleksov: monografiya* [Qualimetry of models and polydivide complexes: monograph]. M.: RAN. 2018. 314 p. (In Russ.).
  15. Sokolov B.V., Yusupov R.M. Information Fusion Models' Quality Estimation And Models' Quality Control Theory. VI ISTC Scientific Advisory Committee Seminar Science and Computing. 2003. pp. 102–104.
  16. Rostovcev Ju.G., Jusupov R.M. [The problem of ensuring the adequacy of subject-object modeling]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Priborostroenie – Journal of Instrument Engineering*. 1991. Issue 24. vol. 7. pp. 7–14. (In Russ.).
  17. Sovetov B.Ja. et al. *Imitacionnoe modelirovanie sistem* [Simulation modeling of systems]. Petrodvorec: VUNC VMF. 2010. 343 p. (In Russ.).
  18. Dolgui A., Ivanov D., Sokolov B. Scheduling of recovery action in the supply chain with resilience analysis consideration. *International Journal of Production Research*. 2018. vol. 56. no. 19. pp. 6473–6490.
  19. Zhao Y. et al. Fast noisy image quality assessment based on free-energy principle. *Communications in Computer and Information Science*. 2018. vol. 815. pp. 290–299.
  20. Okhtilev M.Yu. et al. Methods and Algorithms of Integrated Modeling of Complex Technical Objects in Dynamically Changing Conditions. Proceedings of the International Scientific Conference MMET NW. 2018. pp. 282–284.

21. Sokolov B. et al. Logic Dynamic Model And Algorithms Of Operation Complex. European Modeling & Simulation Symposium (EMSS-2018). 2018. pp. 59–67.
22. Degiannakis S., Floros C. Methods of Volatility Estimation and Forecasting. In: Modelling and Forecasting High Frequency Financial Data. Palgrave Macmillan. 2015. pp. 58–109.
23. Gerasimova D.S., Sayapin A.V., Palukhin A.A., Katsura A.V. [Application of the bootstrap method for statistical characteristics assessment of aircraft components' small samples]. *Sibirskij zhurnal nauki i tekhnologii – Siberian Journal of Science and Technology*. 2018. vol. 3. pp. 482–488. Available at: <https://cyberleninka.ru/article/n/application-of-the-bootstrap-method-for-statistical-characteristics-assessment-of-aircraft-components-small-samples> (accessed: 24.03.2019).
24. Park K.I. Fundamentals of Probability and Stochastic Processes with Applications to Communications. Springer International Publishing. 2018. 273 p.
25. Tien I., Der Kiureghian A. Algorithms for bayesian network modeling and reliability assessment of infrastructure systems. *Reliability Engineering & System Safety*. 2016. vol. 156. pp. 134–147.