

А.Р. ГАЙДУК  
**К СИНТЕЗУ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ГУРВИЦЕВЫХ СИСТЕМ  
УПРАВЛЕНИЯ**

*Гайдук А.Р. К синтезу квазилинейных гурвицевых систем управления.*

**Аннотация.** Рассматривается задача синтеза систем управления нелинейными объектами с дифференцируемыми нелинейностями. Актуальность задачи обусловлена трудностями практического синтеза нелинейных систем управления большинством известных методов. Во многих случаях даже обеспечение этими методами только устойчивости положения равновесия синтезируемой системы представляет большую сложность. Отличительной особенностью рассматриваемого ниже метода синтеза нелинейных систем управления является использование моделей нелинейных объектов, представленных в квазилинейной форме. Эта форма нелинейных дифференциальных уравнений существует, если нелинейности в их правых частях являются дифференцируемыми по всем своим аргументам. Квазилинейная модель объекта управления позволяет свести задачу синтеза к решению алгебраической системы уравнений, которая имеет единственное решение в случае, когда объект является управляемым в соответствии с приведенным в статье условием управляемости аналогичным условию управляемости критерия Калмана. Процедура синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей объектов является очень простой. Практически она близка к известному полиномиальному методу синтеза линейных систем управления. Уравнения нелинейных систем, синтезированных с применением квазилинейных моделей, могут быть всегда представлены в квазилинейной форме.

Основным результатом статьи является доказательство теоремы и следствия из нее об условиях асимптотической устойчивости в целом положения равновесия нелинейных систем управления, синтезированных на основе квазилинейных моделей объектов. При доказательстве теоремы и следствия используются свойства простых матриц и известные теоремы об устойчивости возмущенных систем дифференциальных уравнений. Порядок исследования устойчивости положения равновесия квазилинейных систем управления на основе доказанной теоремы иллюстрируется численными примерами. Компьютерное моделирование синтезированных квазилинейных систем управления свидетельствует о корректности условий доказанной теоремы.

Полученные результаты позволяют более обоснованно применять метод синтеза нелинейных систем на основе квазилинейных моделей при создании различных систем управления объектами энергетической, авиационной, космической, робототехнической и других отраслей промышленности.

**Ключевые слова:** объект, нелинейность, квазилинейная модель, управление, аналитический синтез, система, устойчивость в целом.

**1. Введение.** Системы управления все чаще синтезируются как нелинейные вследствие возросших требований к их качеству. Задача синтеза нелинейных систем управления рассматривалась во многих работах, в которых были предложены различные подходы к ее решению. Нелинейности в правых частях уравнений объектов чаще всего являются дифференцируемыми по всем своим аргументам, поэтому большинство известных методов решения задачи синтеза ориентировано на преобразование этих уравнений к формам, существенно

упрощающим решение этой задачи [1-22]. Во многих работах используется преобразование к различным каноническим формам [1-8]. А. Г. Лукьяновым и В. И. Уткиным предложено преобразование к регулярной форме, которая позволяет декомпозировать задачу синтеза систем высокой размерности на ряд задач более низкой размерности [9]. Теория пассивности Дж. Виллемса (J. C. Willems) дает возможность при некоторых условиях обеспечить асимптотическую устойчивость положения равновесия нелинейных систем введением пассивизирующих обратных связей. Эта теория применяется при решении задач стабилизации, адаптивного управления, синхронизации и ряда других [10-16]. Преобразование уравнений объектов к треугольной форме позволяет применить метод бэкстеппинга для построения стабилизирующих, адаптивных и оптимальных управлений [17-19]. К методу преобразований относится и линеаризация нелинейных моделей объектов управления путем введения обратных связей по состоянию [7, 20-23].

Однако в общем случае условия и алгоритм построения соответствующего преобразования известны лишь, когда уравнения объекта приводятся к канонической управляемой форме Бруновского (Brunovsky controller form) [4, 7]. Причем и проверка условий возможности приведения, и построение соответствующих преобразований очень сложны, в особенности при высоких порядках нелинейных объектов. Практическое применение других методов затруднено как отсутствием конструктивных условий, при которых уравнения нелинейного объекта могут быть приведены к подходящей для решения задачи синтеза форме, так и отсутствием алгоритмов построения соответствующих преобразований.

В данной работе рассматривается задача синтеза нелинейных систем управления на основе уравнений объектов, преобразованных к квазилинейной форме [6, 24-27]. Для проведения такого преобразования требуется лишь дифференцируемость по всем аргументам нелинейностей, имеющихся в правых частях дифференциальных уравнений объектов. Эквивалентность уравнений в квазилинейной форме, то есть квазилинейных моделей, и исходных нелинейных уравнений обеспечивается известной независимостью от пути интегрирования криволинейных интегралов от функций многих переменных.

Известно несколько методов синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей [24-27]. В одном из них используется преобразование Ляпунова переменных состояния квазилинейной модели, поэтому этот метод является довольно трудоемким. Он приводит к системе, положение равновесия которой в целом асимптотически устойчиво, однако условия, при которых задача син-

теза имеет решение, довольно трудно проверить непосредственно по заданным нелинейным или квазилинейным уравнениям объекта.

Поэтому далее рассматривается иной метод синтеза, при котором не требуется проводить преобразование переменных состояния квазилинейной модели [6, 27]. Этот метод аналитического синтеза нелинейных систем управления на основе квазилинейных моделей (АСНСУ КЛМ) является очень простым и близким к полиномиальному методу синтеза систем управления линейными объектами [27]. Условием разрешимости задачи синтеза этим методом является естественное условие управляемости объекта, приведенное ниже. Практически метод аналитического синтеза нелинейных систем управления сводится к решению системы алгебраических уравнений, «коэффициенты» и «неизвестные» которой являются функциями переменных состояния объекта управления. Результирующее квазилинейное управление представляет собой совокупность обратных связей по переменным состояния объекта [27].

Метод АСНСУ КЛМ приводит к замкнутым квазилинейным системам, матрицы уравнений в переменных состояния которых имеют собственные числа с отрицательными вещественными частями. Поэтому такие квазилинейные системы управления называются гурвицевыми. Этот метод гарантирует асимптотическую устойчивость в большом положении равновесия синтезированных систем. Однако условия, при которых это положение является асимптотически устойчивым и в целом (global stability [7, 18]), то есть при сколь угодно больших, но конечных начальных условиях, не были известны.

Цель данной работы — получить эти условия. Однако для большей ясности далее кратко излагается указанный метод синтеза нелинейных гурвицевых систем управления, а затем формулируется основная теорема, следствие из нее, и даются их доказательства. При этом применяется матрица, которая используется в известном методе А. Н. Крылова для определения коэффициентов характеристических полиномов матриц [28]. Доказанная здесь теорема и следствие из нее позволяют практически устанавливать, является ли асимптотически устойчивым в целом положение равновесия нелинейной гурвицевой системы, синтезированной методом АСНСУ КЛМ.

**2. Синтез квазилинейных гурвицевых систем.** Порядок представления уравнений нелинейных объектов управления с дифференцируемыми нелинейностями в квазилинейной форме подробно изложен в [27], поэтому здесь он не рассматривается. Квазилинейные модели нелинейных одномерных объектов с дифференцируемыми нелинейностями имеют следующий вид:

$$\dot{x} = A(x)x + b(x)u, \quad (1)$$

где  $x = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T$  — вектор состояния;  $b(x) = [b_1(x) \ b_2(x) \ \dots \ b_n(x)]^T$  и  $A(x) = [a_{ij}(x)]$  — функциональные  $n$ -вектор и  $n \times n$ -матрица;  $b_i(x)$  и  $a_{ij}(x)$  — непрерывные функции переменных состояния  $x_1, x_2, \dots, x_n$  объекта (1), ограниченные при всех ограниченных  $x$  [24, 25, 27].

Предполагается, что все переменные состояния  $x_i$  объекта управления (1) доступны измерению, поэтому управление по состоянию ищется также в квазилинейной форме  $u = u(x) = -k^T(x)x$ , где  $k^T(x) = [k_1(x) \ k_2(x) \ \dots \ k_n(x)]$  — вектор варьируемых скалярных функций. Именно эти функции определяются в процессе синтеза.

Из уравнения (1) и принятого вида управления следует, что модель замкнутой системы также является квазилинейной:

$$\dot{x} = H(x)x, \quad (2)$$

где системная матрица:

$$H(x) = A(x) - b(x)k^T(x). \quad (3)$$

Если  $x = x(t, x_0)$  — решение системы (2), то  $x(0, x_0) = x_0$ , где  $x_0 \in \Omega_0$ . Здесь  $x_0$  — вектор начальных условий, а  $\Omega_0$  — некоторая область в  $R^n$ , включающая положение равновесия  $x = 0$  объекта (1) и системы (2).

Решение задачи синтеза методом АСНСУ КЛМ ищется, если выполняется известное условие управляемости объекта (1), которое имеет вид:

$$\det U(x) \neq 0. \quad (4)$$

Здесь  $U(x)$  — матрица управляемости объекта (1), которая определяется выражением, аналогичным матрице управляемости Р. Калмана [29] для линейных одномерных систем с постоянными параметрами:

$$U(x) = [b(x) \ A(x)b(x) \ \dots \ A^{n-1}(x)b(x)]. \quad (5)$$

Пусть  $\lambda$  — комплексная переменная. Тогда на основе известного равенства  $\det(\lambda E - A + bk^T) = \det(\lambda E - A) + k^T \text{adj}(\lambda E - A)b$  [27] характе-

ристический полином  $H(\lambda, x) = \det(\lambda E - H(x))$  системной матрицы  $H(x)$  (3) можно представить в виде следующего выражения:

$$H(\lambda, x) = A(\lambda, x) + \sum_{i=1}^n k_i(x) V_i(\lambda, x), \quad (6)$$

где

$$A(\lambda, x) = \det(\lambda E - A(x)) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(x) \lambda^i, \quad (7)$$

$$V_i(\lambda, x) = e_i \operatorname{adj}(\lambda E - A(x)) b(x) = \sum_{j=0}^{n-1} v_{ij}(x) \lambda^j, \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

В приведенных выражениях  $E$  — единичная матрица,  $e_i$  — ее соответствующие строки;  $\alpha_i(x)$ ,  $v_{ij}(x)$  — коэффициенты полиномов (7), (8), являющиеся скалярными функциями вектора состояния  $x$ .

На основе требуемых свойств синтезируемой системы формируется желаемый характеристический полином системной матрицы  $H(x)$  (3) в виде полинома с постоянными коэффициентами, то есть:

$$H^*(\lambda) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} \delta_i \lambda^i, \quad (9)$$

причем этот полином всегда берется таким, чтобы его коэффициенты удовлетворяли условиям критерия устойчивости Гурвица.

Если в равенстве (6) полином  $H(\lambda, x)$  заменить полиномом  $H^*(\lambda)$  (9), то из равенств (6)-(9) выводится следующая система алгебраических уравнений:

$$\begin{bmatrix} v_{10} & v_{20} & \cdots & v_{n0} \\ v_{11} & v_{21} & \cdots & v_{n1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{1,n-1} & v_{2,n-1} & \cdots & v_{n,n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{bmatrix}, \quad (10)$$

где  $\gamma_i = \gamma_i(x) = \delta_i - \alpha_i(x)$ ,  $i = \overline{0, n-1}$ . В системе (10) аргументы всех нелинейных скалярных функций опущены для краткости.

Можно показать, что определитель матрицы алгебраической системы (10) пропорционален определителю из условия (4). Поэтому, если это условие выполняется, то система (10) имеет единственное решение. Это решение определяет вектор  $k(x)$  из равенства (3), при котором характеристический полином  $H(\lambda, x)$  матрицы  $H(x)$  системы (2) равен полиному  $H^*(\lambda)$ , удовлетворяющему критерию Гурвица.

Покажем, что положение равновесия  $x \equiv 0$  системы (2), синтезированной на основе соотношений (7)-(10), устойчиво в большом. Если в (3) вектор  $x \equiv 0$ , то матрица  $H(0)$  — постоянная, а все ее собственные числа строго отрицательны. Поэтому матрица  $P$ , являющаяся решением уравнения Ляпунова  $H^T(0)P + PH(0) = -C$  при матрице  $C > 0$  положительно определенная. Следовательно, положительно определенная функция  $V(x) = x^T P x$  имеет отрицательно определенную производную по времени вдоль траекторий системы  $\dot{x} = H(0)x$ , то есть эта линейная система асимптотически устойчива. С другой стороны, нелинейную систему (2) можно представить следующим образом:

$$\dot{x} = H(0)x + D(x)x, \quad (11)$$

где  $D(x) = H(x) - H(0)$ . Тогда производная по времени функции  $V(x) = x^T P x$  вдоль траекторий  $x = x(t, x_0)$  системы (11), начинающихся в точках  $x_0$ , будет определяться выражением:

$$\dot{V}(x) = -x^T C x + 2x^T P D(x)x. \quad (12)$$

Из выражения (12) следует, что в окрестности положения равновесия  $x \equiv 0$  систем (2) и (11) существует некоторая ограниченная область пространства  $\Omega_x \in R^n$  такая, что на траекториях  $x = x(t, x_0) \in \Omega_x$  этих систем, начинающихся в точках  $x_0 \in \Omega_0 \in \Omega_x$ , производная по времени  $\dot{V}(x)$  является отрицательно определенной функцией. Отсюда в силу известной теоремы Ляпунова следует, что решение  $x(t, x_0)$  системы (2), синтезированной методом АЧСУ КЛМ, то есть на основе соотношений (7)-(10), удовлетворяет условию:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0)\| = 0, \quad x_0 \in \Omega_0 \in \Omega_x. \quad (13)$$

Здесь  $\Omega_x$  — область пространства  $R^n$ , которой принадлежат все траектории системы (2), начинающиеся в точках  $x_0 \in \Omega_0$  [27].

Как видно, рассматриваемый метод АЧНСУ КЛМ действительно является очень простым. С практической точки зрения целесообразно, чтобы область  $\Omega_0$  в (13) была не ограниченной. Однако установить условия, при которых этот факт имеет место, на основе приведенных уравнений (2) или (11) не удается. Пользуясь известными оценками для квадратичных форм, которыми являются в данном случае функции  $V(x)$  и  $\dot{V}(x)$ , можно на основе уравнения (11) найти оценку области  $\Omega_x$ . Однако уже при  $n > 2$  этот процесс является весьма затруднительным, а оценка этой области получается очень малой, что не соответствует действительности.

Поэтому задача установления условий, при которых система (2), синтезированная методом АЧНСУ КЛМ, то есть на основе соотношений (7)-(10), является асимптотически устойчивой в целом, представляется теоретически и практически важной.

*Замечание 1.* Соотношения (7)-(10) при условии (4) могут использоваться для определения вектора  $k^T$  управления по состоянию  $u = -k^T x$  при постоянных матрице  $A$  и векторе  $b$  в уравнении (1), то есть в линейном случае. При этом результирующая замкнутая система, естественно, оказывается асимптотически устойчивой в целом.

**3. Основной результат.** На основе изложенного можно заключить, что если квазилинейная система (2) синтезирована методом АЧНСУ КЛМ, то собственные числа  $\lambda_i^H$ ,  $i = \overline{1, n}$  ее матрицы  $H(x)$  при всех  $x$  могут быть постоянными с отрицательными вещественными частями и являться попарно различными, то есть:

$$\lambda_i^H = const, \operatorname{Re} \lambda_i^H < 0, \lambda_i^H \neq \lambda_j^H, i \neq j, i, j = \overline{1, n}. \quad (14)$$

Предположим, существуют матрица  $S(x)$  и обратная к ней матрица  $S^{-1}(x)$ , при которых выполняются условия:  $S(x)S^{-1}(x) = E$  и  $S(x)H(x)S^{-1}(x) = \operatorname{diag}\{\lambda_1^H, \lambda_2^H, \dots, \lambda_n^H\}$ . Обозначим  $\dot{S}(x(t, x_0))$  — производную по времени матрицы  $S(x)$  вдоль траекторий системы (2), а также введем матрицу  $B(t) = \dot{S}(x(t, x_0))S^{-1}(x(t, x_0))$ . Тогда условия, при которых положение равновесия гурвицевой системы (2) с известными непрерывными элементами матрицы  $H(x)$  является асимптотически устойчивым в целом, устанавливаются следующей теоремой.

*Теорема.* Если собственные числа  $\lambda_i^H$  матрицы  $H(x)$  гурвицевой квазилинейной системы (2) удовлетворяют неравенствам (14) и выполняется условие:

$$\int_0^{\infty} \|B(t)\| dt < \infty; \quad (15)$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0, \quad (16)$$

то положение равновесия  $x \equiv 0$  этой системы асимптотически устойчиво в целом.

Фактически, сформулированная теорема определяет условия, при которых вектор состояния  $x = x(t, x_0)$  квазилинейной системы (2) является затухающим до нуля асимптотически и в тех случаях, когда в (13) норма  $\|x_0\| \leq M_0$ , где  $M_0$  — сколь угодно большое число.

*Доказательство.* Так как по условиям теоремы выполняются неравенства (14), то есть все собственные числа  $\lambda_i^H$  матрицы  $H(x)$  (3) при всех  $x$  являются попарно различными, то матрица  $H(x)$  является простой и подобна диагональной матрице. Отсюда следует существование указанных выше матриц  $S(x)$  и  $S^{-1}(x)$  [30].

Используя матрицу  $S(x)$ , введем вектор:

$$\hat{x} = S(x)x. \quad (17)$$

С учетом (2) производная по времени вектора  $\hat{x}$  равна:

$$\dot{\hat{x}} = \dot{S}(x)x + S(x)\dot{x} = \dot{S}(x)x + S(x)H(x)x.$$

Это равенство представим следующим образом:

$$\dot{\hat{x}} = \dot{S}(x)x + S(x)H(x)S^{-1}(x)S(x)x = \dot{S}(x)x + S(x)H(x)S^{-1}(x)\hat{x}, \quad (18)$$

где учтено обозначение (17). С учетом диагональной матрицы  $M_d = S(x)H(x)S^{-1}(x) = \text{diag}\{\lambda_1^H, \lambda_2^H, \dots, \lambda_n^H\}$  из (18) снова с учетом обозначения (17) выводим:

$$\dot{\hat{x}} = \dot{S}(x)S^{-1}(x)S(x)x + M_d\hat{x} = [M_d + \dot{S}(x)S^{-1}(x)]\hat{x}. \quad (19)$$



Отсюда следует, что вектор  $\hat{x}$  — решение возмущенной линейной дифференциальной системы (19) с почти постоянной матрицей  $M_d + B(t)$  [31]. Так как выполняется первое условие (14), то матрица  $M_d$  является постоянной и имеет собственные числа с отрицательными вещественными частями, то есть система  $\dot{\hat{x}} = M_d \hat{x}$  — асимптотически устойчива в целом. При этом матрица  $B(t)$  непрерывна, а матрица  $\dot{S}(x)$  — ограничена, так как строится из элементов ограниченной матрицы  $H(x)$ . Поэтому в силу неравенства (15) в соответствии с теоремой Левинсона, приведенной в [31], решения системы (19) асимптотически эквивалентны решениям системы  $\dot{\hat{x}} = M_d \hat{x}$ . Так как последняя является асимптотически устойчивой в целом, то положение равновесия  $\hat{x} \equiv 0$  системы (19) также асимптотически устойчиво в целом. Аналогично оно асимптотически устойчиво в целом и при выполнении неравенства (16) в соответствии с теоремой 2 [31]. Поскольку в (17)  $S(x)$  является неособенной матрицей, а матрица  $\dot{S}(x)$  — ограничена, то отсюда следует утверждение теоремы. *Теорема доказана.*

*Замечание 2.* Доказанная теорема остается верной, если  $\|B(t)\| < \rho$  при  $t \geq T_1$ , где положительное число  $\rho$  достаточно мало, а число  $T_1$  — большое (см. [31]).

Нелинейные объекты управления являются чрезвычайно разнообразными, поэтому в некоторых частных случаях матрица  $K(x)$ , которая используется в методе А. Н. Крылова для определения коэффициентов характеристических полиномов матриц [28] может быть постоянной, то есть:

$$K(x) = [b_k(x) \ H(x)b_k(x) \dots \ H^{n-1}(x)b_k(x)] = const. \quad (20)$$

Здесь  $b_k(x)$  — произвольный вектор такой, что  $\det K(x) \neq 0$ .

Отметим, что матрица  $K^T(x)$  соответствует матрице, определитель которой в [28] обозначен  $M$  (89). Далее для краткости матрицу  $K(x)$ , определяемую левым равенством выражения (20) при условии  $\det K(x) \neq 0$ , будем называть матрицей Крылова. Подчеркнем, что при построении матрицы управляемости (5) используется вектор, определяемый уравнениями заданного объекта, в то время как в случае матрицы Крылова может использоваться совершенно произвольный вектор, важно лишь, чтобы выполнялось условие  $\det K(x) \neq 0$ .

При выполнении условия (20) справедливо следствие из доказанной теоремы:

*Следствие.* Если характеристические числа  $\lambda_i^H$  матрицы  $H(x)$  (3) квазилинейной системы (2) удовлетворяют условиям (14), и выполнено условие (20), то положение равновесия указанной системы асимптотически устойчиво в целом.

При доказательстве следствия используется следующее свойство матрицы Крылова  $K(x)$  общего вида. Пусть матрица  $P_c = K(x)M_1(x)$ , где  $M_1(x)$  — матрица, составленная из коэффициентов характеристического полинома  $H(\lambda, x) = \det(\lambda E - H(x))$  матрицы  $H(x)$ . Тогда преобразование подобия  $P_c^{-1}(x)H(x)P_c(x)$  приводит матрицу  $H(x)$  к форме сопровождающей полинома  $H(\lambda, x)$  [29]. Справедливость данного утверждения по отношению к функциональным матрицам будет показана ниже на конкретном примере.

*Доказательство следствия.* Матрицу  $S(x)$  из равенства (17) можно построить, воспользовавшись формулой  $S(x) = K(x)M(x)W(x)$ , где  $W(x)$  — матрица Вандермонда, составленная из корней указанного выше полинома  $H(\lambda, x)$  [29].

В силу условия (14) собственные числа матрицы  $H(x)$  квазилинейной гурвицевой системы (2) имеют постоянные значения, поэтому матрицы  $M_1(x) = const$  и  $W(x) = const$ , а с учетом условия (20) производная  $\dot{K}(x) \equiv 0$ . В этом случае матрица  $S(x)$  также имеет производную по времени равную нулю, то есть  $\dot{S}(x) \equiv 0$ . При этом подынтегральное выражение в неравенстве (15) тождественно равно нулю, то есть это неравенство в условиях следствия выполняется. Поэтому в силу теоремы положение равновесия указанной системы асимптотически устойчиво в целом. *Следствие доказано.*

Доказанные теорема и следствие позволяют исследовать свойство устойчивости в целом положения равновесия конкретных нелинейных гурвицевых систем, представленных в квазилинейной форме (2). Чтобы это показать приведем некоторые численные примеры.

**4. Пример 1.** Рассмотрим квазилинейную систему (2), матрица  $H(x)$  которой имеет вид:

$$H(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \omega(x_1) & 0 & a_{23} \\ h_{31}(x) & h_{32}(x) & -\delta_{12} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

где

$$h_{31}(x) = -a_{23}^{-1}[\delta_{10} + \delta_{12}\omega(x_1)], \quad h_{32}(x) = -a_{23}^{-1}[\delta_{11} + \omega(x_1)]. \quad (22)$$

В этих выражениях  $a_{23} \neq 0$ , а  $\omega(x_1) = (\sin x_1) / x_1(1 + |x_1|)$ . При синтезе этой системы методом АЧНСУ КЛМ полином  $H^*(\lambda)$  из (9) был принят равным  $H^*(\lambda) = \lambda^3 + \delta_{12}\lambda^2 + \delta_{11}\lambda + \delta_{10}$  и таким, что матрица  $H(x)$  (21) имеет собственные числа  $\lambda_i^H = -\sigma_i$ , причем  $\sigma_i = const$ ,  $\sigma_i > 0$  и  $\sigma_i \neq \sigma_j$ , при  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, 3$ , то есть числа  $\lambda_i^H$  удовлетворяют условиям (14). Положение равновесия  $x \equiv 0$  системы (2), (21), (22), как показано выше, устойчиво в большом.

Для оценки устойчивости в целом положения равновесия этой системы построим матрицу  $S(x)$  по той же формуле, что и при доказательстве следствия. В соответствии с этой формулой по отношению к функциональной  $3 \times 3$  -матрице  $H(x)$  (21) справедливы выражения  $K(x) = [b_k(x) \quad H(x)b_k(x) \quad H^2(x)b_k(x)]$ ,  $S(x) = K(x)M_1W$ , а  $\dot{S}(x) = \dot{K}(x)M_1W$ . Имея в виду матрицу (21), положим  $b_k(x) = b_k = [0 \quad 0 \quad 1]^T$ . При этом  $\det K(x) = -a_{23}^2 \neq 0$ , то есть данный вектор  $b_k$  можно использовать для решения задачи. Вычислим матрицу  $K(x)$ , составим матрицы  $M_1$ ,  $W$  по [29] и найдем произведение  $T = M_1W$ . В результате получим:

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & -a_{23}\delta_{12} \\ 1 & -\delta_{12} & a_{23}h_{32}(x) + \delta_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad K(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{23} & -a_{23}\delta_{12} \\ 1 & -\delta_{12} & a_{23}h_{32}(x) + \delta_{12}^2 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$M_1 = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & 1 \\ \delta_{12} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix},$$

$$T = M_1W = \begin{bmatrix} \delta_{11} - \sigma_1\delta_{12} + \sigma_1^2 & \delta_{11} - \sigma_2\delta_{12} + \sigma_2^2 & \delta_{11} - \sigma_3\delta_{12} + \sigma_3^2 \\ \delta_{12} - \sigma_1 & \delta_{12} - \sigma_2 & \delta_{12} - \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Дифференцируя по времени матрицу  $K(x)=[b_k \ H(x)b_k \ H^2(x)b_k]$ , получим выражение  $\dot{K}(x)=[0 \ \dot{H}(x)b_k \ \dot{H}(x)H(x)b_k + H(x)\dot{H}(x)b_k]$ . Подставляя сюда системную матрицу (21) и принятый вектор  $b_k$ , будем иметь:

$$\begin{aligned} \dot{H}(x)b_k &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dot{H}(x)H(x)b_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{23}\dot{h}_{32}(x) \end{bmatrix}, \\ \dot{K}(x) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dot{\omega}(x_1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (25)$$

так как согласно (2) и (21) производная  $\dot{h}_{32}(x) = -a_{23}^{-1}\dot{\omega}(x_1)$ . Из выражений (23)-(25) выводим:

$$\dot{S}(x) = \dot{K}(x)T = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dot{\omega}(x_1) & \dot{\omega}(x_1) & \dot{\omega}(x_1) \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Перейдем к построению матрицы  $S^{-1}(x)$ . С учетом введенных обозначений матрица:

$$S(x) = K(x)T = \begin{bmatrix} a_{23} & a_{23} & a_{23} \\ -\sigma_1 & -\sigma_2 & -\sigma_3 \\ \sigma_1^2 - \omega(x_1) & \sigma_2^2 - \omega(x_1) & \sigma_3^2 - \omega(x_1) \end{bmatrix}.$$

С другой стороны, известно, что обратная матрица  $S^{-1}(x) = \text{adj}S(x) / \det S(x)$ . Поэтому запишем матрицу  $S^T(x)$  и найдем матрицу  $\text{adj}S(x)$ . В результате будем иметь:

$$S^T(x) = \begin{bmatrix} a_{23} & -\sigma_1 & \sigma_1^2 - \omega(x) \\ a_{23} & -\sigma_2 & \sigma_2^2 - \omega(x) \\ a_{23} & -\sigma_3 & \sigma_3^2 - \omega(x) \end{bmatrix},$$

$$\text{adj}S(x) = \begin{bmatrix} (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2\sigma_3 + \omega(x)) & a_{23}(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) & a_{23}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1\sigma_3 + \omega(x)) & a_{23}(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) & a_{23}(\sigma_3 - \sigma_1) \\ (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1\sigma_2 + \omega(x)) & a_{23}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) & a_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{bmatrix}.$$

В данном случае определитель:

$$\det S(x) = a_{23}[(\sigma_2 - \sigma_3)\sigma_2\sigma_3 + (\sigma_1 - \sigma_2)\sigma_1\sigma_2 + (\sigma_3 - \sigma_1)\sigma_1\sigma_3].$$

Следовательно,

$$S^{-1}(x) = \frac{1}{\det S(x)} \begin{bmatrix} (\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2\sigma_3 + \omega(x_1)) & a_{23}(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) & a_{23}(\sigma_2 - \sigma_3) \\ (\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_1\sigma_3 + \omega(x_1)) & a_{23}(\sigma_3^2 - \sigma_1^2) & a_{23}(\sigma_3 - \sigma_1) \\ (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1\sigma_2 + \omega(x_1)) & a_{23}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) & a_{23}(\sigma_1 - \sigma_2) \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Из выражений (26) и (27) выводим:

$$B(t) = \dot{S}(x)S^{-1}(x) = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\omega}(x_1(t)).$$

Таким образом, условие (15) в данном случае принимает вид:

$$\int_0^{\infty} |\dot{\omega}(x_1(t))| dt < \infty. \quad (28)$$

Найдем оценку интеграла из условия (28). Так как знак функции  $\dot{\omega}(x_1)$  изменяется при изменении  $x_1$  на  $\pi$ , то указанный интеграл можно представить следующим образом:

$$I = \int_0^{\infty} |\dot{\omega}(x_1(t))| dt = \beta_0 I_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i I_i, \quad \beta_i = \begin{cases} (-1)^i, & \dot{\omega}(x_1(t_0 - \varepsilon)) \geq 0, \\ (-1)^{i+1}, & \dot{\omega}(x_1(t_0 - \varepsilon)) < 0. \end{cases} \quad (29)$$

Здесь  $\varepsilon$  — сколь угодно малое положительное число,

$$I_0 = \int_0^{t_0} \dot{\omega}(x_1(t)) dt, \quad I_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \dot{\omega}(x_1(t)) dt, \quad i \geq 1, \quad (30)$$

$t_0 > \varepsilon > 0$  — первый, а  $t_i > t_{i-1}$  — последующие моменты времени, при которых производная  $\dot{\omega}(x_1) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots$ .

Произведение  $\beta_i \dot{\omega}(x_1(t)) > 0$  при всех  $i$  и  $t \neq t_i$ , поэтому:

$$\beta_i I_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \beta_i \dot{\omega}(x_1(t)) dt = \int_{\omega_{i-1}}^{\omega_i} d\omega = (\omega_i - \omega_{i-1}), \quad i \geq 1. \quad (31)$$

Здесь для краткости введены обозначения:

$$x_{1,i} = x_1(t_i), \quad \omega_i = \omega(x_{1,i}) = (\sin x_{1,i}) / x_{1,i} (1 + |x_{1,i}|). \quad (32)$$

Если на интервале  $[t_{i-1} \div t_i]$  произведение  $\beta_i \dot{\omega}(x_1) > 0$ , то функция  $|\omega(x_1(t))|$  — возрастает на этом интервале, а так как на его границах  $\dot{\omega}(x_1) = 0$ , то по (32)  $\sin x_{1,i-1} = -1$ , а  $\sin x_{1,i} = +1$ . Следовательно, если  $x_{1,i} = (2k+1)\pi/2$ , то  $x_{1,i-1} = (2k-1)\pi/2$  или  $x_{1,i-1} = (2k+3)\pi/2$ . Однако, если принять  $x_{1,i-1} = (2k-1)\pi/2$ , то  $|\omega_i| < |\omega_{i-1}|$ , что невозможно при  $\beta_i \dot{\omega}(x_1) > 0$ , то  $x_{1,i-1} = (2k+3)\pi/2$ . В этом случае по (31):

$$\beta_i I_i = \frac{4}{(2k+1)\pi(2+(2k+1)\pi)} - \frac{-4}{(2k+3)\pi(2+(2k+3)\pi)}.$$

Отсюда следует неравенство:

$$\beta_i I_i < \frac{8}{(2k+1)\pi(2+(2k+1)\pi)} = \frac{8}{\pi(4\pi k^2 + 4\pi k + 4k + \pi + 2)} < \frac{2}{\pi^2 k^2}. \quad (33)$$

Подставляя оценку (33) в первое равенство (29), получим:

$$I < \beta_0 J_0 + \frac{2}{\pi^2} (1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots) = \beta_0 J_0 + \frac{1}{3\pi}, \quad (34)$$

так как согласно [32] бесконечная сумма в круглых скобках в (34) равна  $\pi/6$ . Значение  $t_0$  определяется условием  $\sin x_1(t_0) = 0$ . При этом  $|x_1(t_0) - x_{10}| \leq \pi$ , поэтому по (29) и (30)  $\beta_0 J_0 < \infty$ . Следовательно, согласно (34) условие (28) в данном случае выполняется при всех конечных  $x_0 = [x_{10} \quad x_{20} \quad x_{30}]^T$ , поэтому в силу доказанной теоремы положение равновесия  $x \equiv 0$  гурвицевой нелинейной системы (2), (21) асимптотически устойчиво в целом.

Этот вывод подтверждается результатами моделирования этой системы в MATLAB при  $a_{23} = 3,5$ ;  $\delta_{10} = 6$ ,  $\delta_{11} = 11$ ,  $\delta_{12} = 6$ ;  $\lambda_1^H = -1$ ,  $\lambda_2^H = -2$ ,  $\lambda_3^H = -3$ . На рисунке 1 показан ее переходный процесс при относительно малых, а на рисунке 2 — при больших начальных значениях (соответствие графиков переменным легко определяется указанными начальными значениями переменных).

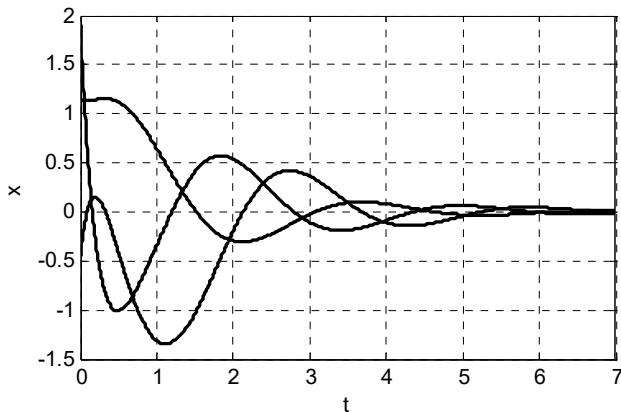


Рис. 1. Графики переменных системы (2), (21) при  $x_0 = [1,15 \ -0,5 \ 2]^T$

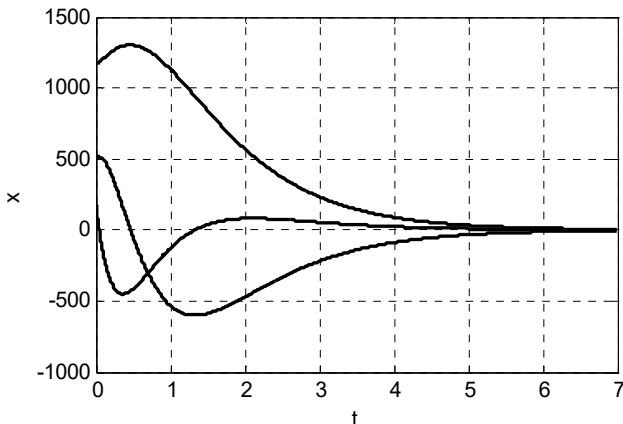


Рис. 2. Графики переменных системы (2), (21) при  $x_0 = [1150 \ 500 \ 200]^T$

Сравнивая графики на рисунках 1 и 2 можно заключить, что как при малых, так и при больших начальных значениях переменных со-

стояния переходные процессы системы (2), (21) являются затухающими, причем их длительность практически не зависит от значений начальных условий.

Процедура синтеза нелинейных гурвицевых систем управления на основе квазилинейных моделей, очевидно, является инвариантной относительно численных значений собственных чисел системной матрицы замкнутой системы. Это позволяет путем выбора этих чисел изменять характер переходных процессов, в частности их длительность.

В данном примере с тем, чтобы уменьшить длительность переходных процессов, модули указанных выше собственных чисел были увеличены в три раза, то есть эти числа были взяты равными:  $\lambda_{11}^H = -3$ ,  $\lambda_{12}^H = -6$  и  $\lambda_{13}^H = -9$ . Полученный в результате моделирования системы при этих значениях переходный процесс показан на рисунке 3.

Как видно из графиков, приведенных на рисунках 2 и 3, длительность переходного процесса с шести сократилась до двух секунд, что подтверждает сделанный выше вывод.

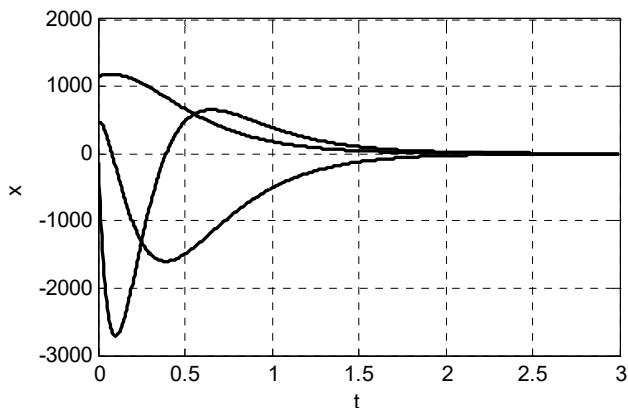


Рис. 3. Графики переменных системы (2), (21) при  $x_0 = [1150 \ 500 \ 200]^T$  и  $\lambda_1^H = -3$ ,  $\lambda_2^H = -6$ ,  $\lambda_3^H = -9$

Для большей наглядности изложенного выше метода АСНСУ КЛМ и порядка применения доказанной здесь теоремы приведем еще один, но более простой пример.

**5. Пример 2.** Для объекта второго порядка, который описывается уравнениями:  $\dot{x}_1 = x_2 - x_1 \operatorname{arctg} 2x_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 x_2^2 + x_2 \sin x_2 + u$ , синтезировать управление, обеспечивающее длительность переходных процессов не более 1,5 секунды.



С целью решения этой задачи указанным методом, прежде всего представим уравнения заданного объекта в виде квазилинейной модели, которая в данном случае имеет вид:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\varphi(x_1) & 1 \\ x_2^2 & \sin x_2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u. \quad (35)$$

Здесь для краткости введено обозначение  $\varphi(x_1) = \operatorname{arctg} 2x_1$ . Условие управляемости (4) объекта (35) записывается следующим образом:

$$\det U(x) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sin x_2 \end{bmatrix} = -1 \quad (36)$$

и очевидно выполняется. Следовательно, решение задачи методом АНСУ КЛМ существует.

Переходя к решению этой задачи, в соответствии с выражениями (7) и (8) находим полиномы:

$$A(\lambda, x) = \lambda^2 + [\varphi(x_1) - \sin x_2] \lambda - [\varphi(x_1) \cdot \sin x_2 + x_2^2], \quad (37)$$

$$V_1(\lambda, x) = 1, \quad V_2(\lambda, x) = \lambda + \varphi(x_1). \quad (38)$$

Так как в данном случае  $n = 2$ , то в качестве полинома (9) примем полином второго порядка  $H^*(\lambda) = \lambda^2 + \delta_{21}\lambda + \delta_{20}$ , полагая, что  $\delta_{21} > 1$ , а корни полинома  $H^*(\lambda)$  удовлетворяют неравенствам (14), то есть  $\lambda_{21} = -\sigma_{21}$ ,  $\lambda_{22} = -\sigma_{22}$ ,  $\sigma_{2i} > 0$  и  $\sigma_{21} \neq \sigma_{22}$ . В этих условиях система (10) с учетом выражений (37) и (38) запишется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 1 & \varphi(x_1) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1(x) \\ k_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{20} + \varphi(x_1) \cdot \sin x_2 + x_2^2 \\ \delta_{21} - \varphi(x_1) + \sin x_2 \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Подчеркнем, что определитель матрицы системы алгебраических уравнений (39) равен 1, то есть, как отмечалось выше, действительно пропорционален значению определителя матрицы управляемости, в данном случае из равенства (36). Решение системы (39) дает:

$$k_2(x) = \delta_{21} - \varphi(x_1) + \sin x_2;$$

$$k_1(x) = -\varphi(x_1)[\delta_{21} - \varphi(x_1)] + \delta_{20} + x_2^2,$$

что позволяет записать искомое управление и уравнение замкнутой системы в квазилинейной форме:

$$u = -k_1(x)x_1 - k_2(x)x_2.$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\varphi(x_1) & 1 \\ \delta_{21}\varphi(x_1) - \varphi^2(x_1) - \delta_{20} & \varphi(x_1) - \delta_{21} \end{bmatrix} x. \quad (40)$$

Для исследования характера устойчивости положения равновесия полученной системы (40), как и в первом примере, проверим выполнимость условия (15). С этой целью примем вектор  $b_k = b = [0 \ 1]^T$  и найдем матрицу Крылова  $K(x) = [b_k \ H(x)b_k]$ :

$$K(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varphi(x_1) - \delta_{21} \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Матрицы  $M_1$  и  $W$  составляются аналогично, но с учетом  $n = 2$ , поэтому здесь матрица  $S(x)$  и обратная  $S^{-1}(x)$  имеют вид:

$$S(x) = K(x)M_1W = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varphi(x_1) - \sigma_{21} & \varphi(x_1) - \sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

$$S^{-1}(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) - \sigma_{22} & -1 \\ \sigma_{21} - \varphi(x_1) & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{21} - \sigma_{22}}. \quad (43)$$

Полученные выражения (42) и (43) позволяют записать выражение для матрицы  $B(t)$ :

$$B(t) = \dot{S}(x)S^{-1}(x) = \frac{0,5\dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

С учетом (44) условие (15) доказанной теоремы принимает вид:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{0,5\dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} \right| dt < \infty. \quad (45)$$

В данном случае оценить интервалы знакопостоянства функции, модуль которой является подынтегральным выражением в (45), не представляется возможным. Поэтому для оценки интеграла в (45), воспользуемся тем, что система (40) имеет второй порядок, а ее правые части являются дифференцируемыми функциями. При этих условиях к ней приме-

нима теорема Бендиксона — Пуанкаре, в соответствии с которой на фазовой плоскости «траектория может "уйти" на бесконечность, "уткнуться" в особую точку или может "намотаться" на предельный цикл» [33], то есть хаотических движений в системе второго порядка не может быть.

Покажем, что на фазовой плоскости системы (40) предельный цикл не существует. С этой целью запишем ее следующим образом:

$$\dot{x}_1 = P(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = Q(x_1, x_2), \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) &= -x_1\varphi(x_1) + x_2, \\ Q(x_1, x_2) &= (\delta_{21}\varphi(x_1) - \varphi^2(x_1) - \delta_{20})x_1 + (\varphi(x_1) - \delta_{21})x_2. \end{aligned} \quad (47)$$

На основе (46), (47) не трудно установить, что в данном случае сумма  $\partial P(x) / \partial x_1 + \partial Q(x) / \partial x_2 = -(\delta_{21} + 0,5x_1 / (0,25 + x_1^2))$ . С другой стороны, экстремальные значения функции  $0,5x_1 / (0,25 + x_1^2)$  равны  $\pm 0,5$  при  $x_1 = \pm 0,5$ . Так как в рассматриваемом примере  $\delta_{21} > 1$ , то сумма  $\partial P(x) / \partial x_1 + \partial Q(x) / \partial x_2$  не меняет своего знака при всех значениях вектора  $x(t)$ , поэтому по теореме Бендиксона на фазовой плоскости системы (40) цикл существовать не может. Следовательно, траектории этой системы могут стремиться либо к бесконечности, либо к нулю.

Предположим, что существует траектория, стремящаяся к бесконечности. Обозначим  $t^*$  некоторый конечный момент времени и такой, что  $\text{sign } \varphi(x_1(t)) = \text{sign } \varphi(x_1(t^*))$  при всех  $t \geq t^*$ . При этом условии интеграл из (45), вычисляемый вдоль указанной траектории, можно представить в виде суммы:

$$J = J_1 + J_2 = \int_0^{t^*} \left| \frac{0,5\dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} \right| dt + \int_{t^*}^{\infty} \left| \frac{0,5\dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} \right| dt. \quad (48)$$

Интеграл  $J_1$ , очевидно, является конечным, поэтому найдем интеграл  $J_2$ . В выражениях (45) и (48) функция  $0,5\dot{x}_1 / (0,25 + x_1^2)$  является производной  $d\varphi(x_1) / dt$ , поэтому с учетом условия  $\text{sign } \varphi(x_1(t)) = \text{sign } \varphi(x_1(t^*))$  при  $t \geq t^*$ , можно записать равенство:

$$J_2 = \int_{t^*}^{\infty} \left| \frac{0,5\dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} \right| dt = \begin{cases} J_{21}, & \varphi(x_1(t^*)) > 0, \\ -J_{21}, & \varphi(x_1(t^*)) < 0. \end{cases} \quad (49)$$

При  $\dot{\varphi}(x_1(t^*)) > 0$  значение интеграла  $J_{21}$  определяется выражением:

$$J_{21} = \int_{t^*}^{\infty} \frac{0,5 \dot{x}_1}{0,25 + x_1^2} dt = \int_{\varphi(t^*)}^{\varphi(\infty)} d\varphi = \pi - \arctg(x_1(t^*)). \quad (50)$$

Из выражений (48)-(50) следует, что в рассматриваемом случае интеграл в (45) является ограниченным, и в соответствии с доказанной теоремой положение равновесия  $x = 0$  системы (40) асимптотически устойчиво в целом. Отсюда также следует, что система (40) не имеет траекторий, стремящихся к бесконечности.

Эти выводы подтверждаются и моделированием в MATLAB системы (40) при различных начальных условиях и различных значениях собственных чисел системной матрицы. На рисунках 4-6 представлены графики переходных процессов полученной в данном примере нелинейной системы, которые свидетельствуют об асимптотической устойчивости в целом ее положения равновесия.

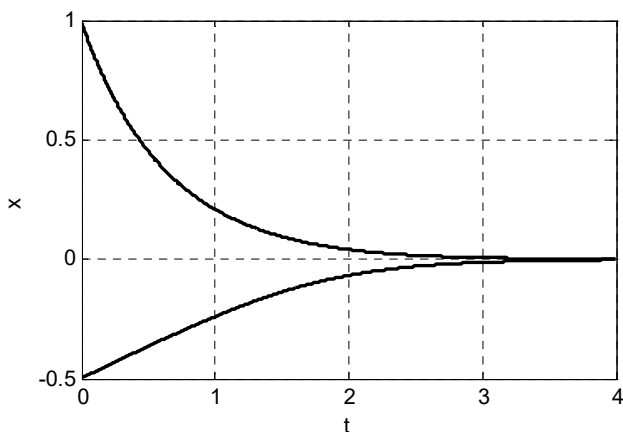


Рис. 4. Графики переменных системы (40) при  $x_0 = [1 - 0,5]^T$  и  $\sigma_{21} = -2$ ,  
 $\sigma_{22} = -3$

В данном примере, кроме устойчивости в целом, необходимо было обеспечить заданную длительность переходных процессов. Так как система является нелинейной, то для обеспечения этого условия сначала были взяты произвольные собственные числа  $\sigma_{21} = -2$  и  $\sigma_{22} = -3$ . При этом длительность переходных процессов (см. рисунок 4) составила чуть более трех секунд.

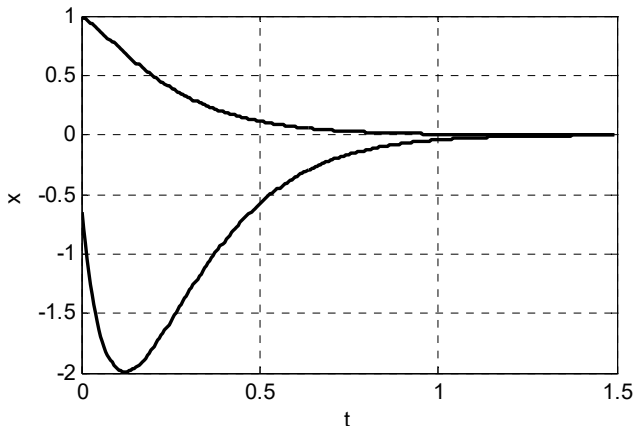


Рис. 5. Графики переменных системы (40) при  $x_0 = [1, 0 \ -0,5]^T$  и  $\sigma_1 = -6$ ,  $\sigma_2 = -9$

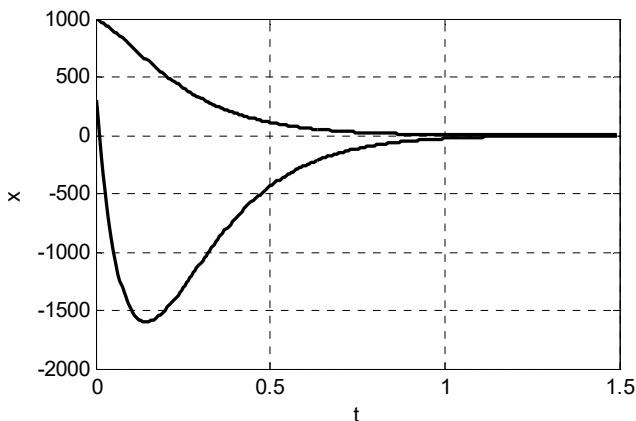


Рис. 6. Графики переменных системы (40) при  $x_0 = [1000 \ 500]^T$  и  $\sigma_{21} = -6$ ,  $\sigma_{22} = -9$

Имея это в виду, собственные числа системной матрицы  $H(x)$  окончательного варианта системы были взяты равными:  $\sigma_{21} = -6$ ,  $\sigma_{22} = -9$ , то есть в уравнении (40) этого варианта системы  $\delta_{20} = 54$ , а  $\delta_{21} = 15$ . Соответствующие графики переходных процессов приведены на рисунках 5 и 6.

Из графиков на рисунках 5 и 6 следует, что длительность переходных процессов синтезированной нелинейной гурвицевой системы (40) действительно не превышает полутора секунд и не зависит от начальных значений.

Для большей ясности покажем также, что преобразование подобия с матрицей  $P_c = K(x)M_1$  действительно приводит матрицу  $H(x)$  квазилинейной системы (40) к сопровождающей форме.

По условиям синтеза характеристический полином этой матрицы равен  $H(\lambda) = \lambda^2 + \delta_{21}\lambda + \delta_{20}$ . Поэтому матрицы  $P_c(x)$  и  $P_c^{-1}(x)$  с учетом матрицы  $K(x)$  (41) определяются следующими выражениями:

$$P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \varphi(x_1) - \delta_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{21} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \varphi(x_1) & 1 \end{bmatrix}, P_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\varphi(x_1) & 1 \end{bmatrix}.$$

С помощью этих матриц легко убедиться, что в результате преобразования подобия с матрицей  $P_c(x)$  системная матрица  $H(x)$  системы (40) принимает вид:

$$P_c^{-1}H(x)P_c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\delta_{20} & -\delta_{21} \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица, очевидно, является сопровождающей матрицей приведенного выше полинома  $H(\lambda) = \lambda^2 + \delta_{21}\lambda + \delta_{20}$ .

Преобразование сопровождающих матриц к диагональной форме с помощью матриц Вандермонда общеизвестно, поэтому на этом останавливаться не будем [29].

Сравнивая рассмотренный метод АСНСУ КЛМ с другими методами синтеза нелинейных систем управления, например с методом синтеза на основе уравнений, линеаризованных обратными связями по состоянию [7, 20], можно со всей очевидностью сделать вывод, что рассмотренный здесь метод синтеза значительно проще. Это относится, прежде всего, к случаю, когда по условиям функционирования нелинейной системы достаточной является асимптотическая устойчивость в большом ее положении равновесия.

Очевидной является и большая простота этого метода в частном случае, когда матрица Крылова является постоянной. В тех же случаях, когда требуется асимптотическая устойчивость положения равновесия в целом, а матрица Крылова не является постоянной, процедура синтеза остается столь же простой практически при любом порядке объекта управления. Лишь оценка возможной устойчивости положе-

ния равновесия в целом может оказаться достаточно трудоемкой, в особенности при высоком порядке объекта управления.

**6. Заключение.** В статье доказаны теорема и следствие из нее об условиях асимптотической устойчивости в целом положения равновесия нелинейных гурвицевых систем управления, уравнения которых представлены в квазилинейной форме. Такие нелинейные системы управления легко строятся кратко изложенным выше простым методом аналитического синтеза на основе квазилинейных моделей (АСНСУ КЛМ). При этом собственные числа (корни характеристического уравнения) системной матрицы синтезируемой квазилинейной системы должны быть взяты постоянными, вещественными, отрицательными и попарно различными. Результирующее управление является нелинейной обратной связью по переменным состояния нелинейного объекта, а положение равновесия замкнутой системы всегда является асимптотически устойчивым в большом.

Для проверки, не является ли положение равновесия синтезированной системы и асимптотически устойчивым в целом, прежде всего, строится функциональная матрица Крылова. Если эта матрица оказывается постоянной, то положение равновесия синтезированной системы асимптотически устойчиво и в целом. Если же матрица Крылова зависит от переменных состояния системы, то строится матрица преобразования уравнений синтезированной системы к диагональной форме. Затем находится матрица, обратная к этой матрице, а также производная по времени в силу синтезированной системы от матрицы указанного преобразования. Произведение этих матриц дает возможность проверить выполнимость условий доказанной здесь теоремы. Если эти условия выполняются, то положение равновесия синтезированной системы асимптотически устойчиво в целом. Если же условия теоремы не выполняются или не удается показать выполнимость ее условий, то можно обоснованно утверждать лишь, что положение равновесия синтезированной системы асимптотически устойчиво в большом, то есть асимптотически устойчиво в некоторой ограниченной области начальных условий.

Следует отметить, что процедура проверки условий теоремы является достаточно сложной, так как большинство операций для этой цели необходимо проводить над функциональными матрицами. Однако эта сложность легко преодолевается применением компьютерных программ, обеспечивающих выполнение математических операций в символьной форме.

Анализ полученных условий асимптотической устойчивости в целом положения равновесия нелинейных систем управления рассматриваемого типа приводит к следующему выводу: при синтезе квазили-

нейных систем необходимо назначать желаемые значения собственных чисел функциональной системной матрицы замкнутой системы с учетом ее собственных векторов.

### Литература

1. *Isidori A.* Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey // Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences. 2010. vol. 18. no. 5. pp. 693–714.
2. *Khalil N.K.* Robust Servomechanism Output Feedback Controllers for Linearizable Systems // Automatica. 1994. vol. 30. no. 10. pp. 57–69.
3. *Chen M. et al.* Decomposition of Reachable Sets and Tubes for a Class of Nonlinear Systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2018. vol. 63. no. 11. pp. 3675–3688.
4. *Marino R., Tomei P.* Nonlinear Control Design // Prentice Hall Europe. 1995. 396 p.
5. *Колесникова С.И.* Конструирование множественного управления нелинейным объектом // Труды СПИИРАН. 2017. Вып. 6(55). С. 114–133.
6. *Gaiduk A.R.* Nonlinear Control Systems Design by Transformation Method // Мехатроника, автоматизация, управление. 2018. Т. 19. № 12. pp. 755–761.
7. *Воевода А.А., Филушев В.Ю.* Линеаризация обратной связью // Сборник научных трудов НГТУ. 2016. № 2(84). С. 68–76.
8. *Pshikhopov V., Medvedev M.* Position Control of Vehicles with Multi-contour Adaptation // Journal of Engineering and Applied Sciences. 2018. vol. 13. pp. 8921–8928.
9. *Лукьянов А.Г., Уткин В.И.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме // Автоматика и телемеханика. 1981. № 4. С. 5–13.
10. *Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V.* Passivity and Parametric Robustness of a New Class of Adaptive Systems // Automatica. 1994. vol. 30. no. 11. pp. 1703–1716.
11. *Selivanov A., Fradkov A., Fridman E.* Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays // Journal of the Franklin Institute. 2015. vol. 352. no. 1. pp. 52–72.
12. *Fradkov A.L., Andrievsky B., Ananyevskiy M.S.* Passification Based Synchronization of Nonlinear Systems under Communication Constraints and Bounded Disturbances // Automatica. 2015. vol. 55. pp. 287–293.
13. *Wlambe R., Agarwal N., Kale S., Joshi V.* Optimal Trajectory Generation for Car-type Mobile Robot using Spline Interpolation // IFAC-PapersOnline. 2016. vol. 49. no. 1. pp. 601–606.
14. *Маликов А.И.* Оценка состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // Автоматика и телемеханика. 2016. № 5. С. 19–36.
15. *Neydorf R. et al.* "Cut-glue" approximation improvements with evolutionary-genetic algorithm for strongly nonlinear parametric dependencies of mathematical models // Improved Performance of Materials. 2018. pp. 245–257.
16. *Xia M., Rahnama A., Wang S., Antsaklis P.J.* Control Design Using Passivation for Stability and Performance // IEEE Transactions on Automatic control. 2018. vol. 63. no. 9. pp. 2987–2993.
17. *Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A.* Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation // IFAC-PapersOnline. 2015. vol. 48. no. 11. pp. 1056–1061.
18. *Chen C.C., Qian C., Sun Z.Y., Liang Y.W.* Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems With Unknown Measurement Sensitivity // IEEE Transactions on Automatic control. 2018. vol. 63. no. 7. pp. 2212–2217.
19. *Вражеский С.А.* Модифицированный алгоритм бэкстеппинга с компенсацией возмущений для управления нелинейными объектами по выходу // Труды СПИИРАН. 2018. Вып. 3(58). С. 182–202.



20. *Воевода А.А., Филошнев В.Ю.* Линеаризация обратной связи: перевернутый маятник // Сборник научных трудов Новосибирского государственного технического университета. 2016. № 3. С. 49–60.
21. *Mira M.C., Zang Z., Knott A., Andersen M.A.E.* Analysis, Design, Modeling and Control of an Interleaved-boost Full-bridge Three-port Converter for Hybrid Renewable Energy Systems // IEEE Transactions on power electronics. 2017. vol. 32. no. 2. pp. 1138–1155.
22. *Yang Y., Zhang H.H., Voyles R.M.* Rotary inverted pendulum system tracking and stability control based on input-output feedback linearization and PSO-optimization fractional order PID controller // Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering. 2019. pp. 79–84.
23. *Филошнев В.Ю.* Линеаризация нелинейного трехканального динамического объекта // Научный вестник Новосибирского государственного технического университета. 2017. № 1(66). С. 74–85.
24. *Гайдук А.Р.* Алгебраический синтез нелинейных стабилизирующих управлений // Синтез алгоритмов сложных систем. 1989. Вып. 7. С. 15–19.
25. *Егоров И.Г.* К устойчивости в целом нулевого решения системы двух дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1991. Т. 27. № 9. С. 1554–1549.
26. *Гайдук А.Р.* Полиномиальный синтез нелинейных систем управления // Автоматика и телемеханика. 2003. № 10. С. 144–148.
27. *Гайдук А.Р.* Теория и методы аналитического синтеза систем автоматического управления (полиномиальный подход) // М.: Физматлит. 2012. 360 с.
28. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц // М.: Наука. 1988. 552 с.
29. *Гайдук А.Р.* Непрерывные и дискретные динамические системы // М.: УМ и ИЦ «Учебная литература». 2004. 252 с.
30. *Ланкастер П.* Теория матриц // М.: Наука. 1982. 272 с.
31. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости // М.: Наука. 1967. 472 с.
32. *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие формулы // М.: Наука. 1978. 228 с.
33. *Данилов Ю.А.* Лекции по нелинейной динамике. Элементарное введение // М.: Постмаркет. 2001. 184 с.

**Гайдук Анатолий Романович** — д-р техн. наук, профессор, профессор, кафедра систем автоматического управления, Южный федеральный университет (ЮФУ). Область научных интересов: исследование устойчивости, инвариантности, оптимальности; оценивание состояния систем и внешних воздействий; синтез линейных, нелинейных, непрерывных и дискретных систем управления, роботы. Число научных публикаций — 350. [gaiduk\\_2003@mail.ru](mailto:gaiduk_2003@mail.ru); пер. Некрасовский, 44, 347904, Таганрог, Российская Федерация; р.т.: +7(863)4371689.

**Поддержка исследований.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФН (проект № 18-19-00621).

A.R. GAIDUK  
**TOWARDS DESIGN OF QUASILINEAR GURVITS CONTROL  
SYSTEMS**

---

*Gaiduk AR. Towards Design of Quasilinear Gurvits Control Systems.*

**Abstract.** The design problem of control systems for nonlinear plants with differentiated nonlinearity is considered. The urgency of this problem is caused by the big difficulties of practical design of nonlinear control systems with the help of the majority of known methods. In many cases, even provision by these methods of just stability of equilibrium point of a designing system represents a big challenge. Distinctive feature of the method of nonlinear control systems design considered below is the use of the nonlinear plants models represented in a quasilinear form. This form of the nonlinear differential equations exists, if nonlinearities in their right parts are differentiated across all arguments. The quasilinear model of the controlled plant allows reducing the design problem to the solution of an algebraic equations system, which has the unique solution if the plant is controlled according to the controllability condition provided in the article. This condition is similar to the controllability condition of the Kalman's criterion. Procedure of the nonlinear control systems design on a basis of the plant's quasilinear models is very simple. Practically, it is close to the known polynomial method of the linear control systems design. The equations of the nonlinear systems designed with application of the plant's quasilinear models also can be represented in the quasilinear form.

The basic result of this article is the proof of the theorem and the corollary from it about conditions of the asymptotical stability at whole of the equilibrium point of the nonlinear control systems designed on a basis of the plant's quasilinear models. For the proof of the theorem and consequence, the properties of simple matrixes and known theorems of stability of the indignant systems of the differential equations are used. A way of the stability research of the equilibrium point of the quasilinear control systems based on the proved theorem is illustrated by numerical examples. Computer simulation of these systems verifies correctness of the hypothesis of the proved theorem.

Obtained results allow applying the method of nonlinear systems design on a basis of the quasilinear models for creation of various control systems for plants in power, aviation, space, robotechnical and other industries.

**Keywords:** Plant, Nonlinearity, Quasilinear Model, Analytical Design, Control, System, Global Stability.

---

**Gaiduk Anatoly Romanovich** — Ph.D., Dr.Sci., Professor, professor, Control System Department, Southern Federal University (SFedU). Research interests: researches of stability, invariancy, optimality; estimation of system's state and external disturbances; design of linear, nonlinear, continuous and discrete control systems, robots. The number of publications — 350. gaiduk\_2003@mail.ru; 44, per. Nekrasovskiy, 347904, Taganrog, Russian Federation; office phone: +7(863)4371689.

**Acknowledgements.** This research is supported by RSCF (grant 18-19-00621)

### References

1. Isidori A. Robust Feedback Design for Nonlinear Systems: a Survey. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*. 2010. vol. 18. no. 5. pp. 693–714.
2. Khalil N.K. Robust Servomechanism Output Feedback Controllers for Linearizable Systems. *Automatica*. 1994. vol. 30. no. 10. pp. 57–69.

3. Chen M. et al. Decomposition of Reachable Sets and Tubes for a Class of Nonlinear Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2018. vol. 63. no. 11. pp. 3675–3688.
4. Marino R., Tomei P. *Nonlinear Control Design*. Prentice Hall Europe. 1995. 396 p.
5. Kolesnikova S.I. [Designing of plural control of nonlinear plant]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2017. vol. 6(55). pp. 114–133. (In Russ.).
6. Gaiduk A.R. [Nonlinear Control Systems Design by Transformation Method]. *Mekhatronica, Avtomatizatsiya, Upravlenie – Mechatronics, Automation, Control*. 2018. Issue 19. vol. 12. pp. 755–761.
7. Voevoda A.A., Filyushev V.Yu. [Linearization by feedback]. *Sbornik nauchnykh trudov NGTU – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*. 2016. vol. 2(84). pp. 68–76. (In Russ.).
8. Pshikhopov V., Medvedev M. Position Control of Vehicles with Multi-contour Adaptation. *Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2018. vol. 13. pp. 8921–8928.
9. Luk'yanov A.G., Utkin V.I. [Methods of converse of the dynamic systems equations to the regular form]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 1981. vol. 4. pp. 5–13. (In Russ.).
10. Krstic M., Kanellakopoulos I., Kokotović P.V. Passivity and Parametric Robustness of a New Class of Adaptive Systems. *Automatica*. 1994. vol. 30. no. 11. pp. 1703–1716.
11. Selivanov A., Fradkov A., Fridman E. Passification-based decentralized adaptive synchronization of dynamical networks with time-varying delays. *Journal of the Franklin Institute*. 2015. vol. 352. no. 1. pp. 52–72.
12. Fradkov A.L., Andrievsky B., Ananyevskiy M.S. Passification Based Synchronization of Nonlinear Systems under Communication Constraints and Bounded Disturbances. *Automatica*. 2015. vol. 55. pp. 287–293.
13. Wlambe R., Agarwal N., Kale S., Joshi V. Optimal Trajectory Generation for Car-type Mobile Robot using Spline Interpolation. *IFAC-PapersOnline*. 2016. vol. 49. no. 1. pp. 601–606.
14. Malikov A.I. [State Estimation and stabilization of continuous systems with uncertain nonlinearity and disturbances]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2016. vol. 5. pp. 19–36. (In Russ.).
15. Neydorf R. et al. "Cut-gluе" approximation improvements with evolutionary-genetic algorithm for strongly nonlinear parametric dependencies of mathematical models. *Improved Performance of Materials*. 2018. pp. 245–257.
16. Xia M., Rahnama A., Wang S., Antsaklis P.J. Control Design Using Passivation for Stability and Performance. *IEEE Transactions on Automatic control*. 2018. vol. 63. no. 9. pp. 2987–2993.
17. Furtat I., Furtat E., Tupichin E.A. Modified Backstepping Algorithm with Disturbances Compensation. *IFAC-PapersOnline*. 2015. vol. 48. no. 11. pp. 1056–1061.
18. Chen C.C., Qian C., Sun Z.Y., Liang Y.W. Global Output Feedback Stabilization of a Class of Nonlinear Systems With Unknown Measurement Sensitivity. *IEEE Transactions on Automatic control*. 2018. vol. 63. no. 7. pp. 2212–2217.
19. Vrazhevskiy S.A. [Modified Backstepping Algorithm with Compensation of Disturbances for Control of Nonlinear systems on Output]. *Trudy SPIIRAN – SPIIRAS Proceedings*. 2018. vol. 3(58). pp. 182–202. (In Russ.).
20. Voevoda A.A., Filyushev V.Yu. [Linearization by feedback: the turned pendulum] *Sbornik nauchnykh trudov NGTU – Transaction of scientific papers of the Novosibirsk state technical university*. 2016. vol. 3(85). pp. 49–60. (In Russ.).
21. Mira M.C., Zang Z., Knott A., Andersen M.A.E. Analysis, Design, Modeling and Control of an Interleaved-boost Full-bridge Three-port Converter for Hybrid Renewable Energy Systems. *IEEE Transactions on power electronics*. 2017. vol. 32. no. 2. pp. 1138–1155.
22. Yang Y., Zhang H.H., Voyles R.M. Rotary inverted pendulum system tracking and stability control based on input-output feedback linearization and PSO-optimization

- fractional order PID controller. *Automatic Control, Mechatronics and Industrial Engineering*. 2019. pp. 79–84.
23. Filyushev V.Yu. [Linearization of nonlinear three channel dynamic object by feedback]. *Nauchnyi vestnik NGTU – Scientific bulletin of the Novosibirsk state technical university*. 2017. vol. 1(66). pp. 74–85. (In Russ.).
  24. Gaiduk A.R. [Algebraic design of nonlinear stabilizing controls]. *Sintez algoritmov slozhnykh sistem – Design of algorithms of complex systems*. 1989. vol. 7. pp. 15–19. (In Russ.).
  25. Egorov I.G. [To stability at whole of zero decision of two differential equations system]. *Differentsial'nye uravneniya – Differential equations*. 1991. Issue 27. vol. 9. pp. 1554–1549. (In Russ.).
  26. Gaiduk A.R. [Polynomial design of nonlinear control systems]. *Avtomatika i telemekhanika – Automation and Remote Control*. 2003. vol. 10. pp. 144–148. (In Russ.).
  27. Gaiduk A.R. *Teoriya i metody analiticheskogo sinteza sistem avtomaticheskogo upravleniya (polinomial'nyi podkhod)* [Theory and methods of analytical design of automatic control systems (polynomial approach)]. Moscow: Fizmatlit. 2012. 360 p. (In Russ.).
  28. Gantmakher F.R. *Teoriya matrits* [Theory of matrices]. Moscow: Nauka. 1988. 552 p. (In Russ.).
  29. Gaiduk A.R. *Neprevyaznye i diskretnye dinamicheskie sistemy* [Continuous and discrete dynamic systems]. Moscow: Uchebno-metodicheskiy i izdatel'skiy tsentr "Uchebnaya literatura". 2004. 252 p. (In Russ.).
  30. Lankaster P. *Teoriya matrits* [Theory of matrixes]. Moscow: Nauka. 1982. 272 p. (In Russ.).
  31. Demidovich B.P. *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoyichivosti* [Lectures under mathematical theory of stability]. Moscow: Nauka. 1967. 472 p. (In Russ.).
  32. Dwight H.B. *Tables of integrals and other mathematical data*. Macmillan company. 1961. 236 p. (Russ. ed.: Dvait G.B. *Tablitsy integralov i drugie matematicheskie formuly*. Moscow: Nauka. 1978. 228 p.).
  33. Danilov Yu.A. *Lektsii po nelineynoy dinamike. Elementarnoe vvedenie* [Lectures under nonlinear dynamic. Elementary introduction]. Moscow: Postmarket. 2001. 184 p. (In Russ.).